Modelos mistos na Engenharia de Avaliações

Possibilidades e aplicações

Luiz Fernando Palin Droubi[a]
Carlos Augusto Zilli[b]
Norberto Hochheim[c]

24 de novembro de 2020

GEAP - UFSC

[a] lfpdroubi@gmail.com
[b] carlos.zilli@ifsc.edu.br
[c] norberto.hochheim@ufsc.br

Introdução

Inclinações Aleatórias

Limitações e outras formulações

Estudo de Caso

Conclusões

Trabalhos Futuros

Introdução

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].

[1] Bell, Fairbrother e Jones (2019).

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \quad (1)$$

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
    - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
    - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
  - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
  - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas
  - Modelos de Efeitos Fixos (FE): variância entre agrupamentos ∞

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
    - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
    - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas
    - Modelos de Efeitos Fixos (FE): variância entre agrupamentos ∞
        - $$y_{ij} = \sum_{j=1}^{j} \beta_{0j} D_j + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
  - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas
  - Modelos de Efeitos Fixos (FE): variância entre agrupamentos ∞
    - $$y_{ij} = \sum_{j=1}^{j} \beta_{0j} D_j + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$
  - Modelos OLS: ignorar a heterogeneidade

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
  - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\upsilon^2)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas
  - Modelos de Efeitos Fixos (FE): variância entre agrupamentos ∞
    - $$y_{ij} = \sum_{j=1}^{j} \beta_{0j} D_j + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$
  - Modelos OLS: ignorar a heterogeneidade
    - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{OLS} x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{3}$$

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Amostras heterogêneas

- Modelos mistos são modelos estatísticos que misturam efeitos fixos (FE) e efeitos aleatórios (RE), capazes de lidar com a heterogeneidade amostral[1].
  - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{1}$$
  - $\upsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_\upsilon)$ e $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_\varepsilon)$
- Existem outras maneiras de modelar amostras heterogêneas
  - Modelos de Efeitos Fixos (FE): variância entre agrupamentos ∞
    - $$y_{ij} = \sum_{j=1}^{j} \beta_{0j} D_j + \beta_1 x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$
  - Modelos OLS: ignorar a heterogeneidade
    - $$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{OLS} x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{3}$$
    - Pode levar a não verificação de várias hipóteses da inferência clássica, como a independência das observações.

[1] Bell, Fairbrother e Jones.

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.

[2] Brillinger (2002, p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.

[2] Brillinger (p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.
  - O modelo de efeitos fixos é ideal.

[2] Brillinger (p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.
  - O modelo de efeitos fixos é ideal.
  - Um número mínimo de dados em cada agrupamento, no entanto, é necessário para uma boa estimação.

[2] Brillinger (p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.
  - O modelo de efeitos fixos é ideal.
  - Um número mínimo de dados em cada agrupamento, no entanto, é necessário para uma boa estimação.
- Na elaboração de PVGs, onde estão disponíveis dados em uma grande quantidade de agrupamentos (não necessariamente todos), porém seja necessária a previsão de valores em agrupamentos fora da amostra.

[2] Brillinger (p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.
  - O modelo de efeitos fixos é ideal.
  - Um número mínimo de dados em cada agrupamento, no entanto, é necessário para uma boa estimação.
- Na elaboração de PVGs, onde estão disponíveis dados em uma grande quantidade de agrupamentos (não necessariamente todos), porém seja necessária a previsão de valores em agrupamentos fora da amostra.
  - O modelo de efeitos aleatórios deve ser utilizado, já que a modelagem por efeitos fixos não pode *explicar* a diferença de níveis entre os agrupamentos, impossibilitando a previsão de valores em agrupamentos fora da amostra.

[2] Brillinger (p. 196).

