UNIAVAN - Centro Universitário Avantis
Curso: Engenharia Elétrica
Disciplina: Análise de Sistemas Lineares

Modelos de Sinais

Prof. Luiz Fernando M. Arruda, Me. Eng.

Sumário

Funções Especiais

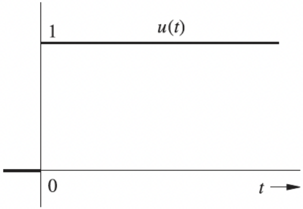
As funções especiais desempenham um papel fundamental em diversas áreas da matemática aplicada e engenharia, particularmente no campo da teoria de sinais e sistemas. Entre essas funções, destacam-se:

- degrau unitário
- impulso unitário
- exponencial

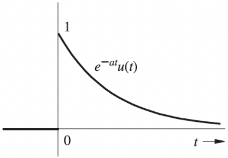
Degrau unitário $u(t)$

A função degrau unitário $u(t)$ expressa um sinal cujo valor inicial é 0 quando $t < 0$, e muda para 1 em $t > 0$.

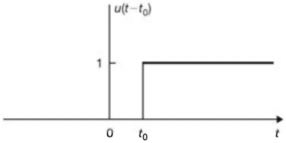
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



Aplicação do degrau unitário em uma função exponencial



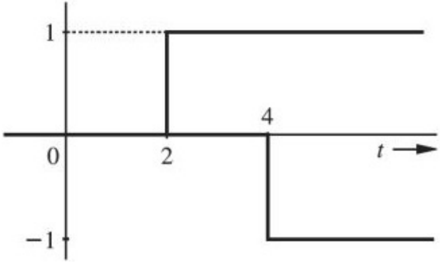
Aplicação do degrau unitário com deslocamento temporal

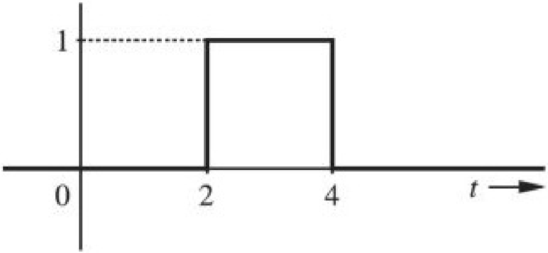


Degrau unitário $u(t)$

Exemplo de um pulso retangular $x(t)$, descrita em termos de funções degrau, pode ser descrito como a soma de dois degraus unitários atrasados. A função degrau atrasa em T segundos $u(t-T)$.

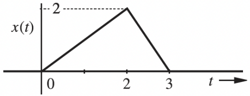
$$x(t) = u(t-2) - u(t-4)$$



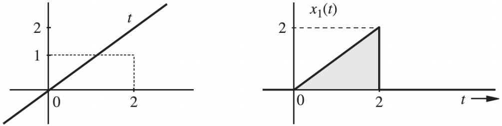


Degrau unitário $u(t)$

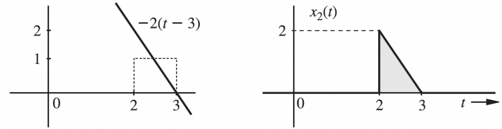
Análise de um sinal divido no tempo:



(a)



(b)



O sinal $x(t)$ pode ser divido em dois sinais, $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Assim, $x_1(t)$ pode ser obtido através ma multiplicação de uma rampa t pelo degrau unitário, $u(t) - u(t-2)$.

$$x_1(t) = t[u(t) - u(t-2)]$$

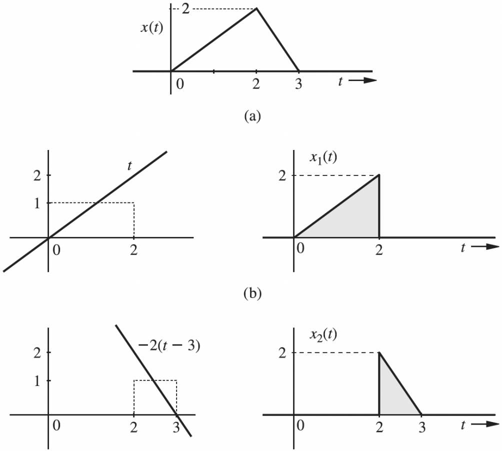
Já o sinal $x_2(t)$ pode ser obtido por outra rampa com inclinação -2, descrita por $-2t + c$, com valor 0 para $t = 3$, logo $c = 6$, ficando $-2t + 6 = -2(t-3)$. Adotado um degrau unitário em $u(t-2) - u(t-3)$.

