Análise de Risco

Sessão 2
Conceitos de probabilidade

Prof. E.A. Schmitz

PPGI/UFRJ

June 18, 2018

Espaço amostral

Conjunto de pontos que representa os possíveis resultados de um experimento

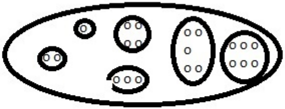

Figure: EA para lançamento de um dado

Probabilidades no EA

A cada ponto i do espaço amostral EA, $1..n$ associamos um número p_i tal que:

1. $p_i \geq 0$
2. $\sum_1^n p_i = 1$
3. p_i pode medido pela frequencia relativa do evento i

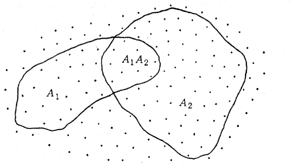

Figure: Exemplo de EA

Eventos

Evento: Conjunto de pontos do espaço amostral

Definição: A probabilidade de ocorrência de um evento A é a soma das probabilidades dos pontos do EA associados com o evento.

$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} p_i$

Teorema da soma

Sejam A_1 e A_2 dois eventos de EA:

$P\{A_1 A_2\}$: probabilidade da ocorrência conjunta de A_1 e A_2

$P\{A_1 + A_2\}$: probabilidade da ocorrência de ao menos um dentre A_1 e A_2

Teorema da soma:
$P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A1A2\}$

Se: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$

Teorema da multiplicação

Queremos achar:
$P\{A_1A_2\}$: probabilidade da ocorrência conjunta de A_1 e A_2

$P\{A_2|A_1\}$: probabilidade que A_2 ocorra sabendo que A_1 ocorreu
Então:

- $P\{A_2|A_1\} = \frac{P\{A_1A_2\}}{P(A_1)}$
- $P\{(A_1A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2|A_1\}$

Se: $P\{A_2|A_1\} = P\{A_2\}$

- os eventos são independentes
- $P\{A_1A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\}$

Fórmula de Bayes

Sejam A_1, A_2, A_n conjunto de eventos mutuamente exclusivos que particionam EA

Seja B evento onde $P(B) \geq 0$

Então: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)*P(B|A_i)}{P(B)}$

mas
$P(B) = P(A_1) * P(B|A1) + P(A_2) * P(B|A_2), \ldots P(A_n) * P(B|A_n)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) * P(B|A_i)}{P(A_1) * P(B|A1) + P(A_2) * P(B|A_2), \ldots P(A_n) * P(B|A_n)}$$

Variáveis aleatórias

Variável Aleatória(VA): é uma variável numérica definida no espaço amostral
$VA : EA \to \mathbb{R}$

Função de probabilidade: retorna a probalidade que uma VA X assuma o valor x, denotado por $f(x)$
$f(x) = Prob(X = x)$

Função de probabilidade cumulativa: retorna a probabilidade que X assuma o valor $\leq x$
$F(x) = Prob(X \leq x)$

Exemplo - lançamento de um dado

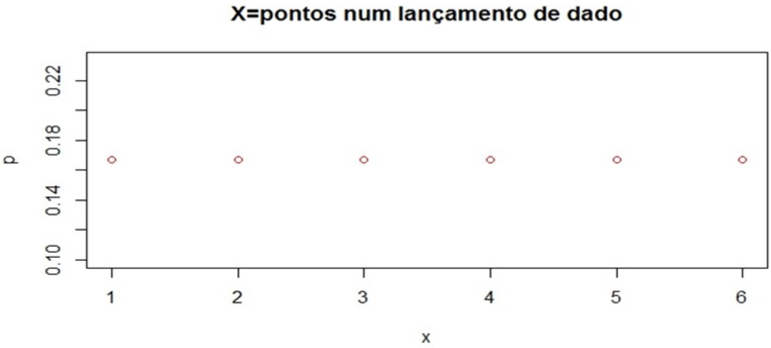

Figure: Função de probabilidade para lançamento de um dado

Exemplo - lançamento de um dado

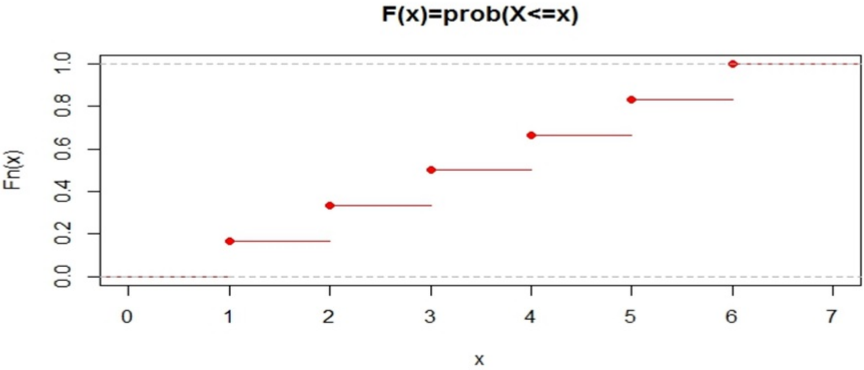

Figure: Função cumulativa para lançamento de dado

Média

Média de uma VA com fp=f(x):

