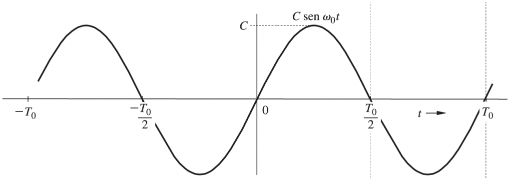
UNIAVAN - Centro Universitário Avantis
Curso: Engenharia Elétrica
Disciplina: Análise de Sistemas Lineares

Revisão Senoides, e Sinais e Sistemas

Prof. Luiz Fernando M. Arruda, Me. Eng.

Sumário

Senoides



$$x(t) = C\ sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$$

Uma senoide é composta por uma amplitude (C), frequência (f_0) e uma defasagem angular ϕ, conforme a figura acima.

Observe que a cada período T_0 ela se repete, e uma vez que o período é o inverso da frequência (quantas vezes se repete em 1 seg.) podemos obter o valor da frequência a partir da equação.

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

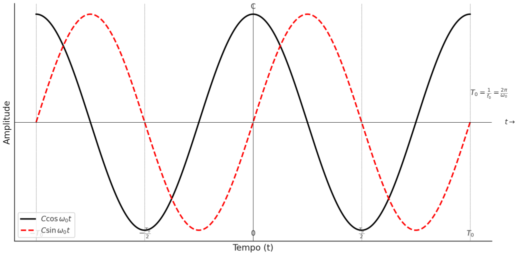
Toda via, na engenharia, é bastante conveniente utilizarmos os termos em radianos por segundo substituindo o tempo t pelo angulo ϕ e a frequência em Hertz para frequência angular ω_0.

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

Senoides

Há dois casos excepcionais das senoides $x(t) = C \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$:

- $x(t) = C \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$ para $(\phi = 0)$
- $x(t) = C \cdot cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$ para $\left(\phi = -\frac{\pi}{2}\right)$

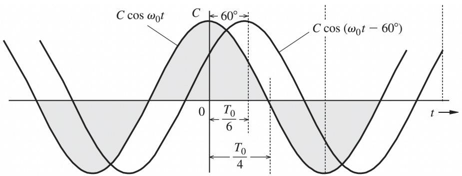


Uma vez que podemos reescrever a função $x(t)$, temos:

$$x(t) = C \cdot sin(w_o \cdot t + \phi) \qquad \text{onde}: \ T_0 = \frac{1}{w_0/2\pi}$$

A figura ao lado plota duas senoides sobrepostas, uma cossenoide (um sendo com 90° adiantado) e uma senoide com $\phi = 0°$.

Senoides



A figura acima demonstra duas senoides sobrepostas, uma cossenoide (um sendo com 90° adiantado) e uma senoide com $\phi = 30°$.

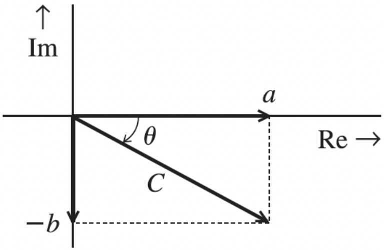
Uma senoide pode ser constituida da **soma** de outras duas senoides de fases (ϕ) diferentes mas de mesma frequência.

$$C\cdot cos(\omega_0 t + \phi) = C\cdot cos(\phi)cos(\omega_0 t) - C\cdot sin(\phi)sin(\omega_0 t)$$

No qual: $a = C\cdot cos(\phi)$ e $b = -C\cdot sin(\phi)$

Portanto: $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$.

Logo, C e ϕ são o módulo e o ângulo, respectivamente, de um número complexo $a - jb = C\cdot e^{j\phi}$, ao qual, $a\cdot cos(\omega_0 t) + b\cdot sin(\omega_0 t) = C\cdot cos(\omega_0 t + \phi)$.



