# 第 4-2 讲: 置换群与拉格朗日定理

**姓名:** 林凡琪　　**学号:** 211240042

**评分:** ______　　**评阅:** ______

2023 年 3 月 7 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

# 1 作业 (必做部分)

**题目 1 (TJ 5-3(d))**

**解答:**
(14)(15)(12)(17)(13)(12)(14)(12)(13)(16)(14)(15)
even

---

**题目 2 (TJ 5-5 (注: 只需列出 S4 的所有子群, 无需解 (a)、(b)、(c)))**

**解答:**
$S_4$ 的子群有
$N_1 = \{(1)\}$
二阶循环群 $N_2 = \{(1), (12)\}$
二阶循环群 $N_3 = \{(1), (13)\}$
二阶循环群 $N_4 = \{(1), (23)\}$
二阶循环群 $N_5 = \{(1), (24)\}$
二阶循环群 $N_6 = \{(1), (14)\}$
二阶循环群 $N_7 = \{(1), (34)\}$
二阶循环群 $N_8 = \{(1), (12), (34)\}$
二阶循环群 $N_9 = \{(1), (13), (24)\}$
二阶循环群 $N_{10} = \{(1), (14), (23)\}$
三阶循环群 $N_{11} = \{(1), (123), (132)\}$
三阶循环群 $N_{12} = \{(1), (134), (143)\}$
三阶循环群 $N_{13} = \{(1), (124), (142)\}$
三阶循环群 $N_{14} = \{(1), (234), (243)\}$
Klein 四元群 $N_{15} = \{(1), (12), (34), (12)(34)\}$
Klein 四元群 $N_{16} = \{(1), (13), (24), (13)(24)\}$
Klein 四元群 $N_{17} = \{(1), (14), (23), (14)(23)\}$

Klein 四元群 $N_{18} = \{(1), (14)(23), (13)(24), (14)(23)\}$
四阶循环群 $N_{19} = \{(1), (1234), (13)(24), (1432)\}$
四阶循环群 $N_{20} = \{(1), (1324), (12)(34), (1423)\}$
四阶循环群 $N_{21} = \{(1), (1243), (14)(23), (1342)\}$
与 $S_3$ 同构 $N_{22} = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$
与 $S_3$ 同构 $N_{23} = \{(1), (12), (24), (14), (124), (142)\}$
与 $S_3$ 同构 $N_{24} = \{(1), (34), (13), (14), (143), (134)\}$
与 $S_3$ 同构 $N_{25} = \{(1), (34), (24), (23), (234), (243)\}$
八阶子群 $N_{26} = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (13), (12)(34), (24), (14)(23)\}$
八阶子群 $N_{27} = \{(1), (1324), (12)(34), (1423), (12), (13)(24), (34), (14)(32)\}$
八阶子群 $N_{28} = \{(1), (1243), (14)(23), (1342), (14), (12)(43), (23), (13)(24)\}$
$N_{29} = \{(1), (123), (132), (134), (143), (124), (142), (234)(243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
十二阶子群 $N_{30} = S_4$

---

**题目 3 (TJ 5-16)**
Find the group of rigid motions of a tetrahedron. Show that this is the same group as $A4$.

**解答:**
设 G 为 rigid motions 的群. 把四面体的顶点标号为 1,2,3,4. Rotation 由结点 1 发送的位置 (四种可能性) 和从该顶点发出边的方向 (三种可能性) 决定.
所以在 G 里有 12 个元素.
通过将给定的旋转映射到它在顶点上诱导的 permutation，定义一个从 G 到顶点上的 symmetric group 的映射 $\phi$。
有 8 个 3 阶旋转, 固定单个顶点并围绕连接该顶点到对面中心的轴旋转。
$\phi$ 下的 rotation images:$\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$.
有 3 个 2 阶旋转, 绕着中点和对边的轴旋转.
$\phi$ 下的 rotation images:$\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
再加上 identity, 就是所有的 12 个 rotation.
$\phi$ 的 image 是 $A_4$, 它是单射的, 并且保留了群运算 (因为运算再这两种情况下都是 function composition), 所以 $\phi$ 给出了 $A_4$ 和四面体 rigid motion 的群的同构.

---

**题目 4 (TJ 5-26(b))**

**解答:**
我们通过数学归纳法证明 $(1k)$ 能被写成 $(12), (23), ..., (n-1, n)$ 其中 $k = 2, 3..., n$
Base Case:(12)=(12)
Induction Step: (1,k+1)=(1k)(k,k+1)(1k).
由 (a) 可知,$(12), (13), ..., (1n)$ 能生成 $S_n$, 所以 $(12), (23), ..., (n-1, n)$ 也能. (关于 (a) 的证明:
$S_n$ 的每一个元素都能写成 transpositions 的乘积, 并且任意 transposition(ab) 能被写成 (1a)(1b)(1a). 所以 $(12), (13), ..., (1n)$ 能生成 $S_n$)

