第 8 讲: 概率分析与随机算法

姓名： 林凡琪　　**学号：** 211240042

评分： ______　　**评阅：** ______

2022 年 4 月 13 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 (CS 5.6-4)
In a card game, you remove the jacks, queens, kings, and aces from an ordinary deck of cards and shuffle them. You draw a card. If it is an ace, you are paid \$ 1.00, and the game is repeated. If it is a jack, you are paid \$2.00, and the game ends. If it is a queen, you are paid \$3.00, and the game ends. If it is a king, you are paid \$4.00, and the game ends. What is the maximum amount of money a rational person would pay to play this game?

解答：
设 X 为游戏收益
$E(X)=\frac{1}{4}(1+E(X))+\frac{1}{4}2+\frac{1}{4}3+\frac{1}{4}4$
$E(X)=\frac{10}{3}$

题目 2 (CS 5.6-8)

解答：

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{s:s\in S} P(s)X(s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{s:s\in F_i} X(S)P(s) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{s:s\in F_i} X(S)\frac{P(s)}{P\left(F_i\right)}P\left(F_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(X \mid F_i\right)P\left(F_i\right)
\end{aligned}$$

题目 3 (CS 5.7-2)

解答：

$$E(X_i) = 0.6 * 1 + 0.4 * 0 = 0.6$$
$$V(X_i) = 0.6 * (1 - 0.6) = 0.24$$
$$V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(x_4) + V(x_5) = V\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) = V(X)$$

题目 4 (CS 5.7-12)

解答：
对于 1 个问题，其方差为 0.16. 则对于 n 个问题，其期望为 0.8n，方差为 0.16n，标准差为 $0.4\sqrt{n}$.
95% 近似对应两个标准差
$2 \times 0.4\sqrt{n} = 0.05n$
解得 n = 256

题目 5 (TC 5.2-4)
利用指示器变量来解如下的帽子核对（hat-heck problem）问题：n 位顾客，他们每个人给餐厅核对帽子的服务生一顶帽子。服务生以随机的顺序将帽子归还给顾客。请问拿到自己帽子的客户的期望数是多少?

解答：
记随机变量 X 为拿到自己帽子的客户的期望数，记 A_i 为事件“第 i 个顾客拿到了自己的帽子”，$X_i = \{A_i\}$ 为 A_i 的指示器随机变量。由于帽子的顺序随机，每个顾客拿到自己的帽子的概率是 $\frac{1}{n}$. 所以 $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

题目 6 (TC 5.2-5)
设 A[1...n] 是 n 个不同数构成的数列，如果 i<j 且 A[i]>A[j]，则称（i，j）对为 A 的一个逆序对（inversion），假设 A 中的元素构成 <1,2,3....n> 上的一个均匀随机排列。请用指示器随机变量来计算其中逆序对的数目的期望。

解答：
记随机变量 X 为 A 中逆序对的对数事件 A_{ij} 为 (i, j) 是 A 的一个逆序对，指示器随机变量 $X_{ij} = I\{A_{ij}\}$，那么 $P(X_{ij} = 1) = \frac{1}{2}$
所以 $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (E(X_i j)) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$

题目 7 (TC 5.3-3)
假设我们不是将元素 A[i] 与子数组 A [i ... n] 中的一个随机元素交换，而是将它与数组任何位置上的随机元素交换：

PERMUTE-WITH-ALL(A)
1 n = A.length
2 for i = 1 to n
3 swap A[i] with A[RANDOM(1, n)]
这段代码会产生一个均匀随机排列吗？为什么会或为什么不会？

解答：
对某些特定的 n, 该法有可能产生均匀随机排列, 如 1, 2.
但考虑一般情况, 在执行伪代码 2、3 行后, 将产生 n^n 种结果，但排列有 $n!$ 种
因此需要 $(n-1)!$ 整除 $n^(n-1)$
但 $n^{n-1} = [(n-1)+1]^{n-1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} C(n-1, i)(n-1)^{n-1-i}$
所以 $n-1$ 不能整除 n^{n-1} 所以当 n=1 或 n=2 时会产生均匀随机排列，其他情况不会。

题目 8 (TC 5.3-4)

解答：
A[i] 出现在 B 中的位置是由 offset 决定的，offset 取值范围 1,2,...,n, 每个取值的概率都是 1/n, 所以 A[i] 能出现在 B 中任何特定位置, 并且出现在任何位置的概率是 1/n。按照 Armstrong 教授的算法，可能的排列结果数量为 n. 对于一个 n 个元素的数组，均匀随机排列的结果应该有 n! 个

题目 9 (TC Problem 5-2 (e, f, g))

解答：
(e) 设 X 是一个随机变量，其值等于直到找到 A[i]=x 挑选 A 下标的数目。特别地，假设 X_i 对应于下标 i 被挑选该事件的指示器随机变量。
当 $A[i] \neq x$ 时，$P(X_i) = \frac{1}{2}$;
当 $A[i] = x$ 时，$P(X_i) = 1$
所以 $E(X) = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} X_i E[X_i] = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$ 所以所以 DETERMINISTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是 $\frac{n+1}{2}$，最坏情形的运行时间是 n。
(f) 假设有 $k \geqslant 1$ 个下标 i 使得 $A[i] = x$。设 X 是一个随机变量，其值等于直到找到 $A[i] = x$ 挑选 A 下标的数目。特别地，假设 X_i 对应于下标 i 被挑选该事件的指示器随机变量。当 $A[i] x$ 时，$P[X_i] = \frac{1}{k+1}$；当 $A[i] = x$ 时，$P[X_i] = \frac{1}{k}$。所以 $E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = k \cdot \frac{1}{k} + (n-k) \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}$，所以 DETERMINISTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是 $\frac{n+1}{k+1}$，最坏情形的运行时间是 $n-k+1$。
(g)DETERMINISTIC-SEARCH 平均情形的运行时间是 n，最坏情形的运行时间是 n。

---

2 作业（选做部分）

题目 1 (The Coin Problem (Provided by Pei))
Suppose you have a fair coin. What is the expected number of tosses to get 3 Heads in a row (连续三次正面朝上)? What about n Heads in a row?

解答：

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (Average-case Analysis of *FindMax*)
学习如下讲座视频，讲解其中的算法分析过程。
参考资料:

- The Analysis of Algorithms.mp4 by Donald Knuth @ Stanford Lecture

Open Topics 2 (Average-case Analysis of Binary Search)
分析 Binary Search 的平均情况时间复杂度。
参考资料:

- Section 6.2.1 of "The Art of Computer Programming (Vol 3; 2nd Edition)" by Donald Knuth. ("Fibonaccian search" 部分可选)

4 反馈