Lista 2

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (4.5.1)
  - $R(3)$
    Inicialmente, note que a seguinte 2-coloração do K_5 não possui uma clique de tamanho 3 monocromática, portanto $R(3) > 5$.

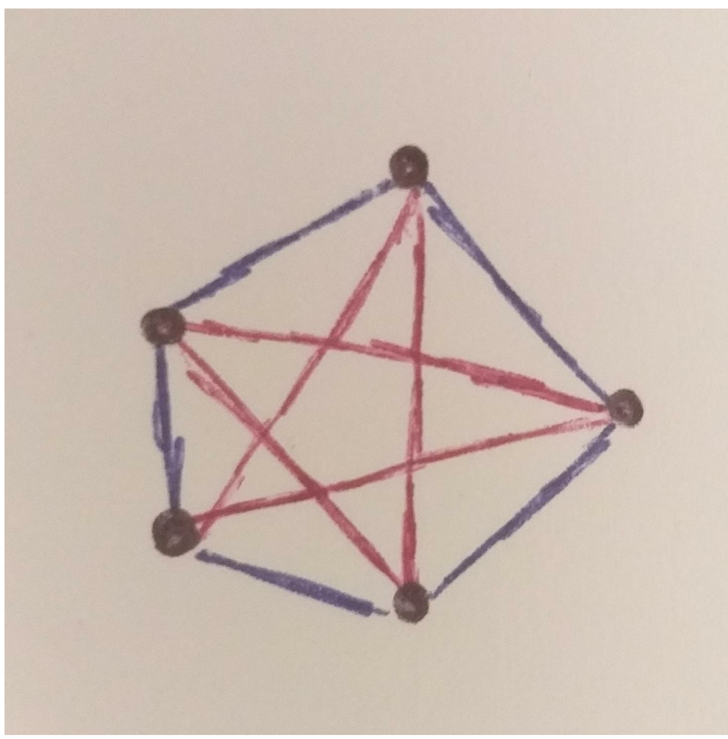

Figure 1: K_5 2-colorido

No entanto, sabemos pelo fato 4.0.1 do livro que o toda 2-coloração do K_6 possui um triângulo monocromático, logo $R(3) = 6$. A prova funciona da seguinte forma: seja v um vértice de K_6. Pelo princípio da casa dos pombos, das 5 arestas incidentes a v, ao menos 3 possuem a mesma cor. Vamos dizer que é a cor 1. Sejam x, y, z vizinhos de v com a aresta com cor 1. Se qualquer uma das arestas xy, xz, yz for da cor 1, temos um triângulo de cor 1. Caso contrário, o triângulo formado pelos vértices x, y, z é monocromático na outra cor, chamemos ela de 2. Logo, toda 2-coloração do K_6 possui um triângulo monocromático.

– $R(3, 4)$

Inicialmente, vamos notar que $R(3, 4)$ é maior que 8, e isso pode ser notado pela 2-coloração do K_8 abaixo em que não existe uma clique de tamanho 3 azul e nem uma clique de tamanho 4 vermelha(Na imagem, o primeiro grafo tem apenas as arestas vermelhas e o segundo seri ao complemento do primeiro grafo, em que as arestas são azuis).

