Lista 3

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (5.8.1)

  Vamos escolher os valores de a_i da seguinte maneira:

  - $a_i = -1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$
  - $a_i = 1$ com probabilidade $\frac{1}{2}$

  Isso claramente implica que, para todo i, j, o produto $a_i a_j$ segue a seguinte distribuição:

  - $a_i a_j = -1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$
  - $a_i a_j = 1$, com probabilidade $\frac{1}{2}$

  A esperança de $a_i a_j$, denotada por $\mathbb{E}[a_i a_j]$, é igual à $-1 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = 0$. Usando a linearidade da esperança, temos que:

  $$\mathbb{E}[a_i a_j] =$$

- (5.8.2)

  Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r, então:

  $$|E(G)| \leq (1 - \frac{1}{r-1})\frac{r^2}{2}$$

  Sabemos, a partir do teorema 5.3.11 do livro (que devemos usar na prova), que todo grafo G possui em sua estrutura uma clique de tamanho $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G. Isso pois todo conjunto independente em G é uma clique em $\overline{G}$.

  Vamos inicialmente então assumir que o grafo G é livre de K_r, a clique com r vértices. Disso podemos assumir que:

  $$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - d(v)} \leq r - 1$$

Como $\frac{1}{n-d(v)}$ é uma função convexa em relação a $d(v)$, podemos aplicar a transformação:

$$\frac{n}{n - \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{n}} \leq r - 1$$

$$\frac{n}{n - \frac{2|E(G)|}{n}} \leq r - 1$$

$$\frac{n}{r-1} \leq n - \frac{2|E(G)|}{n}$$

$$\frac{2|E(G)|}{n} \leq n - \frac{n}{r-1}$$

$$\frac{2|E(G)|}{n} \leq n(1 - \frac{1}{r-1})$$

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r-1})$$

Como queríamos demonstrar.

- (5.8.3)

  Para resolver essa questão também usaremos o teorema 5.3.11 do livro. Seja G um grafo com n vértices e $\pi = [v_1, \ldots, v_n]$ uma permutação aleatória e uniforme dos vértices de G. Denotamos por $\mathcal{N}(v)$ a vizinhança aberta de v em G. Vamos construir um conjunto S da seguinte maneira:

  - $S \leftarrow \emptyset$
  - $\forall v \in \pi$
    - se $\mathcal{N}(v) \subsetneq S$:
      - $S \leftarrow S \cup \mathcal{N}(v)$

  Como G é um grafo livre de triângulo, como diz o enunciado, podemos afirmar que o conjunto S é independente. Isso porque

  Seja agora X a variavel aleatória que segue a seguinte regra:

  - $X(v) = 1$ se $v \in S$
  - $X(v) = 0$ c.c.

  Temos que o tamanho do conjunto S é tal que $|S| = \sum_{v \in V(G)} X_v$. O valor esperado do tamanho desse conjunto é portanto:

$$\mathbb{E}[|S|] = \mathbb{E}[\sum_{v \in V(G)} X_v]$$

Pela linearidade da esperança, temos que:

$$\mathbb{E}[\sum_{v \in V(G)} X_v] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{E}[X_v] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}(v \in S)$$

- (5.8.4)

  Vamos utilizar $\mu = \mathbb{E}[X]$ pois a notação é melhor. Queremos provar então que:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) \leq \frac{1}{1+t^2}$$

  Seja $Z = X - \mathbb{E}[X]$. Sabemos que $\mathbb{E}[Z] = 0$ e $Var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2$ e seja $u = \frac{\sigma}{t}$. Então:

  $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) = \mathbb{P}(Z \geq t\sigma) \leq \mathbb{P}((Z+u)^2 \geq (t\sigma + u)^2)$

  Pela Desigualdade de Markov, sabemos que:

$$\mathbb{P}((Z+u)^2 \geq (t\sigma+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(Z+u)^2]}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\mathbb{E}(Z^2) + 2u\mathbb{E}[Z] + u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2+u^2}{(t\sigma+u)^2}$$

  O resto das contas foi feito a mão:

$$u = \frac{\sigma}{t} \qquad \frac{\sigma^2 + u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2/t^2}{(t\sigma + \sigma/t)^2} = \frac{\sigma^2(1+1/t^2)}{\sigma^2(t+1/t)^2} \begin{matrix} \cdot t \\ \cdot t \end{matrix}$$

$$\frac{\cancel{t+1/t}}{t(1+1/t)^2} = \frac{1}{t(1+1/t)} = \frac{1}{t^2+1} \blacksquare$$

  Portanto, provamos a desigualdade de Chantelli.

- (5.8.5)

- (5.8.6)

  Queremos mostrar que $R(4,k) \geq (\frac{ck}{logk})^2$ para k suficientemente grande.

  Seja $n = (\frac{k}{4logk})^2$. Mostraremos que existe um grafo G com $fracn2$ vértices que é livre de K_4 e satisfaz $\alpha(G) < k$. Consideremos o grafo $G(n,p)$ com $p = n^{-\frac{1}{2}}$. Note que $pk = n^{-\frac{1}{2}}k = 4logk$. Pelo teorema 5.4.2, temos com alta probabilidade:

  $$\alpha(G) \leq \frac{2logn}{p} < k$$

  Uma vez que $n\ k^2$ e, portanto, $logn < 2logk$.

  Seja X a variável aleatória que representa o número de K_4 em $G(n,p)$. Temos que:

  $$\mathbb{E}[X] = p^4\binom{n}{4} \leq \frac{p^4n^4}{24} = \frac{n^2}{24}$$

  Pela desigualdade de markov, temos:

  $$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n}\mathbb{E}[X] \leq$$

- (5.8.7)