Exemplo 01

Nos caos a seguir, expresse $x(t)$ como uma única senoide:

- $x(t) = cos(\omega_0 t) - \sqrt{3} \cdot sin(\omega_0 t)$

Exemplo 01

Nos caos a seguir, expresse $x(t)$ como uma única senoide:

- $x(t) = cos(\omega_0 t) - \sqrt{3} \cdot sin(\omega_0 t)$

$$a = 1 \quad b = -\sqrt{3}$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

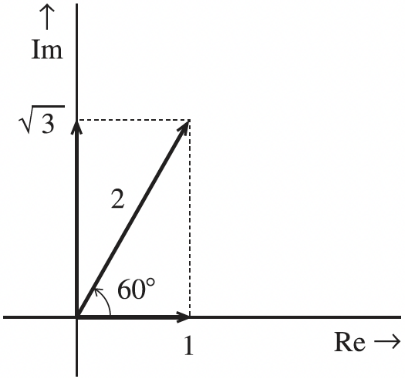
$$C = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$C = 2$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-(-\sqrt{3})}{1}\right)$$

$$\phi = 60^\circ$$

$$x(t) = 2 \cdot cos(\omega_0 t + 60^\circ)$$



Exemplo 02

Nos caos a seguir, expresse $x(t)$ como uma única senoide:

- $x(t) = -3 \cdot cos(\omega_0 t) + 4 \cdot sin(\omega_0 t)$

Exemplo 02

Nos caos a seguir, expresse $x(t)$ como uma única senoide:

- $x(t) = -3 \cdot cos(\omega_0 t) + 4 \cdot sin(\omega_0 t)$

$$a = -3 \quad b = 4$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$

$$C = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$C = 5$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right)$$

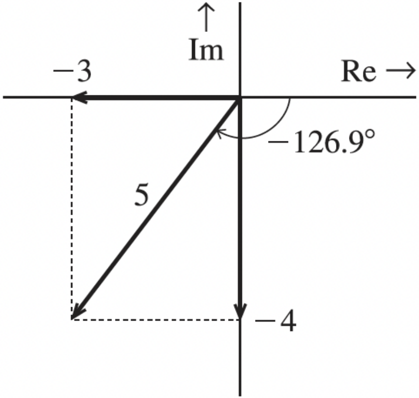
$$\phi = 53,13^\circ$$

$$x(t) = 5 \cdot cos(\omega_0 t + 53,13^\circ)$$

Porém, devido ao termo a ser negativo:

$$x(t) = 5 \cdot cos(\omega_0 t + 53,13^\circ - 180^\circ)$$

$$x(t) = 5 \cdot cos(\omega_0 t - 126.87^\circ)$$



Senoides em Termos Exponenciais

As senóides também podem ser expressas em termos de exponenciais utilizando a fórmula de Euler.

$$cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$$
$$sin(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$$

e a inversão pode ser definida por:

$$e^{j\phi} = cos(\phi) + j \cdot sin(\phi)$$
$$e^{-j\phi} = cos(\phi) - j \cdot sin(\phi)$$

Sinais

Segundo (HSU, 2019),"Um sinal é uma função que representa uma quantidade ou variável física e, tipicamente, contém informações sobre o comportamento ou a natureza do fenômeno. Por exemplo, em um circuito RC, o sinal pode representar a tensão através do capacitor ou a corrente fluindo no resistor. Matematicamente, um sinal é representado como uma função de uma variável independente t. Geralmente, t representa o tempo. Assim, um sinal é denotado por $x(t)$".

Sinal

é uma variavel dependente com uma ou mais variaveis independentes.

Por exemplo o valor de tensão alternada é considerado um sinal, pois ele tem uma variavel indepente t que muda com o tempo. Já o valor de tensão em corrente continua de uma fonte não é considerado um sinal pois não tem uma variavel que muda com o tempo.

Sinais

Sinal de variavel simples

Um sinal de variável única é uma função que depende de uma única variável independente. Este tipo de sinal é o mais comum em muitas aplicações e geralmente representa como uma quantidade varia em relação ao tempo.