$$x_2(t) = -2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)]$$

Degrau unitário $u(t)$

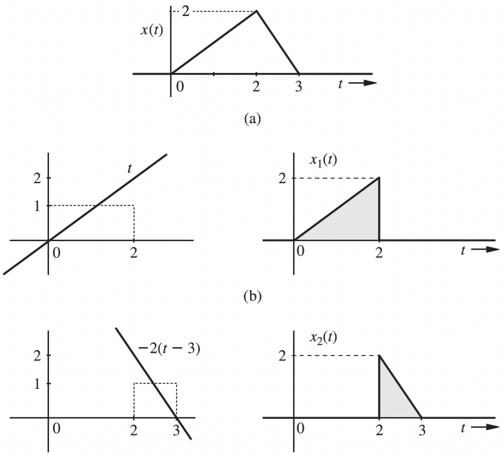
Análise de um sinal divido no tempo:

Calcule o sinal $x(t)$ a partir de $x_1(t) + x_2(t)$.



Degrau unitário $u(t)$

Análise de um sinal divido no tempo:

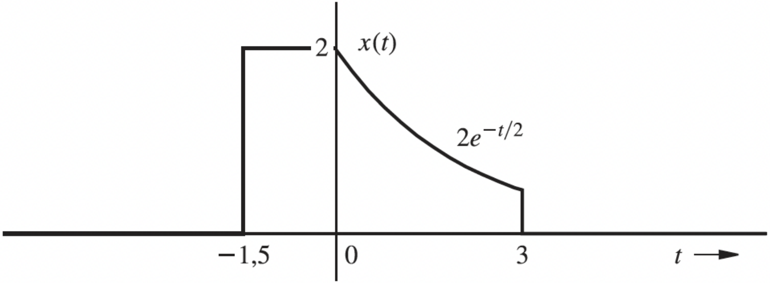


Calcule o sinal $x(t)$ a partir de $x_1(t)+x_2(t)$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t) + x_2(t)\\
&= t[u(t)-u(t-2)] - 2(t-3)[u(t-2)-u(t-3)]\\
&= t\cdot u(t) - t\cdot u(t-2) - 2(t-3)u(t-2)\\
&\quad + 2(t-3)u(t-3)\\
&= t\cdot u(t) - u(t-2)(t+2(t-3))\\
&\quad + 2(t-3)u(t-3)\\
&= t\cdot u(t) - u(t-2)(t+2t-6)\\
&\quad + 2(t-3)u(t-3)\\
&= t\cdot u(t) - u(t-2)(3t-6) + 2(t-3)u(t-3)\\
&= t\cdot u(t) - u(t-2)(3(t-2)) + 2(t-3)u(t-3)\\
x(t) &= t\cdot u(t) - 3(t-2)u(t-2) + 2(t-3)u(t-3)
\end{aligned}$$

Exercício: Degrau Unitário

Descreva o sinal da figura abaixo através de uma expressão única para todo t.

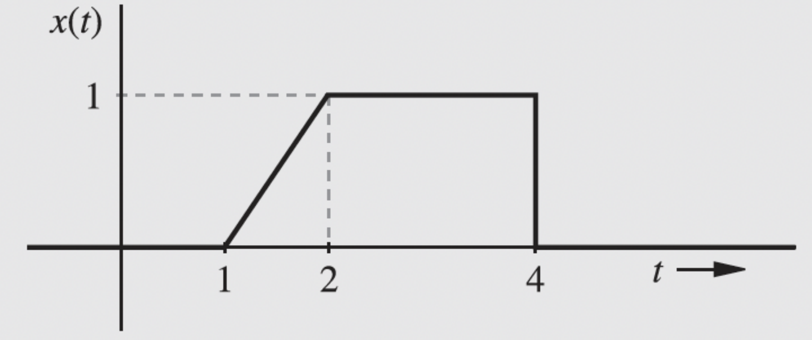


Resposta

$$x(t) = 2 \cdot u(t + 1.5) - 2(1 - e^{-t/2})u(t) - 2e^{-t/2}u(t-3)$$

Exercício: Degrau Unitário

Mostre que o sinal apresentado na figura abaixo pode ser descrito por
$x(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-4)$.

