Álgebra Linear - Resumo P2

BCC IME-USP 2018

October 31, 2018

1 Aula 9 - Sistemas Lineares

Sistemas Lineares - Definição

- Um sistema linear é uma equação de forma $AX = B$, tal que:

  A é uma matriz com n linhas e m colunas, B e X são da forma:
  $$B = b^t = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Tal sistema se equivale à: $\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$

- Chamamos A de matriz dos coeficientes do sistemas e a matriz Â com
  $\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & anm & b_n \end{bmatrix}$ de *matriz estendida* do sistema linear.

- Chamamos o sistema de sistema homogêneo se, e somente se $B = \overrightarrow{0}$.

Sistemas Lineares - Propriedades e outros

- Equivalência sobre troca de linhas $L_i \leftrightarrow L_j$:
  Dado um sistema linear $AX = B$, um sistema linear denotado por $A_{L_i \leftrightarrow L_j}X = B_{L_i \leftrightarrow L_j}$, onde $A_{L_i \leftrightarrow L_j}$ é a matriz A com as linhas i e j trocadas, e o mesmo realizado com $B_{L_i \leftrightarrow L_j}$. Isto é, as soluções de ambos os sistemas são idênticas.

- Equivalência sobre troca de linhas $L_i \leftrightarrow L_i - \lambda L_j$:
  A propriedade acima segue (equivalência) se a linha i for trocada por uma combinação linear $L_i - \lambda L_j$.

- Definimos as operações de trocas de linhas $L_i \leftrightarrow L_j$ em A, B como operações elementares sobre qualquer sistema $AX = B$.

- Matriz escalonada - Definição:
    a. Se a linha i for nula, todas as linhas abaixo de i $(j|j > i))$ são nulas.
    b. A primeira entrada não nula de cada linhas é 1.
    c. Utilizando as operações elementares acima, podemos escalonar qualquer matriz de um sistema linear, em especial, procuraremos escalonar matrizes estendidas, pois, dessa forma, mantemos a equivalência do sistema linear, pois realizaremos as mesmas mudanças para B.

- Soluções de sistemas lineares não homogêneos:
    - Considere o sistema linear não homogêneo $AX_0 = B$.
    - Considere X_0, uma solução particular desse sistema, e W o espaço de soluções do sistema homogêneo associado $(AX = \overrightarrow{0})$.
    - Então, existe um $w \in W$ tal que, sendo X_0 e X soluções particulares do sistema não homogêneo, vale $X = X_0 + w$.
    - O que queremos dizer aqui é que dada uma solução particular do sistema não homogêneo, as outras soluções do sistema podem ser construída com essa solução encontrada mais alguma solução do sistema homogêneo associado.

Sistemas Lineares - Exemplos

Exemplo 1:

- Considere o sistema: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Sua matriz estendida: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

- Escalonando a matriz estendida:
    - $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
    - $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
    - $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Temos o sistema equivalente:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Ou seja: $\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w \\ x = y - z - 2w = -\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w \end{cases}$
- Logo, temos a solução: $(x, y, z, w) = \left(-\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w, -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w, z, w\right)$
$= z\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right)$
- E o espaço de soluções: $Span_{\mathbb{K}}\left[\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right)\right]$

Aula 10 - Determinantes

Introdução

Dada uma matriz quadrada de tamanho n com entradas em um corpo $\mathbb{K}$, ou seja, um elemento do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V = \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$, o determinante é uma função $det : V \to \mathbb{K}$. Melhor dizendo, procuramos uma função em que **podemos enviar uma matriz e receber um outro valor pertencente ao corpo que a matriz possui entradas**, como, por exemplo, temos uma matriz com entradas em $\mathbb{R}$ e então podemos ligá-la ao $\mathbb{R}$. ($V \to \mathbb{R}$)

Definindo a função (casos $n' = 1$ até $n' = 3$)

1. Considere a matriz $A = (a_{11})$, representante do sistema $ax = b$, assumimos que $det(A) = a_{11}$, vale notar que a condição fundamental para que o sistema seja possível (dado $b \neq 0$) é que $a \neq 0$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, claramente, pode representar o sistema $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$, calculando o valor de x, temos $(ad - bc)x = rd - sb$ e para y, $(ad - bc)y = bs - rc$. Para o sistema ser resolvido, temos a condição fundamental $ad - bc \neq 0$. Nota-se, portanto, que $ad - bc$ deve ser um **invariante** da matriz, o qual define uma condição fundamental para que a mesma seja resolvida, temos, então, $det(A) = ad - bc$.

