第 4-3 讲: 群同态基本定理与正规子群

姓名： 朱宇博　　**学号：** 191220186

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 3 月 17 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业（必做部分）

题目 1 (TJ 9-11)
Find five non-isomorphic groups of order 8.

解答:
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8$, Q_8, D_4

题目 2 (TJ 9-16)
Find the order of each of the following elements.
(a) (3,4) in $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$
(b) (6,15,4) in $\mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_{24}$
(c) (5,10,15) in $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_{25}$
(d) (8,8,8) in $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{80}$

解答:
(a)
3 在 $\mathbb{Z}_4$ 中的 order 是 4，4 在 $\mathbb{Z}_6$ 中的 order 是 3，故 (3,4) 的 order 为 lcm(3,4)=12
(b)
6 在 $\mathbb{Z}_{30}$ 中的 order 是 5，15 在 $\mathbb{Z}_{45}$ 中的 order 是 3，4 在 $\mathbb{Z}_{24}$ 中的 order 是 6, 故 (3,5,6) 的 order 为 lcm(3,5,6)=30
(c)
5 在 $\mathbb{Z}_{25}$ 中的 order 是 5，10 在 $\mathbb{Z}_{25}$ 中的 order 是 5，15 在 $\mathbb{Z}_{25}$ 中的 order 是 5, 故 (5,10,15) 的 order 为 lcm(5,10,15)=5
(d)
8 在 $\mathbb{Z}_{10}$ 中的 order 是 5，8 在 $\mathbb{Z}_{24}$ 中的 order 是 3，8 在 $\mathbb{Z}_{80}$ 中的 order 是 10, 故 (8,8,8) 的 order 为 lcm(5,3,10)=30

题目 3 (TJ 9-23)
Prove or disprove the following assertion. Let G, H, and K be groups. If $G \times K \cong H \times K$, then $G \cong H$.

解答:
True.
$G \times K \cong H \times K$, 可知存在一个双射 $\sigma : G \times K \to H \times K$, 且满足

$$\sigma((g_1 \circ g_2, k_1 \circ k_2)) = \sigma((g_1, k_1)) \circ \sigma((g_2, k_2))$$

设函数 $\phi : H \times K \to H : \phi(h, k) = h, h \in H, k \in K$
现证引理：对于任意的 $k \in K$，对于固定的 $g_1 \in G$，存在唯一的 $h_1 \in H$, 使得 $\phi(\sigma((g_1, k))) = h_1$
反证法：假设存在 k_1, k_2, 使得 $\phi(\sigma((g_1, k_1))) \neq \phi(\sigma((g_1, k_2)))$
则存在 g_2, 使得

$$\sigma((g_1, k_1)) \circ \sigma((g_2, k)) = \sigma((g_1 \circ g_2, k_1 \circ k))$$

则有

$$\phi(\sigma((g_1, k_1))) \circ \phi(\sigma((g_2, k))) = \phi(\sigma((g_1 \circ g_2, k_1 \circ k)))$$

则对 (g_1, k_2) 有

$$\phi(\sigma((g_1, k_2))) \circ \phi(\sigma((g_2, k))) \neq \phi(\sigma((g_1 \circ g_2, k_2 \circ k)))$$

与同构定义相矛盾，故引理得证
定义函数 $\sigma_2 : G \to H, \sigma_2(g) = h$ 当且仅当存在 k_1, k_2 使得 $\sigma(g, k_1) = (h, k_2)$
由引理易得函数 2 为双射函数。由函数 σ 的同构性质易得函数 σ_2 满足同构性质 $\sigma_2(a) \circ \sigma_2(b) = \sigma_2(a \circ b)$
综上，有 $G \cong H$

题目 4 (TJ 10-1(a,c))
For each of the following groups G, determine whether H is a normal subgroup of G. If H is a normal subgroup, write out a Cayley table for the factor group G/H.
(a)$G = S_4$ and $H = A_4$
(c)$G = S_4$ and $H = D_4$

解答:
(a)
对于任意的 $g \in A_4$，则 g 为偶排列，g^{-1} 为偶排列，则 gA_4g^{-1} 仍为偶排列，$gA_4g^{-1} \subset A_4$
对于任意的 $g \in S_4/A_4$，则 g 为奇排列，g^{-1} 为奇排列，则 gA_4g^{-1} 为偶排列，$gA_4g^{-1} \subset A_4$
故 $\forall g \in A_4, gA_4g^{-1} \subset A_4$
故 H 为 G 的 Normal group.
对于 A_4，其 coset 为 $A_4, (12)A_4$
(b)

	A_4	$(12)A_4$
A_4	A_4	$(12)A_4$
$(12)A_4$	$(12)A_4$	A_4

对于 $g = (1,2) \in G, h = (1,2,3,4) \in H, ghg^{-1} = (1342) \notin H$
故 H 不为 G 的 Normal group.