---

**题目 5 (TJ 5-29)**

**解答:**
设 $r$ 是 $D_n$ 中 $2\pi/n$ 的 rotation. 那么 $D_n$ 中的 rotations 是 $\{r, r^2, ..., r^{n-1}, r^n = id\}$
并且对于所有的 $m, n$, 都有 $r^m r^n = r^{m+n} = r^{n+m} = r^n r^m$
设 $s$ 是 $D_n$ 中古丁了顶点 1 的 reflection, 那么 $D_n$ 中的 reflection 是 $\{s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$
因为

$$r^i(sr^j) = r^i(sr^j ss) = r^i(srs)^j s = r^i(r^{-1})^j s = r^i r^{-j} s = r^{i-j} s$$

并且

$$(sr^j)r^i = sr^{i+j} ss = r^{-i-j} s$$

所以 $r^i(sr^j) = (sr^j)r^i$ iff $i - j \equiv -i - j(\mod n)$ iff $2i \equiv 0(\mod n)$.
所以 $Z(D_{2n}) = \{id, r^n\}$ 并且 $Z(D_{2n+1}) = \{id\}$.
特别地,$Z(Ds) = \{id, r^4\}$ 并且 $Z(D_{10}) = \{id, r^5\}$

致谢:https://math.stackexchange.com/questions/1714723/find-the-center-of-d8-d10-and-dn

---

**题目 6 (TJ 5-36)**
Let r and s be the elements in $D_n$ described in Theorem 5.23 (a) Show that $srs = r^{-1}$. (b) Show that $r^k s = sr^{-k} in D_n$. (c) Prove that the order of $r^k \in D_n$ is $n/gcd(k, n)$.

**解答:**
(a) 证明:

$$r = \begin{bmatrix} \cos(\pi/n) & -\sin(\pi/n) \\ \sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Then,

$$srs = \begin{bmatrix} \cos(\pi/n) & \sin(\pi/n) \\ -\sin(\pi/n) & \cos(\pi/n) \end{bmatrix} = r^{-1}$$

(b) 证明:
数学归纳法
B: 由 (a) 可知, $k = 1, rs = sr^{-1}$;
H: 假设对于所有 $k < j$ 全部 r 成立
I:$k = j$

$$r^j s = r^{j-1} rs = r^{j-1} sr^{-1} = sr^{-(j-1)} r^{-1} = sr^{-j}$$

(c) 证明:
$\langle r \rangle$ 是 n 阶的 cyclic group, 所以根据 TH 4.13, 显然证得.

---

**题目 7 (TJ 6-11 (注意:(c) 中 $\subset$ 表示 $\subseteq$))**

**解答:**
1.(a)$\Rightarrow$ (c)
因为 $g_1 H = g_2 H$, 所以 $g_1 H \subseteq g_2 H$
2.(c)$\Rightarrow$ (d)

因为 $g_1 \in g_1H \subseteq g_2H$, 有 $h \in H$ 满足 $g_1 = h_2h$, 然后 $g_2 = g_1h^{-1} \in g_1H(h^{-1} \in H)$
3.(d)⇒(e)
因为对于某些 $h \in H$, 有 $g_2 = g_1h$, 所以 $g_1^{-1}g_2 = h \in H$.
4.(e)⇒(b)
设 $g_1^{-1}g_2 = h \in H$. 我们首先证明 $Hg_1^{-1} \subseteq Hg_2^{-1}$. 假设 $h'g_1^{-1} \in Hg_1^{-1}$. 因为 $g_1^{-1} = hg_2^{-1}$, 我们有 $h'g_1^{-1} = h'hg_2^{-1} \in Hg_2^{-1}$. 相反地, $h''g_2^{-1} = h''h^{-1}g_1^{-1} \in Hg_1^{-1}$, 所以 $Hg_2^{-1} \subseteq Hg_1^{-1}$.
5.(b) ⇒ (a)
因为 $Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$, 存在 $h \in H$ 满足 $g_1^{-1} = hg_2^{-1}$, 所以 $g_1^{-1}g_2 = h$ 并且 $g_2 = g_1h$. 所以对于任意 $h' \in H, g_2h' = g_1hh'$, so $g_2H \subseteq g_1H$. 相似地, $g_1h' = g_2h^{-1}h'$, so $g_1H \subseteq g_2H$.

---

# 2 作业 (选做部分)

**题目 1 ($3-cycle$)**
证明：$A_n$ 中的每个置换皆可表成形如 $(k\ k+1\ k+2)$ 的 3-cycle 的乘积。

**解答:**

---

**题目 2 (SageMath 学习)**
学习 TJ 第五章, 第六章关于 SageMath 的内容

**解答:**

---

# 3 Open Topics

**Open Topics 1 (二阶魔方)**
请构造出二阶魔方相关的置换群，你能设计一种算法来解二阶魔方复原吗?

**Open Topics 2 (transpositions)**
- 证明：Show that any cycle can be written as the product of transpositions:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1})\ (a_1a_3)(a_1a_2)$$

- 你能很快地给出一个置换的逆是什么吗?

# 4 反馈