3. Considere as matrizes
   $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

   Definimos com essas matrizes o sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$

   Para resolver o sistema, dividimos em:

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

   e resolvemos cada um como fizemos no caso anterior, resultando em:

   $$\begin{cases} (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})x_2 + (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})x_3 = b_3 \\ (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})x_2 + (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})x_3 = b_3 \end{cases}$$

   Como condição para possibilidade do sistema, resolvendo de forma análoga ao item anterior, temos:
   $(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})$
   $= a_{21}a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{21}a_{33} - \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + a_{21}a_{11}a_{22}a_{33}$
   $- a_{21}a_{13}a_{22}a_{31} + \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + a_{21}a_{13}a_{21}a_{32} - a_{21}a_{11}a_{23}a_{32}$

Eliminando os zeros e o elemento em comum (o qual não deve influenciar o resultado da função, pois procuramos um invariante), temos:
$= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32})$

Estudando os casos dados

- Para estudar os casos dados, revisitamos os grupos de permutações, para o caso $n = 1$, é trivial, para o caso $n = 2$, temos a matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{bmatrix}$ representando uma permutação.

  Obviamente, sabemos que a quantidade de permutações para $n = 2$ é 2, sendo a permutação netura, em que nada é alterado, portanto, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \leftrightarrow a_{11}a_{22}$, a permutação em que trocamos de lugar os elementos (apenas uma nesse caso), $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_2 \leftrightarrow a_{12}a_{21}$ (aqui associamos uma permutação com um dos termos do determinante da matriz 2×2. Note que a permutação neutra (σ_0) se associa com o sinal positivo, e a permutação 1 (σ_1) se associa com o sinal negativo.

- Definimos aqui o conceito da paridade de permutações, dada uma permutação, sua paridade é definida pela quantidade de inversões que a mesma possui, isto é, todos os pares x, y tais que $x < y$ e $\sigma(x) > \sigma(y)$. Por exemplo, na permutação $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, analisamos os pares $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$:

  - $(1, 2)$: $1 < 2$; $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(2) \rightarrow 1$ inversão.
  - $(1, 3)$: $1 < 3$; $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 2 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(3) \rightarrow 1$ inversão.
  - $(2, 3)$: $2 < 3$; $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2 \rightarrow \neg(\sigma(2) > \sigma(3)) \rightarrow$ sem inversão.
  - Total: 2 inversões

- O sinal associado à cada permutação, e, por consequência, a um termo do determinante, é relacionado com a paridade de sua permutação, se esta é par, o sinal é positivo, se não, é negativo, ou seja: $sign(\sigma) = (-1)^{n_i}$, sendo n_i a quantidade de inversões da permutação. No caso anterior, temos $n_i = 2$, portanto $sign(\sigma) = (-1)^2$, ou seja, positivo.

Definição do determinante

Podemos, então, definir a função determinante:

$$\boxed{det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}}$$

Aula 11 - Determinantes (parte 2)

Permutações

Considere os polinômios das variáveis x_1, x_2, x_3:

$$P_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$
$$P_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)$$
$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

e defina:

$$\sigma P_2(x_1, x_2) = P_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$$
$$\sigma P_3(x_1, x_2, x_3) = P_3(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

