

Como en el caso en que $\alpha \notin \{1, j, j^2, \infty\}$, todos los puntos singulares del campo vectorial que representa a \mathcal{F}_α^4 en una carta afín son no degenerados, la parte lineal del campo vectorial tiene dos valores propios (λ_1, λ_2) distintos de cero.

Por cada punto de \mathcal{P} pasan tres rectas invariantes de \mathcal{F}_α^4 , entonces, en estos puntos tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$. Por lo tanto, en estos puntos singulares no hay resonancias y los valores propios están en el dominio de Poincaré, entonces, por el teorema de linealización de Poincaré, la ecuación es linealizable en una vecindad de cada uno de estos puntos y en coordenadas adecuadas se lee como $\lambda(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v})$ y así, $\frac{v}{u}$ es una primera integral meromorfa de la ecuación en una vecindad de cada punto de \mathcal{P} .

Denotemos por $q_i(\alpha)$ $i = 1, \dots, 9$ a los otros nueve puntos singulares. La parte lineal del campo que representa a \mathcal{F}_α^4 en el punto singular $(1, \alpha)$ es:

$$\begin{pmatrix} 3(1 - \alpha^3) & 0 \\ -2\alpha(\alpha^3 - 1) & \alpha^3 - 1 \end{pmatrix}$$

Así, en estos puntos, $\lambda_1 = -3\lambda_2$. Haciendo un cálculo similar, podemos ver que en los otros 8 puntos los valores propios de la parte lineal cumplen esta misma relación, pero también podemos usar una transformación proyectiva que lleve $q_i(\alpha)$ en $(1, \alpha)$ y además fije a la configuración \mathcal{C} .

Por ejemplo, si $q_i(\alpha)$ está en la recta $\{x = j\}$ ó $\{x = j^2\}$ las transformaciones proyectivas $(x, y) \rightarrow (j^2x, jy)$ y $(x, y) \rightarrow (jx, j^2y)$ respectivamente cumplen lo deseado.

Si $q_i(\alpha)$ está en una recta de la configuración que pasa por $(0, 0)$, a las transformaciones anteriores les antepone una transformación como las del corolario 2, que intercambie $(0, 0)$ con $[0 : 1 : 0]$ y fije a la configuración, y si $q_i(\alpha)$ está en una recta de la configuración $\{y = cte\}$, hacemos lo mismo pero ahora intercambiando a los puntos $[1 : 0 : 0]$ y $[0 : 1 : 0]$.

Como los valores propios en cada uno de estos nueve puntos cumplen $\lambda_1 = -3\lambda_2$, los valores propios están en el dominio de Siegel y por ende, no podemos usar el teorema de linealización de Poincaré. Sin embargo, la ecuación también es linealizable en una vecindad de estos puntos. Para ver esto primero haremos unas definiciones que utilizaremos a lo largo de este capítulo:

1. Llamemos M a la variedad que obtenemos de explotar y resolver los 12 puntos singulares de \mathcal{P} y denotemos por $\Pi : M \rightarrow \mathbb{CP}^2$ al mapeo que resuelve las singularidades.
2. \mathcal{F}_α será la foliación en M inducida por \mathcal{F}_α^4 i.e. $\Pi^*(\mathcal{F}_\alpha^4) = \mathcal{F}_\alpha$.
3. D_i va a ser el divisor asociado a $p_i \in \mathcal{P}$ $i = 1, \dots, 12$. $D_i = \Pi^{-1}(p_i)$.
4. Para cada $l_j \in \mathcal{L}$ denotaremos por $\tilde{l}_i = \Pi^{-1}(l_i \setminus \{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}\})$ (FALTA LA CERRADURA Y LAS TILDES!!). donde p_{ik} $k = 1, \dots, 4$ son los cuatro puntos de \mathcal{P} que están en l_i .

Ahora sí, como los 12 puntos singulares de \mathcal{P} son radiales, al explotar no obtenemos nuevos puntos singulares en los divisores, así, \mathcal{F}_α solo tiene un punto singular en \dot{l}_i , a saber $\Pi^{-1}(q_i(\alpha)) = q_i(\alpha)$. Por lo tanto, $\dot{l}_i \setminus q_i(\alpha)$, es una hoja de \mathcal{F}_α que es biholomorfa a \mathbb{C} y entonces la holonomía de esta hoja es la identidad y por un teorema de Mattei Moussu \mathcal{F}_α es linealizable en una vecindad de $q_i(\alpha)$.

Como Π es un biholomorfismo en una vecindad de $q_i(\alpha)$, \mathcal{F}_α^4 también es linealizable en una vecindad de este punto y en coordenadas adecuadas se ve como $3u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}$ y por lo tanto, v^3u es una primera integral en una vecindad de $q_i(\alpha)$.

Podemos resumir todo lo anterior en la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si $\alpha \notin \{1, j, j^2, \infty\}$ entonces los 21 puntos singulares de \mathcal{F}_α^4 son no degenerados. Los 12 puntos de \mathcal{P} son radiales con primera integral meromorfa local $\frac{v}{u} = \text{cte}$. Los otros 9 puntos singulares son de tipo silla y tienen una primera integral holomorfa local de la forma $v^3u = \text{cte}$.*