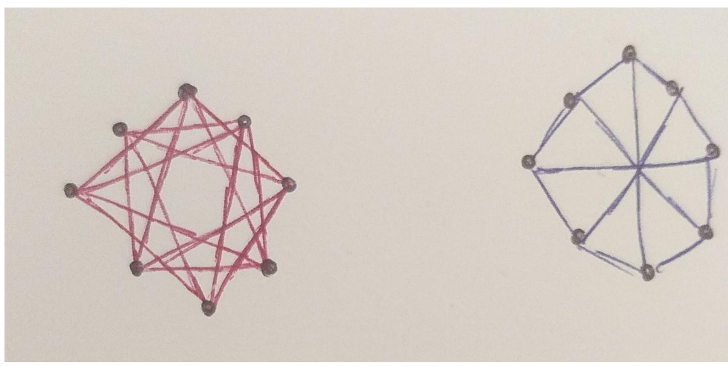

Figure 2: K_8 2-colorido

Vamos provar agora que $R(3, 4) \leq 10$, em particular, mostrar que para um grafo completo de 10 vértices sempre teremos um triângulo vermelho ou uma clique de tamanho 4 azul. Depois, com uma pequena variação, mostraremos que $R(3, 4) \leq 9$, o que conclui a prova. Seja A um vértice qualquer de um K_{10} 2-colorido com vermelho e azul. A possui nove vizinhos e das arestas que o conectam a seus vizinhos, sabemos que ao menos 6 são azuis ou ao menos 4 são vermelhas (isso porque no total precisamos ter 9 arestas, uma para cada vizinho). Suponhamos o caso em que A possui 4 arestas vermelhas o conectando a seus vizinhos. Se existir uma aresta vermelha entre esses vizinhos, então existe um triângulo vermelho no grafo. Caso contrário, todas as arestas entre os 4 vértices são azuis, logo existe uma clique de tamanho 4 de cor azul. Seja agora o caso em que A possui 6 arestas de cor azul o conectando a seus vizinhos. Sabemos que $R(3, 3) = 6$, logo, entre esses vizinhos, há um triângulo vermelhor ou azul. Se for vermelho, já perdemos, se for azul, note que ele forma uma clique de tamanho 4 azul junto com A. Logo, 10 é um limite superior para $R(3,4)$.

Consideremos agora o caso do K_9. Note que os argumentos usados anteriormente servem da mesma maneira, exceto pelo caso em que, para todo vértice A, exista exatamente 5 arestas azuis e 3 vermelhas saindo dele. Nesse caso, para cada vértice teremos três arestas vermelhas, e como são 9 vértices, temos $3 * 9 = 27$. Como cada arestas é contada duas vezes, precisamos dividir por dois, obtendo assim um número $\frac{27}{2}$(não inteiro) de arestas, o que é um absurdo. Logo, $R(3,4) \leq 9$

– $R(4,4)$

Sabemos pelo lema 4.1.3 do livro que, para todo $s,t \geq 2$, temos:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Logo, temos que $R(4,4) \leq R(3,4)+R(4,3) = 2*R(3,4) = 2*9 = 18$. Mostramos no exercício anterior que $R(3,4) = 9$. No entanto, vamos mostrar que existe uma 2-coloração de K_{17} tal que não existe uma clique de tamanho 4 nem vermelha nem azul, mostrando assim que $R(4,4) = 18$. A imagem abaixo, retirada deste site, apresenta tal grafo e sua coloração.

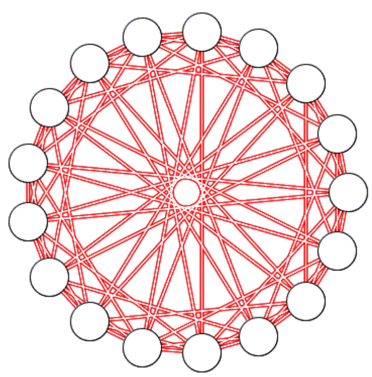

Figure 3: K_{17} arestas vermelhas

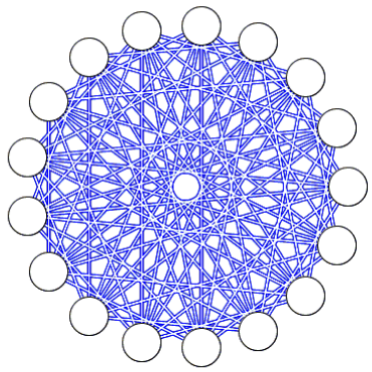

Figure 4: K_{17} arestas azuis

- (4.5.2)
  - $R(K_3, C_4)$
    Inicialmente, note que $R(K_3, C_4) > 6$, uma vez que a 2-coloração do K_6 abaixo não contêm K_3 vermelho nem C_4 azul. Isso pois as arestas azuis formam um $2K_3$ e as arestas vermelhas foram um bipartido $K_{3,3}$.