Exemplo:

- Sinal de áudio;
- Sinal de tensão em um circuito;
- Sinal de temperatura em um ambiente;

$$x(t)$$

Sinal de diversas variaveis

Um sinal de múltiplas variáveis é uma função que depende de duas ou mais variáveis independentes. Esses sinais são usados para descrever fenômenos que variam em mais de uma dimensão.

Exemplo:

- imagens (duas coordenadas espaciais);
- vídeos (duas coordenadas espaciais e uma coordenada de tempo);
- campo eletromagnético (pode depender de coordenadas espaciais e temporais);

$$x(t, y, ...)$$

Sistema

De acordo com (HSU, 2019), "Um sistema é o modelo matemático de um processo físico que relaciona um sinal de entrada (ou excitacao) e um sinal de saída (resposta)."

Sistema

Modelo matemático que representa um processo físico.

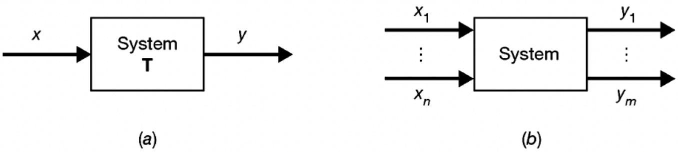


Fig. 1-14 System with single or multiple input and output signals.

Exemplo: Um sistema de artilharia anti-aérea, através do **sinal do radar**, sabe a posição passada e a velocidade do alvo. E através do processamento do sinal do radar (a entrada), ele pode estimar a posição futura do alvo.

Sistemas

Há basicamente 2 tipos de problemas:

Problema de Análise

O problema de análise envolve entender e caracterizar o comportamento de um sistema existente. O objetivo é determinar como o sistema responde a várias entradas e quais são suas propriedades intrínsecas.

- Modelagem e Simulação
- Estabilidade
- Resposta a Entrada
- Frequência e Tempo

Problema de Síntese

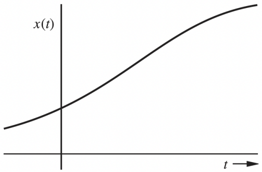
O problema de síntese envolve projetar um sistema que atenda a especificações desejadas. O objetivo é criar ou configurar um sistema para alcançar um comportamento específico.

- Especificação
- Projeto
- Otimização
- Implementação

Enquanto o objetivo da análise é compreender e prever o comportamento de um sistema existente, a síntese busca projetar um novo sistema ou modificar um existente a atender requisitos específicos.

Tempo Contínuo e Tempo Discreto

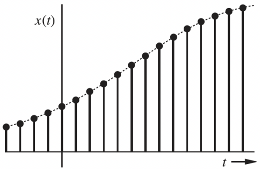
Sinal de Tempo Contínuo: possui um valor para cara instante de tempo t.



$x(t)$

As funções em tempo contínuo são expressas por "(t)", onde t é o tempo.

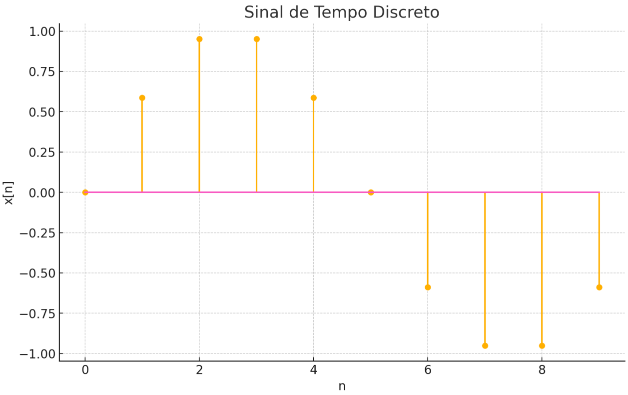
Sinal Discreto: possui um valor a cada intervalo definido, tempo discreto.



$x[n]$

As funções de tempo discreto são expressas em "[n]", onde n é um número inteiro no intervalo de aquisições.

