

第 4-10 讲: 近似算法

姓名: 林凡琪 学号: 211240042

评分: _____ 评阅: _____

2023 年 6 月 7 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (JH 4.2.1.4)

解答:

假设在机器 M_l 上满足有 $Time(M_l) = cost(I)$, 且其最后一个执行的任务为 p_k 。
根据该任务调度的性质, 可得

$$\begin{aligned} opt(I) &\geq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{m} \\ cost(I) - p_k &\leq \frac{\sum_{i=1}^n [i \neq k] \cdot p_i}{m} \\ \frac{\sum_{i=1}^n [i \neq k] \cdot p_i}{m} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{m} \end{aligned}$$

结合以上, 可得

$$opt(I) \geq cost(I) - p_k$$

又有

$$opt(I) \geq p_k$$

于是

$$opt(I) \geq cost(I) - opt(I)$$

即

$$\frac{cost(I)}{opt(I)} \leq 2$$

综上得证。

题目 2 (JH 4.2.1.5)

解答:

在 GMS 问题中, 我们可以构造 $2m+1$ 个任务, 其中有 3 个任务的用时为 m , 用时为 $m+1$ 到 $2m-1$ 的各有两个, 当有 m 个机器时。

最优的分配方案是: $(m,m,m), (m+1,2m-1), (m+2,2m-2), \dots, (2m-1,m+1)$, 总用时为 $3m$ 在贪心解法中, $(m,m,2m-1)$ 是调度最长的机器上的分配, $cost(I) = 4m-1$

因此, 近似比为 $\frac{4m-1}{3m}$

题目 3 (JH 4.2.3.3)

解答:

dist:

对于任意 $(G, c) \in L_\Delta$, 由于三角不等式, $\frac{c(\{u,v\})}{c(\{u,p\})+c(\{p,v\})} < 1$, 所以 $dist(G, c) = 0$ 。

枚举 u, v, p 的时间复杂度为 $O(n^3)$, 可以在多项式时间内计算。

因此, dist 是 distance functions。

$dist_k$:

对于任意 $(G, c) \in L_\Delta$, 由于三角不等式, $\frac{c(\{u,v\})}{\sum_{i=1}^k c(\{p_i, p_{i+1}\})} < 1$, 所以 $dist_k(G, c) = 0$ 。

枚举路径并判断的时间复杂度为 $O(n^k + k)$, 可以在多项式时间内计算。

因此, $dist - k$ 是 distance functions。

distance:

对于任意 $(G, c) \in L_\Delta$, 由于 dis_k 的性质, $distance(G, c) = 0$ 。

枚举 $dist_k$ 中 k 的复杂度为 $O(k)$, 且 $dist_k$ 可以在多项式时间内计算, 所以 distance 可以在多项式时间内计算。

因此, distance 是 distance functions。

题目 4 (JH 4.2.3.4)

解答:

(1)

对于任意 $(G, c) \in L_I$, $h_{index}(w) = 0$

计算 the canonical order of words 与输入规模同阶, 故若输入规模 $O(n)$, h_{index} 必为多项式可计算。

综上, h_{index} 为 distance function。

(2)

对于距离 r , 有

$$\delta_{r,\epsilon} = \max\{\delta, R_A(I) | I \in BALL_{r,h}(L_I)\}$$

由 canonical order 的性质, 可知上述集合为有限集, 是可取 max 的。

因此其对任意 r 存有 $\delta_{r,\epsilon}$ 近似算法。

故其为稳定

2 作业 (选做部分)

3 Open Topics

Open Topics 1 (Δ -TSP)

找出一个 Δ -TSP 问题的近似解, 并证明这个解的近似度界, 说明这个问题是 NPO 的哪一类问题?

Open Topics 2 (SCP)

介绍 SCP 问题, 证明它属于 NPO(IV), 介绍它的贪心近似算法, 并证明它的近似比 (JH 算法 4.3.2.11)

4 反馈