Lista 2

Luís Felipe Ramos Ferreira

lframos.lf@gmail.com

- (4.5.1)
  - $R(3)$
    Inicialmente, note que a seguinte 2-coloração do K_5 não possui uma clique de tamanho 3 monocromática, portanto $R(3) > 5$.

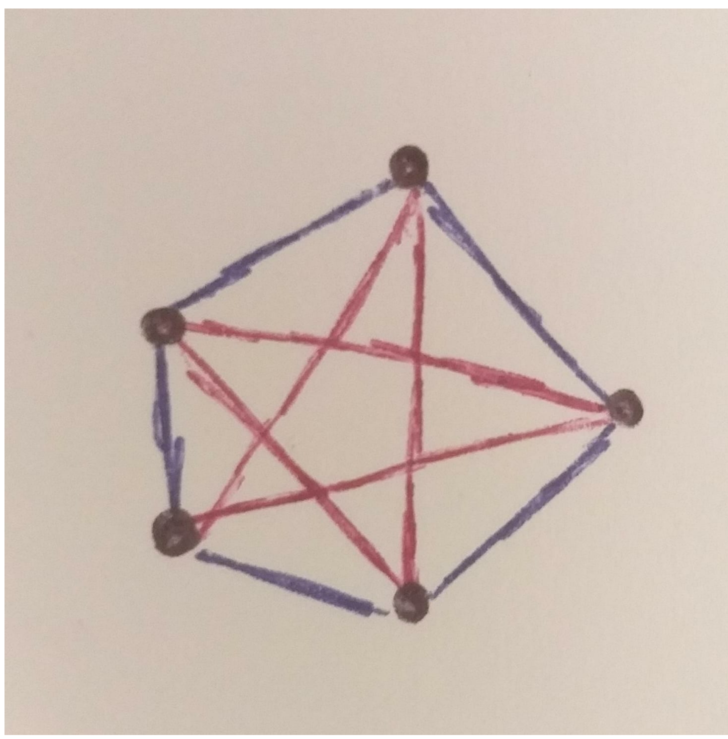

Figure 1: K_5 2-colorido

No entanto, sabemos pelo fato 4.0.1 do livro que o toda 2-coloração do K_6 possui um triângulo monocromático, logo $R(3) = 6$. A prova funciona da seguinte forma: seja v um vértice de K_6. Pelo princípio da casa dos pombos, das 5 arestas incidentes a v, ao menos 3 possuem a mesma cor. Vamos dizer que é a cor 1. Sejam x, y, z vizinhos de v com a aresta com cor 1. Se qualquer uma das arestas xy, xz, yz for da cor 1, temos um triângulo de cor 1. Caso contrário, o triângulo formado pelos vértices x, y, z é monocromático na outra cor, chamemos ela de 2. Logo, toda 2-coloração do K_6 possui um triângulo monocromático.

– $R(3, 4)$

Inicialmente, vamos notar que $R(3, 4)$ é maior que 8, e isso pode ser notado pela 2-coloração do K_8 abaixo em que não existe uma clique de tamanho 3 vermelha e nem uma clique de tamanho 4 azul (Na imagem, o primeiro grafo tem apenas as arestas vermelhas e o segundo seri ao complemento do primeiro grafo, em que as arestas são azuis).