Efeitos Fixos vs. Efeitos Aleatórios

- A utilização de uma ou outra abordagem vai depender do objetivo da modelagem e da composição da amostra.
- Na avaliação de precisão de um imóvel em específico, a partir de uma amostra heterogênea, com dados de poucos agrupamentos, onde não haja interesse em *explicar* porque os dados de um agrupamento apresentam valores diferentes, em média, dos dados de outros agrupamentos.
  - O modelo de efeitos fixos é ideal.
  - Um número mínimo de dados em cada agrupamento, no entanto, é necessário para uma boa estimação.
- Na elaboração de PVGs, onde estão disponíveis dados em uma grande quantidade de agrupamentos (não necessariamente todos), porém seja necessária a previsão de valores em agrupamentos fora da amostra.
  - O modelo de efeitos aleatórios deve ser utilizado, já que a modelagem por efeitos fixos não pode *explicar* a diferença de níveis entre os agrupamentos, impossibilitando a previsão de valores em agrupamentos fora da amostra.
  - Estimação em agrupamentos com pequeno n_j é beneficiada pelo efeito do encolhimento (*borrowing strenght*[2]).

[2] Brillinger (p. 196).

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.
- Apesar do modelo ser escrito em diversos níveis, a estimação é feita de uma só vez, a partir da substituição das equações

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.
- Apesar do modelo ser escrito em diversos níveis, a estimação é feita de uma só vez, a partir da substituição das equações
  - P. Ex.:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \upsilon_j \tag{5}$$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{6}$$

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.
- Apesar do modelo ser escrito em diversos níveis, a estimação é feita de uma só vez, a partir da substituição das equações
    - P. Ex.:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \upsilon_j \tag{5}$$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{6}$$

- Possibilidade de modelagem de diversos níveis aninhados.

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.
- Apesar do modelo ser escrito em diversos níveis, a estimação é feita de uma só vez, a partir da substituição das equações
    - P. Ex.:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \upsilon_j \tag{5}$$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{6}$$

- Possibilidade de modelagem de diversos níveis aninhados.
- Todo modelo hierárquico é um modelo misto.

Modelagem hierárquica

- Modelos hierárquicos ou multiníveis são modelos cujas equações podem ser escritas separadamente, dividindo a modelagem em diversos níveis de análise.
- Apesar do modelo ser escrito em diversos níveis, a estimação é feita de uma só vez, a partir da substituição das equações
  - P. Ex.:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{4}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \upsilon_j \tag{5}$$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1^{RE} x_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{6}$$

- Possibilidade de modelagem de diversos níveis aninhados.
- Todo modelo hierárquico é um modelo misto.
- Nem todo modelo misto é um modelo hierárquico.

Inclinações Aleatórias

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.
- É fácil introduzir inclinações aleatórias, p. ex.

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.
- É fácil introduzir inclinações aleatórias, p. ex.
  - $$y_{ij} = (\beta_0 + \upsilon_j) + (\beta_1 + \nu_j)x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{7}$$

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.
- É fácil introduzir inclinações aleatórias, p. ex.
  - $$y_{ij} = (\beta_0 + \upsilon_j) + (\beta_1 + \nu_j)x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{7}$$
  - Apenas um grau de liberdade a mais é consumido

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.
- É fácil introduzir inclinações aleatórias, p. ex.
    - $$y_{ij} = (\beta_0 + \upsilon_j) + (\beta_1 + \nu_j)x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{7}$$
    - Apenas um grau de liberdade a mais é consumido
- Para obtenção de uma modelagem análoga com a abordagem de efeitos fixos, seria necessário modelar a interação entre as variáveis *dummies* e a variável com inclinações aleatórias.

Inclinações Aleatórias

- Os modelos mistos são mais flexíveis que os modelos fixos.
- É fácil introduzir inclinações aleatórias, p. ex.
    - $$y_{ij} = (\beta_0 + \upsilon_j) + (\beta_1 + \nu_j)x_{ij} + \beta_2 z_j + \varepsilon_{ij} \tag{7}$$
    - Apenas um grau de liberdade a mais é consumido
- Para obtenção de uma modelagem análoga com a abordagem de efeitos fixos, seria necessário modelar a interação entre as variáveis *dummies* e a variável com inclinações aleatórias.
- Processo é custoso em graus de liberdade e pode prejudicar uma boa estimação dos coeficientes.

