Transformações Geométricas - Parte 2

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

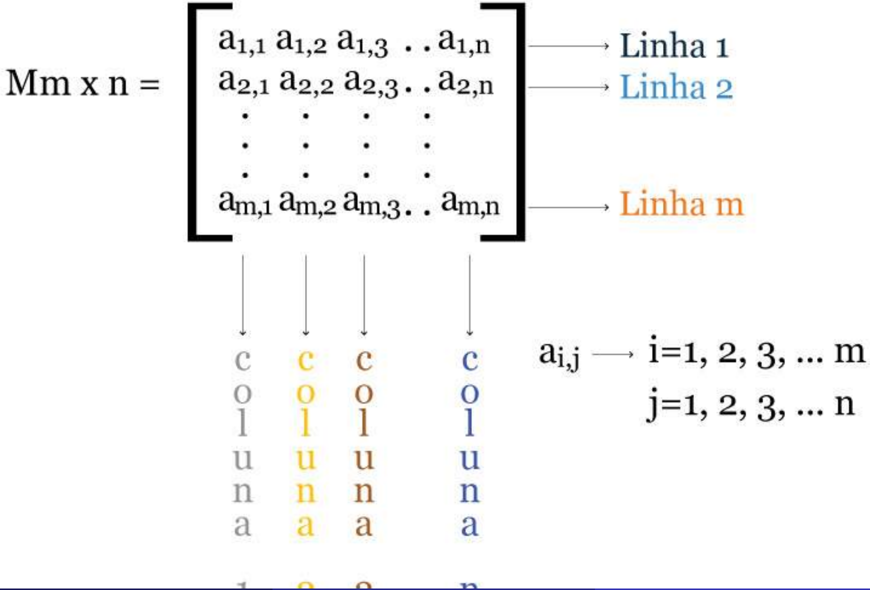
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

petrucior@gmail.com

Tópicos da aula

1. Matriz
   - Definição
   - Vetor linha e coluna
   - Multiplicação por escalar, soma e subtração
   - Matriz transposta
   - Multiplicação entre matrizes
   - Matriz identidade e inversa
2. Transformações lineares
   - Representação matricial de transformações lineares
   - Escala
   - Rotação

Matriz: representação de dados



Vetor linha e coluna

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Matriz $(M_{3,3})$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{bmatrix}$$

Vetor coluna $(v_{3,1})$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \end{bmatrix}$$

Vetor linha $(v_{1,3})$

Multiplicação por escalar, soma e subtração

Multiplicação por escalar **s**

$$s * M = \begin{bmatrix} s * a_{1,1} & s * a_{1,2} & s * a_{1,3} \\ s * a_{2,1} & s * a_{2,2} & s * a_{2,3} \\ s * a_{3,1} & s * a_{3,2} & s * a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Soma e subtração

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} \end{bmatrix}$$

Exercícios: Realize as operações a seguir:

- Multiplique a matriz $m = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ pelo escalar -1.
- Subtraia as matrizes $A = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

Matriz transposta

Realiza a troca de posicionamento de seus elementos de maneira que $m_{i,j}$ passa para posição $m_{j,i}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos representar o produto interno da seguinte forma: $u.v = u^T v$

Exercícios: Encontre as matrizes transpostas e o produto interno:

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$;
- $v = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$;
- $v = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;
- O produto interno entre $a = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Multiplicação entre matrizes

A multiplicação entre matrizes exige que o número **p** de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda.

$$C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n}$$

$$A_{2,3}B_{3,1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{1,3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} * b_{1,1} + a_{1,2} * b_{2,1} + a_{1,3} * b_{3,1} \\ a_{2,1} * b_{1,1} + a_{2,2} * b_{2,1} + a_{2,3} * b_{3,1} \end{bmatrix}$$

Exercícios: Multiplique A e B:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$;
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;
- $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$;

Matriz identidade e inversa

A **matriz identidade** (I) é uma matriz quadrada contendo 1 na diagonal principal e zero nas demais posições.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

A **inversa de uma matriz** é uma outra matriz que, quando multiplicada pela original, resulta na matriz identidade.

$$A * A^{-1} = I$$

Matriz identidade e inversa

Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Verifique se o $det(A) \neq 0$, então podemos encontrar uma matriz inversa

Inversa é calculada da seguinte forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exercícios: Encontre a inversa das matrizes

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

Matriz identidade e inversa

Encontre a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

- Verifique se o $det(A) \neq 0$, então podemos encontrar uma matriz inversa

$$det(A) = -3$$

- Calcule a matriz dos cofatores: $(1)^{i+j} det(A_{\text{menos i,j da matriz}})$

$$\begin{bmatrix} (2*5-1*3) & -(2*5-1*2) & (2*3-2*2) \\ -(2*5-3*3) & (1*5-3*3) & -(1*3-2*2) \\ (2*1-2*2) & -(1*1-2*3) & (1*2-2*2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade e inversa

- Realize a transposição da matriz de cofatores (adjunta) e divida pelo determinante

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exercícios: Encontre a inversa das matrizes

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Transformações lineares

Uma função (T) é linear quando atende as propriedades de homogeneidade e a aditividade.

$$T(a * v) = a * T(v), \text{ onde } a \in Z \quad (\text{ Homogeneidade })$$

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad (\text{ Aditividade })$$

Verifique se $f(x) = 3x$ é linear.