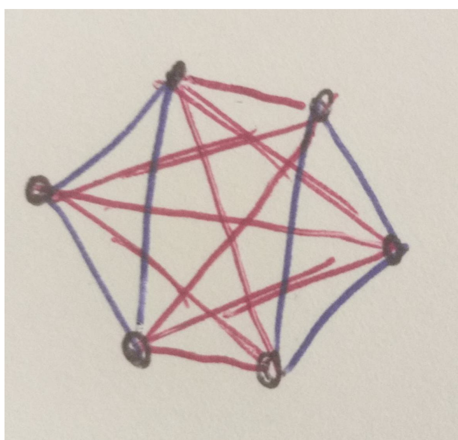

Figure 5: K_6 2-colorido

Seja agora um K_7 2-colorido. Como $R(3) = 6$, sabemos que deve existir nessa 2-coloração ou um K_3 vermelho ou um azul. Se for vermlho acabamos, então vamos assumir que é azul. Sejam $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ os vértices desse K_3 azul e $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ os vértices que sobraram no K_7. Se V formar uma clique azul, temos um C_4 azul e acabamos. Logo vamos assumir que existe uma arestas vermelha entre vértices de V. Sem perda de generalidade, vamos assumir que é entre v_1 e v_2. Note também que para qualquer $v \in V$, se ele possuir duas ou mais arestas azuis indo para W, teríamos um C_4 azul formado por $\{v, w_1, w_2, w_3\}$, então assumimos que existe no máximo uma aresta azul dessa forma, o que implica em ao menos duas arestas vermelhas dessa forma. Note, no entanto, que v_1 e v_2 compartilham um vizinho $w \in W$ de tal modo que v_1w e v_2w são vermelhas, pelo princípio a casa dos pombos. Como v_1v_2 é vermlha, temos um K_3 vermelho. Logo, $R(K_3, C_4) = 7$, como queríamos demonstrar.

– $R(K_3, C_5)$

Primeiramente, vamos mostrar que $R(K_3, C_5) > 8$ ao mostrar uma 2-coloração de um K_8 tal que não existe um K_3 vermelho e nem um C_5 azul. Tal grafo esta na imagem abaixo. Note que as arestas azuis formam 2 K_4, logo é impossível ter um C_5 azul. Como as arestas vermelhas formam um grafo bipartido, não há como existir um $K_3 = C_3$ vermelho.

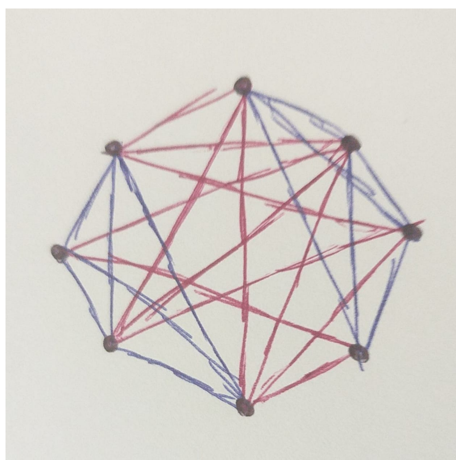

Figure 6: K_8 2-colorido

Seja agora um K_9 com uma 2-coloração. Vamos lembrar que $R(3, 4) = 9$, como demonstramos no exercício anterior. Logo, como se trata de um K_9, se não existisse um K_4 azul teríamos um K_3 vermelho e acabamos. Logo, vamos assumir agora que existe um K_4 azul na coloração. Sejam w_i para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ os vértices nesse K_4 e v_j para todo $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ os outros vértices do grafo. Se todas as arestas entre qualquer dois vértices v_a e v_b for azul, temos um C_5 azul e acabamos, logo vamos assumir que existe ao menos uma aresta vermelha entre um v_a e um v_b. Vamos assumir sem perda de generalidade que se tratam de v_1 e v_2.

Note também que se existirem duas arestas azuis saindo de algum v_j indo para o conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, então existe um C_5 azul, logo podemos assumir a partir de agora que existem no máximo uma aresta azul nesse sentido, o que implica em existirem ao menos 3 arestas vermelhas nesse sentido. No entanto, isso quer dizer que v_1 e v_2 possuem um vizinho em comum w_i de modo que v_1w_i e v_2w_i são vermelhas. Como v_1v_2 também é vermelha, achamos um triângulo vermelho. Logo, $R(K_3, C_5) \leq 9$, o que implica, com o que sabemos de antes, em $R(K_3, C_5) = 9$, como queríamos demonstrar.

- (4.5.3)

  Sabemos que $R(3) = 6$, logo, sabemos que o K_5 não contêm K_3 monocromático, logo $\binom{5}{2} = 10$ é um limite inferior para o maior número de arestas que um grafo pode ter e não possui K_3 monocromático. Também, sabemos que, como $R(3) = 6$, se G possui uma clique de tamanho 6, com certeza existirá um K_3 monocromático em uma 2-coloração de suas arestas, logo um K_6 não pode aparecer em sua estrutura.

  Poranto, queremos saber o maior número de arestas que um grafo com n vértices pode ter para que ele não possua K_6 como subgrafo, e esse é exatamente o extremal de n e K_6, isto é, $ex(n, K_6)$, que é o número de arestas do grafo k-partido de n vértices. Pelo Teorema de Turán, sabemos que, se k divide n:

  $$ex(n, K_{k+1}) = (1 - \frac{1}{k})\frac{n^2}{2}$$
  $$ex(n, K_{5+1}) = (1 - \frac{1}{5})\frac{n^2}{2} = \frac{4}{5}\frac{n^2}{2} = \frac{2n^2}{5}$$

  Se k não divide n, toda partição do grafo k-partido tem tamanho $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{k} \rceil$, que possui um valor aproximadamente igual ao anterior, de $(1 - \frac{1}{k})\frac{n^2}{2}$.

