

# Lista 1

Luís Felipe Ramos Ferreira

[lframos.lf@gmail.com](mailto:lframos.lf@gmail.com)

1. Capítulo lido
2.     • (1.5.3)

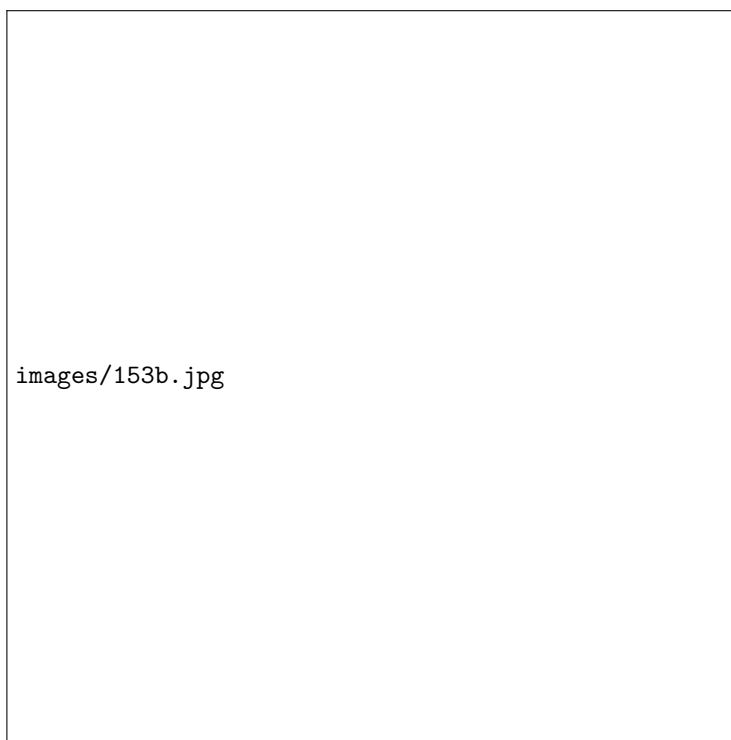


Figure 1: Questão 1.5.3 - a)

- (a)
- (b) Do lado esquerdo, temos  $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ . Sabemos que  $\binom{n}{m}$  representa o número de subconjuntos de tamanho  $m$  de um conjunto com  $n$  elementos. Por sua vez,  $\binom{m}{k}$  representa o número de subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto com  $m$  elementos. Desse modo,

esse produto representa o número de maneiras de escolher  $k$  elementos de um conjunto de  $m$  elementos que foram previamente escolhidos de um conjunto de  $n$  elementos. Do lado direito da equação, temos  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$ . Sabemos que  $\binom{n}{k}$  representa o número de subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto de tamanho  $n$ .  $\binom{n-k}{m-k}$ , por sua vez, é o número de conjuntos de tamanho  $m-k$  de um conjunto de tamanho  $n-k$ . O produto final então é o número de subconjuntos de tamanho  $k$  de um subconjunto de tamanho  $m$  escolhido de um conjunto de tamanho  $n$ , assim como no lado esquerdo. Como ambos os lados representam o mesmo valor combinatório, eles são iguais. Uma prova algébrica também pode ser obtida como visto abaixo.

