第 9 讲: 关系及其性质

姓名: 林凡琪　　**学号:** 211240042

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 12 月 3 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

- “关系”至关重要

1　作业（必做部分）

题目 1 (UD Problem 10.9)

解答:
This relation is an equivalence relation.
reflexive:$\forall(x_1, x_2), x_1 - x_1 = 0; x_2 - x_2 = 0$;and 0 is even;therefore $(x_1, x_2) \sim (x_1, x_2)$
symmetry:$\forall(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ if $x_1 - y_1 = 2m; x_2 - y_2 = 2n$ then $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$;therefore $y_1 - x_1 = -2m; y_2 - x_2 = -2n$, therefore $(y_1, y_2) \sim (x_1, x_2)$.
transitive:if$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ and $(z_1, z_2) \sim (y_1, y_2)$, then $x_1 - y_1 = 2m; x_2 - y_2 = 2n$ and $z_1 - y_1 = 2p; z_2 - y_2 = 2q$; therefore $x_1 - z_1 = (x_1 - y_1) - (z_1 - y_1) = 2(m - p), x_2 - z_2 = (x_2 - y_2) - (z_2 - y_2) = 2(n - q)$; therefore $(x_1, x_2) \sim (z_1, z_2)$

题目 2 (UD Problem 10.10)

解答:
如果 $E_x = E_y$ 则 $\forall x \in E_x$, 满足 $x \in E_y$, 且 $\forall x \in E_y$, 满足 $x \in E_x$.
不妨设 $z \in E_x$ 且 $z \in E_y$, 则 $z \sim x$ 且 $z \sim y$
根据传递性,$x \sim y$.
反推亦成立.

题目 3 (UD Problem 10.13)

证明：
(a) 是一个等价关系.
自反性:p(0) = p(0) = a0;
对称性: 因为 p(0) = q(0) 所以 p∼q; 又因为 q(0) = p(0), 所以 q∼p
传递性: 因为 p(0) = q(0), 所以 a0 = b0;
因为 q(0) = r(0), 所以 b0 = c0;
所以 a0 = c0, 所以 q(0) = r(0)
E = 任何常数项为 0 的多项式
(b) 是一个等价关系;
$E_r = \{a_2 * x^2 + a_1 * x + a_0 | a_2 \neq 0\}$
(c) 不是一个等价关系. 不满足对称性. □

题目 4 (UD Problem 11.4)

解答：
(a) 是 partition. 是法向量为 (1,1,1) 的无数个平行平面的集合.
(b) 是 partition. 是无数个球心在原点半径为 r 的球壳的集合.

题目 5 (UD Problem 11.8)

证明：
(a) 对于条件一: 每一个级数的多项式都存在, 所以 A 必不是空集.
对于条件二:$\cup_A = X$ 所有级数的多项式的集合就是所有多项式的集合
对于条件三: 不妨设 A 集合中的多项式级数为 a,B 集合中的多项式级数为 b, 若级数相同, 则 a = b,$\forall x \in A, x \in B$ 即 $A = B$;
若级数不同,$a \neq b$, 则 $\forall x \in A, x \notin B$ 即 $A \cap B = \emptyset$
(b) 条件一:c 一定存在, 所以 A_c 必不是空集
条件二:$\cup A_c = A_c | c \in R$ 又因为 c 是实数, 所以 $\cup A_c$ 是所有多项式的集合.
条件三: 不妨设 A_c 中 P(0) = c, A_d 中 P(0) = d, 若 c = d 则 $\forall P(P(0) = c = d) \in A_c$ 并且 $\forall P(P(0) = c = d) \in A_d$, 所以 $A_c = A_d$
(c) 不是 partition. 违反了条件三.
p = qr, 若 q = m * n; 则 $p \in A_q$ 且 $p \in A_m$ 且 $p \in A_n$. 即 $A_m \neq A_n$ 且 $A_m \cap A_n \neq \emptyset$.
(d) 不是 partition. 违反了条件三
反例如下: 令 $p = x^2 - 3x + 2$;$p(1) = p(2) = 0$; 则 $p \in A_1$ 且 $p \in A_2$. 即 $A_1 \neq A_2$ 且 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. □

