

# 第 0 讲：L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

姓名：李四      学号：210000000  
评阅：      评分：     

2023 年 3 月 15 日

## Problem 1

题目 1. 证明:

$$Pr(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n Pr(A_i)$$

证明. 概率空间的定义：非负性和可加性。

首先，证明一个性质

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

(事件的并概率上界)

设两个相交的事件，即  $A$  和  $B$ 。

可知  $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ ,  $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

由可加性可知：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

由非负性可知,

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

至此证成事件的并概率上界性质;

可以将此性质用于  $A_1$  和  $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$

$$Pr(A_1) \cup Pr(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \leq Pr(A_1) + Pr(A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)$$

再用此方法计算  $Pr(A_2)$  和  $Pr(A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n)$ ;

得到

$$Pr(A_2) \cup Pr(A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n) \leq Pr(A_2) + Pr(A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n)$$

以此类推, 可得

$$\Rightarrow Pr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq Pr(A_1) + Pr(A_2) + \dots + Pr(A_n)$$

即

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n Pr(A_i)$$

□

**题目 2.** [Principle of Inclusion and Exclusion (PIE)] Prove that  $\mathbf{Pr}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} \mathbf{Pr}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right)$ , where  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

证明. 将用数学归纳法证明.

Consider a single set  $A_1$ . Then the principle of inclusion-exclusion states that  $|A_1| = |A_1| + |A_1| - |A_1 \cap A_1| = |A_1|$ , which is trivially true. Now consider a collection of exactly two sets  $A$  and  $B$ . Then  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . Assume that the principle of inclusion-exclusion holds for unions of  $n$  terms. By grouping terms, and simplifying some of them, the principle can be deduced for unions of  $n + 1$  terms.

Therefore,  $\mathbf{Pr}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} \mathbf{Pr}\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right)$ , where  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

□

**题目 2 的注记.**

无论 `\itemize` 还是 `\enumerate` 中的 `\item` 都支持一个可选参数以临时更换列表标志 (即无序列表前的点或有序列表前的 “1.”)。此外, 使用 `\enumerate` 的可选参数也可以改变有序列表的图标。当然, 这些列表是可以嵌套的。

**题目 3.** 请用  $\text{\LaTeX}$  输出下图中的公式。

$$\text{RState} = \bigcup_{X \subseteq \text{Obj}} \prod_{x \in X} (\text{ReplicaID} \rightarrow \mathbb{D}(\text{type}(x)).\Sigma)$$

解答.

**题目 3 的注记.**

当你不认识某些数学符号的时候, 你可以使用 [Detexify](#) 或 [mathpix](#) 等工具进行识别。你也可以使用 [Online LaTeX Equation Editor](#) 或者你编辑器中的符号表进行输入。

题目 4. 请用  $\text{\LaTeX}$  输出下图中的表格。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

解答.

题目 4 的注记.

如果你觉得  $\text{\LaTeX}$  的表格填起来太麻烦, 你也可以使用 [TablesGenerator](#) 帮你生成。

题目 5. (此部分为选做) 本学期还有可能需要你编写一些伪代码,  $\text{\LaTeX}$  中当然有相应的宏包——[algorithmicx](#)。

请用  $\text{\LaTeX}$  输出下图中的算法。

---

**Algorithm 1** Sum of integers from 1 to  $n$ .

---

```

1: procedure SUM( $n$ )
2:    $sum \leftarrow 0$                                 ▷ Initialization
3:   for  $i \leftarrow 1, n$  do
4:      $sum \leftarrow sum + i$ 
5:   end for
6:   return  $sum$                                     ▷ Return
7: end procedure

```

---

解答.