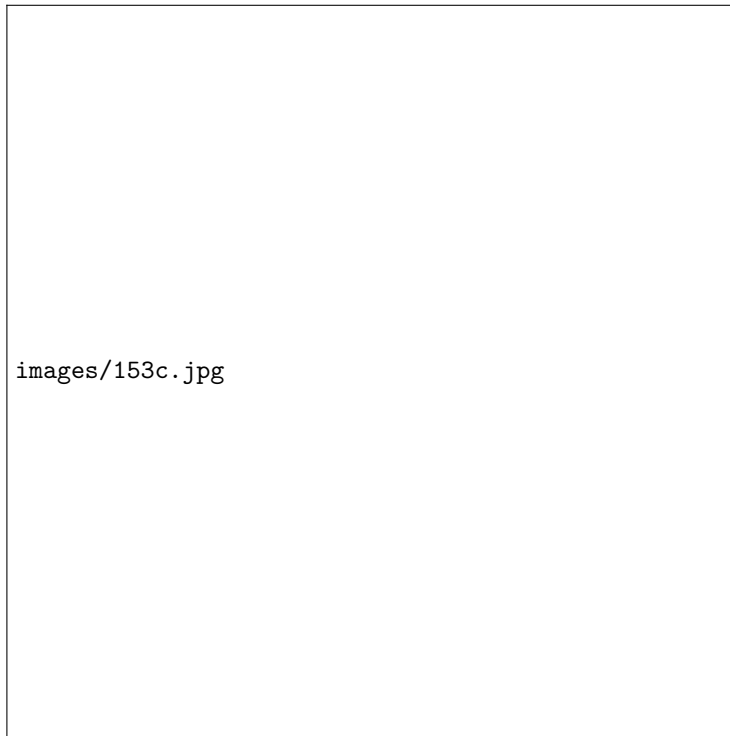
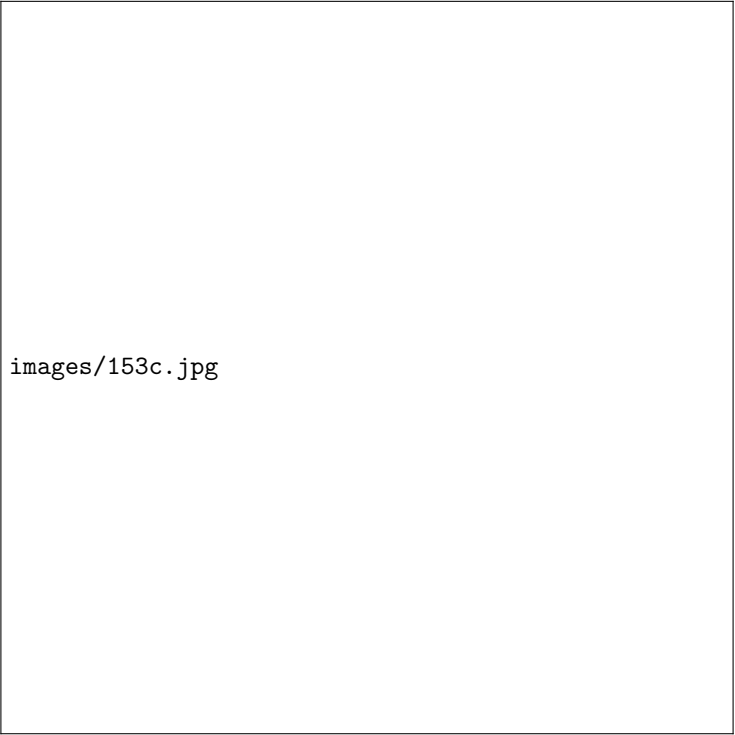


Figure 2: Questão 1.5.3 - b)

- (c) O lado direito da equação  $\binom{n+1}{m+1}$  representa o número de maneiras de escolher  $m+1$  elementos de um conjunto de  $n+1$  elementos. O lado esquerdo da equação  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m}$ ,



images/153c.jpg

Figure 3: Questão 1.5.3 - c)

- (1.5.6) Seja  $G$  um grafo qualquer com  $n$  vértices. Suponha, por contradição, que não existam dois vértices em  $G$  com o mesmo grau. Logo, como existem  $n$  vértices no grafo, os  $n$  possíveis graus que um vértice pode ter são  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , logo podemos dizer que estes são os graus dos vértices de  $G$ . No entanto, isso é absurdo, pois existiriam um vértice de grau 0 e um vértice de grau  $n-1$  em um grafo com  $n$  vértices, o que não faz sentido. Logo, a premissa inicial estava errada, e podemos afirmar que todo grafo com  $n$  vértices,  $n \geq 2$ , possui dois vértices com o mesmo grau.
- (1.5.11) indução?
- 3. • (2.8.3) Seja  $G$  um grafo com número cromático igual a  $\chi(G)$ . Sabemos que, para qualquer par de cores  $c_1, c_2$  da coloração mínima, deve existir ao menos uma aresta entre vértices  $v_1$ , com cor  $c_1$ , e  $v_2$ , com cor  $c_2$ . Caso contrário, todos os vértices com cor  $c_2$ , poderiam ser coloridos com a cor  $c_1$  (sem perda de generalidade), o que seria contraditório com o fato da coloração ser mínima. Logo, para cada par de cores na coloração, deve existir ao menos uma aresta, e como cada aresta conecta exatamente dois vértices, temos que  $e(G) \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .
- (2.8.9) Seja  $G$  um grafo bipartido.

- (2.8.15) A prova por ser feita por indução no número de arestas da árvore. A solução é trivial para o caso base em que  $e(T) = 1$ . Para  $e(T) = 1$ ,  $T$  é uma aresta e trivialmente é subgrafo de qualquer grafo  $G$  com  $\delta(G) \geq 1$ . Suponha que o resultado vale para qualquer árvore com  $k$  arestas. Seja  $T$  uma árvore qualquer com  $k + 1$  arestas e  $T' = T - \{v\}$  para alguma folha  $v \in V(T)$ .

4.
  - (3.5.1)
  - (3.5.5)
  - (3.5.6)
  - (3.5.7)
  - (3.5.8)
  - (3.5.9)