Lista 1

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

1. Capítulo lido
2. - (1.5.3)
     (a) A seguinte argumentação pode ser feita para provar a igualdade usando contagem dupla. Olhando para o lado esquerdo, sabemos que $\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ representa o número de maneira de escolher um conjunto S de k elementos dentre n elementos, e depois escolher um conjunto S' subconjunto de S com m elementos. Somando esse valor onde k varia de m até n retorna o número de maneiras de fazer a divisão em conjuntos citada de modo que o conjunto S' final tenha tamanho m. Podemos ntoar que o conjunto S' de tamanho m pode ser escolhido de $\binom{n}{m}$ diferentes. Dessas maneiras, podemos escolher 2^{n-m} subconjutnos dos n elementos originais que não estão em S'. Logo, existem $2^{n-m}\binom{n}{m}$ maneiras de fazer a divisão. Portanto, ambos lados da equação são iguais. Podemos usar também um argumento algébrico nessa questão.

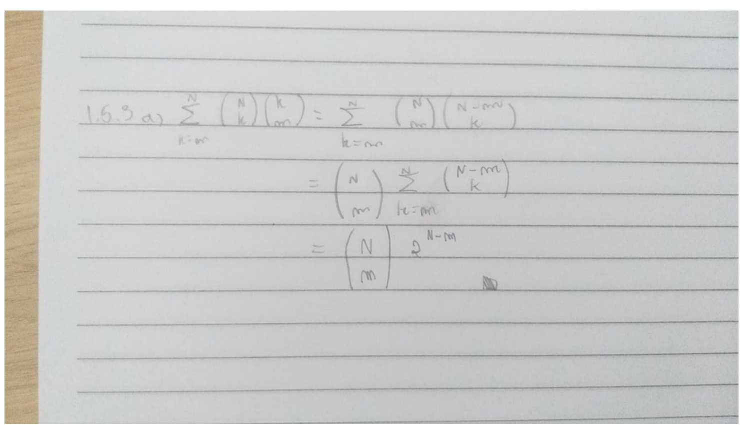


Figure 1: Questão 1.5.3 - a)

     (b) Do lado esquerdo, temos $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$. Sabemos que $\binom{n}{m}$ representa o número de subconjuntos de tamanho m de um conjunto com n elementos. Por sua vez, $\binom{m}{k}$ representa o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto com m elementos. Desse modo, esse produto representa o número de maneiras de escolher k elementos de um conjunto de m elementos que foram previamente escolhidos de um conjunto de n elementos. Do lado direito da equação, temos $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$. Sabemos que $\binom{n}{k}$ representa o número de subconjuntos de tamanho k de um conjunto de tamanho n. $\binom{n-k}{m-k}$, por sua vez, é o número de conjuntos de tamanho $m-k$ de um conjunto de tamanho $n-k$. O produto final então é o número de subconjuntos de tamanho k de um subconjunto de tamanho m escolhido de um conjunto de tamanho n, assim como no lado esquerdo. Como ambos os lados representam o mesmo valor combinatório, eles são iguais. Uma prova algébrica também pode ser obtida como visto abaixo.

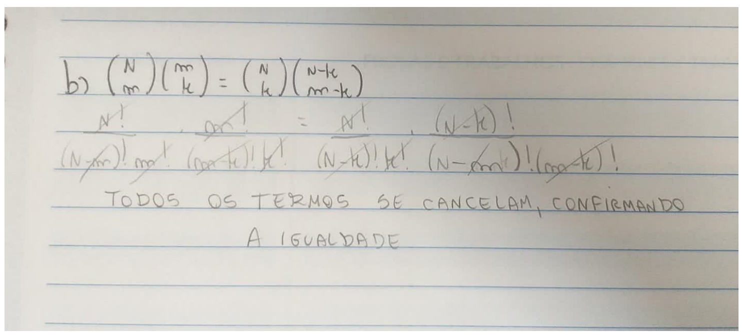


Figure 2: Questão 1.5.3 - b)

