Álgebra Linear - Exercícios P2

BCC IME-USP 2018

October 29, 2018

1. Escalone as matrizes

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \tfrac{1}{19} L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{3} L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \tfrac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Solução

Definimos $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e escalonamos:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Facilmente, temos:

$$\begin{cases} x_4 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = -5 \leftrightarrow x_1 = -3x_2 - 5 \end{cases}$$

E então, o conjunto de soluções é:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_2 - 5, x_2, 0, 3) = x_2(-3, 1, 0, 0) + (-5, 0, 0, 3)$$

3. Encontre os valores de t para que o sistema abaixo tenha mais do que uma solução. Faça isso de duas formas, via escalonamento e determinante.

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ tx_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + tx_3 \end{cases}$$

Solução - Escalonamento

Definimos $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$, e então escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3 \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1+t \\ t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Se $t = 0$, temos:

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}6 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow S = (0,0,0), \text{ quando } t = 0.$$

Logo $t \neq 0$, pois queremos mais de uma solução.

Se $t \neq 0$:

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 1+t\\ t & 0 & 1\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3 \begin{pmatrix}6 & 0 & 1+t\\ t & 0 & 1\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 1+t\\ t & 0 & 1\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{t} L_2 \begin{pmatrix}6 & 0 & 1+t\\ 1 & 0 & 1/t\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & 1+t\\ 1 & 0 & 1/t\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 - 6L_2 \begin{pmatrix}0 & 0 & 1+t-6/t\\ 1 & 0 & 1/t\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1+t-6/t\\ 1 & 0 & 1/t\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_1 - 6L_2 \begin{pmatrix}1 & 0 & 1/t\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1+t-6/t\end{pmatrix}$$

Para que o sistema tenha infinitas solução, é preciso que exista uma linha nula. No entanto, a única linha possivelmente nula é a terceira, temos, então:

$$1 + t - \tfrac{6}{t} = 0 \Leftrightarrow t + t^2 - 6 = 0 = (t+3)(t-2) = 0$$
$$t \in \{-3, 2\}$$

Solução - Determinante

Definimos $A = \begin{pmatrix}6 & -1 & 1\\ t & 0 & 1\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix}$, e calculamos seu determinante, que deve ser igual 0, para que o sistema tenha mais de uma solução:

$$det(A) = t - 6 + t^2 = t^2 + t - 6 = (t+3)(t-2)$$
$$det(A) = (t+3)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3, 2\}$$

4. oi