Encolhimento (borrowing strenght)

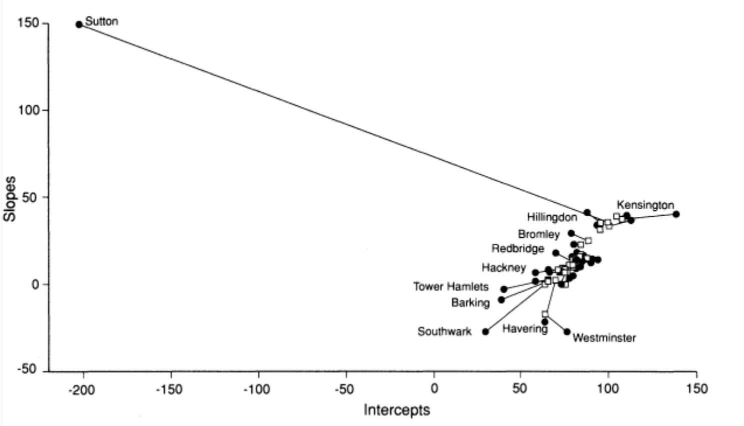


Figura 1: Encolhimento em modelos mistos[3].

[3] Jones e Bullen (1994).

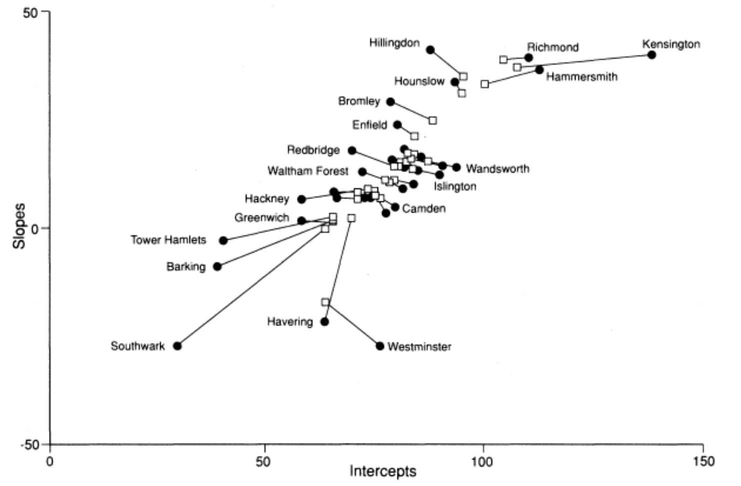
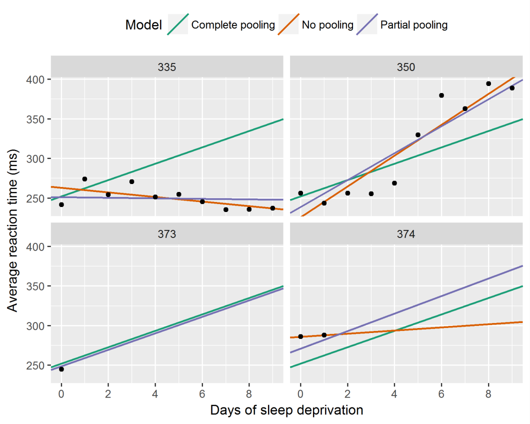


Figure 4. Slopes and intercepts for the fixed and random specifications.

Figura 2: Encolhimento em modelos mistos (2)[4].

Encolhimento (borrowing strenght) (3)



Limitações e outras formulações

Limitações e outras formulações

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:

[5] Bell e Jones (2015, p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

Limitações e outras formulações

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:
  - $Cov(x_{ij}; u_j) = 0$ e $Cov(x_{ij}; e_{ij}) = 0$

[5] Bell e Jones (p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

Limitações e outras formulações

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:
  - $Cov(x_{ij}; u_j) = 0$ e $Cov(x_{ij}; e_{ij}) = 0$
- Estas hipóteses frequentemente não se verificam[4].

