第 4-7 讲: 代数编码

姓名: 211240042　　**学号:** 林凡琪

评分: ______　　**评阅:** ______

2023 年 6 月 7 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (TJ 8-6(b,d))

解答:
(b)

	(011100)	(011011)	(111011)	(100011)	(000000)	(010101)	(110100)	(110011)
(011100)	0	3	4	6	3	2	2	5
(011011)	3	0	1	3	4	3	5	2
(111011)	4	1	0	2	5	4	4	1
(100011)	6	3	2	0	3	4	4	1
(000000)	3	4	5	3	0	3	3	4
(010101)	2	3	4	4	3	0	2	3
(110100)	2	5	4	4	3	2	0	3
(110011)	5	2	1	1	4	3	3	0

$d_{min} = 1$
(d)

	(011100)	(011011)	(111011)	(100011)	(000000)	(010101)	(110100)	(110011)
(011100)	0	3	4	6	3	2	2	5
(011011)	3	0	1	3	4	3	5	2
(111011)	4	1	0	2	5	4	4	1
(100011)	6	3	2	0	3	4	4	1
(000000)	3	4	5	3	0	3	3	4
(010101)	2	3	4	4	3	0	2	3
(110100)	2	5	4	4	3	2	0	3
(110011)	5	2	1	1	4	3	3	0

$d_{min} = 2$

题目 2 (TJ 8-7(c,d))

解答:
(c)
Null(H): (00000)(00100)(11010)(11110)(11001)(11101)(00011)(00111)
(5,3)-block
Generator:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
Null(H):
(0000000)(0001111)(0010110)(0011001)
(0100101)(0101010)(0110011)(0111100)
(1000011)(1001100)(1010101)(1011010)
(1100110)(1101001)(1110000)(1111111)
(7,4)-block
Generator:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

题目 3 (TJ 8-9)

解答:
$H(01111)^T = (001)^T \Rightarrow (01111) - > (01101)$
$H(10101)^T = (110)^T \Rightarrow multiplerrors$
$H(01110)^T = (110)^T \Rightarrow multiplerrors$
$H(00011)^T = (110)^T \Rightarrow multiplerrors$

题目 4 (TJ 8-11(b,d))

解答:
(b) 这是标准奇偶校验矩阵。相应的标准生成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可以至少纠错 1 位、检测 2 位.
(d) 这是标准奇偶校验矩阵. 相应的标准生成矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可以检测 1 位, 不可以纠错.

题目 5 (TJ 8-13)

解答:
(a)$(001)^T$
(b)$(101)^T$
(c)$(111)^T$
(d)$(011)^T$

题目 6 (TJ 8-19)

解答:
(1) 群 C 中权重都为奇数。
因为 $e \in C \wedge w(e) = 0$，显然不成立。
(2) 群 C 中权重都为偶数。
考虑群 $C = \{e\}$，此时显然成立，故存在权重都为偶数的情况。
(3) 群 C 中权重有奇有偶。
考虑 $c \in C_{odd}$，构造函数 $f : C_{even} \to C_{odd}$ by $x \to x + c$ 其中 $x \in C_{even}$(显然 $x + c \in C_{odd}$)。
one to one:
$\forall x_1, x_2 \in C_{even}, x_1 + c = x_2 + c \to x_1 = x_2$
onto:
$\forall y \in C_{odd}, \exists x = y + c^{-1} \in C_{even}, st.x + c = y$
So $|C_{even}| = |C_{odd}|$, 那么它们中的一半都有偶数权重

所以，每个码字的权重都是偶数，或者恰好一半的码字具有偶数权重。

题目 7 (TJ 8-21)

解答:
(a)error-correcting linear code
假设 H 矩阵为 $m \times n$ 的，对 $2^7 = 128$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 7 \\ n \leq 2^m - 1 \end{cases}$$

$m = 4, n = 11$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 11×7。
同理，当对 $2^8 = 256$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 8 \\ n \leq 2^m - 1 \end{cases}$$

$m = 4, n = 12$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 12×8。

(b)only error detection
假设 H 矩阵为 $m \times n$ 的，对 $2^7 = 128$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 7 \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$m = 1, n = 8$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 8×7。
同理，当对 $2^8 = 256$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 8 \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$m = 1, n = 9$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 9×8。

题目 8 (TJ 8-22)

解答:
(1)three information position:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)seven information position:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

题目 9 (TJ 8-23)

解答:
(a) 假设有 $n-m$ 位 information bits, m 位 check bits

$$\begin{cases} n-m=20 \\ n \le 2^m - 1 \end{cases}$$

解得 $m \ge 5$
(b) 假设有 $n-m$ 位 information bits, m 位 check bits

$$\begin{cases} n-m=32 \\ n \le 2^m - 1 \end{cases}$$

解得 $m \ge 6$

---

2 作业 (选做部分)

3 Open Topics

Open Topics 1 (各种花式距离)
请查阅资料，介绍曼哈顿距离、欧几里得距离、契比雪夫距离分别是什么意思，他们的典型应用是什么。你还有哪些创意，来定义二进制位串之间的距离?

Open Topics 2 (编码率)
解释什么是编码率，分析 hamming 码的最大编码率，分析还有比 hamming 码编码率更好的方法吗?

4 反馈