UNIAVAN - Centro Universitário Avantis
Curso: Engenharia Elétrica
Disciplina: Análise de Sistemas Lineares

Modelos de Sinais

Prof. Luiz Fernando M. Arruda, Me. Eng.

INTELIGÊNCIA ACADÊMICA

Sumário

Funções Especiais

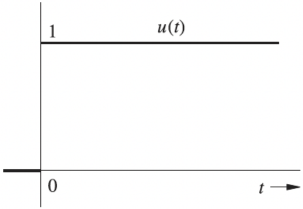
As funções especiais desempenham um papel fundamental em diversas áreas da matemática aplicada e engenharia, particularmente no campo da teoria de sinais e sistemas. Entre essas funções, destacam-se:

- degrau unitário
- impulso unitário
- exponencial

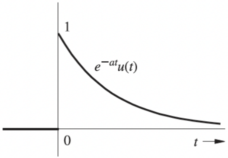
Degrau unitário $u(t)$

A função degrau unitário $u(t)$ expressa um sinal cujo valor inicial é 0 quando $t < 0$, e muda para 1 em $t > 0$.

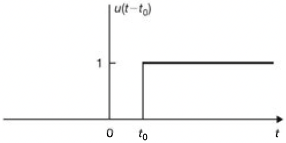
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



Aplicação do degrau unitário em uma função exponencial



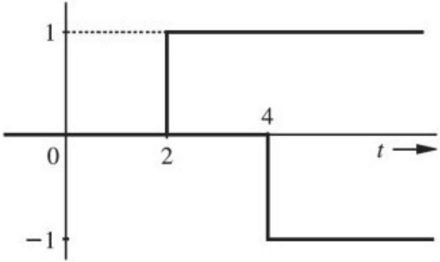
Aplicação do degrau unitário com deslocamento temporal

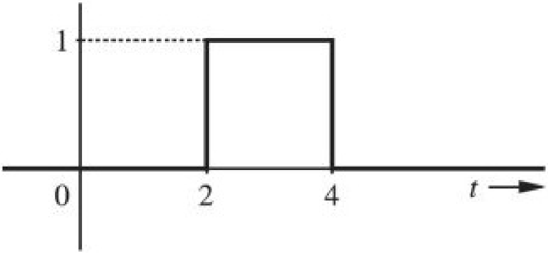


Degrau unitário $u(t)$

Exemplo de um pulso retangular $x(t)$, descrita em termos de funções degrau, pode ser descrito como a soma de dois degraus unitários atrasados. A função degrau atrasa em T segundos $u(t-T)$.

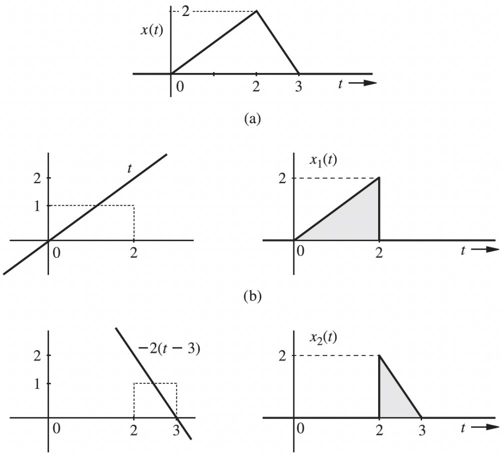
$$x(t) = u(t-2) - u(t-4)$$





Degrau unitário $u(t)$

Análise de um sinal divido no tempo:



O sinal $x(t)$ pode ser divido em dois sinais, $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Assim, $x_1(t)$ pode ser obtido através ma multiplicação de uma rampa t pelo degrau unitário, $u(t) - u(t-2)$.

$$x_1(t) = t[u(t) - u(t-2)]$$

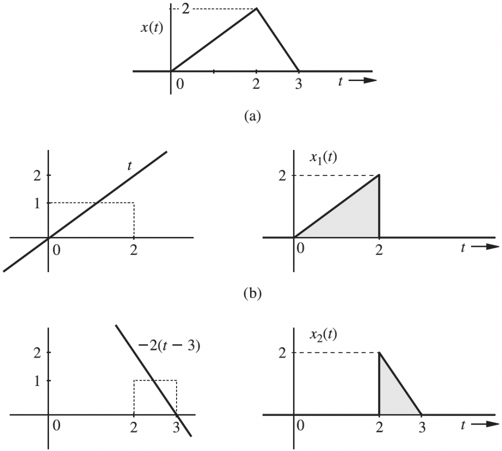
Já o sinal $x_2(t)$ pode ser obtido por outra rampa com inclinação -2, descrita por $-2t + c$, com valor 0 para $t = 3$, logo $c = 6$, ficando $-2t + 6 = -2(t-3)$. Adotado um degrau unitário em $u(t-2) - u(t-3)$.

