Avaliação através da moda, média ou mediana

Uma nova abordagem

Luiz Fernando Palin Droubi

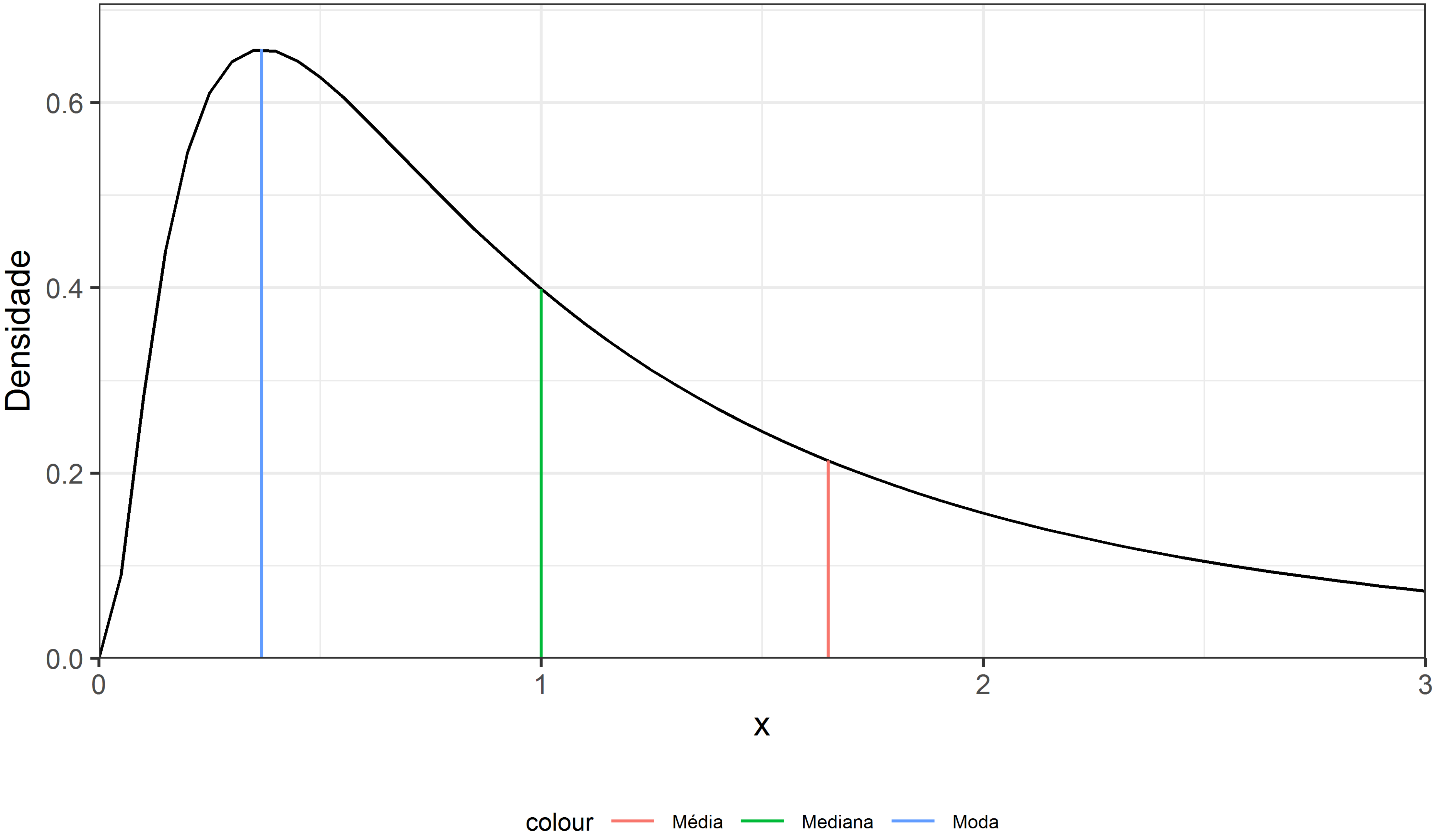
Norberto Hochheim

Willian Zonato

26/11/2018

Distribuição Lognormal

$\mu = \log(1),\ \sigma = \log(e)$



Regressão Linear

Revisão

Regressão linear

Origem

> The word “regression” is an allusion to the famous comment of Sir Francis Galton in the late 1800s regarding “regression toward the mean.” This referred to the fact that tall parents tend to have children who are less tall closer to the mean – with a similar statement for short parents. The predictor variable here might be, say, the father’s height F, with the response variable being, say, the son’s height S. Galton was saying that $E(S|F) < F$.

Regressão linear

Origem

> The word “regression” is an allusion to the famous comment of Sir Francis Galton in the late 1800s regarding “regression toward the mean.” This referred to the fact that tall parents tend to have children who are less tall closer to the mean – with a similar statement for short parents. The predictor variable here might be, say, the father’s height F, with the response variable being, say, the son’s height S. Galton was saying that E(S|F) < F.

Definição precisa

$$m_{Y;X}(t) = \mathbb{E}(Y|X = t)$$

Regressão linear

Origem

> The word “regression” is an allusion to the famous comment of Sir Francis Galton in the late 1800s regarding “regression toward the mean.” This referred to the fact that tall parents tend to have children who are less tall closer to the mean – with a similar statement for short parents. The predictor variable here might be, say, the father’s height F, with the response variable being, say, the son’s height S. Galton was saying that E(S|F) < F.

Definição precisa

$$m_{Y;X}(t) = \mathbb{E}(Y|X = t)$$

Notação

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p$$

$$\epsilon = Y - \mu(X)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p + \epsilon$$

Regressão linear

Notação

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p$$

$$\epsilon = Y - \mu(X)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p + \epsilon$$

Regressão linear

Notação

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p$$

$$\epsilon = Y - \mu(X)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p + \epsilon$$

O problema da retransformação

Regressão linear

Notação

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p$$

$$\epsilon = Y - \mu(X)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p + \epsilon$$

O problema da retransformação

- Sem transformação, temos:

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[\alpha + X\beta] + \mathbb{E}[\epsilon] = \alpha + X\beta$$

Regressão linear

Notação

$$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p$$

$$\epsilon = Y - \mu(X)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 t_1 + \ldots + \beta_p t_p + \epsilon$$

O problema da retransformação

- Sem transformação, temos:

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[\alpha + X\beta] + \mathbb{E}[\epsilon] = \alpha + X\beta$$

- Com transformação:

$$\ln(Y) = \alpha + X\beta + \epsilon \Leftrightarrow$$

$$Y = \exp(\alpha + X\beta)\exp(\epsilon) \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[\exp(\alpha + X\beta)]\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}[Y|X] = \exp(\alpha + X\beta)\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X]$$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$

- $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$$

- $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ é convexa, pois $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$

- $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ é convexa, pois $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] > \exp(\mathbb{E}[\epsilon])$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$

- $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ é convexa, pois $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] > \exp(\mathbb{E}[\epsilon])$
- $\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] > 1$

Regressão linear

O problema da retransformação

A desigualdade de Jensen

Se $\varphi(X)$ é convexa:

$\varphi\left(\mathbb{E}[X]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$

- $f(x) = x^2$ é convexa, pois $f''(x) = 2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \mathrm{e}^x$ é convexa, pois $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] > \exp(\mathbb{E}[\epsilon])$
- $\mathbb{E}[\exp(\epsilon)|X] > 1$

Isto explica o fator multiplicativo "introduzido" na equação de regressão.

