第 *3-15* 讲: 矩阵计算

姓名： 林凡琪　　**学号：** *211240042*

评分： ______　　**评阅：** ______

2023 年 *3* 月 *1* 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (TC 28.1-2)

解答:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 8 & -6 & 7 \\ 12 & -7 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

题目 2 (TC 28.1-3)

解答:

已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

LUP 分解是:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -3.2/3.4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & 2.2 + \frac{11.52}{3.4} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

进行代换, 解出 $Ly = Pb$ 中的 y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.4 & -3.2/3.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix},$$

计算 y_1, y_2, y_3, 我们得到

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 + 35.2/3.4 \end{pmatrix}$$

因为 $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 0 & 3.4 & 3.6 \\ 0 & 0 & 2.2 + \frac{11.52}{3.4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 + 35.2/34 \end{pmatrix}$$

所以 $x = \begin{pmatrix} -3/19 \\ -1/19 \\ 49/19 \end{pmatrix}$

题目 3 (TC 28.1-6)

解答:
零矩阵始终具有 LU 分解，将 L 作为任意单位下三角矩阵，将 U 作为零矩阵，即上三角矩阵。

题目 4 (TC 28.1-7)

解答:
对于 LU-DECOMPOSITION, 确实是有必要的.
如果没有运行最外层 for 循环的第六行,u_{nn} 将会保留初始值 0, 而不是等于 a_{nn}
但实际上任何非奇异矩阵的 LU-DECOMPOSITION 分解都必须具有行列式值为正的 L 和 U. 但是如果 $u_{nn} = 0$, 那么 U 的行列式将会为 0.
K=N 时发生的最外层 for 循环的迭代不会改变最终答案, 因为 π 必须是一个 on a single element 的 permutation, 因此它不能是非平凡的.(并且第十六行的 for 循环根本不会运行)

题目 5 (TC 28.2-1)

解答:
It is obvious that multiplying and squaring matrices have essentially the same difficulty, since squaring a matrix is just multiplying it by itself.

题目 6 (TC 28.2-2)

解答:
设 A 是一个 $n \times n$ 的矩阵
不失一般性地, 我们假设 $n = 2^k$, 并且规定 $L(n/2) \leq cL(n)$ 其中 $c < 1/2$, 并且 $L(n)$ 是涨到 $n \times n$ 矩阵地 LUP 分解所需要的时间.
首先, 将 A 分解为

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ 再让 $A_1 = L_1U_1P_1$ 成为 A_1 的一个 LUP 分解.
把 U_1 分解为 $A_2P_1^{-1}$, 其中 $U_1 = [\overline{U}_1|B]$ 并且 $A_2P_1^{-1} = [C|D]$.
设 $F = D - C\overline{U}_1^{-1}B$.

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ C\overline{U}_1^{-1} & I_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & B \\ 0 & F \end{pmatrix} P_1$$

现在让 $F = L_2U_2P_2$ 为一个 F 的 LUP 分解, 并且令 $\overline{P} = \begin{pmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$.

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ C\overline{U}_1^{-1} & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{U}_1 & BP_2^{-1} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \overline{P}P_1$$

这就是 A 的一个 LUP 分解. 过程中我们完成了两次 LUP 分解, 一个常数的矩阵乘法和一个常数的矩阵逆运算. 因为矩阵逆运算和矩阵乘法等价, 所以我们得出运行时间是 $O(M(n))$

题目 7 (TC 28.2-3)

解答:
从 problem 28.2-2 可知, 我们能找到一个时间复杂度为 $O(M(n))$ 的 LU 分解算法. 所以我们运行那个算法并且将 U 对角线上的所有元素相乘, 这将会是原矩阵的行列式.

题目 8 (TC 28.3-1)

解答:
设 e_i 是一个除了第 i 位是 1, 其他位全是 0 的向量.
Ae_i 获取 A 的每一行并提取其中的第 i 行, 并将这些值放进列向量. 然后将其乘以左侧的 e_i^T, 得出该 quantity 的第 i 行.
因为 e_i 是非零的, 那么 quantity 一定是正的. 因为我们对每个 i 都进行一样的操作, 所以每个在对角线上的元素都是正数.

题目 9 (TC 28.3-3)

解答:
反证法:
假设存在一个 $a_{ij}, i \neq j$ 是最大的元素. 设 e_i 是一个除了第 i 位是 1, 其他位全是 0 的向量.
我们考虑 $(e_i - e_j)^T A(e_i - e_j)$.

$$\begin{aligned} (e_i - e_j)^{\mathrm{T}} A (e_i - e_j) &= a_{ii} - a_{ij} - a_{ji} + a_{jj} \\ &= a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} \leq 0 \end{aligned}$$

但 A 是正的, 所以我们的假设错误.
得证.

---

2 Open Topics

Open Topics 1 (TC Problem 28-1)

3 反馈