题目 6 (UD Problem 11.10)

证明：
(a) 是 partition.
条件一显然符合.
条件二:$\cup A_\alpha = X$, 则 $\cup (A_a lpha \cap B) = \cup A_\alpha \cap B = X \cap B = B$
因为 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的 partition, 所以 $\{A_\alpha\}$ 必满足条件三, 又因为 $\{A_\alpha \cap B\} \subseteq \{A_\alpha\}$, 所以 $A_\alpha \cap B$ 一定也满足条件三.

(b) 当 $A_\alpha = \emptyset$ 则 $X\backslash A_alpha$ 是 X 的 partition.
否则 $X\backslash A_a \cap X\backslash A_b = X\backslash(A_a \cap A_b)$ 即不满足条件三. $\square$

题目 7 (UD Problem 12.11 (a, b))

解答:
(a) 假设 $supS > sup(S \cup T)$, 因为 supS 是上确界, 所以任意 y<supS, 都会 $\exists x \in S$ 使得 $x < y$ 所以若 $supS > sup(S \cup T)$, 则 $existsx \in (S \cup T), x > sup(S \cup T)$, 此时 $sup(S \cup T)$ 不符合定义. 所以假设不成立.
同理可证 $supT <= sup(S \cup T)$
(b) 若 $sup(S \cup T) \neq supS$ 则 $\exists x \in T, x > supS,\ x <= supT$, 所以 $sup(S \cup T) = supT$
同理可证若 $sup(S \cup T) \neq supT$, 则 $sup(S \cup T) = supS$
得证.

题目 8 (UD Problem 12.12)

解答:
(a)$\exists M, (M \in \mathbb{R} \wedge \forall y, (y \in S \to y \leqq M)) \to \exists N, (N = M + x \wedge \forall y, (y \in x + S \to y <= N))$
(b)$\forall y, (y \in S, \to y \leqq supS) \to \forall y, (y \in x + supS)$
(c)$\forall y, (y \in x + S \to y <= x + supS)$
$\forall M, (M \in \mathbb{R} \wedge \forall y, (y \in S \to y \leqq M) \to M >= supS)$
$\to \forall N, (N \in \mathbb{R} \wedge \forall y, (y \in x + supS \to y <= N) \to N >= x + supS)$
(1)$\wedge$(2) $\to x + supS = sup(x + S)$.

题目 9 (UD Problem 13.14)

解答:
1. $\forall x \in S, x \subseteq x$
2. $\forall x, y \in S, , y \subseteq x, \to x = y$
3. $\forall x, y, z \in S, x \subseteq y, y \subseteq z, \to x \subseteq z$
4. 若 $A = \{a | a \in P(A)\}, B = \{b, c | b, c \in P(A)\}, \to A \nsubseteq B, B \nsubseteq A$

前三条满足偏序, 第四条不满足全序.
得证.

---

2 作业 (选做部分)

题目 1 (关系的复合)
定义二元关系 R 与 S 的复合为:

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y\big((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\big)\}.$$

请证明复合操作满足结合律:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

图 1: "舅老爷" 是什么关系复合而成的?

证明:

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (二元关系)
介绍花样繁多的 “二元关系”, 如 (不限于):

- Preorder
- Strict weak order
- Strict partial order
- $\cdots$

基本要求:

- 举例说明每种二元关系的应用

参考资料:

- Binary relation @ wiki

Open Topics 2 (实数)
介绍实数的完备性 (Completeness), 如 (不限于):

- 概念
- 等价形式
- 实数的构造方式

参考资料:

- Completeness of the real numbers @ wiki

4 订正

5 反馈