

第 2 讲: 什么样的推理是正确的?

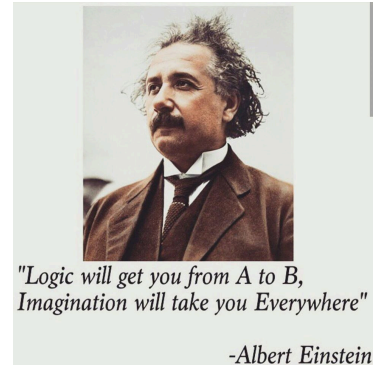
姓名: 林凡琪 学号: 211240042

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 9 月 30 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

- 消除对“符号”的恐惧
- 培养与“逻辑”的亲密情感



1 作业 (必做部分)

题目 (改编自 UD Exercise 2.1: Propositions)

以下哪些是命题? 请简要说明理由。

- (1) $X + 6 = 0$
- (2) $X = X$
- (3) 哥德巴赫猜想
- (4) 今天是雨天
- (5) 明天是晴天
- (6) 明天是周二
- (7) 这句话是假话

解答:

(2)(4)(5)(6)(7) 都是命题。

因为这些都是只能对或者只能错的句子。

(1) 不是命题。因为 x 不是确定的量。

题目 (关于笛卡尔的一则笑话: Joke)

笛卡尔是法国著名哲学家、物理学家、数学家、神学家。有一天, 他走进一家酒吧。酒吧服务员问, “要来一杯吗?”。笛卡尔说, “I think not”^①。话刚落, 笛卡尔消失了。

- (1) 请问, 这则笑话的笑点在哪^②?
- (2) 请问, 这则笑话在逻辑上是否有漏洞?



图 1: René Descartes (1596 ~ 1650)

① 嗯, 在这道题里, 笛卡尔讲英语。

② 想想笛卡尔说过什么 (英文版本)?

解答:

(1) 笑点: 笛卡尔说过我思故我在, 而在笑话里说了”我不思”所以他消失了。

(2) 在逻辑上有漏洞。“我思”是“我在”的充分条件, 而不是必要条件, 所以“我不思”不能推导出“我不在”。

题目 (UD Problem 2.5: Truth Table)

解答:

P	Q	$\neg P$	$Q \wedge \neg P$	$\neg(Q \wedge \neg P)$	$P \rightarrow \neg(Q \wedge \neg P)$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	T

题目 (UD Problem 2.7 (a, c, f): Negation)

解答:

- (a) I won't do my homework or I won't pass this class.
- (b) Seven isn't an integer or even.
- (c) T is continuous and T isn't bounded.
- (d) I can't eat dinner and go to the show.
- (e) x is odd and x isn't prime.
- (f) The number x is prime and even.

题目 (UD Problem 2.16: Liar)

解答:

(a) Arnie 是 truth-teller, 如果她是 liar 那么她所说的话的前提条件是假的, 整句话就是真的, 与她是 liar 矛盾。

(b) Arnie 和 Barnie 是 truth-teller, 如果她是 liar 那么她所说的话的前提条件是假的, 整句话就是真的, 与她是 liar 矛盾。

题目 (UD Problem 3.3 (d): Contrapositive and Converse)

解答:

(a) contrapositive: If you don't live in a white house, then you aren't the President of the United States.

converse: If you live in a white house, then you are the President of the United States.

(b)contrapositive:If you don't need eggs,then you aren't going to bake a souffle.

converse:If you need eggs, then you are going to bake a souffle.

(c)contrapositive:If x is not an integer, then x is not a real number.

converse:If x is an integer, then x is a real number.

(d)contrapositive:If $x^2 \geq 0$, then x is not a real number.

converse:If $x^2 < 0$, then x is a real number.

题目 (UD Problem 3.10: Breakfast)

解答:

only cereal.

题目 (UD Problem 3.12: Truth Table)

解答:

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg P$	$Q \vee \neg P$	$P \rightarrow (Q \vee \neg P)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

结论: $P \rightarrow Q$ 的真假性与 $P \rightarrow (Q \vee \neg P)$ 一致

题目 (UD Problem 4.1: Formalization)

解答:

(a) $\forall x, \exists y, x=2y$;

(b) $\forall y, \exists x, x=2y$;

(c) $\forall x, \forall y, x=2y$;

(d) $\exists x, \exists y, x=2y$;

(e) $\exists x, y, x=2y$;

题目 (两种连续性: Continuity)

A function f from \mathbb{R} to \mathbb{R} is called

- *pointwise continuous* if for every $x \in \mathbb{R}$ and every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

- *uniformly continuous* if for every real number $\epsilon > 0$, there exists real $\delta > 0$ such that for every $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| < \delta$, we have that $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(1) 请用一阶谓词逻辑公式表示上述定义。

(2) 请比较两种连续性的“强弱”关系，并举例说明。

解答:

(1)

pointwise continuous: $\forall x(x \in \mathbb{R}), \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0(y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

uniformly continuous: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0(\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

(2) 后者的连续性更强。比如 $y = x^2$ 不满足 *uniformly continuous*, 但满足 *pointwise continuous*.