Para o caso geral:

$$P_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

Note que $\sigma P_n \in \{P_n, -P_n\}$, pois a diferença dois-a-dois entre todos os monômios está definida, então, qualquer permutação apenas troca o sinal dessa diferença, é trivial que, portanto, para um número par de trocas, o sinal será positivo, e, caso contrário, será negativo.
Logo, temos:

$$\sigma P_n = sign(\sigma) P_n$$
$$sign(\sigma\tau) = \frac{\sigma\tau P_n}{P_n} = \frac{\sigma(sign(\tau)P_n)}{P_n} = sign(\tau)\frac{sign(\sigma)P_n}{P_n} = sign(\sigma)sign(\tau)$$

Do último, temos que $sign : S_n \to \{1, -1\}$ é um homomorfismo de grupos, pois $sign(\sigma * \tau) = sign(\sigma) \times sign(\tau)$ (preserva as operações dos grupos).
Vale dizer que no. de permutações pares = ímpares = $\frac{n!}{2}$

Ciclos

Um k-ciclo é um elemento $\alpha \in S_n$ que "movimenta" $k \geq 2$ elementos, $i_1, \ldots, i_k$ de $\{1, \ldots, n\}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha(i_j) = i_{j+1}, \text{ se } 1 \leq j \leq k-1 \\ \alpha(i_k) = i_1 \\ \alpha(l) = l, \forall l \notin \{i_1, \ldots, i_k\} \end{cases}$$

Nesse caso, a notação para esse k-ciclo é $\alpha(i_1 \ldots i_k)$ e o conjunto chamado de **suporte do ciclo** é $supp(\alpha) = \{i_1, \ldots, i_k\}$.
Exemplificando, o 2-ciclo é uma transposição, onde apenas troca 2 elementos de lugar, ao passo que um 3-ciclo (134) para $n = 4$ é a permutação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que dois ciclos disjuntos, isto é, seus respectivos suportes são disjuntos ($supp(\alpha) \cap supp(\beta) = \emptyset$), comutam, ou seja, $\alpha\beta = \beta\alpha$, ciclos com tal propriedade são chamados de **ciclos disjuntos**.

Concluindo, temos:

1. Existem ciclos disjuntos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tais que $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_r$
2. Cada ciclo α_j é um produto de m_j transposições.
3. α é um produto de $m_1 + \dots + m_r$ transposições.
4. $sign(\alpha) = (-1)^m$
5. α é permutação par se, e somente se m é par.

Determinantes - Redução para dimensões menores

Na aula anterior, foi visto para o exemplo $n = 3$ que o cálculo do determinante foi reduzido para um exemplo de $n = 2$, o objetivo dessa seção é mostrar como reduzir de uma dimensão $n \in \mathbb{N}$ para $n - 1$.

- Definição: **Minor**
  Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ (Matriz quadrada n por n, com entradas no corpo $\mathbb{K}$), seu **minor** A_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ é a matriz que obtém retirando a linha i e coluna j de A, claramente, reduzindo seu tamanho de n para $n - 1$. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} A_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} A_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Definição: **Cofator**
  Definimos o cofator(i, j) como sendo

$$d_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

- Fórmula: **Determinante de uma matriz A à partir da redução de sua dimensão**
  Pelo resultado anterior, sendo j_0 uma coluna fixada temos:

$$\begin{aligned} det_{n+1}(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sign(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} det(A_{ij_0}) \\ &= \sum_{i=n}^{n} a_{ij_0} d_{ij_0} \end{aligned}$$

Determinantes - $det(A) = 0$ quando uma linha (ou coluna) é repetida

Tal propriedade provém do caso base $n = 2$, considere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$, calculando seu determinante, temos $ab - ab = det(A) = 0$, sabemos também que o determinante de qualquer matriz, por exemplo, para uma matriz $n = 3$, pode ser expresso como somas/diferenças de determinantes de matrizes 2x2, igualando a zero para $n = 3$, e assim por diante (uma prova formal é um bom exercício).