Regressão Linear

$\mu(t)$ **minimiza MSPE**

Regressão Linear

$\mu(t)$ minimiza MSPE

Prova

Regressão Linear

$\mu(t)$ minimiza MSPE

Prova

1. c constante.

$$\mathbb{E}[(W-c)^2] = E[W^2 - 2cW + c^2] = E(W^2) - 2cE[W] + c^2$$

$$\frac{d\mathbb{E}[(W-c)^2]}{dc} = 0 \to 2E[W] + 2c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = E[W]$$

Regressão Linear

$\mu(t)$ minimiza MSPE

Prova

1. c constante.

$$\mathbb{E}[(W-c)^2] = E[W^2 - 2cW + c^2] = E(W^2) - 2cE[W] + c^2$$

$$\frac{d\mathbb{E}[(W-c)^2]}{dc} = 0 \to 2E[W] + 2c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = E[W]$$

1. $c = f(X)$

$$MSPE = \mathbb{E}[(Y - f(X))^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y - f(X))^2|X]$$

Regressão Linear

$\mu(t)$ minimiza MSPE

Prova

1. c constante.

$$\mathbb{E}[(W-c)^2] = E[W^2 - 2cW + c^2] = E(W^2) - 2cE[W] + c^2$$

$$\frac{d\mathbb{E}[(W-c)^2]}{dc} = 0 \to 2E[W] + 2c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = E[W]$$

1. $c = f(X)$

$$MSPE = \mathbb{E}[(Y - f(X))^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y - f(X))^2|X]$$

A função $f(X)$ que minimiza $\mathbb{E}[(Y - f(X))^2]$, por analogia ao item anterior, é a função $E(Y|X)$, ou seja, a média, *i.e.* $\mu(t)$. Então, a expectativa total $\mathbb{E}[\mathbb{E}[(Y - f(X))^2|X]]$, também é minimizada com este valor.

Distribuição Lognormal

Definição e propriedades

Distribuição Lognormal

Definição

Uma variável aleatória X tem distribuição lognormal se seu logaritmo $Y = log(X)$ tem distribuição normal.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

em que:

- μ é a mediana
- $\sigma > 0$ é o desvio-padrão

Distribuição Lognormal

Estimação dos parâmetros da distribuição

$$\bar{x}^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Distribuição Lognormal

Estimação dos parâmetros da distribuição

$$\bar{x}^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$s^* = \exp\left\{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\bar{x}^*}\right)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Distribuição Lognormal

Estimação dos parâmetros da distribuição

$$\bar{x}^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$s^* = \exp\left\{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\bar{x}^*}\right)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Valores comuns de s^*

$$1,4 \leq s^* \leq 3$$

Distribuição Lognormal

Estimação dos parâmetros da distribuição

$$\bar{x}^* = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$s^* = \exp\left\{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\bar{x}^*}\right)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Valores comuns de s^*

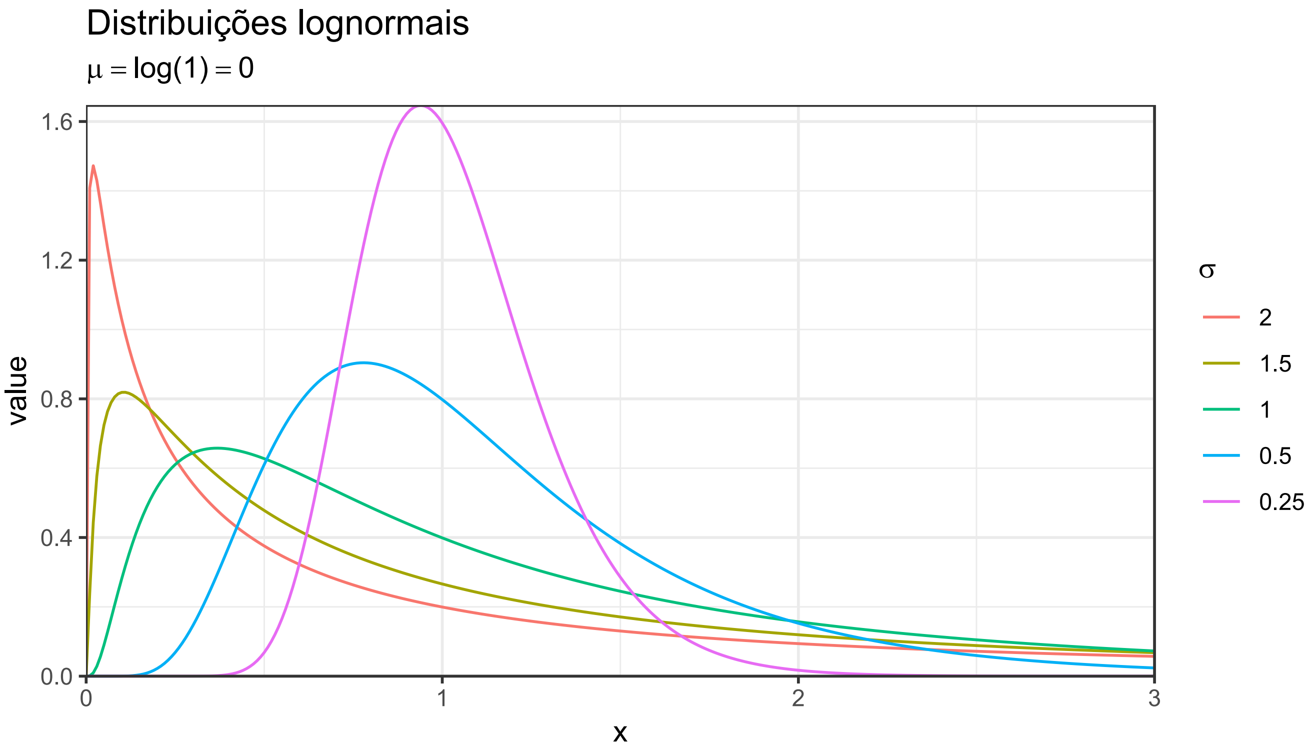
$$1,4 \leq s^* \leq 3$$

Valores extremos de s^*

$$1,1 \leq s^* \leq 33$$

Distribuição Lognormal

Efeito de σ na forma da distribuição



Distribuição Lognormal

Estimativas

Distribuição Lognormal

Estimativas

- O valor esperado (**média**) de X é:

$$E(X) = E(exp(Y)) = exp(E(Y) + 0,5\sigma^2)$$

$$E(x) = exp(\mu + 0,5\sigma^2)$$

Distribuição Lognormal

Estimativas

- O valor esperado (**média**) de X é:

$$E(X) = E(exp(Y)) = exp(E(Y) + 0,5\sigma^2)$$

$$E(x) = exp(\mu + 0,5\sigma^2)$$

- O valor da **mediana** é:

$$\nu = exp(\mu)$$

Distribuição Lognormal

Estimativas

- O valor esperado (**média**) de X é:

$$E(X) = E(exp(Y)) = exp(E(Y) + 0,5\sigma^2)$$

$$E(x) = exp(\mu + 0,5\sigma^2)$$

- O valor da **mediana** é:

$$\nu = exp(\mu)$$

- O valor da **moda** é:

$$M_o = exp(\mu - \sigma^2)$$

Distribuição Lognormal

Estimativas

- O valor esperado (**média**) de X é:

$$E(X) = E(exp(Y)) = exp(E(Y) + 0,5\sigma^2)$$

$$E(x) = exp(\mu + 0,5\sigma^2)$$

- O valor da **mediana** é:

$$\nu = exp(\mu)$$

- O valor da **moda** é:

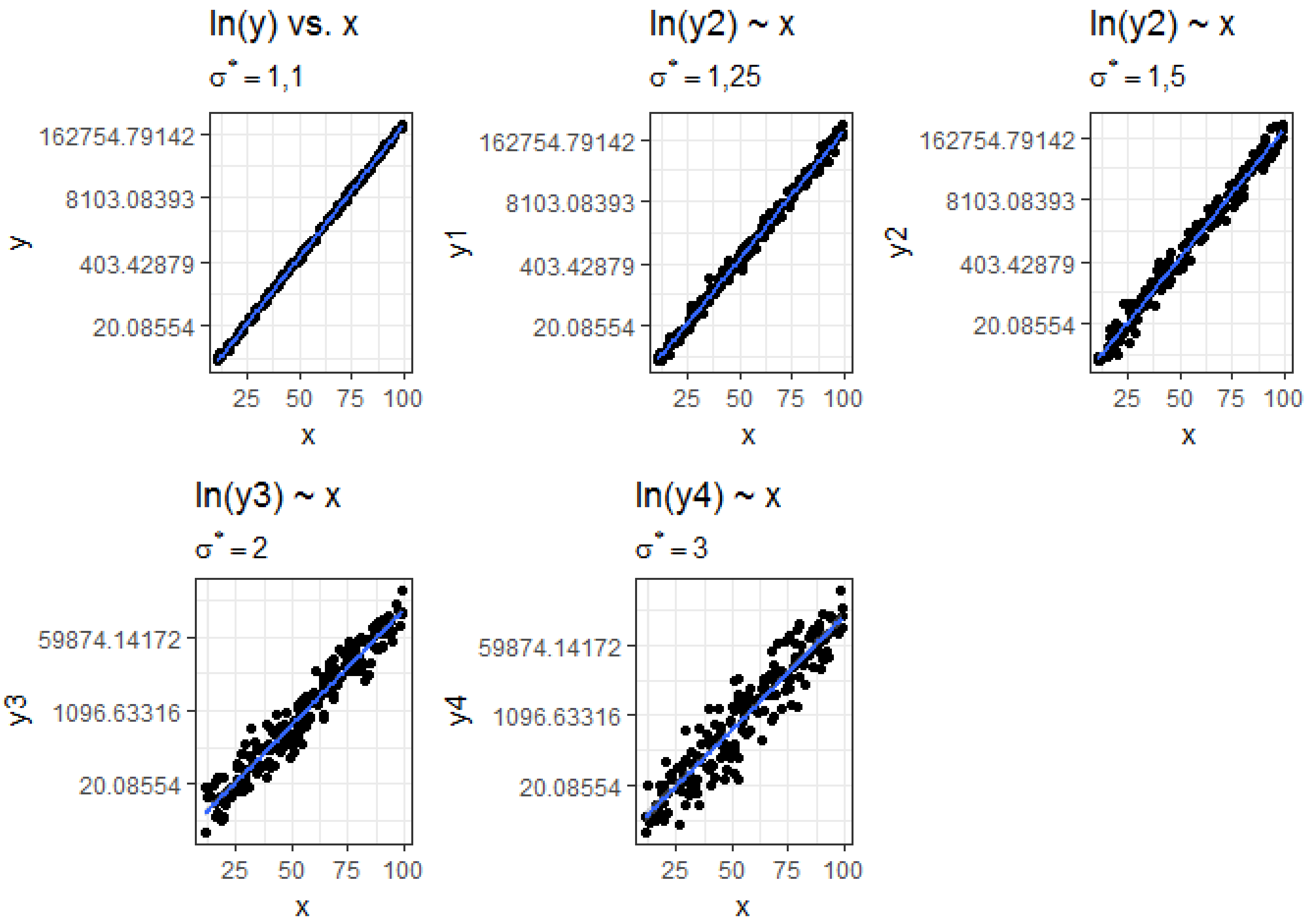
$$M_o = exp(\mu - \sigma^2)$$

Qual delas é a "melhor"?

Distribuição Lognormal

SIMULAÇÕES

Simulações



ln(y) vs. x
σ* = 1,1
162754.79142
8103.08393
403.42879
20.08554
y
25 50 75 100
x
ln(y2) ~ x
σ* = 1,25
162754.79142
8103.08393
403.42879
20.08554
y1
25 50 75 100
x
ln(y2) ~ x
σ* = 1,5
162754.79142
8103.08393
403.42879
20.08554
y2
25 50 75 100
x
ln(y3) ~ x
σ* = 2
59874.14172
1096.63316
20.08554
y3
25 50 75 100
x
ln(y4) ~ x
σ* = 3
59874.14172
1096.63316
20.08554
y4
25 50 75 100
x

