

## Lista 2

Luís Felipe Ramos Ferreira

[lframos.lf@gmail.com](mailto:lframos.lf@gmail.com)

- (4.5.1)

- $R(3)$

Inicialmente, note que a seguinte 2-coloração do  $K_5$  não possui uma clique de tamanho 3 monocromática, portanto  $R(3) > 5$ .

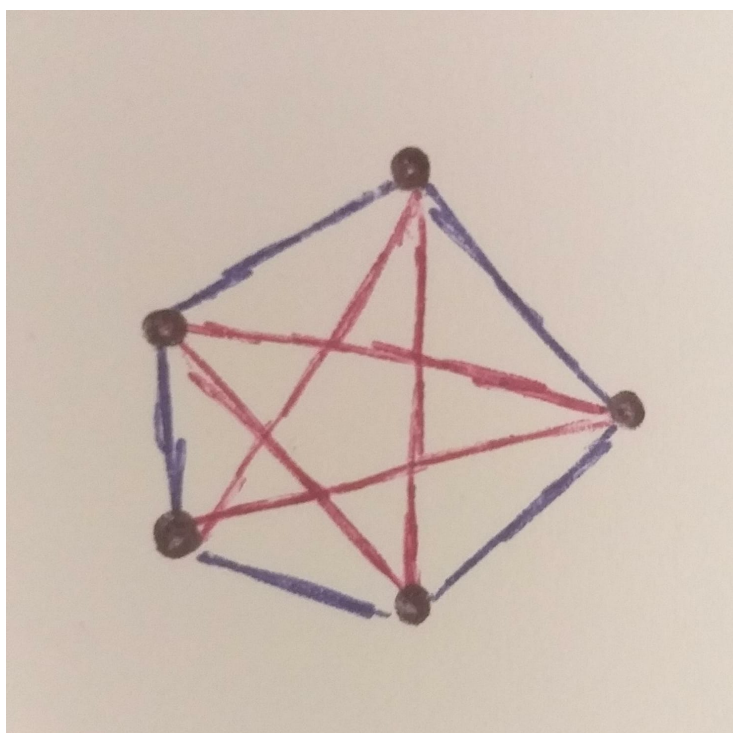


Figure 1:  $K_5$  2-colorido

No entanto, sabemos pelo fato 4.0.1 do livro que toda 2-coloração do  $K_6$  possui um triângulo monocromático, logo  $R(3) = 6$ . A prova funciona da seguinte forma: seja  $v$  um vértice de  $K_6$ . Pelo princípio

da casa dos pombos, das 5 arestas incidentes a  $v$ , ao menos 3 possuem a mesma cor. Vamos dizer que é a cor 1. Sejam  $x, y, z$  vizinhos de  $v$  com a aresta com cor 1. Se qualquer uma das arestas  $xy, xz, yz$  for da cor 1, temos um triângulo de cor 1. Caso contrário, o triângulo formado pelos vértices  $x, y, z$  é monocromático na outra cor, chamemos ela de 2. Logo, toda 2-coloração do  $K_6$  possui um triângulo monocromático.

–  $R(3, 4)$

Inicialmente, vamos notar que  $R(3, 4)$  é maior que 8, e isso pode ser notado pela 2-coloração do  $K_8$  abaixo em que não existe uma clique de tamanho 3 vermelha e nem uma clique de tamanho 4 azul (Na imagem, o primeiro grafo tem apenas as arestas vermelhas e o segundo seria o complemento do primeiro grafo, em que as arestas são azuis).

