58.1- $a_i \in \{-1,1\}\ \forall i \quad v_i \in \mathbb{R}^n\ \forall i,\ |v_i|=1 \quad |a_1v_1 + \dots + a_Nv_N| \leq \sqrt{N}$

Seja $s = |\sum_i a_iv_i|$ e considere s^2, isto é, $s^2 = |\sum_i a_iv_i|^2 = (\sum_i a_iv_i)(\sum_i a_iv_i)$

Temos que:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(a_iv_i)\cdot(a_iv_i)}_{\text{Mesmo índice}} + \sum_{1\leq i<j\leq N \to i\neq j} (2(a_iv_i)\cdot(a_jv_j))$$

Como $a_i \in \{-1,1\}$ e v_i é unitário, $w = a_iv_i$ também é unitário, e $w\cdot w = 1$, logo:

$$s^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{(a_iv_i)(a_iv_i)}_{1}}_{N} + \sum_{1\leq i<j\leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j) = N + \sum_{1\leq i<j\leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)$$

Vamos escolher a_i da seguinte forma (uniforme) $\Rightarrow a_1 = \begin{cases} -1, & \text{com } p = 1/2 \\ 1, & \text{com } p = 1/2 \end{cases}$

Desse modo, temos que $\mathbb{E}[a_ia_j] = \mathbb{E}[a_i]\mathbb{E}[a_j] = 0$, pois $\mathbb{E}[a_i] = -1\cdot 1/2 + 1\cdot 1/2 = 0$

Logo, temos que:

$$\mathbb{E}[s^2] = \mathbb{E}[N + \sum_{1\leq i<j\leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)] = \underbrace{\mathbb{E}[N]}_{N} + \underbrace{2\mathbb{E}[\sum_{1\leq i<j\leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)]}_{0,\text{ pois } \mathbb{E}[a_ia_j]=0}$$

$$\mathbb{E}[s^2] = N$$

Como s^2 é não-negativo, segue que $s^2 \leq N$, logo $s \leq \sqrt{N}$ ∎

Para provar o caso da desigualdade com valor invertido, podemos apenas trocar todo a_i por $-a_i$, o que não altera a norma do vetor, apenas a direção. Os mesmos passos anteriores podem ser usados p/ mostrar que $s \geq \sqrt{N}$.