第 4-9 讲: NP 完全理论初步

姓名: 林凡琪　　**学号:** 211240042

评分: ______　　**评阅:** ______

2023 年 6 月 7 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (TC 34.1-5)

解答:
(1) 假设执行 k 次子例程。
则第一次输入的规模为 $O(n)$，输出的规模为 $O(n^c)$，时间为 $O(n^c)$。
则第 k 次输入的规模为 $O(n^{c^{k-1}})$，输出的规模为 $O(n^{c^k})$，时间为 $O(n^{c^k})$。
其中 c^k 为常数，为多项式时间。

若执行 n 次子例程。
则第 k 次输入的规模为 $O(n^{c^{n-1}})$，输出的规模为 $O(n^{c^n})$，时间为 $O(n^{c^n})$。
不为多项式时间。

题目 2 (TC 34.2-3)

解答:
将图中顶点标号为 $v_1, .., v_n$
从 v_1 开始依次做如下操作:
设和 v_1 相连的边集为 E_1.
任取 $e_1, e_2 \in E_1$，检验图 $G` = (V, (E - E_1) \vee (e_1, e_2))$ 是否有哈密顿回路。
因为图 G 存在哈密顿回路，则总存在上述 $G`$ 使得 $G`$ 中存在哈密顿回路。
找到存在哈密顿回路的 $G`$ 后，令 $G = G`$，继续对顶点 $v_2, v_3, ..., v_n$ 做上述操作。
显然若哈密顿回路问题是 P 问题, 则上述算法可在多项式时间内结束, 并找到顶点集。

题目 3 (TC 34.2-4)

解答:
假设 $L_1, L_2 \in NP$，A_1, A_2 为 L_1, L_2 的一个多项式验证算法。
对于 union:
对于输入的 (x,y)，算法 A: 若 $A_1(x,y)$ 可接受，或 $A_2(x,y)$ 可接受，则判定为接受，否则拒绝。
显然，其可在多项式时间验证，属于 NP.
对于 intersection:
对于输入的 (x,y)，算法 A: 若 $A_1(x,y)$ 可接受，并且 $A_2(x,y)$ 可接受，则判定为接受，否则拒绝。
显然，其可在多项式时间验证，属于 NP.
对于 concatenation:
对于输入的 (x,y)，算法 A: 若 $A_1(x[1,...,i], y[1,...,j])$ 可接受，并且 $A_2(x[i+1,...,n], y[j+1,...,m])$ 可接受，则判定为接受，否则拒绝。其中 $n = |x|, m = |y|$。
显然，其可在多项式时间验证，属于 NP.
Kleene star:
在 concatenation 中，我们将 (x, y) 各分成 2 段。在该算法中，我们参照该做法，将 x 分为不超过在 concatenation 的验证中，我们将 x 各分成不超过 $|x|$ 段，y 分成不超过 $|y|$ 段，若每段都可接受，则判定为接受，否则拒绝。
讨论:
若 $L \in P$，则 $\overline{L} \in P$。若 $L \in NPC$，则目前没有确定的答案，对 $\overline{L}$ 给出明确的界定。

题目 4 (TC 34.3-2)

解答:
若 $L_1 \leq L_2$，则存在多项式时间的转换函数 $f(x)$，其中 $x \in L_1, f(x) \in L_2$
若 $L_2 \leq L_3$，则存在多项式时间的转换函数 $g(x)$，其中 $x \in L_2, g(x) \in L_3$
从而有 $g(f(x))$ 为多项式时间的转换函数，其中 $x \in L_1, g(f(x)) \in L_3$
故 $L_1 \leq L_3$

题目 5 (TC 34.4-3)

解答:
对于有 n 个变量的布尔公式, 列出其真值表的时间复杂度为 $\Omega(2^n)$，故该方法不能多项式时间规约

题目 6 (TC 34.2-11)

解答:
数学归纳法:
若 n = 3，则其为 K_3，显然存在哈密顿回路
假设对于所有点数为 k $(3 \leq k < n)$ 的连通图都成立
则当 $k = n$ 时
令 T 表示 G 的任意生成树，取任意一点 x，并且移除，可以得到 T 的若干个连通块 $G_1, G_2, \cdot\cdot\cdot, G_l$

对于任意 $|G_i| > 1$，则选出 $u, v \in G_i$，满足 $e(u,x) \in G_i$，$e(u,v) \in G_i$。根据归纳假设 G_i 包含一条由 u 到 v 的哈密顿通路。
若 $|G_i| = 1$，则将该点视为该联通块内的哈密顿通路。
显然，从 v 出发，依次遍历每个联通块，在每个联通块内按哈密顿通路遍历，即可找到哈密顿回路。
综上得证.

题目 7 (TC 34.4-7)

解答:
设有 n 个变量, m 个子句, 对于变量 $x_1, x_2, ..., x_n$, 每个变量创建两个顶点 x_i 和 $\neg x_i$。
则若有子句 $a \vee b$，则添加 $(\neg a, b), (\neg b, a)$ 两条边。
tarjan 缩点，若存在 $x_i . \neg x_i$ 在同一强连通分量里则不可满足。否则可满足。
复杂度 $O(n+m)$

题目 8 (TC 34.5-6)

解答:
(1)
首先，我们证明哈密顿路径问题是 NP 问题。若给出证书 y，我们只需检验 y 是否构成排列，并且 y 中相领点之间是否存在边即可。显然可多项式时间验证，故为 NP 问题。
(2)
证明可将哈密顿回路问题规约到哈密顿通路。
对于图中的每一条边 $e(u,v) \in G$
构造 $G_1, V(G_1) = V(G) \vee \{u_{new}, v_{new}\}, E(G_1) = E(G) \vee \{(u_{new}, u), (v_{new}, v)\} / \{(u,v)\}$
下证 G 中存在哈密顿回路当且仅当存在符合构造的 G_1，其存在哈密顿通路。
若在原图 G 中存在哈密顿回路，则显然若 (u,v) 属于哈密顿圈，在删去 (u,v) 构造的 G_1 中，存在一条 u_{new} 出发，v_{new} 结束的哈密顿路径。
若在 G_1 中存在哈密顿通路，则一定是条 u_{new} 出发，v_{new} 结束的哈密顿路径。原图 G 中显然存在哈密顿回路。
调用需要 $O(m)$ 次，显然调用为多项式时间规约。
得证。

---

2 作业 (选做部分)

题目 1 (TC 34.5-2)

解答:

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (NP)
The name “NP” stands for “nondeterministic polynomial time.” The class NP was originally studied in the context of nondeterminism, but this book uses the somewhat simpler yet equivalent notion of verification. Hopcroft and Ullman [180] give a good presentation of NP-completeness in terms of nondeterministic models of computation.

阅读 TC 参考文献 [180]，介绍 Hopcroft 等人的 NP 问题定义，并说说两种定义方法是一致的吗？为什么？

John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation. Addison-Wesley, 1979.

Open Topics 2 (TSP is NP-hard)
证明旅行商问题是 NPC 问题.

4 反馈