

# Álgebra Linear - Resumo P2

BCC IME-USP 2018

October 31, 2018

## 1 Aula 9 - Sistemas Lineares

### Sistemas Lineares - Definição

- Um sistema linear é uma equação de forma  $AX = B$ , tal que:

$A$  é uma matriz com  $n$  linhas e  $m$  colunas,  $B$  e  $X$  são da forma:

$$B = b^t = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Tal sistema se equivale à: 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$
- Chamamos  $A$  de matriz dos coeficientes do sistemas e a matriz  $\hat{A}$  com 
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$
 de *matriz estendida* do sistema linear.
- Chamamos o sistema de sistema homogêneo se, e somente se  $B = \vec{0}$ .

### Sistemas Lineares - Propriedades e outros

- Equivalência sobre troca de linhas  $L_i \leftrightarrow L_j$ :  
Dado um sistema linear  $AX = B$ , um sistema linear denotado por  $A_{L_i \leftrightarrow L_j} X = B_{L_i \leftrightarrow L_j}$ , onde  $A_{L_i \leftrightarrow L_j}$  é a matriz  $A$  com as linhas  $i$  e  $j$  trocadas, e o mesmo realizado com  $B_{L_i \leftrightarrow L_j}$ . Isto é, as soluções de ambos os sistemas são idênticas.
- Equivalência sobre troca de linhas  $L_i \leftrightarrow L_i - \lambda L_j$ :  
A propriedade acima segue (equivalência) se a linha  $i$  for trocada por uma combinação linear  $L_i - \lambda L_j$ .
- Definimos as operações de trocas de linhas  $L_i \leftrightarrow L_j$  em  $A, B$  como operações elementares sobre qualquer sistema  $AX = B$ .

- Matriz escalonada - Definição:
  - a. Se a linha  $i$  for nula, todas as linhas abaixo de  $i$  ( $j|j > i$ ) são nulas.
  - b. A primeira entrada não nula de cada linhas é 1.
  - c. Utilizando as operações elementares acima, podemos escalonar qualquer matriz de um sistema linear, em especial, procuraremos escalonar matrizes estendidas, pois, dessa forma, mantemos a equivalência do sistema linear, pois realizaremos as mesmas mudanças para  $B$ .
- Soluções de sistemas lineares não homogêneos:
  - Considere o sistema linear não homogêneo  $AX_0 = B$ .
  - Considere  $X_0$ , uma solução particular desse sistema, e  $W$  o espaço de soluções do sistema homogêneo associado ( $AX = \vec{0}$ ).
  - Então, existe um  $w \in W$  tal que, sendo  $X_0$  e  $X$  soluções particulares do sistema não homogêneo, vale  $X = X_0 + w$ .
  - O que queremos dizer aqui é que dada uma solução particular do sistema não homogêneo, as outras soluções do sistema podem ser construída com essa solução encontrada mais alguma solução do sistema homogêneo associado.

## Sistemas Lineares - Exemplos

### Exemplo 1:

- Considere o sistema: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- Sua matriz estendida: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
- Escalonando a matriz estendida:
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  - $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Temos o sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ou seja:  $\begin{cases} x - y + z + 2w = 0 \\ y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}w = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w \\ x = y - z - 2w = -\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w \end{cases}$

- Logo, temos a solução:  $(x, y, z, w) = \left(-\frac{4}{3}z - \frac{4}{3}w, -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}w, z, w\right)$   
 $= z\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) + w\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right)$

- E o espaço de soluções:  $\text{Span}_{\mathbb{K}} \left[ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, 1\right) \right]$

# Aula 10 - Determinantes

## Introdução

Dada uma matriz quadrada de tamanho  $n$  com entradas em um corpo  $\mathbb{K}$ , ou seja, um elemento do  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V = \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$ , o determinante é uma função  $\det : V \rightarrow \mathbb{K}$ . Melhor dizendo, procuramos uma função em que **podemos enviar uma matriz e receber um outro valor pertencente ao corpo que a matriz possui entradas**, como, por exemplo, temos uma matriz com entradas em  $\mathbb{R}$  e então podemos ligá-la ao  $\mathbb{R}$ . ( $V \rightarrow \mathbb{R}$ )

## Definindo a função (casos $n' = 1$ até $n' = 3$ )

1. Considere a matriz  $A = (a_{11})$ , representante do sistema  $ax = b$ , assumimos que  $\det(A) = a_{11}$ , vale notar que a condição fundamental para que o sistema seja possível (dado  $b \neq 0$ ) é que  $a \neq 0$ .

