第 *3-16* 讲: 线性规划

姓名: 林凡琪　　**学号:** *211240042*

评分: ______　　**评阅:** ______

2023 年 *3* 月 *3* 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 (TC 29.1-4)

解答:

最大化

$$-2x_1 \quad - \quad 2x_2 \quad - \quad 7x_3 \quad + \quad x_4$$

满足约束

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & \leq & -7 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 7 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & \leq & -24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & & & & \leq & 0 \end{array} .$$

题目 2 (TC 29.1-5)

解答:

首先，我们将第二个和第三个不等式乘以负一，使它们都是 $\leq$ 不等式。
引进三个新变量 x_4 x_5 x_6

$$x_4 = 7 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_5 = -8 + 3x_1 - x_2$$
$$x_6 = -x_1 + 2x_2 + 2x_3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

题目 3 (TC 29.2-2)

解答:
最小化

$$d_y$$

满足约束

$$\begin{aligned}
d_t &\le d_s + 3\\
d_x &\le d_t + 6\\
d_y &\le d_s + 5\\
d_y &\le d_t + 2\\
d_z &\le d_x + 2\\
d_t &\le d_y + 1\\
d_x &\le d_y + 4\\
d_z &\le d_y + 1\\
d_s &\le d_z + 1\\
d_x &\le d_z + 7\\
d_2 &= 0.
\end{aligned}$$

题目 4 (TC 29.2-4)

解答:
最大化

$$f_{sv1} + f_{sv2}$$

满足约束

$$\begin{aligned}
&f_{sv_1} && \le 16\\
&f_{sv2} && \le 14\\
&f_{v1v3} && \le 12\\
&f_{v_2v_1} && \le 4\\
&f_{v_2v_4} && \le 14\\
&f_{v3v2} && \le 9\\
&f_{v3t} && \le 20\\
&f_{v4v3} && \le 7\\
&f_{v_4t} && \le 4\\
&f_{sv_1} + f_{v2v_1} && = f_{v1v_3}\\
&f_{sv_2} + f_{v3v_2} && = f_{v_2v1} + f_{v2v4}\\
&f_{v1v3} + f_{v4v_3} && = f_{v3v2} + f_{v3t}\\
&f_{v2v4} && = f_{v4v3} + f_{v4t}\\
&f_{uv} && \ge 0 \text{ for } u, v \in \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, t\}\,.
\end{aligned}$$

题目 5 (TC 29.2-6)

解答:
把最大二分匹配问题看作网络流问题, 我们添加连个点 s 和 t, 分别连接到每个 L 和 R 的顶点, 边的容量为 1.
积分最大流量与最大二分匹配对应.
要解决的线性规划问题如下:
最大化

$$\sum_{v \in L} f_{sv}$$

满足约束

$$f_{(u,v)} \leq 1 \text{ for each } u, v \in \{s\} \cup L \cup R \cup \{t\} = V$$
$$\sum_{v \in V} f_{vu} = \sum_{v \in V} f_{uv} \text{ for each } u \in L \cup R$$
$$f_{uv} \geq 0 \text{ for each } u, v \in V$$

题目 6 (TC 29.3-5)

解答:
首先改写为松弛形式
最大化

$$18x_1 + 12.5x_2$$

满足约束

$$x_3 = 20 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 12 - x_1$$
$$x_5 = 16 - x_2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

此时不再出现具有正系数的非基本变量. 我们的解决方案是 $(12, 8, 0, 0, 8)$, 值为 316. 回到标准型, 我们只是忽略 x_3 和 x_5 的值, 并得到 $x_1 = 12$ 和 $x_2 = 8$ 的结局方案. 我们可以检查这个是否可行.

题目 7 (TC 29.4-2)

解答:
给定一个标准形式的原始线性规划，如（29.16）-（29.18），我们将对偶线性规划定义为给定一个标准形式的原始线性规划，如（29.16）-（29.18），我们将对偶线性规划定义为

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n, (*)$$
$$y_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m.$$

如果这个问题是最小化而不是最大化, 用 $-c_j$ 替换 c_j in $(*)$
If there is a lack of nonnegativity constraint on x_j, duplicate and negate the j-th

column of A, which corresponds to duplicating the j th row of A^T duplicate and negate c_j
If there is an equality constraint for b_i, convert it to two inequalities by duplicate then negate the i th column of A^T duplicate then negate the i th entry of b, and add an extra y_i variable. We handle the greater-than-or-equal-to sign $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ by negating i th column of A^{T} and negating b_i

---

题目 8 (TC 29.2-3)

解答:

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \sum_{v \in V} d_v \\
&\text{ subject to} \\
&d_v \leq d_u + w(u, v) \text{ for each edge } (u, v) \\
&d_s = 0.
\end{aligned}
$$

题目 9 (TC 29.4-3)

解答:

1.convert =

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs} \\
&\text{ subject to} \\
&f_{uv} \leq c(u, v) \text{ for each } u, v \in V \\
&\sum_{v \in V} f_{vu} \leq \sum_{v \in V} f_{uv} \text{for each } u \in V - \{s, t\}, \\
&\sum_{v \in V} f_{vu} \geq \sum_{v \in V} f_{uv} \text{for each } u \in V - \{s, t\}, \\
&f_{uv} \geq 0 \text{ for each } u, v \in V
\end{aligned}
$$

2.handle $\geq$

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad \sum_{v \in V} f_{sv} - \sum_{v \in V} f_{vs} \\
&\text{ subject to} \\
&f_{uv} \leq c(u, v) \text{ for each } u, v \in V \\
&\sum_{v \in V} f_{vu} \leq \sum_{v \in V} f_{uv} \text{for each } u \in V - \{s, t\}, \\
&\sum_{v \in V} -f_{vu} \leq \sum_{v \in V} -f_{uv} \text{for each } u \in V - \{s, t\}, \\
&f_{uv} \geq 0 \text{ for each } u, v \in V
\end{aligned}
$$

题目 10 (TC Problem 29-1)

解答:
(a)
让我们需要满足的线性不等式成为我们线性规划中的约束.
让我们的最大化的函数做个常量
如果线性约束不可行，线性规划的求解器将无法检测到任何可行的解
如果线性规划求解器返回任何解，我们知道线性约束是可行的。
(b)
假设我们正在解决一个线性规划问题
最大化 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
满足约束 $Ax \leq b$
X 向量的所有 entri 都是非负数
考虑 dual program
最小化 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
满足约束 $A^T \geq c$
Y 向量的所有 entries 都是非负数
两个问题的最优解应该是相等的
把两个问题合并成一个问题

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ A^{\mathrm{T}}y &\geq c \\ x_k &\leq \frac{1}{c_k}\left(\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \\ x_k &\geq \frac{1}{c_k}\left(\sum_{i=1}^{m} b_i y_i - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m &\geq 0 \end{aligned}$$

c_k is some nonzero entry in the c vector.
变量数:n+m
约束数:2+2n+2m

---

2 作业 (选做部分)

题目 1 (TC Problem 29-2)

解答:

---

3 Open Topics

Open Topics 1 (TC Problem 29-4)

4 反馈