

Lista 3

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (5.8.1) Exercício feito à mão e página com ele está anexado ao fim do pdf.
- (5.8.2)

Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r , então:

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

Sabemos, a partir do teorema 5.3.11 do livro (que devemos usar na prova), que todo grafo G possui em sua estrutura uma clique de tamanho pelo menos $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G . Isso pois todo conjunto independente em G é uma clique em \overline{G} .

Vamos inicialmente então assumir que o grafo G é livre de K_r , a clique com r vértices. Disso podemos assumir que:

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \leq r-1$$

Como $\frac{1}{n-d(v)}$ é uma função convexa em relação a $d(v)$, podemos aplicar a transformação:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n - \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{n}} &\leq r-1 \\ \frac{n}{n - \frac{2|E(G)|}{n}} &\leq r-1 \\ \frac{n}{r-1} &\leq n - \frac{2|E(G)|}{n} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n - \frac{n}{r-1} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n\left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \end{aligned}$$

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$$

Como queríamos demonstrar.

• (5.8.3)

Para resolver essa questão também usaremos o teorema 5.3.11 do livro. Seja G um grafo com n vértices e $\pi = [v_1, \dots, v_n]$ uma permutação aleatória e uniforme dos vértices de G . Denotamos por $\mathcal{N}(v)$ a vizinhança aberta de v em G .

Vamos construir um conjunto S da seguinte maneira gulosa. Para cada v em π , vamos adicionar $\mathcal{N}(v)$ em S e remover de π os vértices de $\mathcal{N}(v)$, que pode ser descrito como $v \cup \mathcal{N}_2(v)$. O processo persiste até $\pi = \emptyset$.

Trivialmente, S é um conjunto independente, uma vez que G é livre de triângulos. Quando adicionamos \mathcal{N} à S , sabemos que nenhum desses vértices são vizinhos pois se não existiria um triângulo em G . Seja $t = |S|$ o tamanho de S , Denotamos por $\mathbb{E}[t]$ a esperança de t .

Sabemos que $\mathbb{E}[t] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}[v \in S]$. Para um v pertencer a S , nenhum de seus vizinhos pode pertencer, e v possui $d(v)$ vizinhos. Para cada vértice v , de acordo com a construção do conjunto S , adicionamos $d(v)$ a S e removemos v e $d_2(v)$ das possibilidades de escolha. Logo, para cada v , a quantidade esperada de vértices adicionados por ele a S é de $\frac{d(v)}{1+d(v)+d_2(v)}$

• (5.8.4)

Vamos utilizar $\mu = \mathbb{E}[X]$ pois a notação é melhor. Queremos provar então que:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

Seja $Z = X - \mathbb{E}[X]$. Sabemos que $\mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2$ e seja $u = \frac{\sigma}{t}$. Então:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) = \mathbb{P}(Z \geq t\sigma) \leq \mathbb{P}((Z + u)^2 \geq (t\sigma + u)^2)$$

Pela Desigualdade de Markov, sabemos que:

$$\mathbb{P}((Z+u)^2 \geq (t\sigma+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(Z+u)^2]}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\mathbb{E}(Z^2) + 2u\mathbb{E}[Z] + u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2 + u^2}{(t\sigma+u)^2}$$

O resto das contas foi feito a mão:

$$\frac{u=s}{t} \quad \frac{s^2+u^2}{(t+s+u)^2} = \frac{s^2+s^2/t^2}{(t+s+s/t)^2} = \frac{s^2(1+1/t^2)}{s^2(t+1+1/t)^2} \cdot t$$

$$\frac{t+1/t}{t(1+1/t)^2} = \frac{1}{t(1+1/t)} = \frac{1}{t^2+1} \quad \square$$

Portanto, provamos a desigualdade de Chantelli.

• (5.8.5)

• (5.8.6)

Queremos mostrar que $R(4, k) \geq (\frac{ck}{\log k})^2$ para k suficientemente grande.

Seja $n = (\frac{k}{4 \log k})^2$. Mostraremos que existe um grafo G com $\frac{n}{2}$ vértices que é livre de K_4 e satisfaz $\alpha(G) < k$. Consideremos o grafo $G(n, p)$ com $p = n^{-\frac{3}{4}}$. Pelo teorema 5.4.2, temos com alta probabilidade:

$$\alpha(G) \leq \frac{2 \log n}{p} < k$$

Uma vez que $n < k^2$ e, portanto, $\log n < 2 \log k$.

Seja X a variável aleatória que representa o número de K_4 em $G(n, p)$. Temos que:

$$\mathbb{E}[X] = p^4 \binom{n}{4} \leq \frac{p^4 n^4}{24} = \frac{n^{-\frac{3}{4} \cdot 4} n^4}{24} = \frac{n}{24}$$

Pela desigualdade de markov, temos:

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{n} \frac{n}{24} \leq \frac{1}{12}$$

Segue que existe um grafo H com n vértices, $\alpha(H) < k$, que contém no máximo $n/2$ triângulos. Removendo no máximo $n/2$ vértices de H (um para cada triângulo), obtemos um grafo G como desejado inicialmente.

- (5.8.7)

58.1- $a_i \in \{-1, 1\} \forall i, \quad v_i \in \mathbb{R}^N \forall i, \quad |v_i| = 1 \quad |a_1 v_1 + \dots + a_N v_N| \leq \sqrt{N}$

Seja $s = |\sum_i a_i v_i|$ e considere s^2 , isto é, $s^2 = |\sum_i a_i v_i|^2 = (\sum_i a_i v_i) \cdot (\sum_i a_i v_i)$

Temos que:

$$s^2 = \sum_{i=1}^N \underbrace{(a_i v_i) \cdot (a_i v_i)}_{\substack{\text{Mesmo} \\ \text{índice}}} + \sum_{1 \leq i < j \leq N \rightarrow i \neq j} (2(a_i v_i) \cdot (a_j v_j))$$

Como $a_i \in \{-1, 1\}$ e v_i é unitário, $w = a_i v_i$ também é unitário, e $w \cdot w = 1$, logo:

$$s^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^N (a_i v_i) \cdot (a_i v_i)}_N + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_i v_i) \cdot (a_j v_j) = N + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_i v_i) \cdot (a_j v_j)$$

Vamos escolher a_i da seguinte forma (uniforme) $\Rightarrow a_i = \begin{cases} -1, & \text{com } p = 1/2 \\ 1, & \text{com } p = 1/2 \end{cases}$

Deste modo, temos que $\mathbb{E}[a_i a_j] = \mathbb{E}[a_i] \mathbb{E}[a_j] = 0$, pois $\mathbb{E}[a_i] = -1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$

Logo, temos que:

$$\mathbb{E}[s^2] = \mathbb{E}\left[N + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_i v_i) \cdot (a_j v_j)\right] = \underbrace{\mathbb{E}[N]}_N + \underbrace{2\mathbb{E}\left[\sum_{1 \leq i < j \leq N} (a_i v_i) \cdot (a_j v_j)\right]}_{0, \text{ pois } \mathbb{E}[a_i a_j] = 0}$$

$$\mathbb{E}[s^2] = N$$

Como s^2 é não-negativo, segue que $s^2 \leq N$, logo $s \leq \sqrt{N}$ ■

Para provar o caso da desigualdade com valor invertido, podemos apenas trocar todo a_i por $-a_i$, o que não altera a norma do vetor, apenas a direção. Os mesmos passos anteriores podem ser usados p/ mostrar que $s \geq \sqrt{N}$.