题目 5 (TJ 10-11)
If a group G has exactly one subgroup H of order k, prove that H is normal in G.

解答：
由 Proposition 6.9 可知，$|gH| = |H|$
由 Theorem 6.8 可知，$|gH| = |Hg|$
因为只有一个子群的 order 是 k，故 $gH = Hg$, H 为 normal group

题目 6 (TJ 10-12)
Define the centralizer of an element g in a group G to be the set

$$C(g) = \{x \in G : xg = gx\}.$$

Show that C(g) is a subgroup of G. If g generates a normal subgroup of G, prove that C(g) is normal in G.

解答：
Prove: $C(g)$ is a subgroup of G
$eg = eg \to e \in C(g)$
$\forall h \in C(g), hg = gh \to g = h^{-1}gh \to gh^{-1} = h^{-1}g \to h^{-1} \in C(G)$
$\forall h_1, h_2 \in C(g), (h_1g = gh_1, h_2g = gh_2) \to h_1h_2g = h_1gh_2 = gh_1h_2 \to h_1h_2 \in C(g)$
综上，$C(g)$ 是 G 的 subgroup.

Prove: If g generates a normal subgroup of G, prove that C(g) is normal in G.
引理 1: $\forall x \in g, xg^n = g^nx$
Since $xg^n = gxg^{n-1} = g^2xg^{n-2} = ... = g^nx$.

$\forall h \in G, hgh^{-1} = g^n \to \exists i, hg^ih^{-1} = g$ 因此可将 h 写为 ghg^{-i}
对于任意的 $x \in C(G), hxh^{-1} = ghg^{-i}xg^ih^{-1}g^{-1}$。由引理 1，我们可以得到 $hxh^{-1} = ghg^{-i}xg^ih^{-1}g^{-1} = ghxh^{-1}g{-}1$。
可以得到 $ghxh^{-1} = hxh^{-1}g$。因此 $hxh^{-1} \in C(g)$。由定义可知，$C(G)$ 是 normal group.

题目 7 (TJ 11-5)
Describe all of the homomorphisms from $\mathbb{Z}_{24}$ to $\mathbb{Z}_{18}$.

解答：
$\phi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{18} : \phi(g) = kg \mod 18 (k = 0, 3, 6, 9, 12, 15)$

题目 8 (TJ 11-2(b,d,e))

解答：
(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix}$$

$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$, 故为同态
kernel:$\{0\}$
(d)
$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$, (行列式的性质)。故为同态
kernel: 所有行列式等于 0 的二阶矩阵。
(e)
$\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$, 故为同态。
kernel: 所有 $b = 0$ 的二阶矩阵。

---

2 作业 (选做部分)

题目 1 (SageMath 学习)
学习 TJ 第 9、10/11 章关于 SageMath 的内容

解答:

题目 2 (TJ 11-17)

解答:

题目 3 (6、8 阶群)
请给出同构意义下的所有 6 阶、8 阶群。

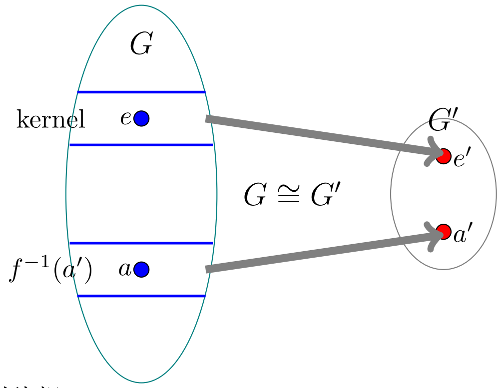
解答:

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (群同态第二定理)
请证明群同态第二定理。

Open Topics 2 (同构猜想)



请证明或证否下列猜想

- Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像不相交
- Kernel 和任意的 G' 中非单位元元素的逆像同势
- 任意的 G' 中元素的逆像不相交且同势
- 任意的 G' 中元素的逆像必定是 kernel 的某个陪集

4 反馈