

Lista 3

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (5.8.1)

Vamos escolher os valores de a_i da seguinte maneira:

- $a_i = -1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$
- $a_i = 1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$

Isso claramente implica que, para todo i, j , o produto $a_i a_j$ segue a seguinte distribuição:

- $a_i a_j = -1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$
- $a_i a_j = 1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$

A esperança de $a_i a_j$, denotada por $\mathbb{E}[a_i a_j]$, é igual à $-1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 0$. Usando a linearidade da esperança, temos que:

$$\mathbb{E}[a_i a_j] =$$

- (5.8.2)

Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r , então:

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{r^2}{2}$$

Sabemos, a partir do teorema 5.3.11 do livro (que devemos usar na prova), que todo grafo G possui em sua estrutura uma clique de tamanho $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G . Isso pois todo conjunto independente em G é uma clique em \overline{G} .

Vamos inicialmente então assumir que o grafo G é livre de K_r , a clique com r vértices. Disso podemos assumir que:

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \leq r-1$$

Como $\frac{1}{n-d(v)}$ é uma função convexa em relação a $d(v)$, podemos aplicar a transformação:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n - \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{n}} &\leq r - 1 \\ \frac{n}{n - \frac{2|E(G)|}{n}} &\leq r - 1 \\ \frac{n}{r - 1} &\leq n - \frac{2|E(G)|}{n} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n - \frac{n}{r - 1} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n(1 - \frac{1}{r - 1}) \\ |E(G)| &\leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r - 1}) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

[illegible]

Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r , então:

$$|E(G)| \leq (1 - \frac{1}{r-1}) \frac{r^2}{2}$$

Pelo teorema 5.3.11, temos que o tamanho de um conjunto independente $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$, onde $d(v)$ é o grau do vértice v em G . Em particular, temos que $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta+1}$, onde Δ é o grau máximo de um vértice em G .

Seja $X \geq 0$ uma variável aleatória e seja a esperança de X definida como $\mathbb{E}[X] > 0$. Então sabemos que $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X]) > 0$.

- (5.8.3)
- (5.8.4)

Vamos utilizar $\mu = \mathbb{E}[X]$ pois a notação é melhor. Queremos provar então que:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

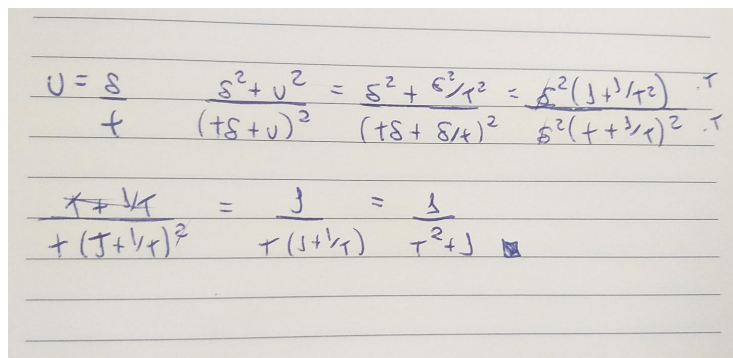
Seja $Z = X - \mathbb{E}[X]$. Sabemos que $\mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2$ e seja $u = \frac{\sigma}{t}$. Então:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) = \mathbb{P}(Z \geq t\sigma) \leq \mathbb{P}((Z + u)^2 \geq (t\sigma + u)^2)$$

Pela Desigualdade de Markov, sabemos que:

$$\mathbb{P}((Z+u)^2 \geq (t\sigma+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(Z+u)^2]}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\mathbb{E}(Z^2) + 2u\mathbb{E}[Z] + u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2 + u^2}{(t\sigma+u)^2}$$

O resto das contas foi feito a mão:



$$\begin{aligned} u &= \sigma \\ \frac{\sigma^2 + u^2}{(t\sigma + u)^2} &= \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{(t\sigma + \sigma)^2} = \frac{\sigma^2(1+1)}{\sigma^2(t+1)^2} = \frac{2}{(t+1)^2} \\ \frac{2}{(t+1)^2} &= \frac{2}{t^2 + 2t + 1} = \frac{2}{t^2 + 1} \quad \square \end{aligned}$$

Portanto, provamos a desigualdade de Chantelli.

- (5.8.5)
- (5.8.6)

Queremos mostrar que $R(4, k) \geq (\frac{ck}{\log k})^2$ para k suficientemente grande.

Seja $n = (\frac{k}{4\log k})^2$. Mostraremos que existe um grafo G com $\frac{n}{2}$ vértices que é livre de K_4 e satisfaz $\alpha(G) < k$. Consideremos o grafo $G(n, p)$ com $p = n^{-\frac{3}{4}}$. Pelo teorema 5.4.2, temos com alta probabilidade:

$$\alpha(G) \leq \frac{2\log n}{p} < k$$

Uma vez que $n < k^2$ e, portanto, $\log n < 2\log k$.

Seja X a variável aleatória que representa o número de K_4 em $G(n, p)$. Temos que:

$$\mathbb{E}[X] = p^4 \binom{n}{4} \leq \frac{p^4 n^4}{24} = \frac{n^{-\frac{3}{4} \cdot 4} n^4}{24} = \frac{n}{24}$$

Pela desigualdade de markov, temos:

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}[X] \leq \frac{1}{12}$$

Segue que existe um grafo H com n vértices, $\alpha(H) < k$, que contém no máximo $n/2$ triângulos. Removendo no máximo $n/2$ vértices de H (um para cada triângulo), obtemos um grafo G como desejado.

- (5.8.7)