题目 (UD Problem 4.5 (j, k): Negation)

解答:

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.

(b) There is an odd integer is not nonzero.

(c) I am hungry, and I don't eat chocolate.

(d) There is a girl that she likes every boy.

(e) For every x , $g(x) \leq 0$.

(f) There exists an x there isn't a y such that $xy = 1$.

(g) For all y , there exists an x such that $xy \neq 0$.

(h) $x^6 = 0$, for all y such that $xy \neq 1$.

(i) $x > 0$, there exists a $y, xy^2 < 0$.

(j) There exists an $\epsilon > 0$, for all $\delta > 0$ such that if x is a real number with $|x - 1| < \delta$, then $|x^2 - 1| \geq \epsilon$.

(k) There exists a real number M , for all real numbers N such that $|f(n)| \leq M$ for all $n > N$.

题目 (UD Problem 4.9 (a, c): Negation)

解答:

(a) $\exists x, ((x \in \mathbb{Z} \wedge \neg(\exists(y \in \mathbb{Z} \wedge x = 7y)) \rightarrow \forall z \in \mathbb{Z}, x \neq 2z))$

(b) If x is not a multiple of seven, then x is even.

(c) The negation is true. For example, 47 is not a multiple of seven, but 47 is odd.

题目 (UD Problem 4.20: Prove/Disprove)

解答:

(a) false. 爱 Bill 是爱 Sam 的充分条件但不是必要条件。

(b) false. Susie 穿着红裙子去舞会是不呆在家的必要条件，不是充分条件。

(c) 假的。 $t > m > 1 > 0$

(d) 真的。因为 My name is Stewart 是真的, 所以 my name is Igor 是假的, 且 Every little breeze seems to whisper Louise or my name is Igor 必有一真, 所以 Every little breeze seems to whisper Louise 是真的。

(e) 假的。蓝房子隔壁是黑房子, 不代表黑房子一定再蓝房子隔壁。

(f) 真的。因为 $y > 1/5$, 所以第一句的结论是假的, 但因为第一句整句话是真的, 所以第一句的前提也是假的, 即 $x > 5$ 。

(g) 假的。 $n > M$ 是 $n^2 > M^2$ 的必要条件, 但不是充分条件。

(h) 真的。因为 $y \leq z$, 所以第一句的结论是假的, 但因为第一句整句话是真的, 所以第一句的前提也是假的, 即 $y \leq x$ 或 $y \leq 0$ 。

2 作业 (选做部分)

题目 (Hilbert 式的命题逻辑推理系统)

我们平常使用的推理系统是自然推理系统。本题介绍另一种推理系统, 称为 Hilbert 式的推理系统。它的特点是有多条公理, 但只有一条推理规则, 而且推理是线性的。对于本题而言, 我们只需要使用其中两条公理 (其中, α, β, γ 为任意命题):

(a) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(b) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

推理规则是: 从 α 与 $\alpha \rightarrow \beta$, 可以推出 β 。

问题: 请在上述公理系统内^③ 证明 $\alpha \rightarrow \alpha$ 。

解答:



图 2: David Hilbert (1862 ~ 1943)

^③ 这意味着, 你能且仅能使用该系统中规定的公理以及推理规则。

3 Open Topics

Open Topics 1 (自然推理系统)

请结合 Coq [Logic.v](#) 介绍命题逻辑的自然推理系统 (Designed by Gerhard Gentzen)。
参考资料:

- [Logic.v in Coq](#)
- [Natural Deduction for Propositional Logic @ cs.cornell.edu](#)
- [Natural Deduction for Propositional Logic @ leanprover.github.io](#)
- [Natural Deduction for First Order Logic @ leanprover.github.io](#)

解答:



图 3: Gerhard Gentzen (1909 ~ 1945)

Open Topics 2 (前束范式)

介绍一阶谓词逻辑中的前束范式 (Prenex Normal Form), 如:

- 定义
- 转换方法与举例

- 用途简介

参考资料:

- [Prenex normal form @ wiki](#)

解答:

4 订正

5 反馈

你可以写 ^④ :

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
英语真的好难: (
- 希望深入了解的内容
- ...

^④ 优先推荐 [ProblemOverflow](#)