- $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i * f(x_i)$
- $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x_i * f(x_i)$
- Média representa o centro de massa do gráfico da função

Variância

Variância de uma VA com fp=f(x):

- $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 * f(x_i)$
- $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 * f(x_i)$
- Variância representa o espalhamento ao redor do centro de massa do gráfico da função

Exemplo moeda

Seja X="valor obtido ao jogar uma moeda"

- $\{H, T\} \to \{0, 1\}$
- $f(x) = \{(0, 1/2), (1, 1/2)\}$
- $\mu = 0 * f(0) + 1 + 1 * f(1) = 1/2$
- $\sigma^2 = (0 - 1/2)^2 * f(0) + (1 - 1/2)^2 * f(1) = 1/4$

Algumas fps usadas em AR

- Uniforme: valores contínuos dentro de um intervalo
- Discreta: conjunto de valores discretos
- Triangular: continua (mínimo, mais provável e máximo)
- Normal: curva do sino (média, desvio padrão)
- Binomial: sorteio de eventos com probabilidade p

Uniforme

- VA assume valores numa faixa, todos igualmente prováveis
- R: runif(n, min = 0, max = 1)
- Uniforme(0,1): base da geração das outras distribuições
  - $\mu = \int_0^1 x * 1 dx = 1/2$
  - $\sigma^2 = \int_0^1 (x - 1/2)^2 * 1 dx = 1/12$

Triangular

- VA segue uma estimativa de 3 pontos: minimo (a) , mais provável (m) e máximo (b)
- R: rtriangle(min,max, mprov) Package:triangle
- $\mu = (a + b + m)/3$
- $\sigma^2 = (a^2 + b^2 + m^2 - a * b - a * m - b * m)/18$

Normal 1

- VA expressa variabilidade de muitos fenomenos naturais
- R: rnorm(mu,sd)
- $f(x) = \frac{1}{2*\pi} * e^{-\frac{(x-\mu)^2/\sigma^2}{2}}$
- média$=\mu$
- variancia$= \sigma^2$

Normal 2

Normal reduzida: $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

Alguns números importantes:

- $Prob(-1 \leq X \leq 1) = 0.68$
- $Prob(-2 \leq X \leq 2) = 0.95$
- $Prob(-2.3 \leq X \leq 2.3) = 0.98$
- $Prob(-3 \leq X \leq 3) = 0.995$

Teoremas 1

Teorema 1:Transformação linear de VAs
Sejam μ, σ^2 os parâmetros de X:
Se $X1 = a * X + b$ então seus parâmetros são:
$\mu_1 = a * \mu + b$
$\sigma_1^2 = a^2 * \sigma$

Teoremas 2

Teorema 2:Soma de n VAs
Seja

$$Z = \sum_{1}^{n} X_i$$

Se os parâmetros de $X_i = (\mu_i, sigma_i^2)$ então os parâmetros de Z são:

$$\mu_z = \sum_{1}^{n} \mu_i$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{1}^{n} \sigma_i^2$$

Teoremas 3

Teorema 3:Uso da normal reduzida

Sejam $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ e $\Phi \sim Normal(0, 1)$

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi((b - \mu)/\sigma) - \Phi((a - \mu)/\sigma)$

Teoremas 4

Teorema 4: Soma de n VAs normais independentemente distribuidas

Sejam $X_i \sim Normal(\mu_i, \sigma_i^2), i \in 1..n$

$$Z = \sum_{1}^{n} X_i$$

então:

- $Z \sim Normal(\mu_z, \sigma_z^2)$
- $\mu_z = \sum_1^n \mu_i$
- $\sigma_z = \sum_1^n \sigma_i^2$

Teoremas 5

Teorema 5: Teorema central do limite (TCL)
Sejam $X_i, i \in 1..n$, independentemente distribuidas com (μ_i, σ_i^2)

$$Z = \sum_{1}^{n} X_i$$

então se $n \to \infty$

- $Z \to Normal(\mu_z, \sigma_z^2)$
- $\mu_z = \sum_1^n \mu_i$
- $\sigma_z = \sum_1^n \sigma_i^2$

Monte Carlo

- Conseguir soluções aproximadas para funções complexas através de amostragem computacional.
- Exemplo: algoritmo para calcular valor de π por amostragem:
  - Lançar N dardos ao acaso dentro do quadrado de lado $= 2$
  - Contar o número de acertos A dentro do círculo inscrito
  - $\pi \sim 4 * (A/N)$