(c) Podemos pensar numa solução para esse problemas utilizando contagem dupla da seguinte forma. Suponha que estamos escolhendo livros de uma livraria. O lado direito da equação, $\binom{n+1}{m+1}$, conta diretamente de quantas maneiras podemos escolher $m+1$ livros de uma livraria com $n+1$ livros. O lado esquerdo da equação $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$, pode ser interpretado da seguinte maneira. Vamos supor que o último livro escolhido foi enumerado com o valor $k+1$. Logo, os m livros que ainda não tiveram um valor atribuído a eles devem ter um valor escolhido entre 1 e k e, combinatoriamente, existem $\binom{k}{m}$ maneiras de fazer isso. Como k pode ter qualquer valor entre m e n e somarmos esse valor, teremos a parte da esquerda da expressão. Essa igualdade também pode ser demonstrada algebricamente, como visto na imagem abaixo.

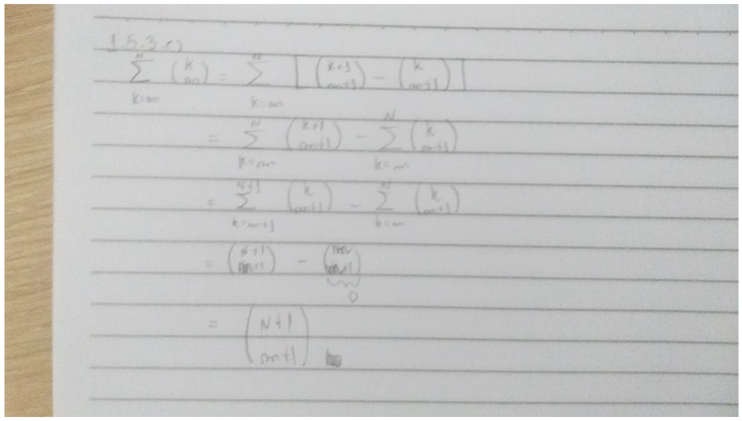


Figure 3: Questão 1.5.3 - c)

- (1.5.6) Seja G um grafo qualquer com n vértices. Suponha, por contradição, que não existam dois vértices em G com o mesmo grau. Logo, como existem n vértices no grafo, os n possíveis graus que um vértice pode ter são $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, logo podemos dizer que estes são os graus dos vértices de G. No entanto, isso é absurdo, pois existiram um vértice de grau 0 e um vértice de grau $n-1$ em um grafo com n vértices, o que não faz sentido. Logo, a premisa inicial estava errada, e podemos afirmar que todo grafo com n vértices, $n \geq 2$, possui dois vértices com o mesmo grau.
- (1.5.11) Em resumo, de modo menos formal, o que a questão pede é para provar que todo número pode ser escrito como a soma de binomiais únicos. A prova pode ser feita da seguinte maneira, utilizando indução:
  - `CASO BASE:` Seja $n = 0$. Este valor pode ser representado como a soma de 0 binômios diferentes.
  - `HIPÓTESE INDUTIVA:` Vamos assumir que todo número menor que n pode ser representado como a soma de binômios distintos.
  - `PASSO INDUTIVO:` Seja n o valor que queremos mostrar existir uma somatório de binômios distintos que se iguale a n. Seja b um binômio tal que $b = \binom{a_k}{k}$ é o maior binômio menor ou igual a n. Se for igual podemos parar. Se for menor, resolvemos o problema para $n-b$. Como esse valor é menor que n, sabemos que ele possui uma representação única em soma de binômios. Note que pelo passo indutivo garantimos que k, a parte de "baixo" do binômio, irá decrescer de um em um, como pede o teorema.

  Portanto, com essa prova indutiva, chegamos à prova do teorema, como queríamos.

3. - (2.8.3) Seja G um grafo com número cromático igual a $\mathcal{X}(G)$. Sabe-

mos que, para qualquer par de cores c_1, c_2 da coloração mínima, deve existir ao menos uma aresta entre vértices v_1, com cor c_1, e v_2, com cor c_2. Caso contrário, todos os vértices com cor c_2, poderiam ser coloridas com a cor c_1 (sem perda de generalidade), o que seria contraditório com o fato da coloração ser mínima. Logo, para cada par de cores na coloração, deve existir ao menos uma aresta, e como cada aresta conecta exatamente dois vértices, temos que $e(G) \geq \binom{\mathcal{X}(G)}{2}$.