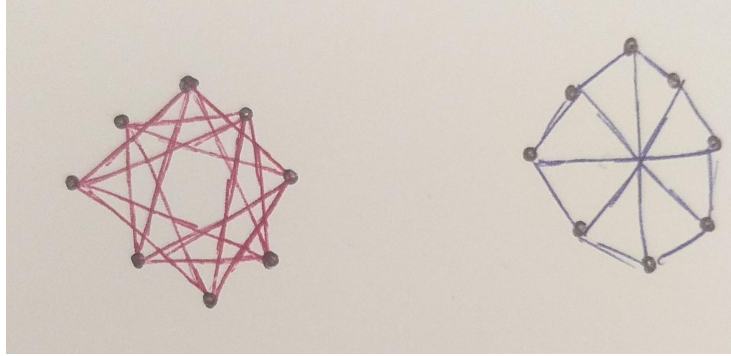


Figure 2:  $K_8$  2-colorido

Vamos provar agora que  $R(3, 4) \leq 10$ , em particular, mostrar que para um grafo completo de 10 vértices sempre teremos um triângulo vermelho ou uma clique de tamanho 4 azul. Depois, com uma pequena variação, mostraremos que  $R(3, 4) \leq 9$ , o que conclui a prova. Seja  $A$  um vértice qualquer de um  $K_{10}$  2-colorido com vermelho e azul.  $A$  possui nove vizinhos e das arestas que o conectam a seus vizinhos, sabemos que ao menos 6 são azuis ou ao menos 4 são vermelhas (isso porque no total precisamos ter 9 arestas, uma para cada vizinho). Suponhamos o caso em que  $A$  possui 4 arestas vermelhas o conectando a seus vizinhos. Se existir uma aresta vermelha entre esses vizinhos, então existe um triângulo vermelho no grafo. Caso contrário, todas as arestas entre os 4 vértices são azuis, logo existe uma clique de tamanho 4 de cor azul. Seja agora o caso em que  $A$  possui 6 arestas de cor azul o conectando a seus vizinhos. Sabemos que  $R(3, 3) = 6$ , logo, entre esses vizinhos, há um triângulo vermelho ou azul. Se for vermelho, já perdemos, se for azul, note que ele

forma uma clique de tamanho 4 azul junto com  $A$ . Logo, 10 é um limite superior para  $R(3, 4)$ .

Consideremos agora o caso do  $K_9$ . Note que os argumentos usados anteriormente servem da mesma maneira, exceto pelo caso em que, para todo vértice  $A$ , exista exatamente 5 arestas azuis e 3 vermelhas saindo dele. Nesse caso, para cada vértice teremos três arestas vermelhas, e como são 9 vértices, temos  $3 * 9 = 27$ . Como cada aresta é contada duas vezes, precisamos dividir por dois, obtendo assim um número  $\frac{27}{2}$  (não inteiro) de arestas, o que é um absurdo. Logo,  $R(3, 4) \leq 9$

–  $R(4, 4)$

Sabemos pelo lema 4.1.3 do livro que, para todo  $s, t \geq 2$ , temos:

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$$

Logo, temos que  $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 2 * R(3, 4) = 2 * 9 = 18$ . Mostramos no exercício anterior que  $R(3, 4) = 9$ . No entanto, vamos mostrar que existe uma 2-coloração de  $K_{17}$  tal que não existe uma clique de tamanho 4 nem vermelha nem azul, mostrando assim que  $R(4, 4) = 18$ . A imagem abaixo, retirada [deste site](#), apresenta tal grafo e sua coloração.

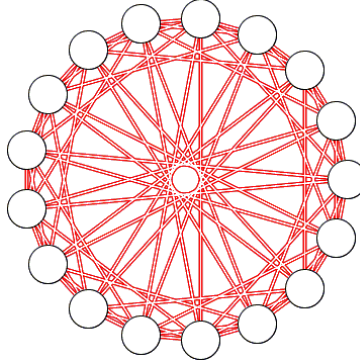


Figure 3:  $K_{17}$  arestas vermelhas

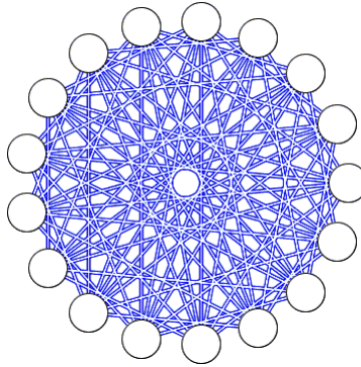


Figure 4:  $K_{17}$  arestas azuis

- (4.5.2)

- $R(K_3, C_4)$

Inicialmente, note que  $R(K_3, C_4) > 6$ , uma vez que a 2-coloração do  $K_6$  abaixo não contém  $K_3$  vermelho nem  $C_4$  azul. Isso pois as arestas azuis formam um  $2K_3$  e as arestas vermelhas foram um bipartido  $K_{3,3}$ .

