第 3 讲：常用的证明方法

姓名： 林凡琪　　**学号：** 211240042

评分： ______　　**评阅：** ______

2021 年 10 月 14 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助，请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

- 反证法是你最好的朋友
- 数学归纳法是你最最好的朋友
- 鸽笼原理，哦，有点高冷，这个朋友不好交（看似具体，实则抽象；看似容易，实则困难）

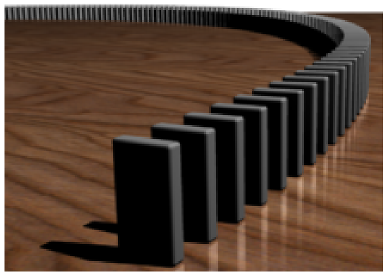


图 1：数学归纳法的“多米诺骨牌效应”

1　作业（必做部分）

题目 1 (UD Problem 5.12: $3k+2$)

注： 本题参考了 xx 资料（网页链接）。本题与 xx 同学讨论。

解答：

$i)$ $x=0(mod3)$,$x^2=0(mod3)$;
$ii)x=1(mod3),x^2=1(mod3)$
$iii)x=2(mod)3,x^2=1(mod3)$
所以不存在整数 x，使得 $x^2=3(mod2)$.

题目 2 (UD Problem 5.24: Squaring)

解答：

(a)Forall non-negative integers,exists 2 reasonable numbers y and z that are not zero,such that $x^2=y^2+z^2$

(b) 令 y=(3/5)*x,z=(4/5)*x，此时必有 $x^2=y^2+z^2$

题目 3 (Primes 3 (Mod 4) Theorem)

请证明：There are infinitely many primes that are congruent to 3 modulo 4.

解答：

REVISE

反证法：

假设共有 n 个素数形如 4k+3（k 为整数），按升序排列为 p1p2...pn

设 q=p1p2...p3+2，显然为奇数，所以 q 只能为 4k+1 或 4k+3, 且 p1 到 pn 都不是 q 的因数.

q一定是质数吗。在证明质数无穷的时候，p1~pn就是所有的质数，但此处还可以有其他的4k+1的质数

（1）若 q=4k+3，则显然假设错误

（2）若 q=4k+1，则 q'=q+2=4k+3, 假设错误

所以证得有无穷个形如 4k+3 的素数

本题参考:zhihu（网址打不出来...）

题目 4 (改编自 UD Problem 18.20 与 UD Problem 18.26)

请证明:

(1) “The first principle of mathematical induction” (Theorem 18.1) 与 “The second principle of mathematical induction” (Theorem 18.9) 等价。

(2) “The second principle of mathematical induction” 蕴含 “Well-ordering principles of the natural numbers” (in Chapter 12)。

REVISE

解答：

由 Theorem 18.1 → Theorem 18.9: 已知 P（1）为真，由第一数学归纳法，P(1) 可推出 P（2）再推出 P（3），递推至 P（n）时即已知 P(1),...,P(n) 为真，此时若用第一数学归纳法，则可由 P(1) 为真和 P（n）为真两个条件推出 P（n+1）为真，而若用第二数学归纳法，可由 P(1),...,P(n) 为真推出 P（n+1）为真.

由 Theorem 18.9 → Theorem 18.1：由第二数学归纳法，前提为 Q(1),...,Q(n) 都为真，推出 Q（n+1）为真，同样前提下可由 Q（1）和 Q(n) 为真，由第一数学归纳法推出 Q（n+1）为真.

题目 5 (Lines in the Plane)

(1) What is the maximum number L_n of regions determined by n straight lines in the plane?

(注：直线两端可以无限延长)

(2) What is the maximum number Z_n of regions determined by n bent lines, each containing one “zig”, in the plane?

(注：两端可以无限延长)

(3) What's the maximum number ZZ_n of regions determined by n “zig-zag” lines in the plane?

(注：两端可以无限延长)

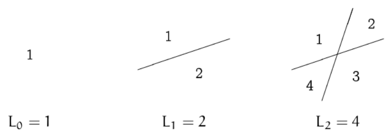


图 2: Examples for L_0, L_1, and L_2.

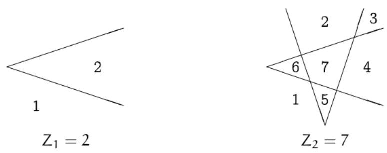


图 3: Examples for Z_1 and Z_2.

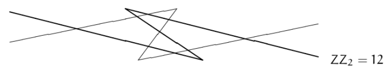


图 4: Example for ZZ_2.

解答：

1+n(n+1)/2

对于每一组折线，需要区域数最多，即需要与之前的线都相交，一条折线相当于第一题的两条线，每个拐角少两个区域，所以区域数为 $2n^2 - n + 1$

同理，对于 z 形线，一条折线相当于题一的三条线，每个拐角少两个区域，每有一组平行线，少交一个区域，所以区域数为 $(9n^2 - 7n + 2)/2$。

致谢：杨镇源同学

题目 6 (ES Problem 24.4: Distance in Square)

解答：
将边长为一的大正方形分为四个边长[illegible]的小正方形，根据鸽笼原理，一定有两个点在同一个小正方形里，此时这两个点[illegible]离最大为 $\sqrt{2}/2$

题目 7 (ES Problem 24.6: Lattice Points)

解答：
有 9 个给定三维空间中的不同格点，他们的连线中必有一条线的中点坐标都为整数。

证明：三维空间中的格点坐标奇偶性共有 8 种，根据鸽笼原理，9 个点中必有 2 个点的奇偶性完全一致，设分别为 (a,b,c) 和 ([illegible]), 则 a+d,b+e,c+f 必为偶数，根据中点坐标公式，这两个点的之间的中点的坐标 ((a+d)/2,(b+e)/2,(c+f)/2) 三个坐标值必为整数.

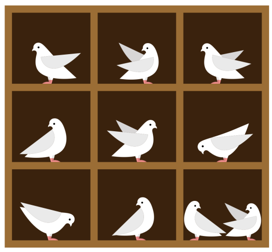
题目 8 (ES Problem 24.7: Monotone Subsequence)

解答：
789456123

推广到n^2的情况？

---

2 作业（选做部分）



题目 9 (Numbers)
Suppose $A \subseteq \{1, 2, \cdots, 2n\}$ with $|A| = n + 1$. Please prove that:

(1) There are two numbers in A which are relatively prime (互素).

(2) There are two numbers in A such that one divides (整除) the other.

解答：

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (Coq)
请介绍如何在 Coq 中使用数学归纳法。
参考资料:

- Induction.v

解答：

Open Topics 2 (Double Counting)
"Double Counting" 是一种神奇、漂亮的组合证明技巧。请了解 Double Counting 并以 "Counting Trees" 为例介绍这种证明技巧。
参考资料:

- 电影 "Good Will Hunting" (心灵捕手)
- Chapter 30 "Cayley's formula for the number of trees" of "Proofs from THE BOOK" (Fourth Edition)
- Counting trees @ wiki

图 5: 电影《心灵捕手》截图

解答：

4 订正

题目 (1-1-1)

错因分析：

订正：

5 反馈