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , claramente, pode representar o sistema  $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ , calculando o valor de  $x$ , temos  $(ad - bc)x = rd - sb$  e para  $y$ ,  $(ad - bc)y = bs - rc$ . Para o sistema ser resolvido, temos a condição fundamental  $ad - bc \neq 0$ . Nota-se, portanto, que  $ad - bc$  deve ser um **invariante** da matriz, o qual define uma condição fundamental para que a mesma seja resolvida, temos, então,  $\det(A) = ad - bc$ .

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Definimos com essas matrizes o sistema } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, dividimos em:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

e resolvemos cada um como fizemos no caso anterior, resultando em:

$$\begin{cases} (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})x_2 + (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23})x_3 = b_3 \\ (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})x_2 + (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})x_3 = b_3 \end{cases}$$

Como condição para possibilidade do sistema, resolvendo de forma análoga ao item anterior, temos:

$$\begin{aligned} & (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11})(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) - (a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) \\ &= a_{21}a_{12}a_{23}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{21}a_{33} - \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + a_{21}a_{11}a_{22}a_{33} \\ & - a_{21}a_{13}a_{22}a_{31} + \underline{a_{22}a_{11}a_{23}a_{31}} + a_{21}a_{13}a_{21}a_{32} - a_{21}a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Eliminando os zeros e o elemento em comum (o qual não deve influenciar o resultado da função, pois procuramos um invariante), temos:

$$\begin{aligned}
 &= a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32})
 \end{aligned}$$

## Estudando os casos dados

- Para estudar os casos dados, revisitamos os grupos de permutações, para o caso  $n = 1$ , é trivial, para o caso  $n = 2$ , temos a matriz:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{bmatrix}$  representando uma permutação.

Obviamente, sabemos que a quantidade de permutações para  $n = 2$  é 2, sendo a permutação neutra, em que nada é alterado, portanto,  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \sigma_1 \leftrightarrow a_{11}a_{22}$ , a permutação em que trocamos de lugar os elementos (apenas uma nesse caso),  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_2 \leftrightarrow a_{12}a_{21}$  (aqui associamos uma permutação com um dos termos do determinante da matriz  $2 \times 2$ . Note que a permutação neutra ( $\sigma_0$ ) se associa com o sinal positivo, e a permutação 1 ( $\sigma_1$ ) se associa com o sinal negativo.

- Definimos aqui o conceito da paridade de permutações, dada uma permutação, sua paridade é definida pela quantidade de inversões que a mesma possui, isto é, todos os pares  $x, y$  tais que  $x < y$  e  $\sigma(x) > \sigma(y)$ . Por exemplo, na permutação  $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , analisamos os pares  $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$ :

- $(1, 2)$ :  $1 < 2$ ;  $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(2) \rightarrow 1$  inversão.
- $(1, 3)$ :  $1 < 3$ ;  $\sigma(1) = 3, \sigma(3) = 2 \rightarrow \sigma(1) > \sigma(3) \rightarrow 1$  inversão.
- $(2, 3)$ :  $2 < 3$ ;  $\sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2 \rightarrow \neg(\sigma(2) > \sigma(3)) \rightarrow$  sem inversão.
- Total: 2 inversões

- O sinal associado à cada permutação, e, por consequência, a um termo do determinante, é relacionado com a paridade de sua permutação, se esta é par, o sinal é positivo, se não, é negativo, ou seja:  $sign(\sigma) = (-1)^{n_i}$ , sendo  $n_i$  a quantidade de inversões da permutação. No caso anterior, temos  $n_i = 2$ , portanto  $sign(\sigma) = (-1)^2$ , ou seja, positivo.