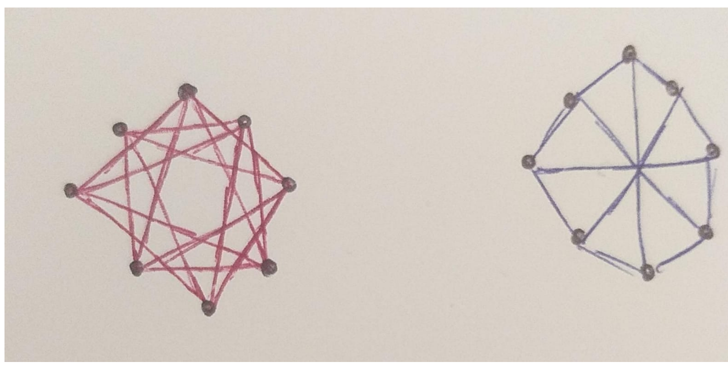

Figure 2: K_8 2-colorido

Vamos provar agora que $R(3, 4) \leq 10$, em particular, mostrar que para um grafo completo de 10 vértices sempre teremos um triângulo vermelho ou uma clique de tamanho 4 azul. Depois, com uma pequena variação, mostraremos que $R(3, 4) \leq 9$, o que conclui a prova. Seja A um vértice qualquer de um K_{10} 2-colorido com vermelho e azul. A possui nove vizinhos e das arestas que o conectam a seus vizinhos, sabemos que ao menos 6 são azuis ou ao menos 4 são vermelhas (isso porque no total precisamos ter 9 arestas, uma para cada vizinho). Suponhamos o caso em que A possui 4 arestas vermelhas o conectando a seus vizinhos. Se existir uma aresta vermelha entre esses vizinhos, então existe um triângulo vermelho no grafo. Caso contrário, todas as arestas entre os 4 vértices são azuis, logo existe uma clique de tamanho 4 de cor azul. Seja agora o caso em que A possui 6 arestas de cor azul o conectando a seus vizinhos. Sabemos que $R(3, 3) = 6$, logo, entre esses vizinhos, há um triângulo vermelhor ou azul. Se for vermelho, já perdemos, se for azul, note que ele forma uma clique de tamanho 4 azul junto com A. Logo, 10 é um limite superior para $R(3,4)$.

Consideremos agora o caso do K_9. Note que os argumentos usados anteriormente servem da mesma maneira, exceto pelo caso em que, para todo vértice A, exista exatamente 5 arestas azuis e 3 vermelhas saindo dele. Nesse caso, para cada vértice teremos três arestas vermelhas, e como são 9 vértices, temos $3 * 9 = 27$. Como cada arestas é contada duas vezes, precisamos dividir por dois, obtendo assim um número $\frac{27}{2}$(não inteiro) de arestas, o que é um absurdo. Logo, $R(3,4) \leq 9$

– $R(4,4)$

Sabemos pelo lema 4.1.3 do livro que, para todo $s, t \geq 2$, temos:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Logo, temos que $R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = 2 * R(3,4) = 2 * 9 = 18$. Mostramos no exercício anterior que $R(3,4) = 9$. No entanto, vamos mostrar que existe uma 2-coloração de K_{17} tal que não existe uma clique de tamanho 4 nem vermelha nem azul, mostrando assim que $R(4,4) = 18$. A imagem abaixo, retirada deste site, apresenta tal grafo e sua coloração.

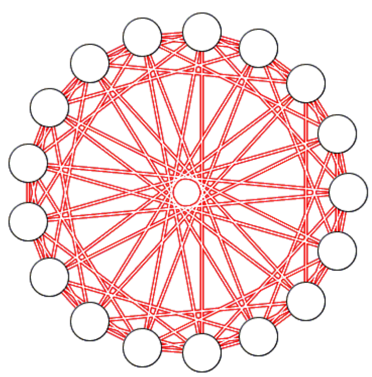

Figure 3: K_{17} arestas vermelhas

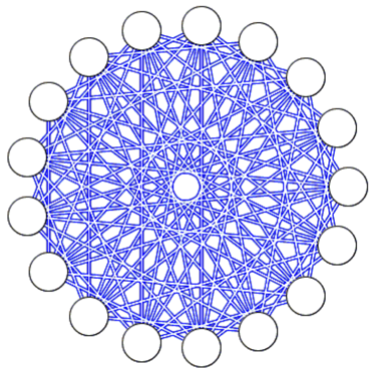

Figure 4: K_{17} arestas azuis

- (4.5.2)
- (4.5.3)
- (4.5.4)
- (4.5.5)
- (4.5.6)
- (4.5.7)
- (4.5.8) OPCIONAL
- (4.5.9)
- (4.5.10)