$$x_2(t) = -2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)]$$

Degrau unitário $u(t)$

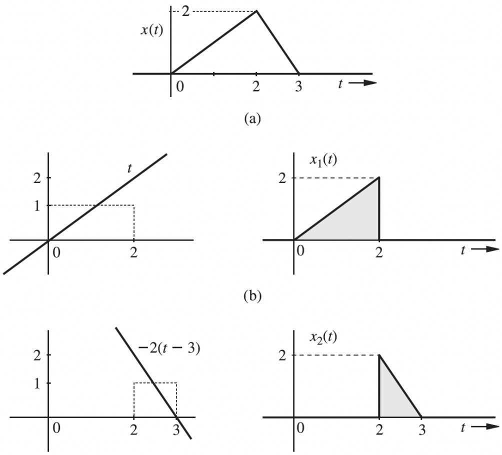
Análise de um sinal divido no tempo:

Calcule o sinal $x(t)$ a partir de $x_1(t) + x_2(t)$.



Degrau unitário $u(t)$

Análise de um sinal divido no tempo:

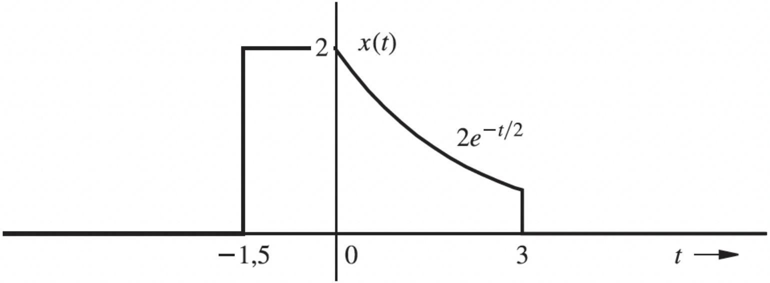


Calcule o sinal $x(t)$ a partir de $x_1(t)+x_2(t)$.

$$
\begin{aligned}
x(t) =& x_1(t) + x_2(t) \\
&= t[u(t) - u(t-2)] - 2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)] \\
&= t \cdot u(t) - t \cdot u(t-2) - 2(t-3)\,u(t-2) \\
&\quad + 2(t-3)\,u(t-3) \\
&= t \cdot u(t) - u(t-2)(t + 2(t-3)) \\
&\quad + 2(t-3)\,u(t-3) \\
&= t \cdot u(t) - u(t-2)(t + 2t - 6) \\
&\quad + 2(t-3)\,u(t-3) \\
&= t \cdot u(t) - u(t-2)(3t-6) + 2(t-3)\,u(t-3) \\
&= t \cdot u(t) - u(t-2)(3(t-2)) + 2(t-3)\,u(t-3) \\
x(t) =& t \cdot u(t) - 3(t-2)\,u(t-2) + 2(t-3)\,u(t-3)
\end{aligned}
$$

Exercício: Degrau Unitário

Descreva o sinal da figura abaixo através de uma expressão única para todo t.

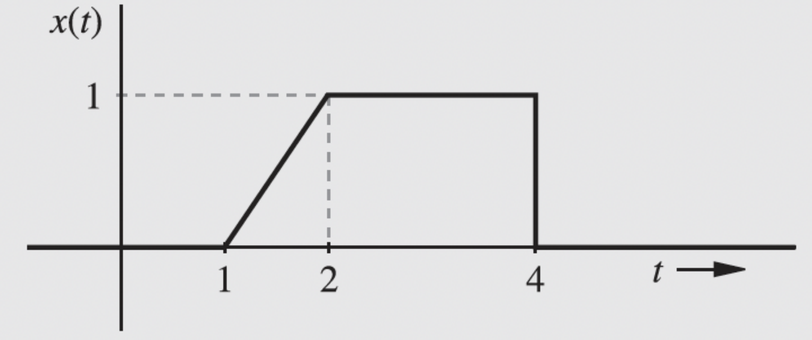


Resposta

$$x(t) = 2 \cdot u(t+1.5) - 2(1-e^{-t/2})u(t) - 2e^{-t/2}u(t-3)$$

Exercício: Degrau Unitário

Mostre que o sinal apresentado na figura abaixo pode ser descrito por
$x(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-4)$.