[5] Bell e Jones (p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

Limitações e outras formulações

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:
  - $Cov(x_{ij}; u_j) = 0$ e $Cov(x_{ij}; e_{ij}) = 0$
- Estas hipóteses frequentemente não se verificam[4].
- No entanto, é possível contornar este problema:

[5] Bell e Jones (p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:
  - $Cov(x_{ij}; u_j) = 0$ e $Cov(x_{ij}; e_{ij}) = 0$
- Estas hipóteses frequentemente não se verificam[4].
- No entanto, é possível contornar este problema:
  - Formulação de Mundlak[6]:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{8}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \beta_3 \bar{x}_{ij} + \upsilon_j \tag{9}$$

[5] Bell e Jones (p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

Limitações e outras formulações

- A formação de efeitos aleatórios supõe que[5]:
  - $Cov(x_{ij}; u_j) = 0$ e $Cov(x_{ij}; e_{ij}) = 0$
- Estas hipóteses frequentemente não se verificam[4].
- No entanto, é possível contornar este problema:
  - Formulação de Mundlak[6]:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{8}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + \beta_3 \bar{x}_{ij} + \upsilon_j \tag{9}$$

  - Formulação REWB[5]:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1^{RE} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{10}$$

$$\beta_{0j} = \beta_0 + \beta_2 z_j + (\beta_4 - \beta_1)\bar{x}_{ij} + \upsilon_j \tag{11}$$

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1(x_{ij} - \bar{x}_j) + \beta_4 \bar{x}_{ij} + \beta_2 z_j + (\upsilon_j + \varepsilon_{ij}) \tag{12}$$

[5] Bell e Jones (p. 138).
[6] Bell e Jones (p. 141).

Estudo de Caso

Criação dos dados

$$ValorUnitario = \beta_{0j} - 3,0 \cdot Area + \varepsilon_{ij} \tag{13}$$

$$\beta_{0j} = 3000 + 4000 \cdot A_{Vj} + 5,0 \cdot \overline{Area_j} + \upsilon_j \tag{14}$$

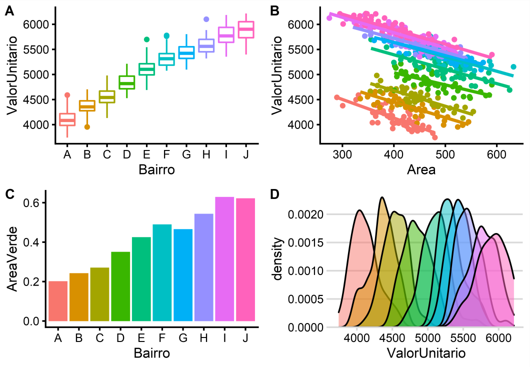


Figura 3: Dados simulados. Fonte: Os autores

Ajuste de modelos

- Para o ajuste dos modelos mistos não foram incluídos dados do bairro H.

	Dependent variable:			
	ValorUnitario			
	OLS		*linear mixed-effects*	
	(1)	(2)	(3)	(4)
Intercepto		5.197,55 (216,47)***	3.564,12 (188,59)***	2.928,45 (371,57)***
(Area - 400)	−2,92 (0,10)***	−2,94 (0,10)***	−2,92 (0,10)***	
Bairro A	4.127,71 (15,39)***			
Bairro B	4.445,83 (15,67)***			
Bairro C	4.670,14 (15,92)***			
Bairro D	5.075,49 (17,16)***			
Bairro E	5.398,45 (18,08)***			
Bairro F	5.645,72 (18,40)***			
Bairro G	5.673,11 (17,23)***			
Bairro H	5.728,11 (16,11)***			
Bairro I	5.831,91 (15,49)***			
Bairro J	5.903,05 (15,38)***			
Area				−2,94 (0,10)***
Area (contexto)				4,05 (0,81)***
Area Verde			3.975,12 (431,82)***	3.940,15 (205,04)***
Observations	500	450	450	450
Log Likelihood		−2.781,80	−2.764,57	−2.758,14
Akaike Inf. Crit.	6.120,87	5.571,60	5.539,13	5.528,27
Bayesian Inf. Crit.	6.171,44	5.588,04	5.559,68	5.552,93
Note:				*p<0,3; **p<0,2; ***p<0,1

Modas Condicionais

- Para o modelo misto simples, a variação não-explicada *entre* os agrupamentos é alta!

