Lista 1

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

1. Capítulo lido
2. • (1.5.3)

images/153b.jpg

Figure 1: Questão 1.5.3 - a)

(a)

(b) Do lado esquerdo, temos $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$. Sabemos que $\binom{n}{m}$ representa o número de subconjuntos de tamanho m de um conjunto com n elementos. Por sua vez, $\binom{m}{k}$ representa o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto com m elementos. Desse modo, esse produto representa o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de m elementos que foram previamente escolhidos de um conjunto de n elementos. Do lado direito da equação, temos $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$. Sabemos que $\binom{n}{k}$ representa o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. $\binom{n-k}{m-k}$, por sua vez, é o número de conjuntos de tamanho $m-k$ de um conjunto de tamanho $n-k$. O produto final então é o número de subconjuntos de tamanho k de um subconjunto de tamanho m escolhido de um conjunto de tamanho n, assim como no lado esquerdo. Como ambos os lados representam o mesmo valor combinatório, eles são iguais. Uma prova algébrica também pode ser obtida como visto abaixo.

images/153c.jpg

Figure 2: Questão 1.5.3 - b)

(c) O lado direito da equação $\binom{n+1}{m+1}$ representa o número de maneiras de escolher $m+1$ elementos de um conjunto de $n+1$ elementos. O lado esquerdo da equação $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$, images/153c.jpg

Figure 3: Questão 1.5.3 - c)

- (1.5.6) Seja G um grafo qualquer com n vértices. Suponha, por contradição, que não existam dois vértices em G com o mesmo grau. Logo, como existem n vértices no grafo, os n possíveis graus que um vértice pode ter são $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, logo podemos dizer que estes são os graus dos vértices de G. No entanto, isso é absurdo, pois existiram um vértice de grau 0 e um vértice de grau $n-1$ em um grafo com n vértices, o que não faz sentido. Logo, a premisa inicial estava errada, e podemos afirmar que todo grafo com n vértices, $n \geq 2$, possui dois vértices com o mesmo grau.
- (1.5.11) indução?

3. - (2.8.3) Seja G um grafo com número cromático igual a $\mathcal{X}(G)$. Sabemos que, para qualquer par de cores c_1, c_2 da coloração mínima, deve existir ao menos uma aresta entre vértices v_1, com cor c_1, e v_2, com cor c_2. Caso contrário, todos os vértices com cor c_2, poderiam ser coloridas com a cor c_1 (sem perda de generalidade), o que seria contraditório com o fato da coloração ser mínima. Logo, para cada par de cores na coloração, deve existir ao menos uma aresta, e como cada aresta conecta exatamente dois vértices, temos que $e(G) \geq \binom{\mathcal{X}(G)}{2}$.
   - (2.8.9) Seja G um grafo bipartido.

- (2.8.15) A prova por ser feita por indução no número de arestas da árvore. A solução é trivial para o caso base em que $e(T) = 1$. Para $e(T) = 1$, T é uma aresta e trivialmente é subgrafo de qualquer grafo G com $\delta(G) \geq 1$. Suponha que o resultado vale para qualquer árvore com k arestas. Seja T uma árvore qualquer com $k+1$ arestas e $T' = T - \{v\}$ para alguma folha $v \in V(T)$.

4.
   - (3.5.1)
   - (3.5.5)
   - (3.5.6)
   - (3.5.7)
   - (3.5.8)
   - (3.5.9)