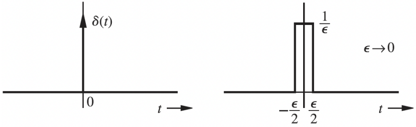


Impulso Unitário $\delta(t)$

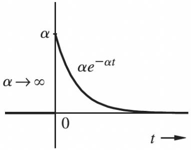
De acordo com (LATHI; GREEN, 2004), o impulso unitário δ é a função mais importante no estudo de sinais e sistemas. Ele é constituido de um pulso retangular muito pequeno ($\epsilon \rightarrow 0$) e sua altura tende a um valor muito grande ($1/\epsilon \rightarrow \infty$). Desta forma, $\delta(t) = 0$ em todo t menos em 0.

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$



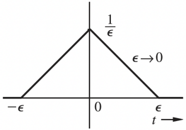
(a) (b)



(a)

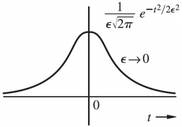
Exponencial

$$\int_{0}^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} dt = 1$$



(b)

Triangular



(c)

Gaussiano

Propriedades do Impulso

Multiplicação por um Impulso

Uma vez que uma função Impulso só tem valor em $t = 0$, a sua multiplicação por uma função ϕ contínua no tempo, retornará justamente $\phi(0)$.

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0) \cdot \delta(t)$$

Assim, a multiplicação de uma função contínua no tempo pelo impulso unitário, retorna um impulso em $t = 0$ com força $\phi(0)$. Adotando essa analogia temos:

$$\phi(t)\delta(t-T) = \phi(T)\delta(t-T)$$

Amostragem de uma Função Impulso

A propriedade de amostragem de impulso unitario, diz que, desde que $\phi(t)$ seja uma função contínua no instante $t = 0$, o resultado será o proprío sinal no instante do impulso.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \phi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt$$
$$= \phi(0)$$

Portanto, para um impulso unitário localizado no tempo $t = T$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-T)\,dt = \phi(T)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt$$
$$= \phi(T)$$

Propriedades do Impulso

Função Generalizada

Uma vez que uma função Impulso é descontínua para $t = 0$, a sua derivada du/dt não existe para $t = 0$ no sentido ordinário, mas existe no modelo generalizado e vale, de fato, $\delta(t)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt}\phi(t)\,dt &= u(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\dot{\phi}(t)\,dt \\
&= \phi(\infty) - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(t)\,dt \\
&= \phi(\infty) - \phi(t)\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \phi(0)
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

e consequentemente:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

Assim, a função de degrau unitário pode ser obtida da integração de uma função de impulso unitário. Similarmente, a rampa unitária $x(t) = t \cdot u(t)$.

Exemplo - Impuso unitário

Mostre que: $(t^3+3)\delta(t) = 3\delta(t)$

Exemplo - Impuso unitário

Mostre que: $(t^3+3)\delta(t) = 3\delta(t)$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\begin{aligned}
&(t^3+3)\delta(t) \\
&= (0^3+3)\delta(t) \\
&= 3\delta(t)
\end{aligned}$$

Exercício: Impulso Unitário

Mostre que:

- $\left[sin\left(t^2 - \frac{\pi}{2}\right)\right]\delta(t) = -\delta(t)$
- $e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$
- $\frac{\omega^2+1}{\omega^2+9}\delta(\omega-1) = \frac{1}{5}\delta(\omega-1)$

Exponencial e^{st}

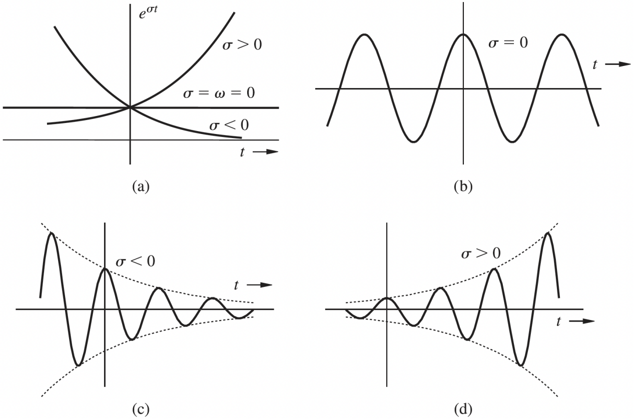
Outra função muito importante na área de sinais e sistemas é o sinal exponencial e^{st}, onde o termo s é gerado por um número complexo.