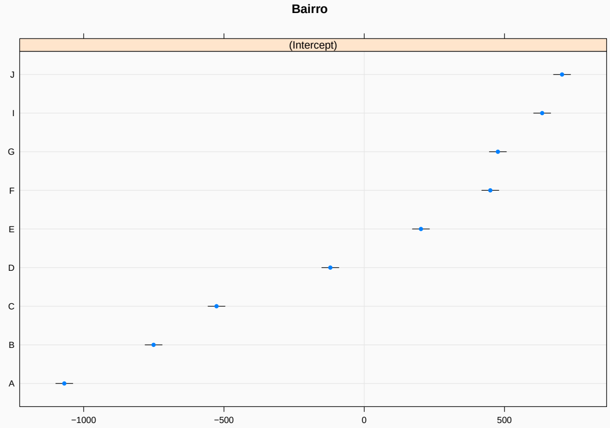


Figura 4: Modas Condicionais do modelo misto simples.

Modas Condicionais

- Com variáveis de segundo nível, a variação não-explicada *entre* os agrupamentos é reduzida!

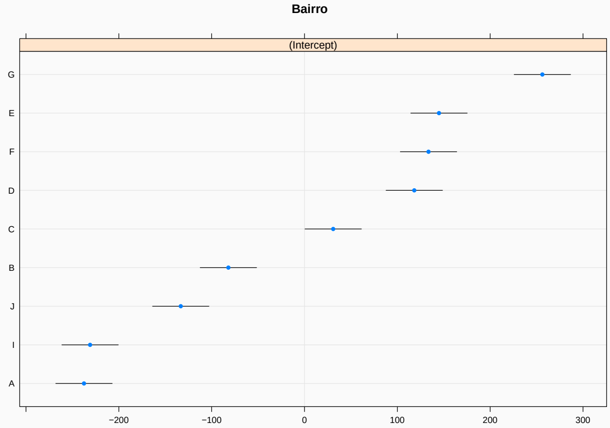


Figura 5: Modas Condicionais do modelo misto com variável de 2º nível.

Modas Condicionais

- Com a formulação de Mundlak, a variação não-explicada *entre* os agrupamentos é reduzida ainda mais!

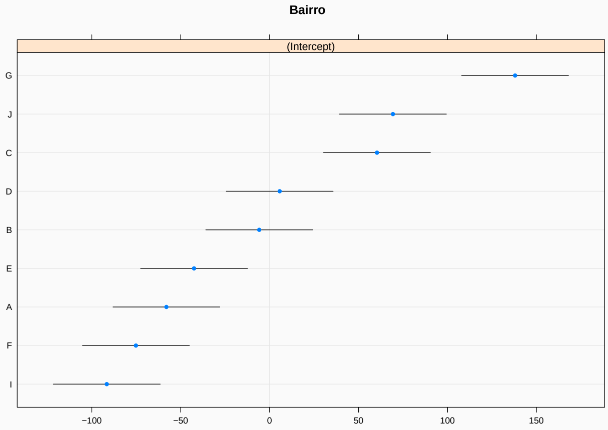


Figura 6: Modas Condicionais do modelo misto com variável de 2º nível.

Densidade dos parâmetros estimados

- Para o modelo misto simples, a variação não-explicada *entre* os agrupamentos (σ_1) é alta!

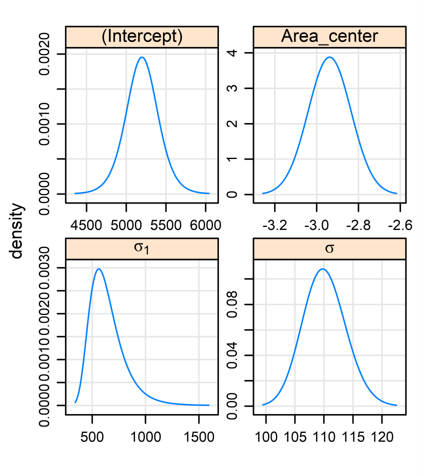


Figura 7: Densidades dos parâmetros estimados pelo modelo misto simples.