## Definição do determinante

Podemos, então, definir a função determinante:

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

# Aula 11 - Determinantes (parte 2)

## Permutações

Considere os polinômios das variáveis  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned}P_2(x_1, x_2) &= x_1 - x_2 \\P_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \\P_n(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)\end{aligned}$$

e defina:

$$\begin{aligned}\sigma P_2(x_1, x_2) &= P_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \\ \sigma P_3(x_1, x_2, x_3) &= P_3(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})\end{aligned}$$

Para o caso geral:

$$P_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

Note que  $\sigma P_n \in \{P_n, -P_n\}$ , pois a diferença dois-a-dois entre todos os monômios está definida, então, qualquer permutação apenas troca o sinal dessa diferença, é trivial que, portanto, para um número par de trocas, o sinal será positivo, e, caso contrário, será negativo.

Logo, temos:

$$\begin{aligned}\sigma P_n &= \text{sign}(\sigma) P_n \\ \text{sign}(\sigma\tau) &= \frac{\sigma\tau P_n}{P_n} = \frac{\sigma(\text{sign}(\tau) P_n)}{P_n} = \text{sign}(\tau) \frac{\text{sign}(\sigma) P_n}{P_n} = \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau)\end{aligned}$$

Do último, temos que  $\text{sign} : S_n \rightarrow \{1, -1\}$  é um homomorfismo de grupos, pois  $\text{sign}(\sigma * \tau) = \text{sign}(\sigma) \times \text{sign}(\tau)$  (preserva as operações dos grupos).

Vale dizer que no. de permutações pares = ímpares =  $\frac{n!}{2}$

## Ciclos

Um  $k$ -ciclo é um elemento  $\alpha \in S_n$  que "movimenta"  $k \geq 2$  elementos,  $i_1, \dots, i_k$  de  $\{1, \dots, n\}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha(i_j) = i_{j+1}, \text{ se } 1 \leq j \leq k-1 \\ \alpha(i_k) = i_1 \\ \alpha(l) = l, \forall l \notin \{i_1, \dots, i_k\} \end{cases}$$

Nesse caso, a notação para esse  $k$ -ciclo é  $\alpha(i_1 \dots i_k)$  e o conjunto chamado de **suporte do ciclo** é  $\text{supp}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_k\}$ .

Exemplificando, o 2-ciclo é uma transposição, onde apenas troca 2 elementos de lugar, ao passo que um 3-ciclo (134) para  $n = 4$  é a permutação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que dois ciclos disjuntos, isto é, seus respectivos suportes são disjuntos ( $\text{supp}(\alpha) \cap \text{supp}(\beta) = \emptyset$ ), comutam, ou seja,  $\alpha\beta = \beta\alpha$ , ciclos com tal propriedade são chamados de **ciclos disjuntos**.

Concluindo, temos:

1. Existem ciclos disjuntos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  tais que  $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_r$
2. Cada ciclo  $\alpha_j$  é um produto de  $m_j$  transposições.
3.  $\alpha$  é um produto de  $m_1 + \dots + m_r$  transposições.
4.  $sign(\alpha) = (-1)^m$
5.  $\alpha$  é permutação par se, e somente se  $m$  é par.

### Determinantes - Redução para dimensões menores

Na aula anterior, foi visto para o exemplo  $n = 3$  que o cálculo do determinante foi reduzido para um exemplo de  $n = 2$ , o objetivo dessa seção é mostrar como reduzir de uma dimensão  $n \in \mathbb{N}$  para  $n - 1$ .

