第 2 讲：什么样的推理是正确的？

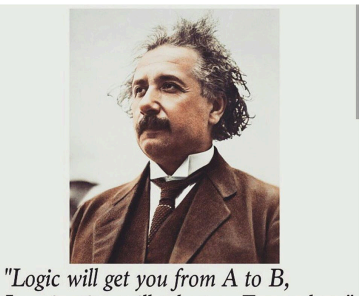
姓名： 林凡琪　　**学号：** 211240042

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 9 月 30 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助，请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

- 消除对“符号”的恐惧
- 培养与“逻辑”的亲密情感



1　作业（必做部分）

题目（改编自 UD Exercise 2.1: Propositions）
以下哪些是命题？请简要说明理由。

(1) $X + 6 = 0$

(2) $X = X$

(3) 哥德巴赫猜想

(4) 今天是雨天

(5) 明天是晴天

(6) 明天是周二

(7) 这句话是假话

7是悖论
3也是命题，因为它的真假客观上存在，只不过目前无法证明。
就像明天的天气客观上存在，我们同样无法确定（预报不算确定）

解答：
(2)(4)(5)(6)(7) 都是命题。
因为这些都是只能对或者只能错的句子。
(1) 不是命题。因为 x 不是确定的量。

题目（关于笛卡尔的一则笑话：Joke）
笛卡尔是法国著名哲学家、物理学家、数学家、神学家。有一天，他走进一家酒吧。酒吧服务员问，“要来一杯吗？”。笛卡尔说，“I think not” ① 。话音刚落，笛卡尔消失了。

(1) 请问，这则笑话的笑点在哪 ② ？

(2) 请问，这则笑话在逻辑上是否有漏洞？

图 1: René Descartes (1596 ∼ 1650)

① 嗯，在这道题里，笛卡尔讲英语。
② 想想笛卡尔说过什么（英文版本）？

解答：

(1) 笑点：笛卡尔说过我思故我在，而在笑话里说了"我不思"所以他消失了。

(2) 在逻辑上有漏洞。"我思"是"我在"的充分条件，而不是必要条件，所以"我不思"不能推导出"我不在"。

题目 (UD Problem 2.5: Truth Table)

解答：

P	Q	$\neg P$	$Q \wedge \neg P$	$\neg(Q \wedge \neg P)$	$P \to \neg(Q \wedge \neg P)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

题目 (UD Problem 2.7 (a, c, f): Negation)

解答：

(a) I won't do my homework or I won't pass this class.

(b) Seven isn't an integer or even.

(c) T is continuous and T isn't bounded.

(d) I can't eat dinner and go to the show.

(e) x is odd and x isn't prime.

(f) The number x is prime and even.

题目 (UD Problem 2.16: Liar)

解答：

(a)Arnie 是 truth-teller，如果她是 liar 那么她所说的话的前提条件是假的，整句话就是真的，与她是 liar 矛盾。

(b)Arnie 和 Barnie 是 truth-teller, 如果她是 liar 那么她所说的话的前提条件是假的，整句话就是真的，与她是 liar 矛盾。

题目 (UD Problem 3.3 (d): Contrapositive and Converse)

解答：

(a)contrapositive:Id you don't live in a white house, then you aren't the President of the United States.

converse:If you live in a white house, then you are the President od the United States.

(b)contrapositive:If you don't need eggs,then you aren't going to bake a souffle.
converse:If you need eggs, then you are going to bake a souffle.
(c)contrapositive:If x is not an integer, then x is not a real number.
converse:If x is an integer, then x is a real number.
(d)contrapositive:If x^2 >= 0 , then x is not a real number.
converse:If $x^2 < 0$, then x is a real number.

题目 (UD Problem 3.10: Breakfast)

解答：
only cereal.

题目 (UD Problem 3.12: Truth Table)

解答：

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \to (Q \vee \neg P)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

结论：$P \to Q$ 的真假性与 $P \to (Q \vee \neg P)$ 一致

题目 (UD Problem 4.1: Formalization)

解答：
(a)$\forall x, \exists y$, x=2y;
(b)$\forall y, \exists x$, x=2y;
(c)$\forall x, \forall y$,x=2y;
(d)$\exists x, \exists y$,x=2y;
(e)$\exists x, y$,x=2y;

题目 (两种连续性：Continuity)
A function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ is called

- *pointwise continuous* if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x-y| < \delta$, we have that $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

- *uniformly continuous* if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(1) 请用一阶谓词逻辑公式表示上述定义。

(2) 请比较两种连续性的"强弱"关系，并举例说明。

解答：
(1)

pointwise continuous:$\forall x(x \in \mathbb{R}), \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0(y \in \mathbb{R} \wedge |x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$

uniformly continuous:$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0(\forall x, y \in \mathbb{R} \bigwedge |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

(2) 后者的连续性更强。比如 y=x^2 不满足 uniformly continuous，但满足 pointwise continuous.

