Lista 3

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (5.8.1) Exercício feito à mão e página com ele está anexado ao fim do pdf.
- (5.8.2)

  Queremos provar o teorema de Turán, que diz que se um grafo G com n vértices é livre de K_r, então:

  $$|E(G)| \leq (1 - \frac{1}{r-1})\frac{n^2}{2}$$

  Sabemos, a partir do teorema 5.3.11 do livro (que devemos usar na prova), que todo grafo G possui em sua estrutura uma clique de tamanho pelo menos $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)}$, onde $d(v)$ é o grau de v em G. Isso pois todo conjunto independente em G é uma clique em $\overline{G}$.

  Vamos inicialmente então assumir que o grafo G é livre de K_r, a clique com r vértices. Disso podemos assumir que:

  $$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-d(v)} \leq r-1$$

  Como $\frac{1}{n-d(v)}$ é uma função convexa em relação a $d(v)$, podemos aplicar a transformação:

  $$\frac{n}{n - \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{n}} \leq r-1$$

  $$\frac{n}{n - \frac{2|E(G)|}{n}} \leq r-1$$

  $$\frac{n}{r-1} \leq n - \frac{2|E(G)|}{n}$$

  $$\frac{2|E(G)|}{n} \leq n - \frac{n}{r-1}$$

  $$\frac{2|E(G)|}{n} \leq n(1 - \frac{1}{r-1})$$

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r-1})$$

Como queríamos demonstrar.

- (5.8.3)

  Para resolver essa questão também usaremos o teorema 5.3.11 do livro. Seja G um grafo com n vértices e $\pi = [v_1, \ldots, v_n]$ uma permutação aleatória e uniforme dos vértices de G. Denotamos por $\mathcal{N}(v)$ a vizinhança aberta de v em G e por $\mathcal{N}_2(v)$ os vértices a distância 2 de v.

  Vamos construir um conjunto S da seguinte maneira gulosa. Para cada v em π, vamos adicionar $\mathcal{N}(v)$ em S e remover de π os vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{N}(v))$, que pode ser descrito como $v \cup \mathcal{N}_2(v)$. O processo persiste até $\pi = \emptyset$.

  Trivialmente, S é um conjunto independente, uma vez que G é livre de triângulos. Quando adicionamos $\mathcal{N}(v)$ à S, sabemos que nenhum desses vértices são vizinhos pois se não existiria um triângulo em G, formado por dois desse vértices junto com o próprio v. Seja $t = |S|$ o tamanho de S, Denotamos por $\mathbb{E}[t]$ a esperança de t.

  Entendemos que v contribuir com S significa que v "adicionou" seus vizinhs em S. Sabemos que $\mathbb{E}[t] = \sum_{v \in V(G)} \mathbb{P}[v \text{ contribuir com } S]$. Para um v contribuir com S, temos que calcular a probabilidade dele estar na ordem de π antes de $\mathcal{N}(v)$ e de $\mathcal{N}_2(v)$. Isso pois se algum dos vértices nesses conjuntos estiver antes de v em π, v não será escolhido para contribuir com S. Para cada v, sua contribuição para S é de $d(v)$, pois seus vizinhos são adicionados em S. Pela linearidade da esperança, podemos calcular a esperança de t sendo maior ou igual a:

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + d(v) + d_2(v)} d(v) = \sum_{v \in V(G)} \frac{d(v)}{1 + d(v) + d_2(v)}$$

  Logo, provamos a desigualdade do enunciado.

- (5.8.4)

  Vamos utilizar $\mu = \mathbb{E}[X]$ pois a notação é melhor. Queremos provar então que:

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) \leq \frac{1}{1 + t^2}$$

  Seja $Z = X - \mathbb{E}[X]$. Sabemos que $\mathbb{E}[Z] = 0$ e $Var[Z] = \mathbb{E}[Z^2] = \sigma^2$ e seja $u = \frac{\sigma}{t}$. Então:

  $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + t\sigma) = \mathbb{P}(Z \geq t\sigma) \leq \mathbb{P}((Z + u)^2 \geq (t\sigma + u)^2)$

  Pela Desigualdade de Markov, sabemos que:

$$\mathbb{P}((Z+u)^2 \geq (t\sigma+u)^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(Z+u)^2]}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\mathbb{E}(Z^2)+2u\mathbb{E}[Z]+u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2+u^2}{(t\sigma+u)^2}$$