Exemplo



x[n] = [0.0, 0.59, 0.95, 0.95, 0.59, 0.0, -0.59, -0.95, -0.95, -0.59];

O gráfico ao lado representa um sinal de tempo discreto x[n] com n variando de 0 a 9. O sinal é uma função seno discretizada, especificamente $x[n] = sin(0,2 \cdot \pi n)$ Os valores do sinal para os primeiros dez instantes de tempo são aproximadamente [0.0, 0.59, 0.95, 0.95, 0.59, 0.0, -0.59, -0.95, -0.95, -0.59]. Esses valores mostram a oscilação característica da função seno, alternando entre valores positivos e negativos, com um período determinado pela frequência angular de 0.2π. Ele ilustra claramente esses valores discretos, destacando os pontos individuais do sinal no tempo.

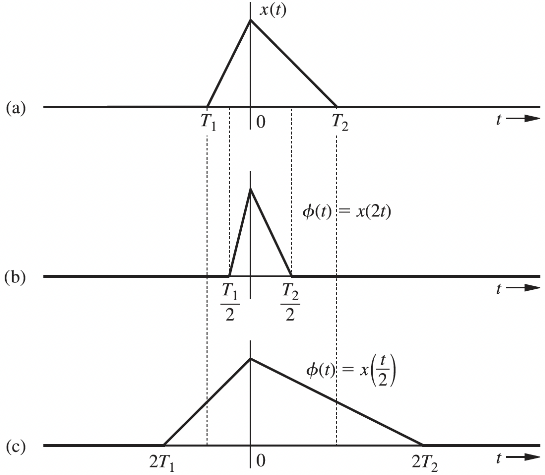
Escalamento Temporal

Escalamento temporal é a compressão ou expansão de um sinal ao longo do eixo do tempo. Isso significa que a forma do sinal é mantida, mas a maneira como ele se estende ou se contrai ao longo do tempo é alterada. Se um sinal é comprimido, ele se tornará mais rápido.

$$\phi\left(\frac{t}{\alpha}\right) = x(t)$$

$$\phi(t) = \alpha \cdot x(t)$$

Ao analisar a figura ao lado considere $\alpha = 2$.



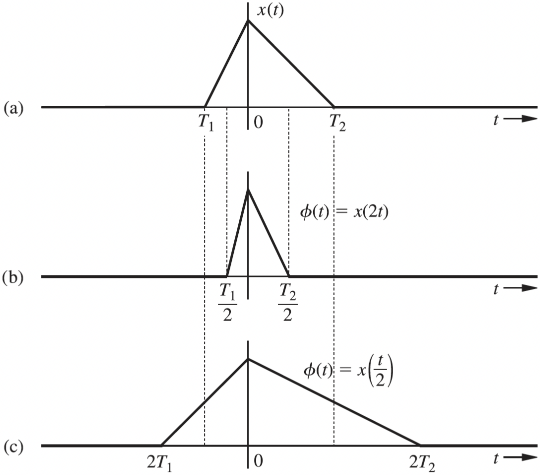
Escalamento Temporal

Em contrapartida, se um sinal é expandido com fator α ele irá se tornar mais lento, conforme figura ao lado.

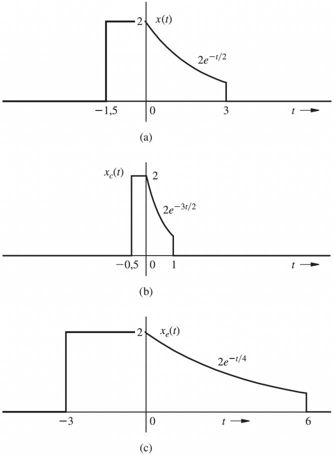
$$\phi(\alpha \cdot t) = x(t)$$

$$\phi(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

Considere um fator $\alpha = \frac{1}{2}$ ao analisar a figura.



Exemplo

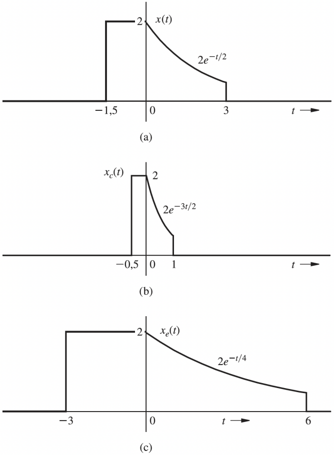


Considere uma compressão de $\alpha = 3$ e expansão de $\alpha = 2$ do sinal $x(t)$ abaixo.

