

# Álgebra Linear - Resumo P2

BCC IME-USP 2018

October 28, 2018

## 1 Aula 9 - Sistemas Lineares

### Sistemas Lineares - Definição

- Um sistema linear é uma equação de forma  $AX = B$ , tal que:

$A$  é uma matriz com  $n$  linhas e  $m$  colunas,  $B$  e  $X$  são da forma:

$$B = b^t = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Tal sistema se equivale à: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$
- Chamamos  $A$  de matriz dos coeficientes do sistemas e a matriz  $\hat{A}$  com 
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$
 de *matriz estendida* do sistema linear.
- Chamamos o sistema de sistema homogêneo se, e somente se  $B = \vec{0}$ .

### Sistemas Lineares - Propriedades e outros

- Equivalência sobre troca de linhas  $L_i \leftrightarrow L_j$ :  
Dado um sistema linear  $AX = B$ , um sistema linear denotado por  $A_{L_i \leftrightarrow L_j} X = B_{L_i \leftrightarrow L_j}$ , onde  $A_{L_i \leftrightarrow L_j}$  é a matriz  $A$  com as linhas  $i$  e  $j$  trocadas, e o mesmo realizado com  $B_{L_i \leftrightarrow L_j}$ . Isto é, as soluções de ambos os sistemas são idênticas.
- Equivalência sobre troca de linhas  $L_i \leftrightarrow L_i - \lambda L_j$ :  
A propriedade acima segue (equivalência) se a linha  $i$  for trocada por uma combinação linear  $L_i - \lambda L_j$ .
- Definimos as operações de trocas de linhas  $L_i \leftrightarrow L_j$  em  $A, B$  como operações elementares sobre qualquer sistema  $AX = B$ .

- Matriz escalonada - Definição:
  - a. Se a linha  $i$  for nula, todas as linhas abaixo de  $i$  ( $j|j > i$ ) são nulas.
  - b. A primeira entrada não nula de cada linhas é 1.
  - c. Utilizando as operações elementares acima, podemos escalonar qualquer matriz de um sistema linear, em especial, procuraremos escalonar matrizes estendidas, pois, dessa forma, mantemos a equivalência do sistema linear, pois realizaremos as mesmas mudanças para  $B$ .
- Soluções de sistemas lineares não homogêneos:
  - Considere o sistema linear não homogêneo  $AX_0 = B$ .
  - Considere  $X_0$ , uma solução particular desse sistema, e  $W$  o espaço de soluções do sistema homogêneo associado ( $AX = \vec{0}$ ).
  - Então, existe um  $w \in W$  tal que, sendo  $X_0$  e  $X$  soluções particulares do sistema não homogêneo, vale  $X = X_0 + w$ .
  - O que queremos dizer aqui é que dada uma solução particular do sistema não homogêneo, as outras soluções do sistema podem ser construída com essa solução encontrada mais alguma solução do sistema homogêneo associado.

## Sistemas Lineares - Exemplos

### Exemplo 1:

- Considere o sistema: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Sua matriz estendida: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
- Escalonando a matriz estendida:
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Temos o sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ou seja:  $\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w \\ x = y - z - 2w = -\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w \end{cases}$

- Logo, temos a solução:  $(x, y, z, w) = \left(-\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w, -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w, z, w\right)$   
 $= z\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right)$

- E o espaço de soluções:  $Span_{\mathbb{K}} \left[ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right) \right]$

# Aula 10 - Determinantes

## Introdução

Dada uma matriz quadrada de tamanho  $n$  com entradas em um corpo  $\mathbb{K}$ , ou seja, um elemento do  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V = \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$ , o determinante é uma função  $\det : V \rightarrow \mathbb{K}$ . Melhor dizendo, procuramos uma função em que **podemos enviar uma matriz e receber um outro valor pertencente ao corpo que a matriz possui entradas**, como, por exemplo, temos uma matriz com entradas em  $\mathbb{R}$  e então podemos ligá-la ao  $\mathbb{R}$ . ( $V \rightarrow \mathbb{R}$ )

## Definindo a função (casos $n' = 1$ até $n' = 3$ )

1. Considere a matriz  $A = (a_{11})$ , representante do sistema  $ax = b$ , assumimos que  $\det(A) = a_{11}$ , vale notar que a condição fundamental para que o sistema seja possível (dado  $b \neq 0$ ) é que  $a \neq 0$ .