O resto das contas foi feito a mão:

$$u = \frac{\sigma}{t} \qquad \frac{\sigma^2+u^2}{(t\sigma+u)^2} = \frac{\sigma^2+\sigma^2/t^2}{(t\sigma+\sigma/t)^2} = \frac{\sigma^2(1+1/t^2)}{\sigma^2(t+1/t)^2}\frac{\cdot t}{\cdot t}$$

$$\frac{\cancel{t+1/t}}{t(1+1/t)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{t(1+1/t)} = \frac{1}{t^2+1} \blacksquare$$

Portanto, provamos a desigualdade de Chantelli.

- (5.8.5)
- (5.8.6)
  Queremos mostrar que $R(4,k) \geq (\frac{ck}{logk})^2$ para k suficientemente grande.

  Seja $n = (\frac{k}{4logk})^2$. Mostraremos que existe um grafo G com $\frac{n}{2}$ vértices que é livre de K_4 e satisfaz $\alpha(G) < k$. Consideremos o grafo $G(n,p)$ com $p = n^{-\frac{3}{4}}$. Pelo teorema 5.4.2, temos com alta probabilidade:

$$\alpha(G) \leq \frac{2logn}{p} < k$$

  Uma vez que $n < k^2$ e, portanto, $logn < 2logk$.

  Seja X a variável aleatória que representa o número de K_4 em $G(n,p)$. Temos que:

$$\mathbb{E}[X] = p^4\binom{n}{4} \leq \frac{p^4n^4}{24} = \frac{n^{-\frac{-3}{4}4}n^4}{24} = \frac{n}{24}$$

Pela desigualdade de markov, temos:

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{2}{n}\mathbb{E}[X] = \frac{2}{n}\frac{n}{24} \leq \frac{1}{12}$$

Segue que existe um grafo H com n vértices, $\alpha(H) < k$, que contém no máximo $n/2$ triângulos. Removendo no máximo $n/2$ vértices de H (um para cada triângulo), obtemos um grafo G como desejado inicialmente.

- (5.8.7)

5.8.1 - $a_i \in \{-1,1\} \ \forall i \quad v_i \in \mathbb{R}^N \ \forall i, \ |v_i| = 1 \quad |a_1v_1 + \dots + a_Nv_N| \leq \sqrt{N}$

Seja $s = |\sum_i a_iv_i|$ e considere s^2, isto é, $s^2 = |\sum_i a_iv_i|^2 = (\sum_i a_iv_i)(\sum_i a_iv_i)$

Temos que:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(a_iv_i).(a_iv_i)}_{\text{Mesmo índice}} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} (2(a_iv_i).(a_jv_j)) \quad 1 \leq i < j \leq N \to i \neq j$$

Como $a_i \in \{-1,1\}$ e v_i é unitário, $w = a_iv_i$ também é unitário, e $w.w = 1$, logo:

$$s^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{(a_iv_i)(a_iv_i)}_{1}}_{N} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j) = N + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)$$

Vamos escolher a_i da seguinte forma (uniforme) $\Rightarrow a_i = \begin{cases} -1, & \text{com } p = 1/2 \\ 1, & \text{com } p = 1/2 \end{cases}$

Desse modo, temos que $\mathbb{E}[a_ia_j] = \mathbb{E}[a_i]\mathbb{E}[a_j] = 0$, pois $\mathbb{E}[a_i] = -1.1/2 + 1.1/2 = 0$

Logo, temos que:

$$\mathbb{E}[s^2] = \mathbb{E}\Big[N + \sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)\Big] = \underbrace{\mathbb{E}[N]}_{N} + \underbrace{2\mathbb{E}\Big[\sum_{1 \leq i < j \leq N} 2(a_iv_i)(a_jv_j)\Big]}_{0, \text{ pois } \mathbb{E}[a_ia_j] = 0}$$

$$\mathbb{E}[s^2] = N$$

Como s^2 é não-negativo, segue que $s^2 \leq N$, logo $s \leq \sqrt{N}$ ∎

Para provar o caso da desigualdade com valor invertido, podemos apenas trocar todo a_i por $-a_i$, o que não altera a norma do vetor, apenas a direção. Os mesmos passos anteriores podem ser usados p/ mostrar que $s \geq \sqrt{N}$.