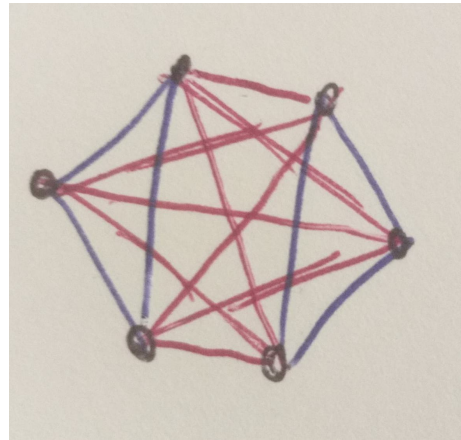


Figure 5:  $K_6$  2-colorido

Seja agora um  $K_7$  2-colorido. Como  $R(3) = 6$ , sabemos que deve existir nessa 2-coloração ou um  $K_3$  vermelho ou um azul. Se for vermelho acabamos, então vamos assumir que é azul. Sejam  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$  os vértices desse  $K_3$  azul e  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  os vértices que sobraram no  $K_7$ . Se  $V$  formar uma clique azul, temos um  $C_4$  azul e acabamos. Logo vamos assumir que existe uma arestas vermelha

entre vértices de  $V$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que é entre  $v_1$  e  $v_2$ . Note também que para qualquer  $v \in V$ , se ele possuir duas ou mais arestas azuis indo para  $W$ , teríamos um  $C_4$  azul formado por  $\{v, w_1, w_2, w_3\}$ , então assumimos que existe no máximo uma aresta azul dessa forma, o que implica em ao menos duas arestas vermelhas dessa forma. Note, no entanto, que  $v_1$  e  $v_2$  compartilham um vizinho  $w \in W$  de tal modo que  $v_1w$  e  $v_2w$  são vermelhas, pelo princípio a casa dos pombos. Como  $v_1v_2$  é vermelha, temos um  $K_3$  vermelho. Logo,  $R(K_3, C_4) = 7$ , como queríamos demonstrar.

–  $R(K_3, C_5)$

Primeiramente, vamos mostrar que  $R(K_3, C_5) > 8$  ao mostrar uma 2-coloração de um  $K_8$  tal que não existe um  $K_3$  vermelho e nem um  $C_5$  azul. Tal grafo está na imagem abaixo. Note que as arestas azuis formam 2  $K_4$ , logo é impossível ter um  $C_5$  azul. Como as arestas vermelhas formam um grafo bipartido, não há como existir um  $K_3 = C_3$  vermelho.

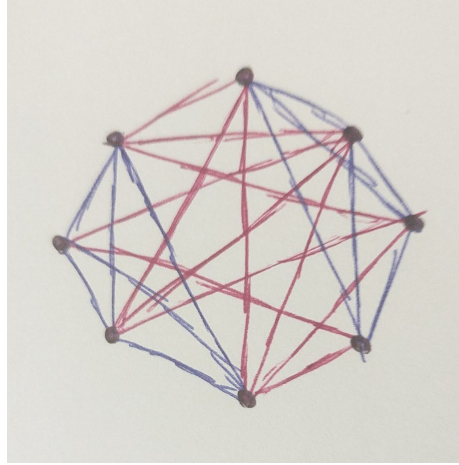


Figure 6:  $K_8$  2-colorido

Seja agora um  $K_9$  com uma 2-coloração. Vamos lembrar que  $R(3, 4) = 9$ , como demonstramos no exercício anterior. Logo, como se trata de um  $K_9$ , se não existisse um  $K_4$  azul teríamos um  $K_3$  vermelho e acabamos. Logo, vamos assumir agora que existe um  $K_4$  azul na coloração. Sejam  $w_i$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  os vértices nesse  $K_4$  e  $v_j$  para todo  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  os outros vértices do grafo. Se todas as arestas entre qualquer dois vértices  $v_a$  e  $v_b$  for azul, temos um  $C_5$  azul e acabamos, logo vamos assumir que existe ao menos uma aresta vermelha entre um  $v_a$  e um  $v_b$ . Vamos assumir sem perda de generalidade que se tratam de  $v_1$  e  $v_2$ .