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , claramente, pode representar o sistema  $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ , calculando o valor de  $x$ , temos  $(ad - bc)x = rd - sb$  e para  $y$ ,  $(ad - bc)y = bs - rc$ . Para o sistema ser resolvido, temos a condição fundamental  $ad - bc \neq 0$ . Nota-se, portanto, que  $ad - bc$  deve ser um **invariante** da matriz, o qual define uma condição fundamental para que a mesma seja resolvida, temos, então,  $\det(A) = ad - bc$ .

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Definimos com essas matrizes o sistema } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, dividimos em:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

e resolvemos cada um como fizemos no caso anterior, resultando em:

$$\begin{cases} (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})x_2 + (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})x_3 = b_3 \\ (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})x_2 + (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})x_3 = b_3 \end{cases}$$

Como condição para possibilidade do sistema, resolvendo de forma análoga ao item anterior, temos:

$$\begin{aligned} & (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) \\ &= a_{21}a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{21}a_{33} - \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + a_{21}a_{11}a_{22}a_{33} \\ & - a_{21}a_{13}a_{22}a_{31} + \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + \underline{a_{21}a_{13}a_{21}a_{32}} - a_{21}a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Eliminando os zeros e o elemento em comum (o qual não deve influenciar o resultado da função, pois procuramos um invariante), temos:

$$\begin{aligned}
 &= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32})
 \end{aligned}$$

## Estudando os casos dados

- Para estudar os casos dados, revisitamos os grupos de permutações, para o caso  $n = 1$ , é trivial, para o caso  $n = 2$ , temos a matriz:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{bmatrix}$  representando uma permutação.

Obviamente, sabemos que a quantidade de permutações para  $n = 2$  é 2, sendo a permutação neutra, em que nada é alterado, portanto,  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \leftrightarrow a_{11}a_{22}$ , a permutação em que trocamos de lugar os elementos (apenas uma nesse caso),  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_2 \leftrightarrow a_{12}a_{21}$  (aqui associamos uma permutação com um dos termos do determinante da matriz  $2 \times 2$ . Note que a permutação neutra ( $\sigma_0$ ) se associa com o sinal positivo, e a permutação 1 ( $\sigma_1$ ) se associa com o sinal negativo.

- Definimos aqui o conceito da paridade de permutações, dada uma permutação, sua paridade é definida pela quantidade de inversões que a mesma possui, isto é, todos os pares  $x, y$  tais que  $x < y$  e  $\sigma(x) > \sigma(y)$ . Por exemplo, na permutação  $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , analisamos os pares  $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ :

- $(1, 2)$ :  $1 < 2$ ;  $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(2) \rightarrow 1$  inversão.
- $(1, 3)$ :  $1 < 3$ ;  $\sigma(1) = 3, \sigma(3) = 2 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(3) \rightarrow 1$  inversão.
- $(2, 3)$ :  $2 < 3$ ;  $\sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2 \rightarrow \neg(\sigma(2) > \sigma(3)) \rightarrow$  sem inversão.
- Total: 2 inversões

- O sinal associado à cada permutação, e, por consequência, a um termo do determinante, é relacionado com a paridade de sua permutação, se esta é par, o sinal é positivo, se não, é negativo, ou seja:  $sign(\sigma) = (-1)^{n_i}$ , sendo  $n_i$  a quantidade de inversões da permutação. No caso anterior, temos  $n_i = 2$ , portanto  $sign(\sigma) = (-1)^2$ , ou seja, positivo.