$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

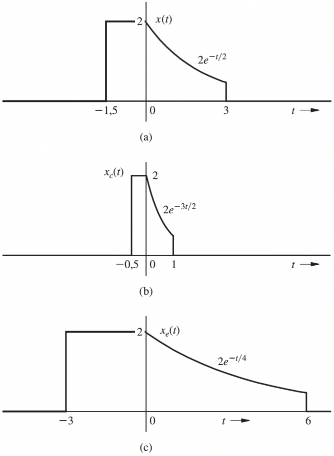
Considere uma compressão de $\alpha = 3$ e expansão de $\alpha = 2$ do sinal $x(t)$ abaixo.



$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq 3t < 0 \quad \text{ou} \quad -0{,}5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & \text{se } 0 \leq 3t < 3 \quad \text{ou} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo



Considere uma compressão de $\alpha = 3$ e expansão de $\alpha = 2$ do sinal $x(t)$ abaixo.

$$x(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/2} & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_c(t) = x(3t) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq 3t < 0 \quad \text{ou} \quad -0{,}5 \leq t < 0 \\ 2e^{-3t/2} & \text{se } 0 \leq 3t < 3 \quad \text{ou} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_e(t) = x(t/2) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1{,}5 \leq t/2 < 0 \quad \text{ou} \quad -3 \leq t < 0 \\ 2e^{-t/4} & \text{se } 0 \leq t/2 < 3 \quad \text{ou} \quad 0 \leq t < 6 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

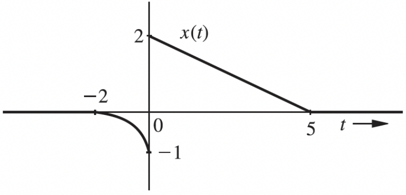
Exercício: Escalonamento temporal

Demonstre que o escalonamento temporal, quando aplicado a uma senoide, resulta em outra senoide com a mesma amplitude e fase, mas com a frequência alterada. Valide para fatores $\alpha > 1$ e $\alpha < 1$. Explique sua conclusão e plote os gráficos para comprovar sua análise.

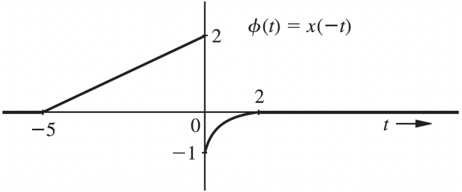
Reversão Temporal

A reversão temporal de um sinal é o processo pelo qual a variável de tempo t é substituída por seu negativo $-t$, resultando em um sinal que é espelhado em relação ao eixo vertical. Esta operação inverte a direção do tempo, fazendo com que os eventos que ocorriam no passado apareçam no futuro e vice-versa. A reversão temporal não altera a amplitude do sinal, mas modifica sua fase de maneira que, se o sinal original tem uma certa periodicidade ou comportamento temporal, o sinal reverso exibirá essa periodicidade de forma espelhada. Este conceito é útil em diversas áreas, como processamento de sinais, análise de sistemas e comunicações

$$\phi(t) = x(-t)$$

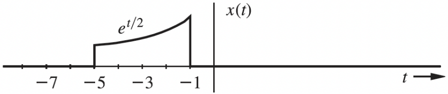


(a)

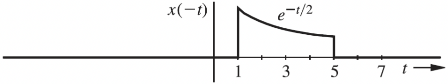


(b)

Exemplo



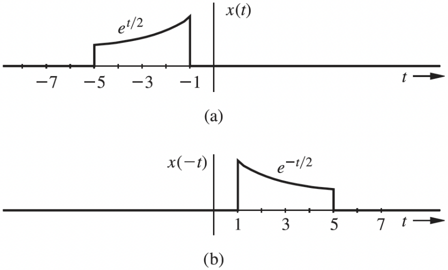
(a)



(b)

$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & \text{se } -1 \geq t > -5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo



$$x(t) = \begin{cases} e^{t/2} & \text{se } -1 \geq t > -5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x(-t) = \begin{cases} e^{-t/2} & \text{se } -1 \geq -t > -5 \quad \text{ou} \quad 1 \leq t < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício: Reversão Temporal

Considere o sinal $x(t) = e^{-t}$ para $t \geq 0$.

