第 *3-12* 讲*:* 图中的匹配与覆盖

姓名： 林凡琪　　**学号：** *211240042*

评分： ______　　**评阅：** ______

2022 年 *11* 月 *30* 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 (CZ 8.3)

解答:

对 G1:

由 $\alpha_1(G_1)+\beta_1(G_1)=n$ 可知, 因为边覆盖数为 $\alpha_1(G_1)=\lceil n/2\rceil=5$ 所以 $\beta_1(G_1)=5$

匹配方案之一:

$\{a,w\},\{b,z\},\{c,v\},\{d,x\},\{e,y\}$

所以对于 G1,U 可以匹配到 W 上

对 G2:

对于 G2,U 不能匹配到 W 上, 因为存在 U 的含四个顶点的子集 $X=\{v,x,y\}$, 而 $|N(X)|=2<3=|X|$, 所以 G2 是不友好的,U 不能匹配到 W 上.

题目 2 (CZ 8.5)

证明: 任一树之多包含一个完美匹配.

解答:

利用叶子节点在晚辈匹配中的唯一性. 对于每个叶子节点, 它只能和与它唯一相邻的点匹配, 如果有一个结点连接了两个及以上的叶子节点, 那么其中至少会有一个叶子节点不能匹配, 则此时不存在完美匹配

所以只有每个结点最多只与一个叶子节点项链是, 才有可能存在完美匹配. 于是在这种情况下, 可以去掉叶子节点和它相邻的结点回得到森林, 对森林中的每棵树上不断重复上面过程, 知道所有的结点都被匹配或者有点不能被匹配. 在这个过程中, 如果存在完美匹配, 匹配的方法都是唯一确定的.

题目 3 (CZ 8.14)

证明: 不含孤立点的图 G 有完美匹配当且仅当 $\alpha_1(G)=\beta_1(G)$.

解答:

因为对于任意不包含孤立点的图 G, 有 $\alpha_1(G)+\beta_1(G)=n$ 又因为 $\alpha_1(G)=\beta_1(G)$ 所以 $\alpha_1(G)=\beta_1(G)=n/2$

即有 $n/2$ 条边互不邻接, 这 $n/2$ 条边覆盖了 n 个点, 所以选取这 $n/2$ 条边作为集合, 能够得到一个完美匹配.

题目 4 (CZ 8.16)
证明: 设 G 中最小点覆盖集为 S。
设 T 为 $G-S$。由点覆盖集性质可得 S 在 G 中所连点全在 T 中, 则 $|T| \leq \delta \times |S|$
则有 $n-\beta(G) \leq \delta \times \beta(G)$
得 $\beta(G) \geq \frac{n}{\delta+1}$

解答:
覆盖所有边的顶点个数.
最大度越大, 覆盖所有边的顶点个数越少

题目 5 (CZ 8.18)
列举一个不含 1 因子的 5 正则图

解答:

题目 6 (CZ 8.21)
Use Tutte' s characterization of graphs with 1-factors (Theorem 8.10) to show that $K_{3,5}$ does not have a 1-factor.

解答:
设其两个部分 S 和 T 中, $|S|=3$, $|T|=5$。
则有 $K_0(G-S)=5<|S|$
由定理 8.10 可知, G 不含有 1 因子。

题目 7 (CZ 8.24)
证明: 任一不含割边的 3 正则图包含 2 因子

解答:
没有割边的 3 正则图一定含有 1 因子。在该图中去掉这个完美匹配后的图为 2 正则子图。
由定理可知, 原没有割边的 3 正则图含有 2 因子。

---

2 Open Topics

Open Topics 1 (点独立与点覆盖)
请证明定理 8.8。在证明中, 请你给出以下思考: 关于点覆盖/独立的所有相关定理, 是否在边覆盖/独立讨论范畴内, 均有相应的定理? 你能"杜撰"出几条吗?

Open Topics 2 (Kőnig's theorem)
参考资料:

- https://en.wikipedia.org/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_(graph_theory)

3 反馈