## Definição do determinante

Podemos, então, definir a função determinante:

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

# Aula 11 - Determinantes (parte 2)

## Permutações

Considere os polinômios das variáveis  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned}P_2(x_1, x_2) &= x_1 - x_2 \\P_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \\P_n(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)\end{aligned}$$

e defina:

$$\begin{aligned}\sigma P_2(x_1, x_2) &= P_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \\ \sigma P_3(x_1, x_2, x_3) &= P_3(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})\end{aligned}$$

Para o caso geral:

$$P_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

Note que  $\sigma P_n \in \{P_n, -P_n\}$ , pois a diferença dois-a-dois entre todos os monômios está definida, então, qualquer permutação apenas troca o sinal dessa diferença, é trivial que, portanto, para um número par de trocas, o sinal será positivo, e, caso contrário, será negativo.

Logo, temos:

$$\begin{aligned}\sigma P_n &= \text{sign}(\sigma) P_n \\ \text{sign}(\sigma\tau) &= \frac{\sigma\tau P_n}{P_n} = \frac{\sigma(\text{sign}(\tau) P_n)}{P_n} = \text{sign}(\tau) \frac{\text{sign}(\sigma) P_n}{P_n} = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau)\end{aligned}$$

Do último, temos que  $\text{sign} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$  é um homomorfismo de grupos, pois  $\text{sign}(\sigma * \tau) = \text{sign}(\sigma) \times \text{sign}(\tau)$  (preserva as operações dos grupos).

Vale dizer que no. de permutações pares = ímpares =  $\frac{n!}{2}$

## Ciclos

Um  $k$ -ciclo é um elemento  $\alpha \in S_n$  que "movimenta"  $k \geq 2$  elementos,  $i_1, \dots, i_k$  de  $\{1, \dots, n\}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha(i_j) = i_{j+1}, \text{ se } 1 \leq j \leq k-1 \\ \alpha(i_k) = i_1 \\ \alpha(l) = l, \forall l \notin \{i_1, \dots, i_k\} \end{cases}$$

Nesse caso, a notação para esse  $k$ -ciclo é  $\alpha(i_1 \dots i_k)$  e o conjunto chamado de **suporte do ciclo** é  $\text{supp}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_k\}$ .

Exemplificando, o 2-ciclo é uma transposição, onde apenas troca 2 elementos de lugar, ao passo que um 3-ciclo (134) para  $n = 4$  é a permutação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que dois ciclos disjuntos, isto é, seus respectivos suportes são disjuntos ( $\text{supp}(\alpha) \cap \text{supp}(\beta) = \emptyset$ ), comutam, ou seja,  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , ciclos com tal propriedade são chamados de **ciclos disjuntos**.

Concluindo, temos:

1. Existem ciclos disjuntos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  tais que  $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_r$
2. Cada ciclo  $\alpha_j$  é um produto de  $m_j$  transposições.
3.  $\alpha$  é um produto de  $m_1 + \dots + m_r$  transposições.
4.  $sign(\alpha) = (-1)^m$
5.  $\alpha$  é permutação par se, e somente se  $m$  é par.

### Determinantes - Redução para dimensões menores

Na aula anterior, foi visto para o exemplo  $n = 3$  que o cálculo do determinante foi reduzido para um exemplo de  $n = 2$ , o objetivo dessa seção é mostrar como reduzir de uma dimensão  $n \in \mathbb{N}$  para  $n - 1$ .