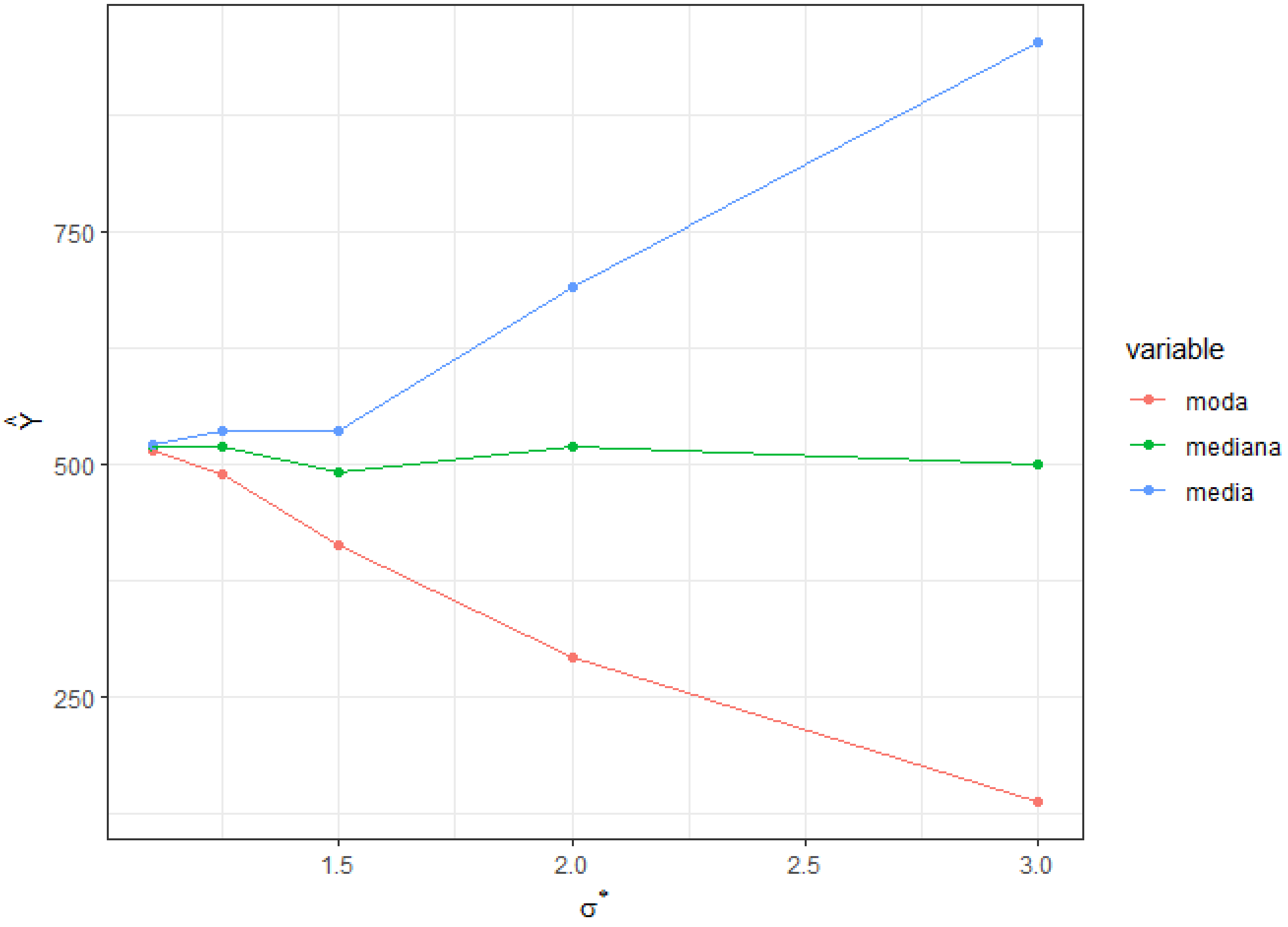
Simulações

Comparação dos diversos modelos gerados, com diferentes erro-padrão

	Dependent variable:				
	log(y)	log(y1)	log(y2)	log(y3)	log(y4)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
x	$0{,}125^{***}$	$0{,}125^{***}$	$0{,}126^{***}$	$0{,}126^{***}$	$0{,}130^{***}$
	(0,0003)	(0,001)	(0,001)	(0,002)	(0,003)
Constant	0,001	0,005	-0,083	-0,031	-0,304
	(0,017)	(0,044)	(0,075)	(0,136)	(0,205)
Observations	200	200	200	200	200
R^2	0,999	0,994	0,982	0,942	0,885
Adjusted R^2	0,999	0,994	0,982	0,942	0,885
Residual Std. Error (df = 198)	0,095	0,242	0,417	0,757	1,138
Note:			*p<0,1; **p<0,05; ***p<0,01		