Determinantes - Outras Propriedades

- $det(A) = det(A^t)$
- $cof(A)$ é a **matriz dos cofatores** de A, isto é, a matriz obtida substituindo cada entrada de A por seu cofator.
- $adj(A) = cof(A)^t$ é a **matriz adjunta** de A, isto é, a transposta da matriz dos cofatores de A.
- $\frac{1}{det(A)} adj(A) A = Id$ (Id é a matriz identidade), logo, temos:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$$

Aula 12 - Determinantes (parte 3)

Determinantes - Interpretação geométrica

Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$, no curso de Vetores e Geometria foi visto que esta pode representar 3 vetores $\in \mathbb{R}^3$, e seu determinante representa o produto misto entre esses vetores. Relembramos aqui que tal produto misto representa o volume do paralelepído formado por estes 3 vetores.
Definimos aqui o volume de um sólido no $\mathbb{K}^n$-espaço vetorial, o mesmo deve ser definido pelos vetores $v_1, \ldots, v_n$:

$$P(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i v_i : x_i (0 \leq x_i \leq 1), \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

O volume será definido pelo produto misto entre esses vetores, o qual pode ser expresso por:

$$volume(P(v_1, \ldots, v_n)) = |[v_1, \ldots, v_n]| = |det_n(A)|,$$
$$\text{onde } A \text{ é matriz cujas colunas são os vetores } v_1, \ldots, v_n$$

Determinantes - Propriedades gerais

1. $det(A)$ é invariante sob operações elementares (definidas na Aula 9) de linhas e colunas de A. Se houverem trocas de linhas, cada troca de linhas inverte o sinal do determinante, e, caso haja multiplicação de uma linha por escalar λ, o determinante de A' será $det(A') = \lambda det(A)$.
2. $det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} d_{ij_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} d_{i_0 j}$, onde d_{ij} são cofatores (i, j) de A.
3. $det(A) = det(A^t)$ e $det(Id) = 1$
4. O sistema linear $AX = B$ tem uma solução única se, e somente se $det(A) \neq 0$
5. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
6. $adj(A) \cdot A = A \cdot adj(A) = det(A) \cdot Id$
7. A é invertível se, e somente se $det(A) \neq 0$, e, nesse caso: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$

Grupo Linear Geral e Grupo Linear Especial

Definimos o GL (General Linear) e SL (Special Linear):

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) \neq 0\}$$
$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : det(A) = 1\}$$

Aula 13

Homomorfismo de grupos - Definição

Dados dois grupos $(G_1, *)$ e $(G_2, \circ)$. Um homomorfismo de grupos é uma função:

$$f : G_1 \to G_2$$

que satisfaz as seguintes propriedades, sendo e_1 e e_2 os elementos neutros dos grupos:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$
$$f(e_1) = e_2$$

Isto é, a f preserva as operações desses grupos, temos, de imediato, que:

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

Núcleo e Imagem - Definição

Definimos aqui o núcleo e imagem de um homomorfismo de grupos $f : G_1 \to G_2$, considere e_2 como elemento neutro de G_2:

$$Ker(f) = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\} \subset G_1$$
$$Im(f) = \{f(x) : x \in G_1\} \subset G_2$$

São subgrupos e respectivamente chamados de núcleo ($Kernel$) e imagem ($Image$) de f.

Homomorfismo de grupos - Exemplos

1. Considere $sign : (S_n, \circ) \to (\{1, -1\}, \cdot)$.
   Sabemos que $sign$ satisfaz, sendo e a permutação $\in S_n$ neutra:

   $$sign(a \circ b) = sign(a) \cdot sign(b)$$
   $$sign(e) = 1$$

2. Considere $det_n : GL_n(\mathbb{K}) \to (\mathbb{K}^*, \cdot)$, é um homomorfismo pois:

   $$det(Id) = \overrightarrow{1}$$
   $$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$