- Definição: **Minor**

Dada uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{K})$  (Matriz quadrada  $n$  por  $n$ , com entradas no corpo  $\mathbb{K}$ ), seu **minor**  $A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) é a matriz que obtém retirando a linha  $i$  e coluna  $j$  de  $A$ , claramente, reduzindo seu tamanho de  $n$  para  $n - 1$ . Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Definição: **Cofator**

Definimos o cofator( $i, j$ ) como sendo

$$d_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

- Fórmula: **Determinante de uma matriz  $A$  à partir da redução de sua dimensão**

Pelo resultado anterior, sendo  $j_0$  uma coluna fixada temos:

$$\begin{aligned} \det_{n+1}(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sign(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{ij_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij_0} d_{ij_0} \end{aligned}$$

### Determinantes - $\det(A) = 0$ quando uma linha (ou coluna) é repetida

Tal propriedade provém do caso base  $n = 2$ , considere  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ , calculando seu determinante, temos  $ab - ab = \det(A) = 0$ , sabemos também que o determinante de qualquer matriz, por exemplo, para uma matriz  $n = 3$ , pode ser expresso como somas/diferenças de determinantes de matrizes  $2 \times 2$ , igualando a zero para  $n = 3$ , e assim por diante (uma prova formal é um bom exercício).

### Determinantes - Outras Propriedades

- $\det(A) = \det(A^t)$
- $\text{cof}(A)$  é a **matriz dos cofatores** de  $A$ , isto é, a matriz obtida substituindo cada entrada de  $A$  por seu cofator.
- $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^t$  é a **matriz adjunta** de  $A$ , isto é, a transposta da matriz dos cofatores de  $A$ .
- $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)A = Id$  ( $Id$  é a matriz identidade), logo, temos:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$



## Aula 12 - Determinantes (parte 3)

### Determinantes - Interpretação geométrica

Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , no curso de Vetores e Geometria foi visto que esta pode representar 3 vetores  $\in \mathbb{R}^3$ , e seu determinante representa o produto misto entre esses vetores. Relembramos aqui que tal produto misto representa o volume do paralelepído formado por estes 3 vetores.

Definimos aqui o volume de um sólido no  $\mathbb{K}^n$ -espaço vetorial, o mesmo deve ser definido pelos vetores  $v_1, \dots, v_n$ :

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i : x_i (0 \leq x_i \leq 1), \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

O volume será definido pelo produto misto entre esses vetores, o qual pode ser expresso por:

$$\text{volume}(P(v_1, \dots, v_n)) = |[v_1, \dots, v_n]| = |\det_n(A)|,$$

onde  $A$  é matriz cujas colunas são os vetores  $v_1, \dots, v_n$

### Determinantes - Propriedades gerais

1.  $\det(A)$  é invariante sob operações elementares (definidas na Aula 9) de linhas e colunas de  $A$ . Se houverem trocas de linhas, cada troca de linhas inverte o sinal do determinante, e, caso haja multiplicação de uma linha por escalar  $\lambda$ , o determinante de  $A'$  será  $\det(A') = \lambda \det(A)$ .
2.  $\det_n(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} d_{ij_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0j} d_{i_0j}$ , onde  $d_{ij}$  são cofatores  $(i, j)$  de  $A$ .
3.  $\det(A) = \det(A^t)$  e  $\det(Id) = 1$
4. O sistema linear  $AX = B$  tem uma solução única se, e somente se  $\det(A) \neq 0$
5.  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
6.  $\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot Id$
7.  $A$  é invertível se, e somente se  $\det(A) \neq 0$ , e, nesse caso:  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

### Grupo Linear Geral e Grupo Linear Especial

Definimos o  $GL$  (General Linear) e  $SL$  (Special Linear):

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$$

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$$

## Aula 13

### Homomorfismo de grupos - Definição

Dados dois grupos  $(G_1, *)$  e  $(G_2, \circ)$ . Um homomorfismo de grupos é uma função:

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

que satisfaz as seguintes propriedades, sendo  $e_1$  e  $e_2$  os elementos neutros dos grupos:

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x) \circ f(y) \\ f(e_1) &= e_2 \end{aligned}$$

Isto é, a  $f$  preserva as operações desses grupos, temos, de imediato, que:

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$