Lista de Exercícios 1

1 Modelagem

Exercício 1. Um fazendeiro tem 200ha de terra, onde planeja plantar trigo, arroz e milho. A produção esperada, em Kg por hectare plantada, é de 1800, 2100 e 2900 para trigo, arroz e milho, respectivamente. Para atender ao consumo interno da fazenda, ele deve plantar pelo menos 12ha de trigo, 16ha de arroz e 20ha de milho. Ele tem condição de armazenar no máximo 700t de grãos. Sabendo que o trigo dá um lucro de 1.20 reais por Kg, o arroz de 60 centavos por Kg e o milho de 28 centavos por Kg, elabore um modelo de modelo de programação matemática para planejar o plantio do fazendeiro que forneça o lucro máximo.

Exercício 2. Uma refinaria processa três tipos diferentes de petróleo. Cada tipo de petróleo possui uma planilha de custos diferente, expressando condições de transporte e preços na origem. A planilha de custos e a quantidade máxima disponível é dada abaixo:

Tipo de petróleo	Quantidade máxima disponível (barril/dia)	Custo por barril/dia
1	3500	19
2	2200	24
3	4200	20

Por outro lado, cada tipo de petróleo é mais ou menos apropriado para a produção de três tipos de gasolina diferentes: amarela, azul e superazul. As especificações de cada tipo de gasolina são dadas abaixo:

Tipo de gasolina	Especificação	preço de venda R$/barril
Amarela	não mais que 70% de 1	22
Azul	não mais que 30% de 1 não menos que 10% de 2	28
Superazul	não mais que 30% de 1 não menos que 40% de 2 não mais que 50% de 3	35

Formule este problema como uma PL que calcule quanto de cada gasolina a empresa deve produzir, e quais tipos de petróleo deve utilizar em cada de forma a maximizar seus lucros. Suponha que não há perda volumétrica no processo da refinaria.

Exercício 3. Uma certa fábrica de camisetas deseja aproveitar as finais de um campeonato de futebol para vender camisetas dos times envolvidos. Os jogos vão durar quatro semanas. O custo de produção de cada camiseta é de 2, 00 nas duas primeiras semanas e 2, 50 nas duas últimas, quando a concorrência demandar por material no mercado. A demanda semanal de camisetas será de 5.000, 10.000, 30.000 e 60.000. A capacidade máxima de produção da empresa é de 25.000 camisetas semanalmente. Na primeira e na segunda semana, a empresa poderá contratar horas extras de serviço e fabricar mais 10.000 camisetas em cada semana. Nesse caso, o custo de produção sobe para 2,80 reais. O excesso de produção pode ser estocado a um custo de 20 centavos por unidade por semana. Elabore um modelo de programação matemática que minimize os custos.

Exercício 4. Dado um grafo $G = (V, E)$, elabore um modelo de programação matemática que determine uma *cobertura de vértices* de menor tamanho possível. Uma cobertura de vértices é um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ tal que qualquer aresta do grafo possui pelo menos uma das extremidades no conjunto S.

Exercício 5. Você está trabalhando em uma empresa e precisa determinar quais projetos serão aceitos para o próximo semestre. Existe um conjunto de projetos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ com um custo p_i associado a ele e um possível lucro l_i. Você tem um limite de B reais para alocar entre os projetos e existe um subconjunto de projetos $S_P = \{P_1^*, \ldots, P_k^*\}$ que precisa ter pelo menos um projeto escolhido. Apresente um modelo de programação matemática para determinar o conjunto de projetos que deve ser aceito de forma a maximizar o lucro da empresa.

Exercício 6. Você está trabalhando em uma empresa e precisa determinar quais projetos serão aceitos para o próximo semestre, como no exercício anterior. Existe um conjunto de projetos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ com um custo p_i associado a ele e um possível lucro l_i. Entretanto, dessa vez, os projetos apresentam uma certa sinestesia, para cada par P_i, P_j existe um lucro extra w_{ij} que é obtido quando os dois projetos são realizados. Você tem um limite de B reais para alocar entre os projetos. Apresente um modelo de programação matemática para determinar o conjunto de projetos que deve ser aceito de forma a maximizar o lucro da empresa.

