

## Lista 2

Luís Felipe Ramos Ferreira

[lframos.lf@gmail.com](mailto:lframos.lf@gmail.com)

- (4.5.1)

- $R(3)$  Inicialmente, note que a seguinte 2-coloração do  $K_5$  não possui uma clique de tamanho 3 monocromática, portanto  $R(3) > 5$ .

No entanto, sabemos pelo fato 4.0.1 do livro que o toda 2-coloração do  $K_6$  possui um triângulo monocromático, logo  $R(3) = 6$ . A prova funciona da seguinte forma: seja  $v$  um vértice de  $K_6$ . Pelo princípio da casa dos pombos, das 5 arestas incidentes a  $v$ , ao menos 3 possuem a mesma cor. Vamos dizer que é a cor 1. Sejam  $x, y, z$  vizinhos de  $v$  com a aresta com cor 1. Se qualquer uma das arestas  $xy, xz, yz$  for da cor 1, temos um triângulo de cor 1. Caso contrário, o triângulo formado pelos vértices  $x, y, z$  é monocromático na outra cor, chamemos ela de 2. Logo, toda 2-coloração do  $K_6$  possui um triângulo monocromático.

- $R(3, 4)$  Inicialmente, vamos notar que  $R(3, 4)$  é maior que 8, e isso pode ser notado pela 2-coloração do  $K_8$  abaixo em que não existe uma clique de tamanho 3 vermelha e nem uma clique de tamanho 4 azul. COLOCAR K8 COLORIDO AQ Vamos provar agora que  $R(3, 4) \leq 10$ , em particular, mostrar que para um grafo completo de 10 vértices sempre teremos um triângulo vermelho ou uma clique de tamanho 4 azul. Depois, com uma pequena variação, mostraremos que  $R(3, 4) \leq 9$ , o que conclui a prova.

Seja  $A$  um vértice qualquer de um  $K_{10}$  2-colorido com vermelho e azul.  $A$  possui nove vizinhos e das arestas que o conectam a seus vizinhos, sabemos que ao menos 6 são azuis ou ao menos 4 são vermelhas (isso porque no total precisamos ter 9 arestas, uma para cada vizinho). Suponhamos o caso em que  $A$  possui 4 arestas vermelhas o conectando a seus vizinhos. Se existir uma aresta vermelha entre esses vizinhos, então existe um triângulo vermelho no grafo. Caso contrário, todas as arestas entre os 4 vértices são azuis, logo existe uma clique de tamanho 4 de cor azul. Seja agora o caso em que  $A$  possui 6 arestas de cor azul o conectando a seus vizinhos. Sabemos que  $R(3, 3) = 6$ , logo, entre esses vizinhos, há um triângulo vermelho ou azul. Se for vermelho, já perdemos, se for azul, note que ele

forma uma clique de tamanho 4 azul junto com  $A$ . Logo, 10 é um limite superior para  $R(3, 4)$ .

Consideremos agora o caso do  $K_9$ . Note que os argumentos usados anteriormente servem da mesma maneira, exceto pelo caso em que, para todo vértice  $A$ , exista exatamente 5 arestas azuis e 3 vermelhas saindo dele. Nesse caso, para cada vértice teremos três arestas vermelhas, e como são 9 vértices, temos  $3 * 9 = 27$ . Como cada aresta é contada duas vezes, precisamos dividir por dois, obtendo assim um número  $\frac{27}{2}$  (não inteiro) de arestas, o que é um absurdo. Logo,  $R(3, 4) \leq 9$

–  $R(4, 4)$  Sabemos pelo lema 4.1.3 do livro que, para todo  $s, t \geq 2$ , temos:

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$$

Logo, temos que  $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 2 * R(3, 4) = 2 * 9 = 18$   
 No entanto, vamos mostrar que existe uma 2-coloração de  $K_{17}$  tal que não existe uma clique de tamanho 4 nem vermelha nem azul, mostrando assim que  $R(4, 4) = 18$ .

- (4.5.2)
- (4.5.3)
- (4.5.4)
- (4.5.5)
- (4.5.6)
- (4.5.7)
- (4.5.8) OPCIONAL
- (4.5.9)
- (4.5.10)