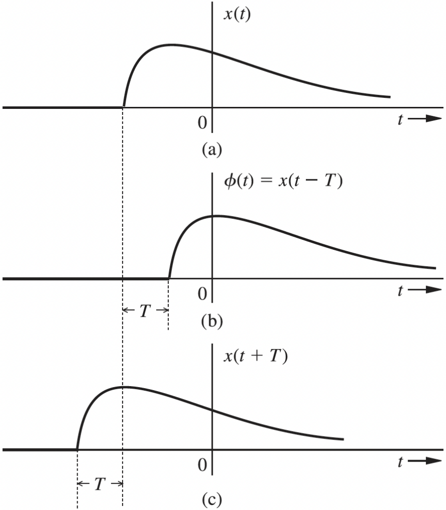
1. Plote o sinal original $x(t)$ no intervalo $-2 \leq t \leq 2$.
2. Plote o sinal invertido no tempo, ou seja, $x(-t)$.
3. Explique como a reversão temporal afeta a forma e a posição do sinal.

Deslocamento Temporal

O deslocamento temporal altera a posição de um sinal ao longo do eixo do tempo sem modificar sua forma. Representado matematicamente como $x(t-T)$, onde T é a quantidade de deslocamento, essa operação move o sinal para a direita (atraso) se T for positivo, ou para a esquerda (adiantamento) se T for negativo. Esse conceito é essencial no processamento de sinais e controle de sistemas para ajustar o momento de ocorrência de um sinal.

$$\phi(t+T) = x(t) \qquad \phi(t-T) = x(t)$$

$$\phi(t) = x(t-T) \qquad \phi(t) = x(t+T)$$



Exercício: Deslocamento temporal

Considere o sinal $x(t) = \cos(t)$.

1. Plote o sinal original $x(t)$ no intervalo $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.
2. Plote o sinal deslocado para a direita por π, ou seja, $x(t-\pi)$.
3. Plote o sinal deslocado para a esquerda por $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $x(t+\frac{\pi}{2})$.
4. Explique como o deslocamento temporal afeta a posição do sinal ao longo do eixo do tempo.

Exercício: Análise de Operações em Sinais

Considere o sinal $x(t) = \sin(2t)$.

1. Plote o sinal original $x(t)$ no intervalo $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.
2. Plote o sinal invertido no tempo, ou seja, $x(-t)$.
3. Plote o sinal deslocado para a direita por $\pi/2$, ou seja, $x(t - \pi/2)$.
4. Plote o sinal expandido no tempo por um fator de 2, ou seja, $x(t/2)$.
5. Plote o sinal comprimido no tempo por um fator de 2, ou seja, $x(2t)$.
6. Explique como cada operação (reversão temporal, deslocamento, expansão e compressão) afeta a forma e a posição do sinal.

Próxima Aula
Classificação de Sinais

Obrigado!!!

Referencial Bibliográfico I

DISTEFANO, Joseph J; STUBBERUD, Allen J; WILLIAMS, Ivan J. **Schaum's outline of feedback and control systems**. New York: McGraw-Hill Professional, 2013.

HAYES, Monson H. **Schaum's outlines Digital Signal Processing**. New York: McGraw-Hill Professional, 2011.

HSU, Hwei P. **Schaum's outlines signals and systems, 4th Edition**. New York: McGraw-Hill Professional, 2019. v. 4.

LATHI, Bhagwandas Pannalal; GREEN, Roger A. **Linear systems and signals**. New York: Oxford University Press, 2004. v. 2.