- (2.8.9) Seja G um grafo bipartido. Pelo teorema de Kõnig, o tamanho do emparelhamento máximo em G é igual ao tamanho do conjunto de cobertura por vértices (*vertex cover*) mínimo de G. Sabemos que o tamanho do *vertex cover* mínimo é com certeza maior do que $\frac{e(G)}{\Delta(G)}$. Note que o *vertex cover* cobre todas as arestas do grafo, sendo que cada vértice v nele cobre no máximo $\Delta(G)$ arestas. Portanto, se multiplicarmos $\beta(G)$, que é o tamanho do *vertex cover* mínimo, por $\Delta(G)$, obteremos um número maior que $e(G)$. Logo, concluímos a afirmação. Algebricamente temos a seguinte prova:

$$M(G) = \beta(G) \geq \frac{e(G)}{\Delta(G)}$$

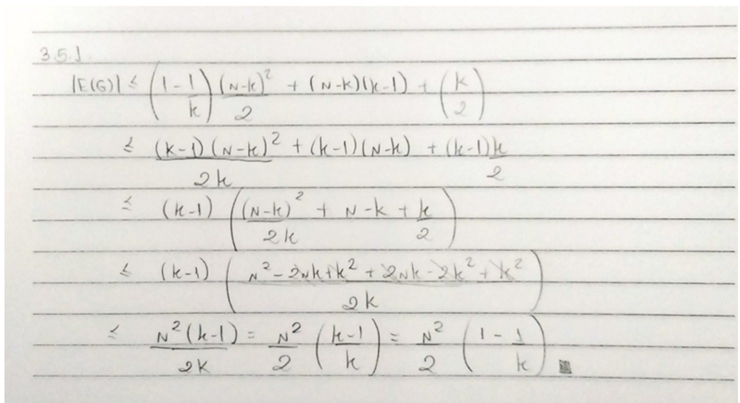
$$\beta(G)\Delta(G) \geq e(G)$$

- (2.8.15) A prova será feita considerando uma indexação diferente da usada no livro. Isso não altera a semântica do problema. Provaremos que se $k \in \mathcal{N}$ e T é uma árvore cm k vértices, então T é subárvore de qualquer grafo G com $\delta(G) \geq k$. A prova por ser feita por indução no número de arestas da árvore. A solução é trivial para o caso base em que $e(T) = 1$. Para $e(T) = 1$, T é uma aresta e trivialmente é subgrafo de qualquer grafo G com $\delta(G) \geq 1$. Suponha que o resultado vale para qualquer árvore com k arestas, $k > 1$. Seja T uma árvore qualquer com $k+1$ arestas e $T' = T - \{v\}$ para alguma folha $v \in V(T)$ e seja w o vizinho de v em T, que com certeza existe e é único já que v é uma folha. Pela hipótese indutiva, sabemos que T' é um subgrafo de todo grafo G tal que $\delta(G) = k+1$. Como o grau de w em G é maior ou igual a $k+1$ e T' possui $k-1$ vértices diferentes de v, podemos afirmar que existe um vizinho de w em G que não está em T'. Escolhemos esse vértice, vamos denotá-lo por l. Adicionamos a aresta wl à T' para obter uma árvore isomorfa à T em G. Demonstramos então que se a afirmativa é verdade para uma árvore com k arestas, então também é verdade para uma árvore com $k+1$ arestas, o que conclui a prova do teorema.

4. - (3.5.1) Primeiramente, mostraremos que $ex(m, K_{k+1}) \leq (1 - \frac{1}{n})\frac{n^2}{2}$. A prova será feita por indução em n. No caso base, considere $n \leq k$. Desse modo, temos que $ex(n, K_{k+1}) = \binom{n}{2} \leq t_k$. Seja agora G um grafo com $n > k$ vértices, livre de K_{k+1}, tal que o número de arestas

em G está maximizado. Sabemos que G possui um K_k como subgrafo, pois caso contrário a adição de uma aresta não introduziria um K_{k+1} no grafo e isso aumentaria o número de arestas dele, um absurdo pois assumimos que o número de arestas era máximo.

