

第 3 讲: 常用的证明方法

姓名: 林凡琪 学号: 211240042

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 10 月 14 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

- 反证法是你最好的朋友
- 数学归纳法是你最最好的朋友
- 鸽笼原理, 哦, 有点高冷, 这个朋友不好交 (看似具体, 实则抽象; 看似容易, 实则困难)

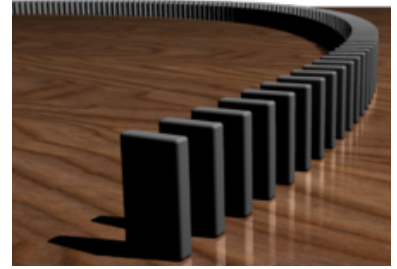


图 1: 数学归纳法的“多米诺骨牌效应”

1 作业 (必做部分)

题目 1 (UD Problem 5.12: $3k + 2$)

注: 本题参考了 xx 资料 (网页链接)。本题与 xx 同学讨论。

解答:

- i) $x = 0(mod 3), x^2 = 0(mod 3);$
 - ii) $x = 1(mod 3), x^2 = 1(mod 3)$
 - iii) $x = 2(mod 3), x^2 = 1(mod 3)$
- 所以不存在整数 x , 使得 $x^2 = 3(mod 2)$.

题目 2 (UD Problem 5.24: Squaring)

解答:

- (a) For all non-negative integers, exists 2 reasonable numbers y and z that are not zero, such that $x^2 = y^2 + z^2$
- (b) 令 $y = (3/5)*x, z = (4/5)*x$, 此时必有 $x^2 = y^2 + z^2$

题目 3 (Primes 3 (Mod 4) Theorem)

请证明: There are infinitely many primes that are congruent to 3 modulo 4.

解答:

反证法:

假设共有 n 个素数形如 $4k+3$ (k 为整数), 按升序排列为 $p_1 p_2 \dots p_n$

设 $q = p_1 p_2 \dots p_n + 2$, 显然为奇数, 所以 q 只能为 $4k+1$ 或 $4k+3$, 且 p_1 到 p_n 都不是 q 的因数.

(1) 若 $q = 4k+3$, 则显然假设错误

(2) 若 $q = 4k+1$, 则 $q' = q+2 = 4k+3$, 假设错误

所以证得有无穷个形如 $4k+3$ 的素数

本题参考: zhihu (网址打不出来...)

题目 4 (改编自 UD Problem 18.20 与 UD Problem 18.26)

请证明:

- (1) “The first principle of mathematical induction” (Theorem 18.1) 与 “The second principle of mathematical induction” (Theorem 18.9) 等价。
- (2) “The second principle of mathematical induction” 蕴含 “Well-ordering principles of the natural numbers” (in Chapter 12)。

解答:

由 Theorem 18.1 \rightarrow Theorem 18.9: 已知 $P(1)$ 为真, 由第一数学归纳法, $P(1)$ 可推出 $P(2)$ 再推出 $P(3)$, 递推至 $P(n)$ 时即已知 $P(1), \dots, P(n)$ 为真, 此时若用第一数学归纳法, 则可由 $P(1)$ 为真和 $P(n)$ 为真两个条件推出 $P(n+1)$ 为真, 而若用第二数学归纳法, 可由 $P(1), \dots, P(n)$ 为真推出 $P(n+1)$ 为真.

由 Theorem 18.9 \rightarrow Theorem 18.1: 由第二数学归纳法, 前提为 $Q(1), \dots, Q(n)$ 都为真, 推出 $Q(n+1)$ 为真, 同样前提下可由 $Q(1)$ 和 $Q(n)$ 为真, 由第一数学归纳法推出 $Q(n+1)$ 为真.

题目 5 (Lines in the Plane)

- (1) What is the maximum number L_n of regions determined by n straight lines in the plane?

(注: 直线两端可以无限延长)

- (2) What is the maximum number Z_n of regions determined by n bent lines, each containing one “zig”, in the plane?

(注: 两端可以无限延长)

- (3) What's the maximum number ZZ_n of regions determined by n “zig-zag” lines in the plane?

(注: 两端可以无限延长)

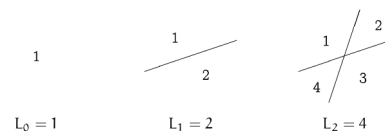


图 2: Examples for L_0 , L_1 , and L_2 .

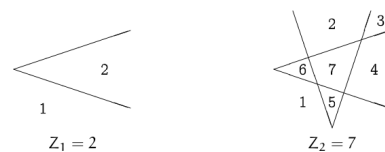


图 3: Examples for Z_1 and Z_2 .



图 4: Example for ZZ_2 .

解答:

$$1 + n(n+1)/2$$

对于每一组折线, 需要区域数最多, 即需要与之前的线都相交, 一条折线相当于第一题的两条线, 每个拐角少两个区域, 所以区域数为 $2n^2 - n + 1$

同理, 对于 z 形线, 一条折线相当于题一的一条线, 每个拐角少两个区域, 每有一组平行线, 少交一个区域, 所以区域数为 $(9n^2 - 7n + 2)/2$ 。

致谢: 杨镇源同学

题目 6 (ES Problem 24.4: Distance in Square)**解答:**

将边长为 1 的大正方形分为四个边长为 0.5 的小正方形, 根据鸽笼原理, 一定有两个点在同一个小正方形里, 此时这两个点的距离最大为 $\sqrt{2}/2$

题目 7 (ES Problem 24.6: Lattice Points)**解答:**

有 9 个给定三维空间中的不同格点, 他们的连线中必有一条线的中点坐标都为整数。

证明: 三维空间中的格点坐标奇偶性共有 8 种, 根据鸽笼原理, 9 个点中必有 2 个点的奇偶性完全一致, 设分别为 (a,b,c) 和 (d,e,f) , 则 $a+d, b+e, c+f$ 必为偶数, 根据中点坐标公式, 这两个点的之间的中点的点坐标 $((a+d)/2, (b+e)/2, (c+f)/2)$ 三个坐标值必为整数。

题目 8 (ES Problem 24.7: Monotone Subsequence)**解答:**

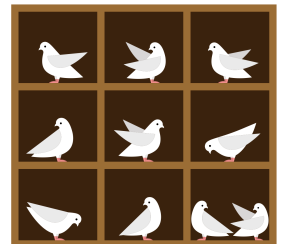
789456123

2 作业 (选做部分)

题目 9 (Numbers)

Suppose $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ with $|A| = n + 1$. Please prove that:

- (1) There are two numbers in A which are relatively prime (互素).
- (2) There are two numbers in A such that one divides (整除) the other.

解答:

3 Open Topics

Open Topics 1 (Coq)

请介绍如何在 Coq 中使用数学归纳法。

参考资料:

- [Induction.v](#)

解答:

Open Topics 2 (Double Counting)

“Double Counting” 是一种神奇、漂亮的组合证明技巧。请了解 Double Counting 并以 “Counting Trees” 为例介绍这种证明技巧。

参考资料:

- 电影 “Good Will Hunting” (心灵捕手)
- Chapter 30 “Cayley’s formula for the number of trees” of “Proofs from THE BOOK” (Fourth Edition)
- [Counting trees @ wiki](#)



图 5: 电影《心灵捕手》截图

解答:

4 订正

题目 (1-1-1)

错因分析:

订正:

5 反馈