Lista de Exercícios 2

1 Programação Linear

Exercício 1. Expresse a desigualdade $2x + 3y \leq 5$ utilizando apenas igualdades e/ou restrições de não-negatividade. Dica: adicione uma variável w.
Faça o mesmo para $8x - y + z \geq 10$.

Exercício 2. Demonstre que a PL abaixo é viável, porém ilimitada.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 3. Coloque a PL abaixo em FPI, ache uma candidata a solução ótima, e exiba um certificado de otimalidade.

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Exercício 4. Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para cada um dos vetores abaixo, determine se

(i) É solução?

(ii) Se for solução, é uma solução básica?

(iii) Se for solução básica, qual a base de colunas associada? Se houver mais de uma, descreva todas.

(iv) Se for solução básica, é viável?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}2 & -4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}2 & -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(h) $\begin{pmatrix}0 & -2 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Exercício 5. Considere uma matriz A de m linhas e n colunas e um vetor b. Assuma que o poliedro descrito por A e b, ou seja, $P(A,b) = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax \leq b\}$ é limitado (é um politopo).

a) Qual o maior número de vértices que $P(A,b)$ pode possuir?

b) O número que você calculou acima é exato? Ou seja, é exatamente o número de vértices de $P(A,b)$?

c) $\star$ Qual o menor número de vértices que $P(A,b)$ pode possuir?

2 Simplex - Teoria

Exercício 6. Considere a seguinte PL em FPI

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Suponha que $\mathbf{A}$ possui m linhas linearmente independentes, e n colunas. Explique por que podemos assumir, sem qualquer prejuízo à solução da PL, que se $n \geq m$, há precisamente m colunas linearmente independentes em $\mathbf{A}$.

Exercício 7. Considere o sistema de equações abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e os vetores

(a) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para cada um deles, decida se é uma solução básica ou não, e se for, se é viável ($\geq \mathbf{0}$) ou não.

Exercício 8. O objetivo deste exercício é compreender melhor a geometria da região viável de uma PL, assim como a natureza das soluções básicas. Considere uma PL em FPI

$$\begin{array}{rl} \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{array}$$

que seja viável e limitada. Suponha que A é uma matriz $m \times n$, $n \geq m$, e seu posto é igual a m.

(a) Suponha que $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ são soluções viáveis. Mostre que para qualquer α, $0 \leq \alpha \leq 1$, o vetor

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{z}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{z}_2$$

também é uma solução viável. (em particular, você estará mostrando que a região de viabilidade é convexa).

(b) Mostre que o valor objetivo de $\boldsymbol{z}$ não pode ser estritamente maior que ambos os valores objetivos de $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$, e que se $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ são soluções ótimas, então $\boldsymbol{z}$ também é.

(c) Mostre que $\boldsymbol{z}$ não pode ser uma solução básica viável da PL.

(d) Mostre que se $\boldsymbol{w} > 0$ (ou seja, um vetor em que todas as entradas são positivas) e $\boldsymbol{w}$ é viável, então existem $\boldsymbol{w}_1 \neq \boldsymbol{w}_2$ soluções viáveis tais que $\boldsymbol{w} = 1/2(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)$, a não ser possivelmente no caso em que $n = m$.

(e) $\star$ mostre que os vértices da região viável (ou seja, os pontos que não pertencem a um segmento viável) são exatamente as soluções básicas viáveis.

3 Simplex - Prática

Exercício 9. Considere a PL abaixo

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

É possível escrever uma PL equivalente a esta em que a matriz $\mathbf{A}$ possua menos linhas?

Exercício 10. Considere a PL em FPI com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Aplique o método simplex a esta PL iniciando com a base de colunas 1 e 4.

(b) Ache um certificado de que a PL é ótima ou ilimitada (se for ótima, no olho mesmo, por enquanto).

Exercício 11. Considere a PL em FPI dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolva a PL usando o simplex.

Exercício 12. A PL abaixo é viável ou inviável?

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Exercício 13. Para cada uma das PLs abaixo, resolva-as usando o Simplex. Se a PL tiver solução ótima, ache-a, e exiba juntamente com a solução um certificado de otimalidade. Se a PL for ilimitada, encontre ao menos uma solução viável e exiba um certificado de que a PL é ilimitada.

(a)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Exercício 14. Escreva a dual da PL abaixo

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix}10 \\ 10 \\ 10\end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{array}$$

Mostre que a dual é inviável de duas formas diferentes:

(i) Mostrando que a primal é ilimitada.

(ii) Usando uma PL auxiliar.

Exercício 15. Considere a PL

$$\begin{array}{rl} \min & \begin{pmatrix}1 & \alpha & 10 & 25/2\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x} \begin{matrix}\geq \\ \leq\end{matrix} \begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre}, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Escreva a dual, e determine para quais valores de α a solução $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ é ótima para a PL acima.

Exercício 16. Considere as quatro PLs primais abaixo, e as quatro PLs duais em seguida. Associe os pares corretamente, e em seguida decida qual caso do corolário acima se aplica a cada par. Apresente certificados.

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \min & -4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & y_1 - y_2 \leq -2 \\ & y_1 - y_2 \leq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \min & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \min & -4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & -y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \min & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{sujeito a} & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_1 - y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercício 17. Considere a PL

$$\begin{array}{rl} \max & a_1x_1 + a_2x_2 \\ \text{sujeito a} & \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \text{ livre.} \end{array}$$

(i) Mostre que é inviável.

(ii) Escreva sua dual.

(iii) Ache todos os valores de a_1 e a_2 tais que a dual seja (1) viável (2) inviável (3) viável e ilimitada.

(iv) A dual pode ser viável e limitada?

Exercício 18. Dado um par primal-dual

$$\begin{array}{crl} & \max & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{(P)} & \text{sujeito a} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{crl} & \min & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{(D)} & \text{sujeito a} & A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{y} \geq 0, \end{array}$$

(a) Prove que todo certificado de ilimitada para (P) é um certificado de inviabilidade para (D).

(b) Quais propriedades um vetor $\boldsymbol{d}$ deve satisfazer para ser um certificado de que (D) é ilimitada?

(c) ($\star$) É verdade que todo certificado de que uma PL é inviável é um certificado de que sua dual é ilimitada? Se sim, prove. Se não, produza um contra-exemplo.

4 Análise de Sensibilidade

Exercício 19. Prove ou apresente um contra-exemplo: Se o problema

$$\begin{array}{rl} \max & c^Tx \\ st & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

é ilimitado para um certo valor de c, então existe um índice k tal que o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & x_k \\ st \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

é ilimitado

Exercício 20. Seja A uma matriz antissimétrica (ou seja, $A^t = -A$). Qual o dual do modelo

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ st \quad & Ax \geq -c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

e qual a sua solução ótima?