   Note que: $Ker(det_n) = SL_n(\mathbb{K})$

Transformações Lineares e Funcionais Lineares - Definição

Sabemos que um espaço vetorial é um grupo abeliano sobre o qual é definida uma segunda operação, denotada por **multiplicação por escalar**. Aqui estendemos a noção de homomorfismos de grupos para espaços vetoriais, nessa situação, claramente é preciso levar em conta a multiplicação por escalar. Considere $+$ como a operação num grupo abeliano.
Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma **transformação linear** entre V_1 e V_2 é sempre denotada por:

$$T : V_1 \to V_2$$

Tal que

1. $T(v + w) = T(v) + T(w)$
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Se $V_2 = \mathbb{K}$, então T é um funcional linear e denotamos como $T : V_1 \to \mathbb{K}$.
Utilizamos o nome **linearidade** de T para nos referir às propriedades citadas acima:

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T(v_i)$$

Transformações Lineares e Funcionais Lineares - Núcleo e Imagem

Analogamente ao que foi definido para grupos, temos para Transformações e Funcionais Lineares:

$$Ker(T) = \{x \in V_1 : T(x) = \overrightarrow{0}\} \subset V_1$$
$$Im(T) = \{T(x) \in V_2 : x \in V_1\} \subset V_2$$

Denotando $\overrightarrow{0}$ como o vetor nulo de ambos os espaços vetoriais, temos:

$$T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$$

Note que $Ker(T)$ e $Im(T)$ são subgrupos e subespaços vetoriais.

Nulidade e Posto - Definição

Seja $T : V_1 \to V_2$ uma transformação linear entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, definimos:

a. **Nulidade de T** $= N(T) = dim_{\mathbb{K}}(Ker(T))$
b. **Posto de T** $= P(T) = dim_{\mathbb{K}}(Im(T))$

Seja $T : V_1 \to V_2$ uma transformação linear entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais.

- Se T é uma função injetora, T é um **monomorfismo**.
- Se T é uma função sobrejetora, T é um **epimorfismo**.
- Se T é uma bijeção, T é um **isomorfismo**.
- Se $V_1 = V_2$, T é um **operador linear**, em vez de transformação linear.

Injetividade de Transformações Lineares

Seja $T: V_1 \to V_2$ uma transformação entre $\mathbb{K}$-espaços lineares.

1. T é um monomorfismo se, e somente se $Ker(T) = \{\overrightarrow{0}\}$

- Prova do item 1:

$$T(x) = T(y) \leftrightarrow T(x-y) = \overrightarrow{0} \leftrightarrow x - y \in Ker(T)$$

Portanto, temos que $Ker(T) = \{\overrightarrow{0}\}$ se, e somente se $T(x) = T(y) \to x = y$

2. Se T é um isomorfismo linear, então $T^{-1}: V_2 \to V_1$ existe e é linear, e $dim_{\mathbb{K}}(V_1) = dim_{\mathbb{K}}(V_2)$

- Prova do item 2:
Sendo T uma bijeção, a existência da inversa é trivial, portanto, provaremos apenas sua linearidade.
Seja $z = T(x)$, $w = T(y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, logo, $T(x) + T(y) = z + w$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, tem-se que:

$$T^{-1}(z) = x \text{ e } T^{-1}(w) = y$$
$$T^{-1}(z + w) = x + y = T^{-1}(z) + T^{-1}(w)$$
$$T^{-1}(\lambda z) = \lambda T(z)$$

O que prova a linearidade de T. Note que T^{-1} é um isomorfismo linear.

Considere $n = dim_{\mathbb{K}}(V_1)$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V_1. Como T é sobrejetora, temos que $z \in V_2 \to \exists x \in V_1(T(x) = z)$. Dado que β é uma base de V_1, e considerando $\lambda_i \in \mathbb{K}$ podemos escrever x como $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, pela linearidade de T, temos $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} T(\lambda_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i)$. Como não houve perda de generalidade na suposição de z, podemos escrever qualquer $z \in V_2$ como $T(\beta) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$, logo, temos que $T(\beta)$ é conjunto gerador de V_2, e, portanto, deste podemos extrair uma base, o que nos dá $dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n = |\beta| = |T(\beta)| \geq dim_{\mathbb{K}}(V_2)$, no entanto, como T^{-1} é um isomorfismo linear, sabemos que $dim_{\mathbb{K}}(V_2) \geq dim_{\mathbb{K}}(V_1)$, resultando em $dim_{\mathbb{K}}(V_2) = dim_{\mathbb{K}}(V_1)$.