Seja agora $H = G - K_k$. Pela hipótese, $|E(H)| \leq (1 - \frac{1}{n})\frac{n^2}{2}$. Logo temos que $|E(G)| \leq (1 - \frac{1}{k})\frac{(n-k)^2}{2} + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2}$. Expandindo, temos:



3.5.1

$$|E(G)| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{(n-k)^2}{2} + (n-k)(k-1) + \binom{k}{2}$$

$$\leq \frac{(k-1)(n-k)^2}{2k} + (k-1)(n-k) + \frac{(k-1)k}{2}$$

$$\leq (k-1)\left(\frac{(n-k)^2}{2k} + n - k + \frac{k}{2}\right)$$

$$\leq (k-1)\left(\frac{n^2 - 2nk + k^2 + 2nk - 2k^2 + k^2}{2k}\right)$$

$$\leq \frac{n^2(k-1)}{2k} = \frac{n^2}{2}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \blacksquare$$

Figure 4: Questão 3.5.1 - Limite superior

Como queríamos demonstrar.

Não consegui encontrar uma prova para o limite inferior.

- (3.5.5) Queremos provar que, se $e(G) > \frac{n^2}{4}$, onde n é o número de vértices em G, temos que G possui ao menos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triângulos.

  A prova pode ser feita dividindo o problemas em três casos diferentes. Primeiramente, suponha que $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + 2$. Pelo teorma 3.3.2 do livro, temos que G possui pelo menos $\frac{2n}{3}$ triângulos, que com certeza é mais do que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triângulos.

  Em segundo lugar, suponha que $e(G) = \frac{n^2}{4} + 1$. Consideremos o grafo H, subgrafo de G, de modo que H com uma aresta a menos, é o grafo bipartido completo $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Neste caso, a única aresta que esta em G e não está em H é uma aresta entre dois vértices de uma mesma partição de H. Tal arestas em G criaria no mínimo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ triângulos em G, pois para cada vértice da partição "oposta" à da aresta adicionada teremos um novo triângulo.

  Caso H não seja o grafo bipartido completo citado, temos que G é 2-longe de ser bipartido, o que, pleo teorema 3.3.3 do livro, implica que G possui ao menos $\frac{n}{6}(e(G) + 2 - \frac{n^2}{4})$ triângulos. Temos que:

$$\frac{n}{6}(e(G) + 2 - \frac{n^2}{4}) = \frac{n}{6}(\frac{n^2}{4} + 1 + 2 - \frac{n^2}{4}) = \frac{3n}{6} = \frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Portanto, provamos o teorema.

- (3.5.6) Queremos provas que, se $e(G) \geq 2ex(n, H)$, então G contêm pelo menos $ex(n, H)$ cópias de H. Suponha que G seja um grafo com exatamente $ex(n, H)$ arestas. Desse modo, sabemos que G não contêm H como subgrafo. Note que, se qualquer nova aresta for adicionada, pelo menos uma cópia de H aparecerá como subgrafo do novo grafo criado com a adição da aresta. Isso decorre da definição direta do número extremal $ex(n, H)$. Como G contêm mais do que $2ex(n, H)$ arestas, note que, para cada aresta a mais adicionada, é garantida a existência de ao menos mais uma cópia de H em G. Logo, pelo menos $ex(n, H)$ cópias diferentes de H existem G, podendo ser potencialmente mais.
- (3.5.7)
- (3.5.8) Queremos mostrar que todo grafo com número suficientemente grandes de vértices, para um k natural fixo, se $e(G) \geq \frac{n^2}{4}$ possui um subgrafo H com pelo menos k vértices, então $\delta(H) \geq \frac{v(H)}{2}$. Por contradição, vamos supor que a afirmativa é falsa. Portanto, todo subgrafo H com k vértices ou mais deve ter algum vértice $v$com grau pequeno, isto é, $d(v) < \frac{v(H)}{2}$. Considere o processo de gulosamente retirar vértices de G, sempre retirando o vértice com o menor grau na iteração do processo guloso. Ou seja, temos a sequência de grafos $G_1, G_2, \ldots, G_n$, onde G_1 é o próprio G e para todo i, G_{i+1} é o grafo G_i menos o vértice de grau mínimo em G_i.

