

## 第 4-10 讲: 近似算法

姓名: 朱宇博      学号: 191220186

评分: \_\_\_\_\_      评阅: \_\_\_\_\_

2021 年 5 月 19 日

请独立完成作业, 不得抄袭。  
若得到他人帮助, 请致谢。  
若参考了其它资料, 请给出引用。  
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

### 题目 1 (JH 4.2.1.4)

**解答:**

假设在机器  $M_l$  上满足有  $Time(M_l) = cost(I)$ , 且其最后一个执行的任务为  $p_k$ 。  
根据该任务调度的性质, 可得

$$\begin{aligned} opt(I) &\geq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{m} \\ cost(I) - p_k &\leq \frac{\sum_{i=1}^n [i \neq k] \cdot p_i}{m} \\ \frac{\sum_{i=1}^n [i \neq k] \cdot p_i}{m} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{m} \end{aligned}$$

结合以上, 可得

$$opt(I) \geq cost(I) - p_k$$

又有

$$opt(I) \geq p_k$$

于是

$$opt(I) \geq cost(I) - opt(I)$$

即

$$\frac{cost(I)}{opt(I)} \leq 2$$

综上得证。

---

### 题目 2 (JH 4.2.1.5)

**解答:**

在 GMS 问题中, 当有  $m$  个机器时, 我们可构造  $2m + 1$  个 task, 其中有 3 个 task 的用时为  $m$ , 用时为  $m + 1$  到  $2m - 1$  的各有两个。

最优的分配方案:  $(m, m, m), (m+1, 2m-1), (m+2, 2m-2), \dots, (2m-1, m+1)$ , 总用时为  $3m$

在贪心解法中,  $(m, m, 2m-1)$  为调度最长的机器上的分配,  $cost(I) = 4m - 1$

故有近似比  $\frac{4m-1}{3m}$

### 题目 3 (JH 4.2.3.3)

**解答:**

dist:

对于任意  $(G, c) \in L_\Delta$ , 由于三角不等式,  $\frac{c(\{u, v\})}{c(\{u, p\}) + c(\{p, v\})} < 1, dist(G, c) = 0$

枚举  $u, v, p$  为  $O(n^3)$ , 多项式时间可计算。

综上, dist 为 distance functions。

$dist_k$ :

对于任意  $(G, c) \in L_\Delta$ , 由于三角不等式,  $\frac{c(\{u, v\})}{\sum_{i=1}^k c(\{p_i, p_{i+1}\})} < 1, dist_k(G, c) = 0$

枚举路径加判定为  $O(n^k + k)$ , 多项式时间可计算。

综上,  $dist - k$  为 distance functions。

distance:

对于任意  $(G, c) \in L_\Delta$ , 由于  $dis_k$  的性质,  $distance(G, c) = 0$

枚举  $dist_k$  中  $k$  复杂度  $O(k)$ , 且  $dist_k$  多项式可计算, 故 distance 多项式时间可计算。

综上, distance 为 distance functions。

### 题目 4 (JH 4.2.3.4)

**解答:**

(1)

对于任意  $(G, c) \in L_I$ ,  $h_{index}(w) = 0$

计算 the canonical order of words 与输入规模同阶, 故若输入规模  $O(n), h_{index}$  必为多项式可计算。

综上,  $h_{index}$  为 distance function。

(2)

对于距离  $r$ , 有

$$\delta_{r, \epsilon} = \max\{\delta, R_A(I) | I \in BALL_{r, h}(L_I)\}$$

由 canonical order 的性质, 可知上述集合为有限集, 是可取 max 的。

因此其对任意  $r$  存有  $\delta_{r, \epsilon}$  近似算法。

故其为 stable

## 2 作业 (选做部分)

## 3 Open Topics

### Open Topics 1 ( $\Delta$ -TSP)

找出一个  $\Delta$ -TSP 问题的近似解, 并证明这个解的近似度界, 说明这个问题是 NPO 的哪一类问题?

### Open Topics 2 (SCP)

介绍 SCP 问题, 证明它属于 NPO(IV), 介绍它的贪心近似算法, 并证明它的近似比 (JH 算法 4.3.2.11)

## 4 反馈