Densidade dos parâmetros estimados

- Com a introdução de variáveis de segundo nível, há redução da variação não-explicada *entre* os agrupamentos (σ_1)!

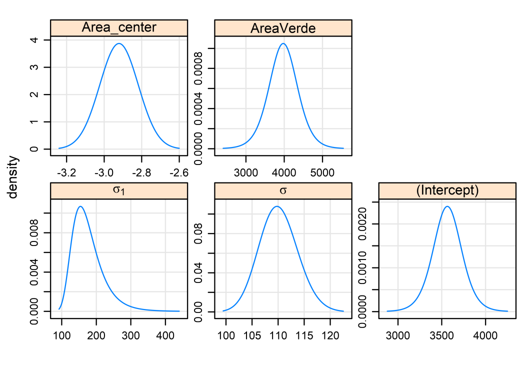


Figura 8: Densidades dos parâmetros estimados pelo modelo misto com variável de 2º nível.

Densidade dos parâmetros estimados

- Com a formulação de Mundlak, há redução ainda maior da variação não-explicada *entre* os agrupamentos (σ_1)!

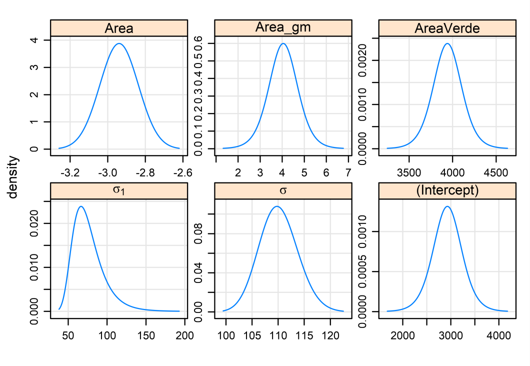


Figura 9: Densidades dos parâmetros estimados pelo modelo com formulação de Mundlak.

- Modelos com variáveis de segundo nível capazes de prever valores em agrupamentos fora da amostra!

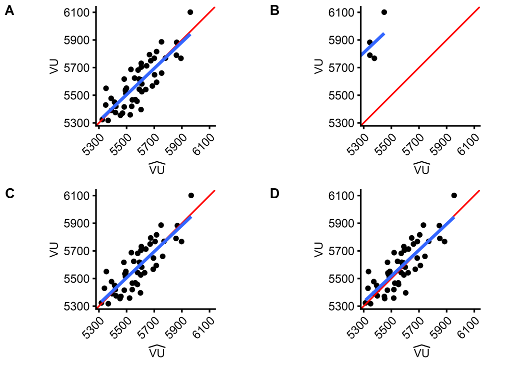


Figura 10: Poder de predição para o bairro H em diversos modelos. Fonte: Os autores.

Tabela 8: Previsão de valores para o lote padrão[1].

Efeitos	Valor Central	Limite Superior	Limite Inferior	Observações
Combinados	5.728,10	5.910,12	5.542,45	1
Bairro (aleatórios)	-6,43	149,31	-136,54	1
Fixos	5.725,28	5.910,05	5.549,70	1

Nota: [1] Para o bairro H, a partir do modelo misto com variável de 2º nível.

Tabela 9: Previsão de valores para o lote padrão[1].

Efeitos	Valor Central	Limite Superior	Limite Inferior	Observações
Combinados	5.713,74	5.866,18	5.562,96	1
Bairro (aleatórios)	2,13	136,18	-148,36	1
Fixos	5.714,68	5.866,14	5.564,00	1

Nota: [1] Para o bairro H, a partir do modelo com formulação de Mundlak.