Note também que se existirem duas arestas azuis saindo de algum  $v_j$  indo para o conjunto  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ , então existe um  $C_5$  azul, logo podemos assumir a partir de agora que existem no máximo uma aresta azul nesse sentido, o que implica em existirem ao menos 3 arestas vermelhas nesse sentido. No entanto, isso quer dizer que  $v_1$  e  $v_2$  possuem um vizinho em comum  $w_i$  de modo que  $v_1w_i$  e  $v_2w_i$  são vermelhas. Como  $v_1v_2$  também é vermelha, achamos um triângulo vermelho. Logo,  $R(K_3, C_5) \leq 9$ , o que implica, com o que sabemos de antes, em  $R(K_3, C_5) = 9$ , como queríamos demonstrar.

- (4.5.3)

Sabemos que  $R(3) = 6$ , logo, sabemos que o  $K_5$  não contém  $K_3$  monocromático, logo  $\binom{5}{2} = 10$  é um limite inferior para o maior número de arestas que um grafo pode ter e não possui  $K_3$  monocromático. Também, sabemos que, como  $R(3) = 6$ , se  $G$  possui uma clique de tamanho 6, com certeza existirá um  $K_3$  monocromático em uma 2-coloração de suas arestas, logo um  $K_6$  não pode aparecer em sua estrutura.

Poranto, queremos saber o maior número de arestas que um grafo com  $n$  vértices pode ter para que ele não possua  $K_6$  como subgrafo, e esse é exatamente o extremal de  $n$  e  $K_6$ , isto é,  $ex(n, K_6)$ , que é o número de arestas do grafo  $k$ -partido de  $n$  vértices. Pelo Teorema de Turán, sabemos que, se  $k$  divide  $n$ :

$$ex(n, K_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$$

$$ex(n, K_{5+1}) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \frac{n^2}{2} = \frac{4}{5} \frac{n^2}{2} = \frac{2n^2}{5}$$

Se  $k$  não divide  $n$ , toda partição do grafo  $k$ -partido tem tamanho  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  ou  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ , que possui um valor aproximadamente igual ao anterior, de  $(1 - \frac{1}{k}) \frac{n^2}{2}$ .

- (4.5.4)

Queremos mostrar que  $R_r(3) \geq 5^{\frac{r}{2}}$ . Sabemos pelo teorema 4.1.6 do livro que  $R_r(3) \geq 2^r$ .

- (4.5.5)

Sabemos que  $R(t)$  é o menor  $n$  tal que toda 2-coloração de  $K_n$  contém uma cópia monocromática de  $K_t$ . Logo, se pegarmos o  $K_n$  em que  $n = R(t)$ , seu número de arestas é  $\binom{n}{2}$ . Obviamente temos que  $\hat{r} \leq \binom{n}{2}$ , pois  $K_n$  é um grafo tal que  $K_n \rightarrow K_t$ . CONTINUAR

- (4.5.6)

- (4.5.7)

Inicialmente, vamos notar que existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que a partir desse  $N$  o teorema vale para  $r$ , e esse  $N$  é chamado de número de Schur. Sabemos

pelo teorema de Ramsey que  $n = R_r(3)$  é um inteiro, que existe, tal que toda  $r$ -coloração de  $K_n$  contém uma cópia monocromático de  $K_3$ . Considere então o conjunto  $\{1, \dots, n\}$  e uma  $r$ -coloração dele.

Vamos colorir o  $K_n$  da seguinte maneira. Para cada aresta  $v_i v_j \in V(K_n)$ , colorimos ela com a cor  $c$  se  $|i - j|$  foi colorido com a cor  $c$  na  $r$ -coloração anterior dos inteiros de 1 até  $n$ . Pelo teorema de Ramsey, sabemos que essa coloração de  $K_n$  contém um triângulo monocromático. Sejam  $v_a, v_b, v_c$ , com  $a > b > c$  os vértices que formam esse triângulo, e suponha que ele foi colorido com a cor  $c$ . Logo,  $a - b, b - c, a - c$  são valores coloridos com a mesma cor no particionamento dos inteiros de 1 até  $n$ . Note, no entanto, que  $a - b + b - c = a - c$ , ou seja, se tomarmos  $x = a - b$ ,  $y = b - c$  e  $z = a - c$ , encontramos a tripla  $\{x, y, z\}$ , o que prova o teorema de Schur, como queríamos demonstrar.

- (4.5.8) OPCIONAL

- (4.5.9)

- (4.5.10)

Não, essa afirmativa é falsa.