第 4-7 讲: 代数编码

姓名: 朱宇博　　**学号:** 191220186

评分: ______　　**评阅:** ______

2021 年 4 月 21 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (TJ 8-6(b,d))
best situation?

解答:
(b)
最小距离为 $d_{min}(100011, 110011) = 1$
best situation: 发出编码 (000000)，他与其他编码的最小距离最大，为 3。故可检测 2 位错或纠正 1 位错。
(d)
最小距离为 $d_{min}(0111100, 0110110) = 2$
best situation: 发出编码 (1110000) 或 (1111111) 或 (0001111) 或 (0000000)，他与其他编码的最小距离最大，为 3。故可检测 2 位错或纠正 1 位错。

题目 2 (TJ 8-7(c,d))

解答:
(c)
null space: (00100),(00000),(11001),(11101),(11110),(11010),(00111),(00011)
type:(5,3)-block
generator matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此不唯一
(d)
null space: type: (7,4)-block

```
zhuyubo@zhuyubodeMacBook-Pro
(0000000)
(0001111)
(0010110)
(0011001)
(0100101)
(0101010)
(0110011)
(0111100)
(1000011)
(1001100)
(1010101)
(1011010)
(1100110)
(1101001)
(1110000)
(1111111)
```

generator matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此不唯一

题目 3 (TJ 8-9)

解答:
$H(01111)^T = (001)^T$, so $(01111) \to (01101)$
$H(10101)^T = (110)^T$, so Multiple errors
$H(01110)^T = (110)^T$, so Multiple errors
$H(00011)^T = (110)^T$, so Multiple errors

题目 4 (TJ 8-11(b,d))

解答:
(b)
This is canonical parity-check matrix.
corresponding standard generator matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可至少纠错一位、检测 2 位。
(d)
This is canonical parity-check matrix.
corresponding standard generator matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可检测一位错，不可纠错。

题目 5 (TJ 8-13)

解答:
(a)$(001)^T$
(b)$(101)^T$
(c)$(111)^T$
(d)$(011)^T$

题目 6 (TJ 8-19)

解答:
(1) 群 C 中权重都为奇数。
因为 $e \in C \wedge w(e) = 0$，显然不成立。
(2) 群 C 中权重都为偶数。
考虑群 $C = \{e\}$，此时显然成立，故存在权重都为偶数的情况。
(3) 群 C 中权重有奇有偶。

考虑 $c \in C_{odd}$，构造函数 $f: C_{even} \to C_{odd}$ by $x \to x + c$ 其中 $x \in C_{even}$(显然 $x + c \in C_{odd}$)。
one to one:
$\forall x_1, x_2 \in C_{even}, x_1 + c = x_2 + c \to x_1 = x_2$(right and left cancellation laws in groups)
onto:
$\forall y \in C_{odd}, \exists x = y + c^{-1} \in C_{even}, st. x + c = y$
So $|C_{even}| = |C_{odd}|$, and then exactly half of them have even weight.

Therefore, either every codeword has even weight or exactly half of the codewords have even weight.

题目 7 (TJ 8-21)

解答:
(a)error-correcting linear code
假设 H 矩阵为 $m \times n$ 的，对 $2^7 = 128$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 7 \\ n \leq 2^m - 1 \end{cases}$$

$m = 4, n = 11$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 11×7。
同理，当对 $2^8 = 256$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 8 \\ n \leq 2^m - 1 \end{cases}$$

$m = 4, n = 12$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 12×8。

(b)only error detection
假设 H 矩阵为 $m \times n$ 的，对 $2^7 = 128$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 7 \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$m = 1, n = 8$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 8×7。
同理，当对 $2^8 = 256$ 进行编码时，需要满足

$$\begin{cases} n - m = 8 \\ n \geq 1 \end{cases}$$

$m = 1, n = 9$ 为符合条件的最小正整数解。则最小的 generator matrix 为 9×8。

题目 8 (TJ 8-22)

解答:
(1)three information position:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)seven information position:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

题目 9 (TJ 8-23)

解答：

(a)

假设有 $n-m$ 位 information bits, m 位 check bits

$$\begin{cases} n-m=20 \\ n \le 2^m - 1 \end{cases}$$

解得 $m \ge 5$

(b)

假设有 $n-m$ 位 information bits, m 位 check bits

$$\begin{cases} n-m=32 \\ n \le 2^m - 1 \end{cases}$$

解得 $m \ge 6$

---

2 作业 (选做部分)

3 Open Topics

Open Topics 1 (各种花式距离)

请查阅资料，介绍曼哈顿距离、欧几里得距离、契比雪夫距离分别是什么意思，他们的典型应用是什么。你还有哪些创意，来定义二进制位串之间的距离？

Open Topics 2 (编码率)

解释什么是编码率，分析 hamming 码的最大编码率，分析还有比 hamming 码编码率更好的方法吗？

4 反馈