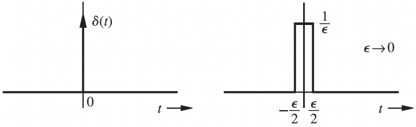


Impulso Unitário $\delta(t)$

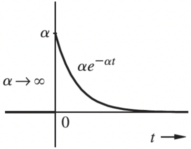
De acordo com (LATHI; GREEN, 2004), o impulso unitário δ é a função mais importante no estudo de sinais e sistemas. Ele é constituido de um pulso retangular muito pequeno ($\epsilon \rightarrow 0$) e sua altura tende a um valor muito grande ($1/\epsilon \rightarrow \infty$). Desta forma, $\delta(t) = 0$ em todo t menos em 0.

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$



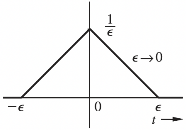
(a) (b)



(a)

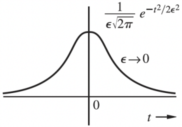
Exponencial

$$\int_{0}^{\infty} \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} dt = 1$$



(b)

Triangular



(c)

Gaussiano

Propriedades do Impulso

Multiplicação por um Impulso

Uma vez que uma função Impulso só tem valor em $t = 0$, a sua multiplicação por uma função ϕ contínua no tempo, retornará justamente $\phi(0)$.

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0) \cdot \delta(t)$$

Assim, a multiplicação de uma função contínua no tempo pelo impulso unitário, retorna um impulso em $t = 0$ com força $\phi(0)$. Adotando essa analogia temos:

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T)$$

Amostragem de uma Função Impulso

A propriedade de amostragem de impulso unitario, diz que, desde que $\phi(t)$ seja uma função contínua no instante $t = 0$, o resultado será o proprío sinal no instante do impulso.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt &= \phi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt \\ &= \phi(0)\end{aligned}$$

Portanto, para um impulso unitário localizado no tempo $t = T$, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T)\,dt &= \phi(T)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt \\ &= \phi(T)\end{aligned}$$

Propriedades do Impulso

Função Generalizada

Uma vez que uma função Impulso é descontínua para $t = 0$, a sua derivada du/dt não existe para $t = 0$ no sentido ordinário, mas existe no modelo generalizado e vale, de fato, $\delta(t)$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt}\phi(t)\,dt &= u(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\dot{\phi}(t)\,dt \\
&= \phi(\infty) - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(t)\,dt \\
&= \phi(\infty) - \phi(t)\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \phi(0)
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

e consequentemente:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = u(t)$$

Assim, a função de degrau unitário pode ser obtida da integração de uma função de impulso unitário. Similarmente, a rampa unitária $x(t) = t \cdot u(t)$.

Exemplo - Impuso unitário

Mostre que: $(t^3 + 3)\delta(t) = 3\delta(t)$

Exemplo - Impuso unitário

Mostre que: $(t^3+3)\delta(t) = 3\delta(t)$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\begin{aligned} &(t^3+3)\delta(t) \\ &= (0^3+3)\delta(t) \\ &= 3\delta(t) \end{aligned}$$

Exercício: Impulso Unitário

Mostre que:

- $\left[sin\left(t^2 - \frac{\pi}{2}\right)\right]\delta(t) = -\delta(t)$
- $e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$
- $\frac{\omega^2+1}{\omega^2+9}\delta(\omega-1) = \frac{1}{5}\delta(\omega-1)$

Exponencial e^{st}

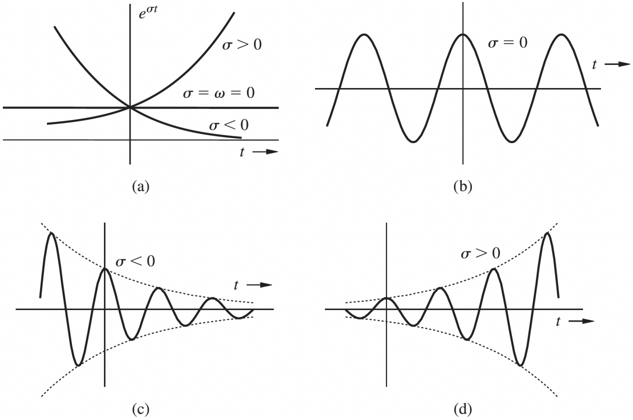
Outra função muito importante na área de sinais e sistemas é o sinal exponencial e^{st}, onde o termo s é gerado por um número complexo.