Tabela 10: Previsão de valores para o lote padrão[1]

Efeitos	Valor Central	Limite Superior	Limite Inferior
Fixos	5.728,11	5.869,19	5.587,03

Nota: [1] Para o bairro H, a partir do modelo de efeitos fixos.

Conclusões

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada
  - Nos laudos de precisão, devido ao *borrowing strenght*

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada
    - Nos laudos de precisão, devido ao *borrowing strenght*
    - Na avaliação em massa, devido ao alto número de diferentes agrupamentos e à facilidade para modelagem de inclinações aleatórias

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada
  - Nos laudos de precisão, devido ao *borrowing strenght*
  - Na avaliação em massa, devido ao alto número de diferentes agrupamentos e à facilidade para modelagem de inclinações aleatórias
  - Na previsão do valor do solo em áreas adensadas, devido à possibilidade de previsão de valores em agrupamentos fora da amostra

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada
  - Nos laudos de precisão, devido ao *borrowing strenght*
  - Na avaliação em massa, devido ao alto número de diferentes agrupamentos e à facilidade para modelagem de inclinações aleatórias
  - Na previsão do valor do solo em áreas adensadas, devido à possibilidade de previsão de valores em agrupamentos fora da amostra
  - Na análise de dados em séries temporais ou em painel, devido à possibilidade de separação dos efeitos *dentro* e *entre* os agrupamentos (REWB)

Conclusões

- Os modelos mistos podem ter importantes aplicações na Engenharia de Avaliações, desde que seja adotada a formulação adequada
  - Nos laudos de precisão, devido ao *borrowing strenght*
  - Na avaliação em massa, devido ao alto número de diferentes agrupamentos e à facilidade para modelagem de inclinações aleatórias
  - Na previsão do valor do solo em áreas adensadas, devido à possibilidade de previsão de valores em agrupamentos fora da amostra
  - Na análise de dados em séries temporais ou em painel, devido à possibilidade de separação dos efeitos *dentro* e *entre* os agrupamentos (REWB)
  - Na confecção de índices de preços

Trabalhos Futuros

Modelagem de diversos níveis hierárquicos

$$
\begin{aligned}
VU_{ijk} &= \beta_{0jk} + \beta_{1jk} V_{1ijk} + \beta_{2jk} V_{2ijk} + \cdots + r_{ijk} \\
\beta_{0jk} &= \gamma_{00k} + \gamma_{01k} W_{1jk} + \gamma_{02k} W_{2jk} + \cdots + s_{0jk} \\
\beta_{1jk} &= \gamma_{10k} + \gamma_{11k} W_{1jk} + \gamma_{12k} W_{2jk} + \cdots + s_{1jk} \\
&\vdots \\
\gamma_{00k} &= \eta_{000} + \eta_{001} X_{1k} + \eta_{002} X_{2k} + \cdots + t_{00k} \\
\gamma_{01k} &= \eta_{010} + \eta_{011} X_{1k} + \eta_{012} X_{2k} + \cdots + t_{01k} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Referências i

- BELL, Andrew; FAIRBROTHER, Malcolm; JONES, Kelvyn. Fixed and Random effects models: making an informed choice. **Quality and Quantity**, v. 53, p. 1051–1074, mar. 2019. DOI: 10.1007/s11135-018-0802-x.
- BELL, Andrew; JONES, Kelvyn. Explaining Fixed Effects: Random Effects Modeling of Time-Series Cross-Sectional and Panel Data. **Political Science Research and Methods**, Cambridge University Press, v. 3, n. 1, p. 133–153, 2015. DOI: 10.1017/psrm.2014.7.
- BRILLINGER, David R. John Wilder Tukey (1915-2000). **Notices of the AMS**, v. 49, n. 2, p. 193–201, fev. 2002.
- JONES, Kelvyn; BULLEN, Nina. Contextual Models of Urban House Prices: A Comparison of Fixed- and Random-Coefficient Models Developed by Expansion. **Economic Geography**, [Clark University, Wiley], v. 70, n. 3, p. 252–272, 1994. ISSN 00130095, 19448287. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/143993>.