Transformações Lineares - Exemplos

1. Considere a função traço, $Tr: (M_n(\mathbb{K}), +) \to (\mathbb{K}, +)$, tal função recebe uma matriz e retorna a soma de todos os valores da sua diagonal principal $a_{ii}, i \in [1, n]$. Percebe-se que Tr é um homomorfismo de grupos abelianos, e também uma transformação linear, pois: $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$, com $\lambda \in \mathbb{K}$, segue Tr é um funcional linear (transformação do espaço vetorial ao corpo em qual o espaço está definido sobre).

2. Seja $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sobre esse espaço, definimos a seguinte função:

$$\boxed{T(f) = \int\limits_0^1 f(x)dx}$$

Dos cursos anteriores, sabemos que:

$$\begin{aligned} T(f+\lambda g) &= \int\limits_0^1 [f(x)+\lambda g(x)]\,dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \lambda \int\limits_0^1 g(x)dx \\ &= T(f)+\lambda T(g) \end{aligned}$$

Note que T é um **funcional** linear sobre V. $Ker(T)$ são todas as função cuja integral de 0 a 1 é igual a 0. Como $f(x) = \frac{1}{2} - x$.

3. Seja $V = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $T : V \to V$ e definimos a função T como

$$T(f) = f'$$

Lembramos que:

$$T(f+\lambda g) = (f+\lambda g)' = f' + \lambda g' = T(f) + \lambda T(g)$$

Verificado que T é um homomorfismo de grupos abelianos (pois as operaçõe se mantém) sobre os quais a multiplicação por escalar vale, assim como para a função T, temos que, sabendo que o domínio e o contradomínio da função são os mesmos, T é um operador linear. Note também que $Ker(T)$ é o conjunto das funções constantes, implicando $f' = 0$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $T(x, y, z) = x$ (a projeção na primeira coordenada). Sendo $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$, ambos $\in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$T(u+\lambda v) = T(x+\lambda a, y+\lambda b, z+\lambda c) = x + \lambda a = T(u) + \lambda T(v)$$

Aula 14 - Transformações Lineares (Parte 2)

Teorema - Imagem/Núcleo em Posto/Nulidade

Seja $T : V_1 \to V_2$ uma transformação linear entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita, então, temos

1. $dim(V_1) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$
2. $dim(V_1) = N(T) + P(T)$

Transformação Linear - Propriedade Fundamental

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente. Seja α uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V.

Logo, dado $v \in V$ existem $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,$$

logo,

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)$$

Note que $(x_1, \dots, x_n) = [v]_\alpha$, logo, sabendo apenas $[v]_\alpha$ e $T(v_1), \dots, T(v_n)$, podemos saber a imagem de v por T. Lembre-se que essa propriedade vale apenas para transformações lineares, pois depende de suas propriedades, como a linearidade.

Exemplo

- Seja $\beta = \{(0,1),(1,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $f(1,0) = 2$ e $f(0,1) = 1$. Então tem-se que:

$$f(x,y) = f(x'(1,0) + y'(0,1)), \text{ porque } (x,y) = x'(1,0) + y'(0,1) \text{ e } (x',y') = [(x,y)]_\beta$$

$$f(x'(1,0) + y'(0,1)) = f(x'(1,0)) + f(y'(0,1)) = x'f(1,0) + y'(0,1) = 2x' + y'$$

Estendemos agora essa propriedade, seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente.
Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ uma base de W.
Então, dado $v \in V$, existem escalares $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \text{ em outras palavras,}$$

$$[v]_\alpha = (x_1, \dots, x_n)$$

Temos, então:

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i)$$

E, para cada i, temos que $T(v_i) \in W$, e, portanto:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j, \text{ ou seja,}$$
$$[T(v_i)]_\beta = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$$

Podemos dizer, então:

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\right) w_j, \text{ logo,}$$
$$[T(v)]_\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{im} x_i\right)$$

De forma matricial, temos:

$$[T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} [v]_\alpha$$

Note que as colunas da matriz são representam, cada uma, $[T(v_i)]_\beta = (a_{i1}, \ldots a_{i_m})$. Ela em si é uma matriz $m \times n \in M_{mn}(\mathbb{K})$ e a denotaremos como $[T]_\alpha^\beta$.
Dessa forma, podemos escrever a relação

$$[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha$$

Esta nos diz como obter as coordenadas de $T(v)$ sabendo apenas $[T]_\alpha^\beta$ e $[v]_\alpha$.

Podemos, então, interpretar T como

$$T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

e definir $T(X)$ como

$$T(X) = AX \mid A = [T]_\alpha^\beta,\ X = [v]_\alpha$$

No caso em que $v \in Ker(T)$, temos

$$T(v) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(v) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow [T(v)]_\beta = (0, \ldots, 0)$$

Ou seja, para encontrar o núcleo de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, basta resolvermos um sistema linear homogêneo.

Note que

$$Im(T) = Span_{\mathbb{K}}\left[T(v_1), \ldots, T(v_n)\right]$$

Obtendo, assim, uma base da imagem $Im(T)$ dentro do conjunto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$.

Exemplo
Suponha $\alpha = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\beta = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2, \text{ e, logo, } [v]_\alpha = (x_1, x_2)$$

A linearidade de T implica em

$$T(v) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2)$$

Sabemos também que

$$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3, \text{ logo } [T(v_1)]_\beta = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$
$$T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3, \text{ logo } [T(v_2)]_\beta = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

Obtemos

$$\begin{gathered} T(v) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) \\ = x_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3) + x_2(a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3) \\ = w_1(x_1 a_{11} + x_2 a_{12}) + w_2(x_1 a_{21} + x_2 a_{22}) + w_3(x_1 a_{31} + x_2 a_{32}) \end{gathered}$$

Resultando em

$$[T(v)]_\beta = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12}, x_1 a_{21} + x_2 a_{22}, x_1 a_{31} + x_2 a_{32}) =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot [v]_\alpha$$
$$\text{Com } [T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Note que as colunas de $[T]_\alpha^\beta$ são as coordenadas de $T(v_1)$ e $T(v_2)$.
Podemos interpretar T como

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Temos, em particular

$$v \in Ker(T) \Leftrightarrow T(v) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow [T(v)]_\beta = (0, 0, 0)$$
$$[T]_\alpha^\beta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E, também

$$\begin{gathered} w \in Im(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2(w = T(v)) \Leftrightarrow \exists v \in V([T(v)]_\beta = [w]_\beta) \\ \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2((y_1, y_2, y_3) = [w]_\beta = [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha \end{gathered}$$
$$[T]_\alpha^\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Note que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ é a solução do sistema linear.

Matriz associada a uma transformação linear

Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, com $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e β uma base de W e $T : V \to W$ uma transformação linear.
Logo, existe uma matriz $[T]_\alpha^\beta \in M_{mn}(\mathbb{K})$, tal que

$$\forall v \in V, [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha$$

Sendo as colunas de $[T]_\alpha^\beta$ os escalares $[T(v_i)]_\beta$, com $1 \leq i \leq n$.

Tem-se que

$$v \in Ker(T) \Leftrightarrow [v]_\alpha \text{ é solução do sistema linear homogêneo } [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha = \overrightarrow{0}$$

Além disso

$$Im(T) = Span_{\mathbb{K}} \left[T(v_1), \ldots, T(v_n)\right]$$

e

$$w \in Im(T) \subset W \Leftrightarrow \exists v \in V$$
$$\Leftrightarrow [v]_\alpha \text{ é solução do sistema linear homogêneo } [T]_\alpha^\beta \cdot X = [w]_\beta$$

Exemplo

Sejam $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-1}^{1} \end{pmatrix}$$