$$s = \sigma + j\omega$$

Logo,

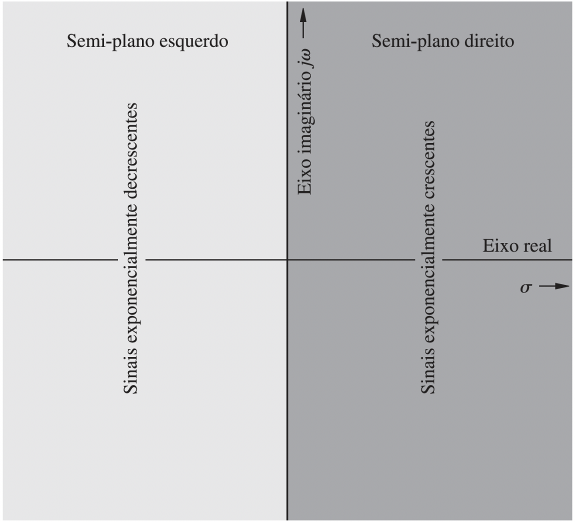
$$\begin{aligned} e^{st} &= e^{\sigma + j\omega}\, t \\ &= e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} \\ &= e^{\sigma t}(cos(\omega t) + j \cdot sin(\omega t)) \end{aligned}$$

$$e^{\sigma t} cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{st} + e^{s^* t}\right)$$



a - Constante $k = ke^{0t} (s = 0)$
b - Exponencial monotônica $e^{\sigma t} (\omega = 0, s = \sigma)$
c - Senoide $cos(\omega t) \quad (\sigma = 0, s = \pm j\omega)$
d - Senoide variando exponencialmente $e^{\sigma t} cos(\omega t) \quad (s = \sigma \pm j\omega)$

Plano Frequência Complexa



Exercícios

Simplifique as expressões

(a) $\left(\frac{\sin t}{t^2+2}\right)\delta(t)$

(b) $\left(\frac{j\omega+2}{\omega^2+9}\right)\delta(\omega)$

(c) $\left[e^{-t}\cos(3t-60°)\right]\delta(t)$

(d) $\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(t-2)\right]}{t^2+4}\right)\delta(1-t)$

(e) $\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)\delta(\omega+3)$

(f) $\left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega)$

Calcule as integrais

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}\,dt$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-3)\sin(\pi t)\,dt$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+3)e^{-t}\,dt$

(f) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+4)\delta(1-t)\,dt$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty}x(2-t)\delta(3-t)$

Uma senóide $e^{\sigma t}\cos\omega t$ pode ser expressa como a soma das exponenciais e^{st} e e^{-st} com frequências complexas $s=\sigma+j\omega$ e $s=\sigma-j\omega$. Localize no plano complexo as frequências das seguintes senóides:

(a) $\cos(3t)$

(b) $e^{-3t}\cos(3t)$

(c) $e^{2t}\cos(3t)$

(d) e^{-2t}

(e) e^{2t}

(f) 5

Próxima Aula

Introdução a sinais e sistemas: Sistemas Lineares e Não Lineares; Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo; Sistemas Instantâneos e Dinâmicos; Sistema Causal e Não Causal; Sistema em Tempo Contínuo e em Tempo Discreto; Sinais Analógicos e Digitais; Sinais Invertíveis e Não Invertíveis; Sistemas Estáveis e Instáveis

Obrigado!!!

Referencial Bibliográfico I

DISTEFANO, Joseph J; STUBBERUD, Allen J; WILLIAMS, Ivan J. **Schaum's outline of feedback and control systems**. New York: McGraw-Hill Professional, 2013.

HAYES, Monson H. **Schaum's outlines Digital Signal Processing**. New York: McGraw-Hill Professional, 2011.

HSU, Hwei P. **Schaum's outlines signals and systems, 4th Edition**. New York: McGraw-Hill Professional, 2019. v. 4.

LATHI, Bhagwandas Pannalal; GREEN, Roger A. **Linear systems and signals**. New York: Oxford University Press, 2004. v. 2.