- (4.5.4)

  Queremos mostrar que $R_r(3)\, 5^{\frac{r}{2}}$. Sabemos pelo teorema 4.1.6 do livro que $R_r(3) \geq 2^r$. Vamos demonstrar o teorema utilizando indução em r. Para os casos base, temos:

  - $r = 1$: $R_1(3) = 3 > 5^{\frac{1}{2}}$
  - $r = 2$: $R_2(3) = 6 > 5^{\frac{2}{2}} = 5$

  Para o passo indutivo, considere o seguinte. Seja $r > 2$ e considere que $R_{r-2}(3) > 5^{\frac{r-2}{2}} = 5^{\frac{r}{2}-1}$, ou seja, existe uma clique com ao menos $5^{\frac{r-2}{2}}$ vértices tal que qualquer $(r-2)$-coloração dela apresenta um triângulo monocromático. Partindo dessa premissa, queremos mostrar que $R_r(3) > 5^{\frac{r}{2}}$, ou seja, existe uma r-coloração da clique de 5^r2 vértices tal que ela não possui um triângulo monocromático. Seja então $G = K_{5^{\frac{r}{2}}}$. Vamos particionar os vértices de G em 5 conjuntos disjuntos, denotados por $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$, de modo que o tamanho de cada V_i é igual, isto é, contêm $\frac{5^{\frac{r}{2}}}{5} = 5^{\frac{r}{2}-1} = 5^{\frac{r-2}{2}}$ vértices. Pela hipótese de indução, sabemos que cada V_i pode ser colorido com $r-2$ cores de modo que não seja criado um triângulo monocromático. Vamos colorir as arestas das partições com essas $r-2$ cores, sem criar um triângulo monocromático. Agora, sejam duas cores novas ainda não utilizadas, denotadas c_1 e c_2. Vamos colorir as arestas faltantes (as arestas entre vértices de diferentes partições) da seguinte maneira. Para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, iremos colocrir as arestas entre os vértices de V_i e $V_{(i+1)\%5}$ com a cor c_1. O restante das arestas serão coloridas com a cor c_2. Note que nenhum triângulo monocromático é criado com as cores c_1 e c_2 com essa coloração. Como não havia triângulo monocromático com as outras cores, não há nenhum triângulo monocromático no grafo. Logo, provamos que $R_r(3) > 5^{\frac{r}{2}}$, como queríamos demonstrar.

A imagem abaixo ilustra a coloração citada, onde c_1 é vermelho e c_2 é azul.

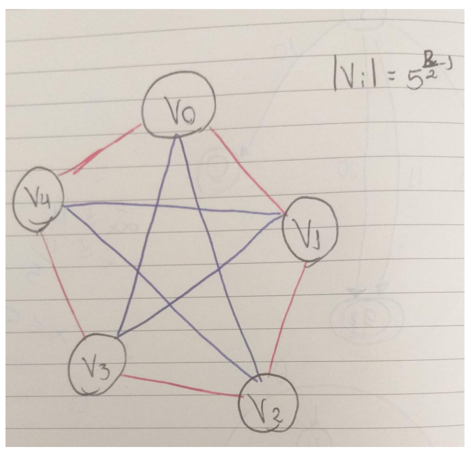

Figure 7: $R_r(3) > 5^{\frac{r}{2}}$

- (4.5.5)

  Sabemos que $R(t)$ é o menor n tal que toda 2-coloração de K_n contêm uma cópia monocromática de K_t. Logo, se pegarmos o K_n em que $n = R(t)$, seu número de arestas é $\binom{n}{2}$. Obviamente temos que $\hat{r} \leq \binom{n}{2}$, pois K_n é um grafo tal que $K_n \to K_t$.

- (4.5.6)

  Seja G um grafo tal que $|V(G)| = n$. Vamos supor que exista em G um vértice v de modo que o grau de v em G é maior ou igual a $R(s)$. Nesse caso, os vizinhos de v teriam como subgrafo induzido ou uma clique de tamanho s ou um independente de tamanho s, que implicaria na existência de um $K_{1,s}$ com centro em v, o que é exatamente o estamos procurando. Vamos supor, portanto, que o grau de qualquer vértice v de G não excede $R(s)$.

