

Lista 3

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (5.8.1)

Vamos escolher os valores de a_i da seguinte maneira:

- $a_i = -1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$
- $a_i = 1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$

Isso claramente implica que, para todo i, j , o produto $a_i a_j$ segue a seguinte distribuição:

- $a_i a_j = -1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$
- $a_i a_j = 1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$

A esperança de $a_i a_j$, denotada por $\mathbb{E}[a_i a_j]$, é igual à $-1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 0$. Usando a linearidade da esperança, temos que:

$$\mathbb{E}[a_i a_j] =$$

- (5.8.2)

Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r , então:

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{r-1}\right) \frac{r^2}{2}$$

Sabemos, a partir do teorema 5.3.11 do livro (que devemos usar na prova), que todo grafo G possui em sua estrutura uma clique de tamanho $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G . Isso pois todo conjunto independente em G é uma clique em \overline{G} .

Vamos inicialmente então assumir que o grafo G é livre de K_r , a clique com r vértices. Disso podemos assumir que:

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \leq r-1$$

Como $\frac{1}{n-d(v)}$ é uma função convexa em relação a $d(v)$, podemos aplicar a transformação:

$$\begin{aligned}\frac{n}{n - \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{n}} &\leq r - 1 \\ \frac{n}{n - \frac{2|E(G)|}{n}} &\leq r - 1 \\ \frac{n}{r - 1} &\leq n - \frac{2|E(G)|}{n} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n - \frac{n}{r - 1} \\ \frac{2|E(G)|}{n} &\leq n(1 - \frac{1}{r - 1}) \\ |E(G)| &\leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r - 1})\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

• (5.8.3)

Para resolver essa questão também usaremos o teorema 5.3.11 do livro. Seja G um grafo com n vértices e $\pi = [v_1, \dots, v_n]$ uma permutação aleatória e uniforme dos vértices de G . Denotamos por $\mathcal{N}(v)$ a vizinhança aberta de v em G . Vamos construir um conjunto S da seguinte maneira:

- $S \leftarrow \emptyset$
- $\forall v \in \pi$
 - * se $\mathcal{N}(v) \not\subseteq S$:
 - $S \leftarrow S \cup \mathcal{N}(v)$

Como G é um grafo livre de triângulo, como diz o enunciado, podemos afirmar que o conjunto S é independente. Isso porque

Seja agora X a variável aleatória que segue a seguinte regra:

- $X(v) = 1$ se $v \in S$
- $X(v) = 0$ c.c.

Temos que o tamanho do conjunto S é tal que $|S| = \sum_{v \in V(G)} X_v$. O valor esperado do tamanho desse conjunto é portanto:

$$\mathbb{E}[|S|] = \mathbb{E}\left[\sum_{v \in V(G)} X_v\right]$$

Pela linearidade da esperança, temos que:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{v \in V(G)} X_v\right] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}(v \in S)$$

- (5.8.4)
- (5.8.5)
- (5.8.6)
- (5.8.7)