$$s = \sigma + j\omega$$

Logo,

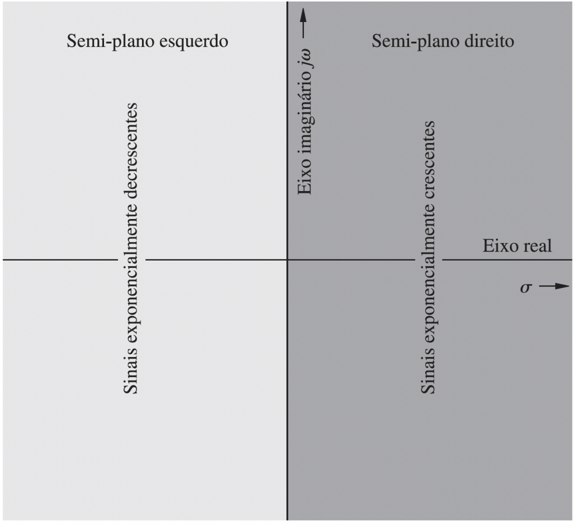
$$\begin{aligned} e^{st} &= e^{(\sigma + j\omega)t} \\ &= e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \\ &= e^{\sigma t}(cos(\omega t) + j \cdot sin(\omega t)) \end{aligned}$$

$$e^{\sigma t} cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{st} + e^{s^* t}\right)$$



a - Constante $k = ke^{0t} (s = 0)$
b - Exponencial monotônica $e^{\sigma t} (\omega = 0, s = \sigma)$
c - Senoide $cos(\omega t)$ $(\sigma = 0, s = \pm j\omega)$
d - Senoide variando exponencialmente $e^{\sigma t} cos(\omega t)$ $(s = \sigma \pm j\omega)$

Plano Frequência Complexa



Exercícios

Simplifique as expressões

(a) $\left(\frac{\sin t}{t^2+2}\right)\delta(t)$

(b) $\left(\frac{j\omega+2}{\omega^2+9}\right)\delta(\omega)$

(c) $\left[e^{-t}\cos(3t-60^\circ)\right]\delta(t)$

(d) $\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(t-2)\right]}{t^2+4}\right)\delta(1-t)$

(e) $\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)\delta(\omega+3)$

(f) $\left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega)$

Calcule as integrais

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-3)\sin(\pi t)\,dt$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+3)e^{-t}\,dt$

(f) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+4)\delta(1-t)\,dt$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty}x(2-t)\delta(3-t)$

Uma senóide $e^{\sigma t}\cos\omega t$ pode ser expressa como a soma das exponenciais e^{st} e e^{-st} com frequências complexas $s=\sigma+j\omega$ e $s=\sigma-j\omega$. Localize no plano complexo as frequências das seguintes senóides:

(a) $\cos(3t)$

(b) $e^{-3t}\cos(3t)$

(c) $e^{2t}\cos(3t)$

(d) e^{-2t}

(e) e^{2t}

(f) 5

Próxima Aula

Introdução a sinais e sistemas: Sistemas Lineares e Não Lineares; Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo; Sistemas Instantâneos e Dinâmicos; Sistema Causal e Não Causal; Sistema em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto; Sinais Analógicos e Digitais; Sinais Invertíveis e Não Invertíveis; Sistemas Estáveis e Instáveis

Obrigado!!!

Referencial Bibliográfico I

DISTEFANO, Joseph J; STUBBERUD, Allen J; WILLIAMS, Ivan J. **Schaum's outline of feedback and control systems**. New York: McGraw-Hill Professional, 2013.

HAYES, Monson H. **Schaum's outlines Digital Signal Processing**. New York: McGraw-Hill Professional, 2011.

HSU, Hwei P. **Schaum's outlines signals and systems, 4th Edition**. New York: McGraw-Hill Professional, 2019. v. 4.

LATHI, Bhagwandas Pannalal; GREEN, Roger A. **Linear systems and signals**. New York: Oxford University Press, 2004. v. 2.