A ideia agora é particionar o grafo em k conjuntos de vértices $\{V_o, \ldots, V_k\}$, de modo que os conjuntos são construídos indutivamente da seguinte maneira:

- V_0 contêm apenas um vértice v
- V_i contêm os vértices a distância i de v, formalmente denotado por $\mathcal{N}^i(v)$

Se $k \geq s$ haveria um caminho de tamanho s no grafo, portanto podemos assumir que $k < s$ para todo v. Nesse ponto, é importante lembrar que o grau do grafo G é limitado para todo vértice, o que implica no fato de que o tamanho de cada V_i ser menor ou igual a $R(s)^i$. A partir disso, temos que $|V(G)| = \sum_{i=0}^{k} |V_i| \leq R(s)^s$, que é o valor que queríamos.

Isso implica no fato de que se um grafo tiver mais do que $R(s)^s$ vértices, ele com certeza terá um caminho de s vértices induzido, uma clique de tamanho s induzida ou uma estrela $K_{1,s}$ induzida, o que quer dizer que $C(s) \leq R(s)^s$, como queríamos demonstrar.

- (4.5.7)

  Inicialmente, vamos notar que existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que a partir desse N o teorema vale para r, e esse N é chamado de número de Schur. Sabemos pelo teorema de Ramsey que $n = R_r(3)$ é um inteiro, que existe, tal que toda r-coloração de K_n contêm uma cópia monocromático de K_3. Considere então o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e uma r-coloração dele.

  Vamos colorir o K_n da seguinte maneira. Para cada aresta $v_i v_j \in V(K_n)$, colorimos ela com a cor c se $|i - j|$ foi colorido com a cor c na r-coloração anterior dos inteiros de 1 até n. Pelo teorema de Ramsey, sabemos que essa coloração de K_n contêm um triângulo monocromático. Sejam v_a, v_b, v_c, com $a > b > c$ os vértices queformam esse triângulo, e suponha que ele foi colorido com a cor c. Logo, $a - b, b - c, a - c$ são valores coloridos com a mesma cor no particionamento dos inteiros de 1 até n. Note, no entanto, que $a - b + b - c = a - c$, ou seja, se tomarmos $x = a - b$, $y = b - c$ e $z = a - c$, encontramos a tripla $\{x, y, z\}$, o que prova o teorema de Schur, como queríamos demonstrar.

- (4.5.8) OPCIONAL

- (4.5.9)

  Seja $\mathcal{X}$ uma 2-coloração arbitrária das arestas do K_n. Para cada triângulo no K_n (sabemos que existem $\binom{n}{3}$ no total), vamos colocá-los em três conjuntos diferentes A, V, C, sendo eles:

- A : triângulos em que todas as arestas são azuis
- V : triângulos em que todas as arestas são vermelhas
- C : triângulos que contêm arestas com ambas as cores

Vamos chamar um triângulo não monocromático de triângulo bicromático (estamos considerando uma 2-coloração). Vamos definir como ângulo bicromático um par de arestas cok cores distintas que compartilham um vértice, chamado de vértice de suporte. Trivialmente, todo triângulo bicromático contêm exatamente dois ângulos bicromáticos. Ao mesmo tempo, notemos que todo ângulo bicromático faz parte unicamente de um triângulo bicromático. Com isso, podemos inferir que o número de triângulos bicromáticos é exatamente metade do número de ângulos bicromáticos.

Seja $v_i \in V(K_n)$ e sejam r_i e b_i o número de arestas vermelhas e azuis incidentes a v_i, respectivamente. Sabemos que $b_i + r_i = n - 1$. Desse modo, o número de ângulo bicromáticos em que o vértice de suporte é v_i é igual a $b_i r_i \leq \frac{n^2}{4}$. Desse modo, o número total de ângulos bicromáticos é $\sum_{v_i \in V(K_n)} r_i b_i \leq \frac{n^3}{4}$. O número de triângulos bicromáticos é metade desse valor, logo é menor ou igual a $\frac{n^3}{8}$. Isso implica que o número de triângulo monocromáticos é maior ou igual a $\binom{n}{3} - \frac{n^3}{8}$.

Como $\binom{n}{3} - \frac{n^3}{8}$ é maior que $\frac{1}{4}\binom{n}{3} - n^2$ para todo n, provamos que toda 2-coloração de $E(K_n)$ contém pelo menos $\frac{1}{4}\binom{n}{3} - n^2$ triângulos monocromáticos, como pedido pelo enunciado.

- (4.5.10) OPCIONAL