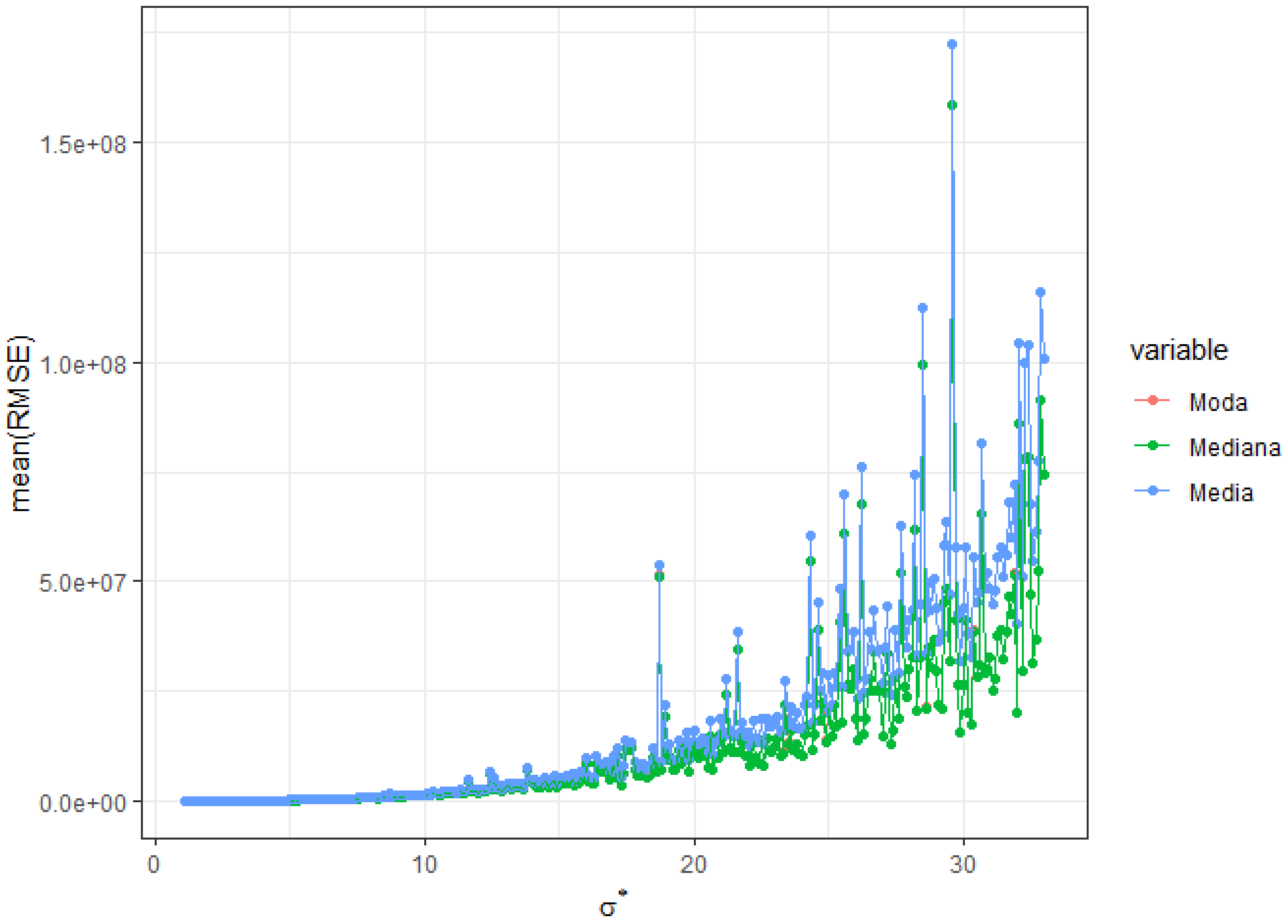
Simulações

$\hat{Y}$ **vs.** σ^*



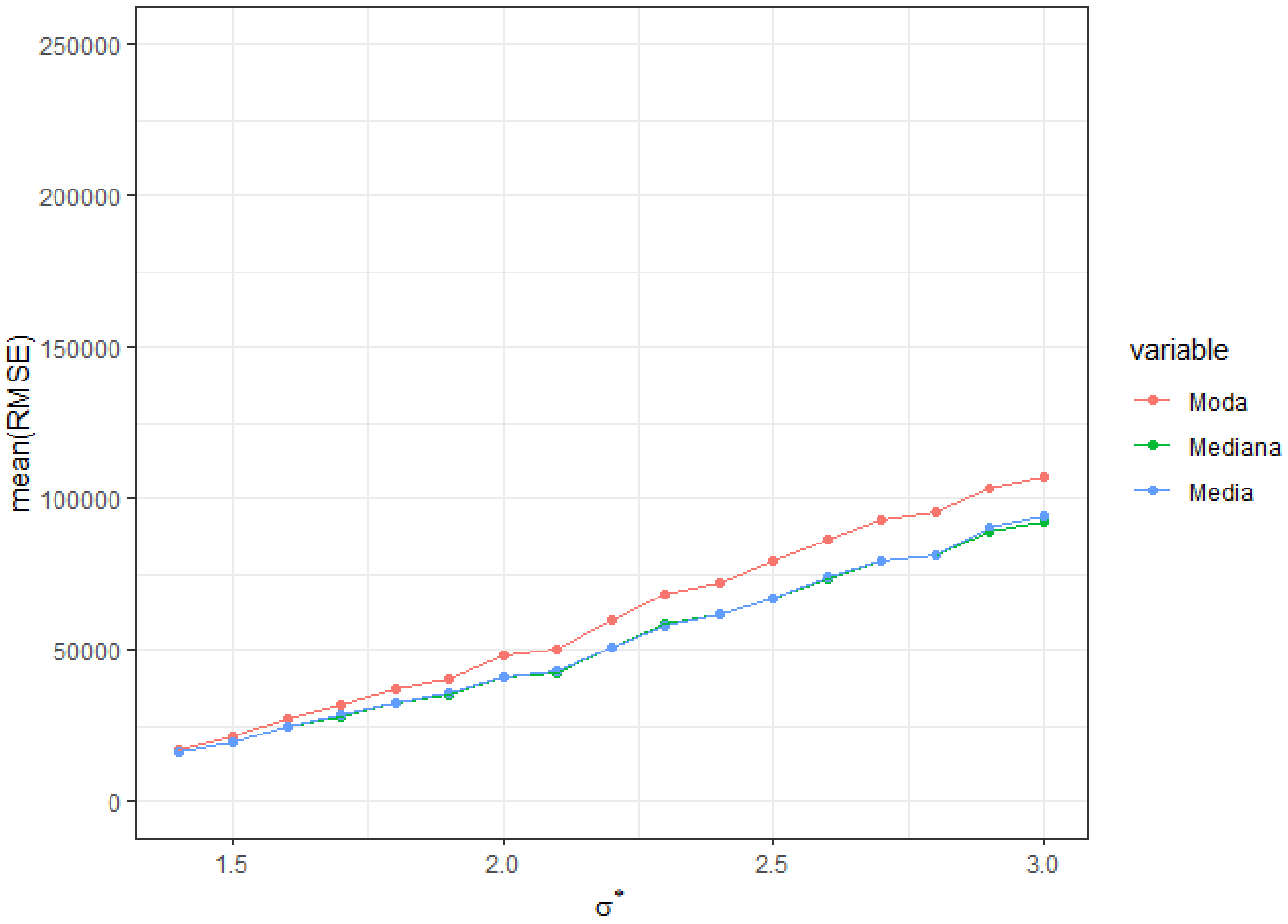
Simulações

$\overline{RMSE}(\sigma^*)$

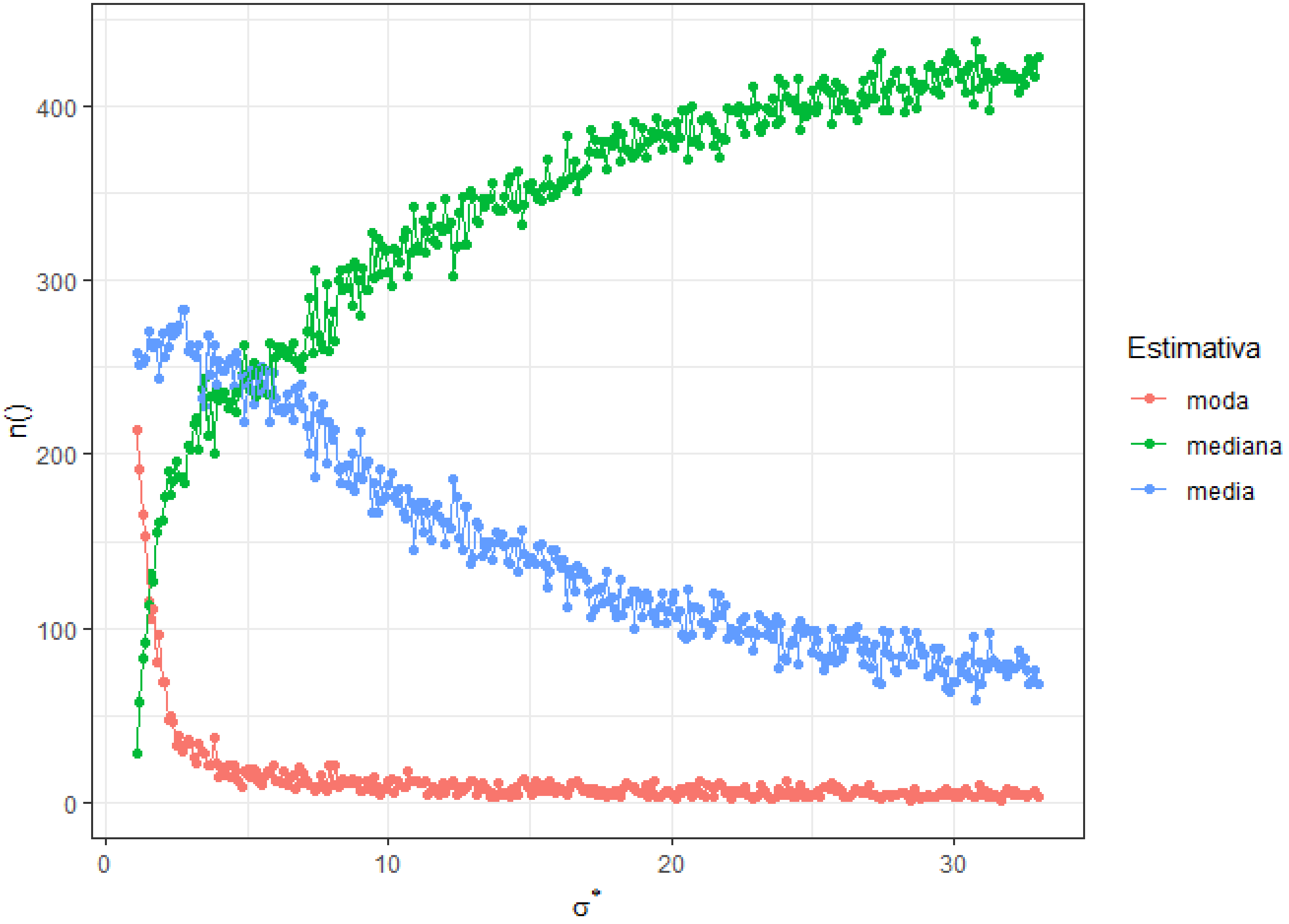


Simulações

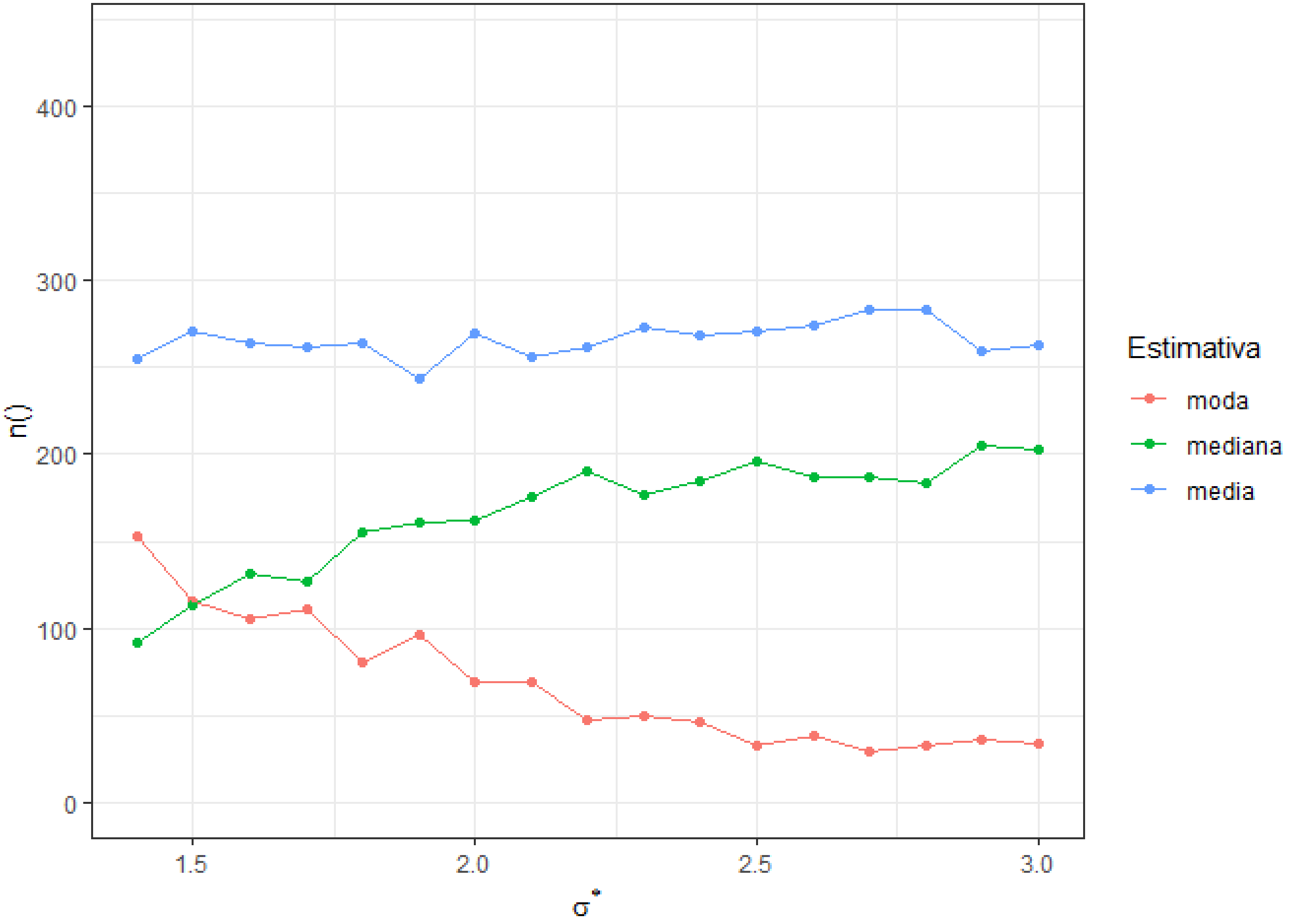
$\overline{RMSE}(\sigma^*)$



Simulações



Simulações

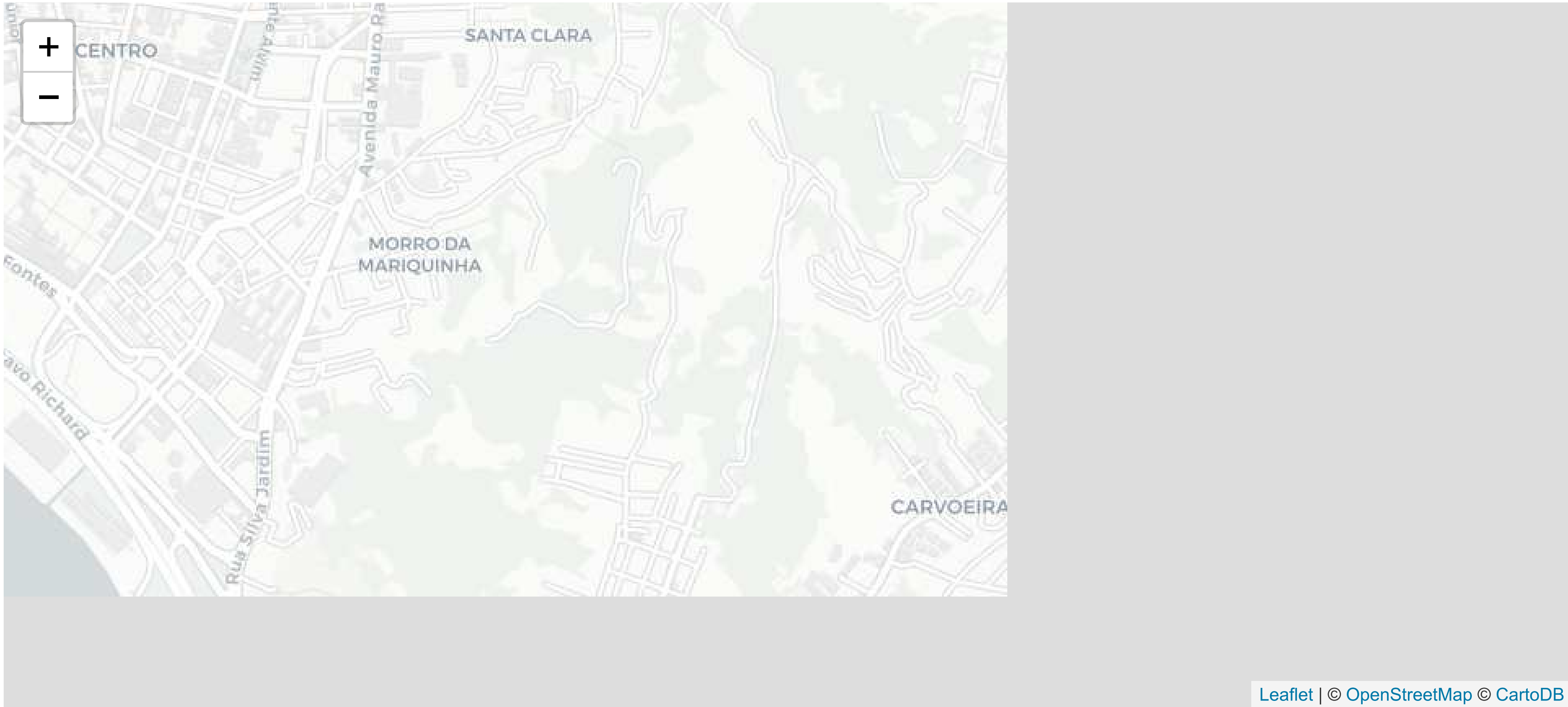


EXEMPLO

Com dados reais de mercado

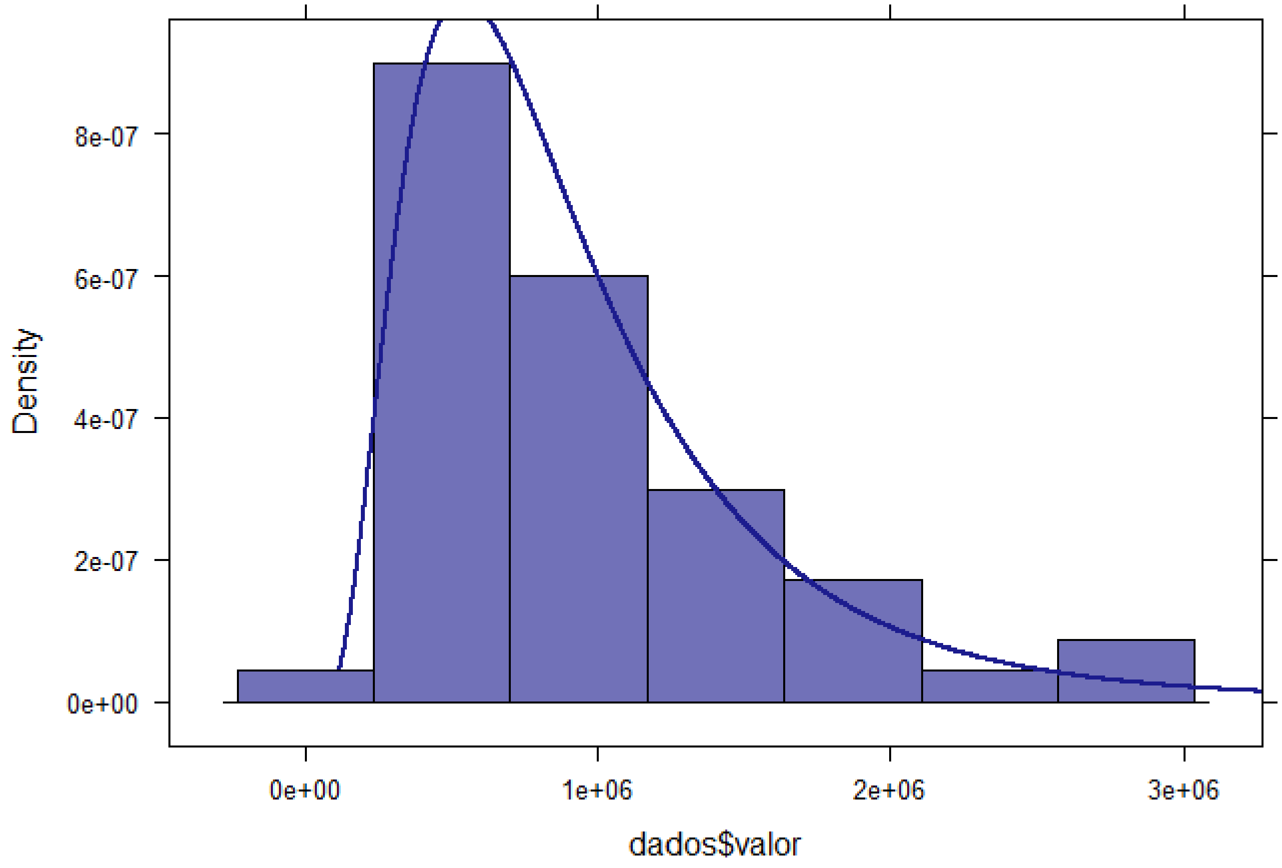
Exemplo

Florianópolis - Centro (2015)



Exemplo

Histograma da Variável Dependente



Exemplo

Estatísticas do Modelo

Statistical models

	Model 1
(Intercept)	13.564 [13.112; 14.016]*
area_total	0.001 [0.001; 0.002]*
quartos	0.164 [0.094; 0.233]*
suites	0.061 [-0.005; 0.127]
garagens	0.209 [0.143; 0.274]*
log(dist_b_mar)	-0.141 [-0.194; -0.087]*
I(padrao^-1)	-0.563 [-0.769; -0.357]*
R^2	0.956
Adj. R^2	0.950
Num. obs.	48
RMSE	0.136

* 0 outside the confidence interval

Exemplo

