

第 8 讲: 集合及其运算

姓名: 林凡琪 学号: 21240042

评分: _____ 评阅: _____

2021 年 11 月 25 日

请独立完成作业, 不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料, 请给出引用。
鼓励讨论, 但需独立书写解题过程。

- 集合作为数学的基础
- 基础不牢, 地动山摇

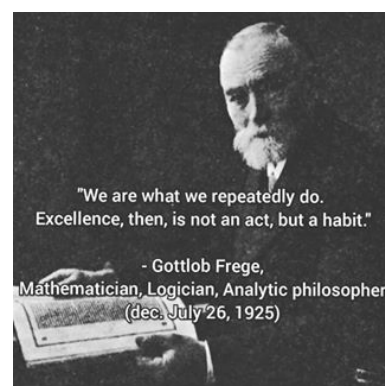


图 1: “左边说得在理, 我深有体会”

1 作业 (必做部分)

题目 1 (UD Problem 6.6 (f, g))

解答:

第一张图:

$$\mathbb{C}_X(A \cup B)$$

第二张图:

$$\mathbb{C}_X(A \cup B) \cup (A \cap B)$$

题目 2 (UD Problem 7.1 (d, f))

解答:

(d) 必要性: $x \in A \Rightarrow x \in B$ 其逆否命题 $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ 也成立

充分性: $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ 其逆否命题 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 也成立

(f) if $A \cup B = B$ 即 $x \in B \Rightarrow x \in A$

即 $B \subseteq A$

题目 3 (UD Problem 7.2)

证明:

$$A \cup B = \emptyset \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \notin A \text{ 即 } B \subseteq (X/A)$$

□

题目 4 (UD Problem 7.14)
解答:(a) 若 $x \in A \setminus B$, 则 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 所以不存在 $x \in B$ 使得 $x \in A \setminus B$ (b) 若 $x \in A \cup B$ 那么 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 若 $x \in (A \setminus B) \cup B$ 那么 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 或者 $x \in B$ 即 $x \in A$ 或者 $x \in B$ 由此可证 $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$

题目 5 (UD Problem 7.19)
证明: $A \cap (B^c \cap C^c) = \emptyset$ 即 $\nexists x$ 符合 $x \in A$ 并且 $x \notin B \cup C$ 即如果 $x \in A$, 则 $x \in B \cup C$ 即 $A \subseteq (B \cup C)$ 反推: 若 $A \subseteq (B \cup C)$, 则如果 $x \in A$, 则 $x \in B \cup C$ 所以不存在 x 符合 $x \in A$ 并且 $x \notin B \cup C$ 即 $A \cap (B^c \cap C^c) = \emptyset$

□

题目 6 (UD Problem 7.20)
证明:如果 $x \in (A \cup B) \setminus (C \cup D)$ 则 $x \in A$ 或 $x \in B$ 并且 $x \notin C, x \notin D$ 如果 $x \in (A \setminus (C \cup D)) \cup (B \setminus (C \cup D))$ 则 $x \in A$ 并且 $x \notin C, x \notin D$; 或者 $x \in B$ 并且 $x \notin C, x \notin D$ 与 $x \in A$ 或 $x \in B$ 并且 $x \notin C, x \notin D$ 等价则证得 $(A \cup B) \setminus (C \cup D) = (A \setminus (C \cup D)) \cup (B \setminus (C \cup D))$

□

题目 7 (UD Problem 8.1 (a, b))
解答:

题目 8 (UD Problem 8.14)
解答:(a) $[0, 1); [0, 1]; (0, 1)$ (b) $0, 0, \emptyset$

题目 9 (UD Problem 8.15)**解答:**Guess: $A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ proof: $\mathbb{R} \setminus 2\mathbb{N}$ 即为所有非偶数的实数的集合 $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus 2\mathbb{N})$ 即代表, 集合里的元素是有理数, 但不是非偶数的实数, 所以集合里的元素就是偶数.

题目 10 (UD Problem 9.8)**证明:**如果 $A \subseteq B$ 即 $x \in A$ 都满足 $x \in B$ 而如果 $x \in A$, 则 $x \in P(A)$; 如果 $x \in B$, 则 $x \in P(B)$, 所以 $A \subseteq B$ 则 $P(A) \subseteq P(B)$. \square

题目 11 (UD Problem 9.9)**证明:** $P(A_\alpha) \subseteq P(\cup A_\alpha)$ 所以 $\cup P(A_\alpha) \subseteq P(\cup A_\alpha)$ \square

题目 12 (UD Problem 9.10)**证明:**若 $x \subseteq P(\cap A_\alpha)$ 则 $x \subseteq \cap A_\alpha$ 即 $x \subseteq P(\cap A_\alpha)$ 若 $x \subseteq P(\cap A_\alpha)$ 则 $x \subseteq \cap A_\alpha$ 所以 $x \subseteq P(\cap A_\alpha)$ \square

题目 13 (改编自 UD Problem 9.19)请证明: $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ **证明:**设 (x, y) , $A \times (B \setminus C)$ 即 $x \in A, y \in B \setminus C$, 即 $x \in A, y \in B, y \notin C$ $(A \times B) \setminus (A \times C)$ 即 $x \in A, y \in B$ 且不存在 $x \in A, y \in C$, 即 $x \in A, y \in B, y \notin C$

可知两种情况等价

2 作业 (选做部分)

题目 1 (UD Problem 9.23)

解答:

3 Open Topics

4 订正

5 反馈