题目（UD Problem 4.5 (*j, k*)：Negation）

解答：
(a) ∃ x ∈ R, x^2 <= 0.

(b) There is an odd integer is not nonzero.

(c) I am hungry, and I don't eat chocolate.

(d) There is a girl that she likes every boy.

(e) For every x , g(x) <= 0.

(f) There exists an x there isn't a y such that xy = 1.

(g) For all y ,there exsits an x such that xy != 0.

(h) x^6= 0, for all y such that xy != 1.

(i) x > 0, there exists a y,xy^2 < 0.

原句中if A, then B暗含了一个forall
也即forall x, A -> B
因此需要否定成exists

(j) There exsits an $\epsilon > 0$, for all $\delta > 0$ such that if x is a real number with $|x-1| < \delta$, then $|x^2-1|$ >= ϵ .

(k) There exists a real number M, for all real numbers N such that | f(n)| <= M for all n > N.

题目（UD Problem 4.9 (*a, c*)：Negation）

解答：
(a)∃ x,((x∈ $\mathbf{Z} \bigwedge \neg(\exists, (y \in \mathbf{Z} \bigwedge x = 7y)) \rightarrow \forall z \in \mathbf{Z}, x \neq 2z)$)

(b)If x is not a multiple of seven,then x is even.

(c)The negation is true.For example,47 is not a multiple of seven,but 47 is odd.

题目（UD Problem 4.20：Prove/Disprove）

(1)的逆否命题是"不爱Sam就不爱Bill"
因此可以推出(3)

解答：
(a)false. 爱 Bill 是爱 Sam 的充分条件但不是必要条件。

(b)false.Susie 穿着红裙子去舞会是我不呆在家的必要条件，不是充分条件。

(c) 假的。t>m>l>0

(d) 真的。因为 My name is Stewart 是真的，所以 my name is Igor 是假的，且 Every little breeze seems to whisper Louise or my name is Igor 必有一真，所以 Every little breeze seems to whisper Louise 是真的。

(e) 假的。蓝房子隔壁是黑房子，不代表黑房子一定再蓝房子隔壁。

(f) 真的。因为 y>1/5，所以第一句的结论是假的，但因为第一句整句话是真的，所以第一句的前提也是假的，即 x>=5.

(g) 假的。n>M 是 $n^2 > M^2$ 的必要条件，但不是充分条件。

(h) 真的。因为 y<=z，所以第一句的结论是假的，但因为第一句整句话是真的，所以第一句的前提也是假的，即 y <= x or y <=0.

---

2 作业 (选做部分)

题目 (Hilbert 式的命题逻辑推理系统)
我们平常使用的推理系统是自然推理系统。本题介绍另一种推理系统，称为 Hilbert 式的推理系统。它的特点是有多条公理，但只有一条推理规则，而且推理是线性的。对于本题而言，我们只需要使用其中两条公理 (其中, α, β, γ 为任意命题):

图 2: David Hilbert (1862 ~ 1943)

(a) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(b) $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$

推理规则是: 从 α 与 $\alpha \to \beta$, 可以推出 β。

问题: 请在上述公理系统内 ③ 证明 $\alpha \to \alpha$。

③ 这意味着，你能且仅能使用该系统中规定的公理以及推理规则。

解答：

---

3 Open Topics

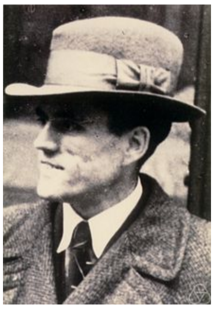


图 3: Gerhard Gentzen (1909 ~ 1945)

Open Topics 1 (自然推理系统)
请结合 Coq Logic.v 介绍命题逻辑的自然推理系统 (Designed by Gerhard Gentzen)。
参考资料:

- Logic.v in Coq
- Natural Deduction for Propositional Logic @ cs.cornell.edu
- Natural Deduction for Propositional Logic @ leanprover.github.io
- Natural Deduction for First Order Logic @ leanprover.github.io

解答：

Open Topics 2 (前束范式)
介绍一阶谓词逻辑中的前束范式 (Prenex Normal Form), 如:

- 定义
- 转换方法与举例

- 用途简介

参考资料:

- Prenex normal form @ wiki

解答：

---

4 订正

5 反馈

你可以写 [4]：

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
  英语真的好难：(
- 希望深入了解的内容
- ···

[4] 优先推荐 ProblemOverflow