Impacto do erro-padrão da regressão na estimativa

Estimativa / Erro-Padrão	0,136	0,25	0,5	0,75
Moda	944.013,56	903.396,57	748.942,06	547.937,72
Dif. em relação à Mediana	-1,84%	-6,06%	-22,12%	-43,02%
Mediana	961.660,64	961.660,64	961.660,64	961.660,64
Média	970.607,51	992.187,03	1.089.704,27	1.273.993,36
Dif. em relação à Mediana	+0,93%	+3,17%	+13,31%	+32,48%

ESTIMADORES

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

A escolha natural seria: $T_1 = \bar{X}$

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

A escolha natural seria: $T_1 = \bar{X}$

Porém, se a amostragem for pequena, poderíamos utilizar: $T_2 = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}$

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

A escolha natural seria: $T_1 = \bar{X}$

Porém, se a amostragem for pequena, poderíamos utilizar: $T_2 = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}$

Embora se saiba que T_2 é um estimador viesado (mulheres são, em média, menores), temos:

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

A escolha natural seria: $T_1 = \bar{X}$

Porém, se a amostragem for pequena, poderíamos utilizar: $T_2 = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}$

Embora se saiba que T_2 é um estimador viesado (mulheres são, em média, menores), temos:

- Viés de T_1: $\mathrm{B}(T_1) = 0$
- Viés de T_2: $B(T_2) = (0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1$
- Variância de T_1: $\mathrm{Var}(T_1) = \sigma^2/n$
- Variância de T_2: $\mathrm{Var}^{(}T_2) = \mathrm{Var}(0,5\bar{X} + 0,5\bar{Y}) = 0,5^2\mathrm{Var}(\bar{X}) + 0,5^2\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \sigma^2/2n$

Exemplo

Sejam X e Y duas amostras de alturas de homens (X) e mulheres (Y). Assuma, por simplicidade que $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ e que a médias das populações sejam iguais a μ_X e μ_Y.