Exercício 7. Considere o problema de localização de armazéns cujo objetivo é escolher os armazéns que devem ser instalados para servir um conjunto de clientes. Neste problema temos um conjunto de locais $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ com uma capacidade associada a cada um deles cap_i e um conjunto de clientes $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, cada cliente c_i com uma demanda d_i de produtos que ele deseja armazenar. Cada local l_i pode receber um armazém pelo custo de w_i. Desejamos construir, pelo menor preço possível, um conjunto de armazéns que armazene a todos os pedidos dos cliente. Observe que cada cliente deve ter sua demanda atendida por um único armazém e as demandas dos clientes associados a um certo armazém não pode exceder a sua capacidade. Apresente um modelo de programação matemática para esse problema.

Exercício 8. Em um tabuleiro de xadrez $(n \times n)$ vazio, define-se que a alocação de uma dama em uma casa preta vale o dobro do que em casa branca. Determine uma alocação das damas no tabuleiro, de modo que nenhuma delas seja ameaçada pelas demais e obtendo o maior valor possível.

Exercício 9. Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias

Exercício 10. ($\star$) Dado um grafo $G(V, E)$ com pesos w_{uv} em cada aresta uv, apresente um modelo de programação matemática que calcula o menor caminho entre dois vértices s e t dados de entrada. Assuma que os pesos são todos positivos e estritamente maiores que zero. Seu modelo conseguiria resolver o problema se os pesos fossem negativos?

2 Teoria Poliédrica

Exercício 11. Prove ou dê um contra-exemplo: Todo conjunto convexo é limitado.

Exercício 12. Dizendo que um conjunto $\mathcal{X}$ é limitado se $|| \; x \; || \; \alpha$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Prove ou dê um contra-exemplo: Todo conjunto limitado é convexo.

Exercício 13. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$. Prove ou dê um contra-exemplo: $lin(\mathcal{X})$ é um conjunto convexo.

Exercício 14. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de pontos no $\mathbb{R}^n$. Prove ou dê um contra-exemplo: $afim(\mathcal{X})$ é um conjunto convexo.

Exercício 15. Dados n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em um espaço vetorial, mostre que

a. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são AI, então $v_2 - v_1, v_3 - v_1 \ldots, v_n - v_1$ são LI.

b. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, então $0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ são AI, onde 0 representa o vetor nulo do espaço.

Exercício 16. Considere dois valores inteiros n e k com $k \leq n$. Seja B_n^k o conjunto de todos os vetores binários de n posições com no máximo k valores 1.

a. Qual a dimensão de $conv(B_n^k)$? Prove sua afirmação.

b. Dê exemplo de um vértice de $conv(B_n^k)$? Prove sua afirmação.

c. É possível descrever $conv(B_n^k)$ como um politopo. Apresente as variáveis e restrições que representam $conv(B_n^k)$.

d. Para o politopo acima, apresente uma restrição válida.

e. Para o politopo acima, apresente a forma de uma de suas facetas.

Exercício 17. ($\star$) Considere dois valores inteiros n e k com $k \leq n$. Seja B_n^k o conjunto de todos os vetores binários de n posições com **exatamente** k valores 1.

a. Qual a dimensão de $conv(B_n^k)$? Prove sua afirmação.

b. Dê exemplo de um vértice de $conv(B_n^k)$? Prove sua afirmação.

c. É possível descrever $conv(B_n^k)$ como um politopo. Apresente as variáveis e restrições que representam $conv(B_n^k)$.

d. Para o politopo acima, apresente uma restrição válida.

e. Para o politopo acima, apresente a forma de uma de suas facetas.