  Sabemos, pelo hipótese de contradição que assumimos, que enquanto $v(G_i) \geq k$, então o grau mínimo de G_i é limitado superiormente por $v(G_i)/2$. Para os casos em que $v(G_i) < k$, o grau mínimo possui um limite superior no tamanho do grafo, trivialmente, mas não podemos inferir nada sobre o limite inferior.

  Se formos otimistas e somarmos o limite superior do grau mínimo de cada um desses grafos, teremos o seguinte resultado:

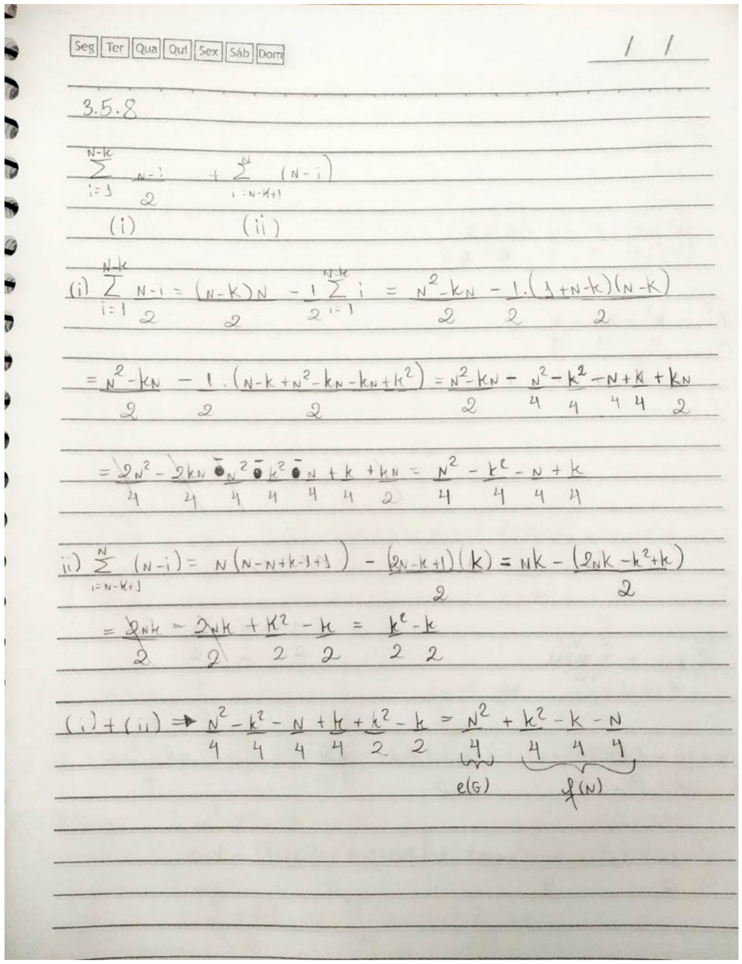


Figure 5: Questão 3.5.8

Podemos notar que, para n suficientemente grande, essa soma não atinge o valor de $\frac{n^2}{4}$. Note que, na equação final da soma dos graus, temos $\frac{n^2}{4}$, mas temos logo depois um $-\frac{n}{4}$. Conforme n cresce suficientemente, esse fator irá dominar as somas com k na equação. Portanto, para n grande, chegamos à um absurdo. Portanto, a hipótese por contradição era falsa, e provamos o que o exercício pedia.

- (3.5.9) Sabemos pelo teorema de Erdos e Stone que, se H for um grafo não vazio, então:

$$ex(n, H) = (1 - \frac{1}{\mathcal{X}(H) - 1} + o(1))\frac{n^2}{2}$$

Como sabemos, o número cromático de C_5 é igual a 3 (podemos achar esse valor simplesmente brutando o número de cores). Substituindo na equação, temos:

$$ex(n, C_5) = (1 - \frac{1}{3-1} + o(1))\frac{n^2}{2} = (\frac{1}{2} + o(1))\frac{n^2}{2}$$

Como assumimos que n é suficientemente grande, temos que, pela definição da notação "ozinho", $o(1)$ tende a 0. Logo, podemos substituir esse valor na equação e alterar a igualdade para uma desigualdade:

$$ex(n, C_5) \leq (\frac{1}{2})\frac{n^2}{2} \leq \frac{n^2}{4}$$

Como queríamos demonstrar inicialmente.