$$f(a * x) = 3(a * x) = a * 3x = a * f(x)$$

$$f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$$

Exercícios: Verifique se as funções são lineares:

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = 5x$
- $f(x) = -x$
- $f(x) = x^2$

Representação matricial de transformações lineares

Podemos representar uma transformação linear através de uma matriz

$$x^{'} = -1 * x, \quad y^{'} = 3 * x + 3 * y, \quad z^{'} = 1 * x + 1 * y + 1 * z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exercícios: Encontre as matrizes a partir das equações lineares

- $x' = -1x + 2y$ e $y' = -2x + 2y$
- $x' = -5x + 3y$, $y' = -4x + 7y + 9z$ e $z' = 2y$
- $x' = -y + z$, $y' = -x + 9z$ e $z' = 2y + 2x$

Transformações lineares podem ser combinadas

Podemos combinar as transformações lineares em um ponto p:

$$p' = M_n * \cdots * M_4 * M_3 * M_2 * M_1 * p$$

E podemos aplicar essa mesma lógica para uma lista k de pontos:

$$\begin{gathered} p'_1 = M_n * \cdots * M_4 * M_3 * M_2 * M_1 * p_1 \\ p'_2 = M_n * \cdots * M_4 * M_3 * M_2 * M_1 * p_2 \\ \cdots \\ p'_j = M_n * \cdots * M_4 * M_3 * M_2 * M_1 * p_k \end{gathered}$$

Transformação de escala

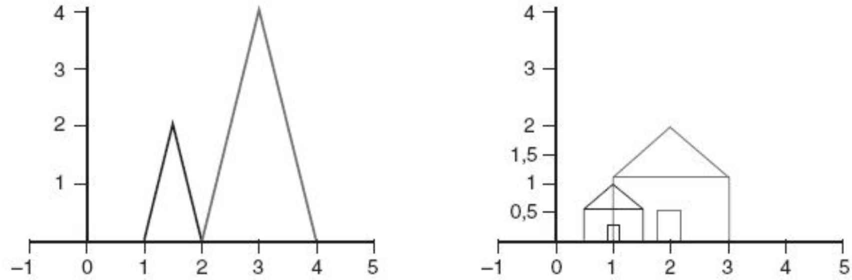


FIGURA 2.17. *Escala de objetos.*

Transformação de escala

Podemos ampliar/reduzir um objeto 2D usando os fatores s_i, onde $i \in \{x, y\}$ nas respectivas coordenadas:

Em 2D:

$$x' = s_x * x$$
$$y' = s_y * y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Em 3D:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exercícios: Realize a modificação de escala abaixo:

- Amplie duas vezes o ponto $a = (2, 4, -6)$;
- Reduza por um terço as coordenadas do ponto $a = (5, 3, 6)$;

Transformação de rotação

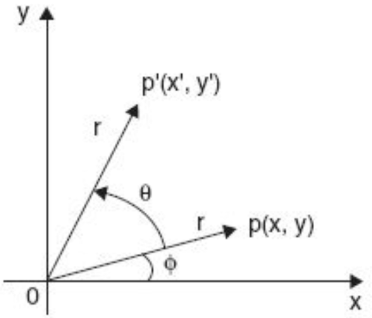


FIGURA 2.19 . Rotação do ponto p.

Transformação de rotação

Uma rotação de um ponto **p** no plano xy é realizado em torno do eixo z. O raio de **p** é calculado da seguinte forma:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

As coordenadas do ponto $p = (x, y)$ podem ser reescrita como:

$$x = r * cos(\phi)$$
$$y = r * sen(\phi)$$

Expansão trigonométrica

$$sen(a + b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$
$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Aplicando as expansões trigonométricas para o ponto rotacionado **p'**:

$$x' = r * cos(\phi + \theta) = r * cos(\phi) * cos(\theta) - r * sen(\phi) * sen(\theta)$$
$$y' = r * sen(\phi + \theta) = r * sen(\phi) * cos(\theta) + r * cos(\phi) * sen(\theta)$$

Transformação de rotação

Substituindo pelas coordenadas originais de $p = (x, y) = (r * cos(\phi), r * sen(\phi))$, temos:

$$x' = x * cos(\theta) - y * sen(\theta)$$
$$y' = y * cos(\theta) + x * sen(\theta)$$

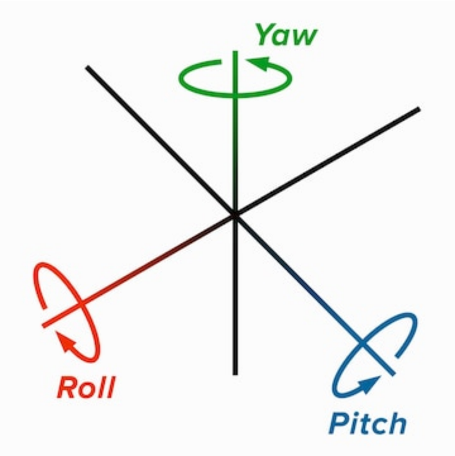
Representando em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exercícios: Encontre os pontos rotacionados:

- $a = (10, 12)$ rotacionado 30^0;
- $a = (3, -10)$ rotacionado 10^0;
- $a = (3, 7)$ rotacionado 45^0;
- $a = (1, 1)$ rotacionado 60^0;

Rotação nos 3 eixos através dos ângulos de euler



Transformações Geométricas - Parte 2

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

petrucior@gmail.com