Suponha que, baseado nas amostras disponíveis, se pretenda estimar a altura de um homem qualquer na população.

A escolha natural seria: $T_1 = \bar{X}$

Porém, se a amostragem for pequena, poderíamos utilizar: $T_2 = \frac{\bar{X}+\bar{Y}}{2}$

Embora se saiba que T_2 é um estimador viesado (mulheres são, em média, menores), temos:

- Viés de T_1: $\mathrm{B}(T_1) = 0$
- Viés de T_2: $B(T_2) = (0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1$
- Variância de T_1: $\mathrm{Var}(T_1) = \sigma^2/n$
- Variância de T_2: $\mathrm{Var}^(T_2) = \mathrm{Var}(0,5\bar{X} + 0,5\bar{Y}) = 0,5^2\mathrm{Var}(\bar{X}) + 0,5^2\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \sigma^2/2n$

Como $\mathrm{MSE}(\theta) = \mathrm{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\mathrm{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\mathrm{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Como $\mathrm{MSE}(\theta) = \mathrm{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\mathrm{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\mathrm{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2$

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Como $\mathrm{MSE}(\theta) = \mathrm{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\mathrm{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\mathrm{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\text{Var}(\nu) = \text{Var}[\exp(W)]$

Como $\mathrm{MSE}(\theta) = \mathrm{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\mathrm{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\mathrm{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\mathrm{Var}(\nu) = \mathrm{Var}[\exp(W)]$
- $\mathrm{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$

Como $\mathrm{MSE}(\theta) = \mathrm{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\mathrm{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\mathrm{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\mathrm{Var}(\nu) = \mathrm{Var}[\exp(W)]$
- $\mathrm{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$
- $\mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}[\exp(W + \sigma^2/2)] = \mathrm{Var}[\exp(W).\exp(\sigma^2/2)]$
  - $\mathrm{Var}(\mu) = \exp(\sigma^2)\mathrm{Var}(\nu) \qquad (\mathrm{Var}(c.U) = c^2\mathrm{Var}(U))$

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\text{Var}(\nu) = \text{Var}[\exp(W)]$
- $\text{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$
- $\text{Var}(\mu) = \text{Var}[\exp(W + \sigma^2/2)] = \text{Var}[\exp(W).\exp(\sigma^2/2)]$
    - $\text{Var}(\mu) = \exp(\sigma^2)\text{Var}(\nu) \qquad (\text{Var}(c.U) = c^2\text{Var}(U))$
- $B(\mu) = 0$

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\text{Var}(\nu) = \text{Var}[\exp(W)]$

- $\text{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$

- $\text{Var}(\mu) = \text{Var}[\exp(W + \sigma^2/2)] = \text{Var}[\exp(W).\exp(\sigma^2/2)]$

  - $\text{Var}(\mu) = \exp(\sigma^2)\text{Var}(\nu) \qquad (\text{Var}(c.U) = c^2\text{Var}(U))$

- $B(\mu) = 0$

Então:

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\text{Var}(\nu) = \text{Var}[\exp(W)]$
- $\text{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$
- $\text{Var}(\mu) = \text{Var}[\exp(W + \sigma^2/2)] = \text{Var}[\exp(W).\exp(\sigma^2/2)]$
    - $\text{Var}(\mu) = \exp(\sigma^2)\text{Var}(\nu) \qquad (\text{Var}(c.U) = c^2\text{Var}(U))$
- $B(\mu) = 0$

Então:

$\text{MSE}(\nu) = \text{Var}(\nu) + \text{B}^2(\nu) = \text{Var}(\nu) + \left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2$

Como $\text{MSE}(\theta) = \text{Var}(\theta) + B^2(\theta)$:

- $\text{MSE}(T_1) = \sigma^2/n + 0^2 = \sigma^2/n$
- $\text{MSE}(T_2) = \sigma^2/2n + [(0,5\mu_1 + 0,5\mu_2) - \mu_1]^2 = \sigma^2/2n + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right)^2$

Portanto, T_1 somente será um melhor estimador que T_2 se:

$$\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right)^2 > \frac{\sigma^2}{2n}$$

Analogamente

- $\text{Var}(\nu) = \text{Var}[\exp(W)]$
- $\text{B}(\nu) = \nu - \mu = \frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu$
- $\text{Var}(\mu) = \text{Var}[\exp(W + \sigma^2/2)] = \text{Var}[\exp(W).\exp(\sigma^2/2)]$
    - $\text{Var}(\mu) = \exp(\sigma^2)\text{Var}(\nu) \qquad (\text{Var}(c.U) = c^2\text{Var}(U))$
- $B(\mu) = 0$

Então:

$\text{MSE}(\nu) = \text{Var}(\nu) + \text{B}^2(\nu) = \text{Var}(\nu) + \left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2$

$\text{MSE}(\mu) = \text{Var}(\mu) + \text{B}^2(\mu) = \exp(\sigma^2)\text{Var}(\nu)$

$$\mathrm{MSE}(\nu) = \mathrm{Var}(\nu) + \mathrm{B}^2(\nu) = \mathrm{Var}(\nu) + \left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2$$

$$\mathrm{MSE}(\mu) = \mathrm{Var}(\mu) + \mathrm{B}^2(\mu) = \exp(\sigma^2)\mathrm{Var}(\nu)$$

$$\mathrm{MSE}(\nu) = \mathrm{Var}(\nu) + \mathrm{B}^2(\nu) = \mathrm{Var}(\nu) + \left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2$$

$$\mathrm{MSE}(\mu) = \mathrm{Var}(\mu) + \mathrm{B}^2(\mu) = \exp(\sigma^2)\mathrm{Var}(\nu)$$

Logo, μ é um estimador melhor que ν se:

$$\mathrm{Var}(\nu) + \left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2 > \exp(\sigma^2)\mathrm{Var}(\nu)$$

$$\mathrm{Var}(\nu) > \frac{\left(\frac{\mu}{\exp(\sigma^2/2)} - \mu\right)^2}{1 - \exp(\sigma^2)}$$