- Definição: **Minor**

Dada uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{K})$  (Matriz quadrada  $n$  por  $n$ , com entradas no corpo  $\mathbb{K}$ ), seu **minor**  $A_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) é a matriz que obtém retirando a linha  $i$  e coluna  $j$  de  $A$ , claramente, reduzindo seu tamanho de  $n$  para  $n - 1$ . Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Definição: **Cofator**

Definimos o cofator( $i, j$ ) como sendo

$$d_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

- Fórmula: **Determinante de uma matriz  $A$  à partir da redução de sua dimensão**

Pelo resultado anterior, sendo  $j_0$  uma coluna fixada temos:

$$\begin{aligned} \det_{n+1}(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sign(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{ij_0}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij_0} d_{ij_0} \end{aligned}$$

### Determinantes - $\det(A) = 0$ quando uma linha (ou coluna) é repetida

Tal propriedade provém do caso base  $n = 2$ , considere  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$ , calculando seu determinante, temos  $ab - ab = \det(A) = 0$ , sabemos também que o determinante de qualquer matriz, por exemplo, para uma matriz  $n = 3$ , pode ser expresso como somas/diferenças de determinantes de matrizes  $2 \times 2$ , igualando a zero para  $n = 3$ , e assim por diante (uma prova formal é um bom exercício).

### Determinantes - Outras Propriedades

- $\det(A) = \det(A^t)$
- $\text{cof}(A)$  é a **matriz dos cofatores** de  $A$ , isto é, a matriz obtida substituindo cada entrada de  $A$  por seu cofator.
- $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^t$  é a **matriz adjunta** de  $A$ , isto é, a transposta da matriz dos cofatores de  $A$ .
- $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)A = Id$  ( $Id$  é a matriz identidade), logo, temos:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$



## Aula 12 - Determinantes (parte 3)

### Determinantes - Interpretação geométrica

Seja  $A \in M_3(\mathbb{R})$ , no curso de Vetores e Geometria foi visto que esta pode representar 3 vetores  $\in \mathbb{R}^3$ , e seu determinante representa o produto misto entre esses vetores. Relembramos aqui que tal produto misto representa o volume do paralelepído formado por estes 3 vetores.

Definimos aqui o volume de um sólido no  $\mathbb{K}^n$ -espaço vetorial, o mesmo deve ser definido pelos vetores  $v_1, \dots, v_n$ :

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i : x_i (0 \leq x_i \leq 1), \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

O volume será definido pelo produto misto entre esses vetores, o qual pode ser expresso por:

$$\text{volume}(P(v_1, \dots, v_n)) = |[v_1, \dots, v_n]| = |\det_n(A)|,$$

onde  $A$  é matriz cujas colunas são os vetores  $v_1, \dots, v_n$

### Determinantes - Propriedades gerais

1.  $\det(A)$  é invariante sob operações elementares (definidas na Aula 9) de linhas e colunas de  $A$ . Se houverem trocas de linhas, cada troca de linhas inverte o sinal do determinante, e, caso haja multiplicação de uma linha por escalar  $\lambda$ , o determinante de  $A'$  será  $\det(A') = \lambda \det(A)$ .
2.  $\det_n(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} d_{ij_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0j} d_{i_0j}$ , onde  $d_{ij}$  são cofatores  $(i, j)$  de  $A$ .
3.  $\det(A) = \det(A^t)$  e  $\det(Id) = 1$
4. O sistema linear  $AX = B$  tem uma solução única se, e somente se  $\det(A) \neq 0$
5.  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
6.  $\text{adj}(A) \cdot A = A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot Id$
7.  $A$  é invertível se, e somente se  $\det(A) \neq 0$ , e, nesse caso:  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

### Grupo Linear Geral e Grupo Linear Especial

Definimos o  $GL$  (General Linear) e  $SL$  (Special Linear):

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$$

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\}$$

# Aula 13

## Homomorfismo de grupos - Definição

Dados dois grupos  $(G_1, *)$  e  $(G_2, \circ)$ . Um homomorfismo de grupos é uma função:

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

que satisfaz as seguintes propriedades, sendo  $e_1$  e  $e_2$  os elementos neutros dos grupos:

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x) \circ f(y) \\ f(e_1) &= e_2 \end{aligned}$$

Isto é, a  $f$  preserva as operações desses grupos, temos, de imediato, que:

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$$

## Núcleo e Imagem - Definição

Definimos aqui o núcleo e imagem de um homomorfismo de grupos  $f : G_1 \rightarrow G_2$ , considere  $e_2$  como elemento neutro de  $G_2$ :

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{x \in G_1 : f(x) = e_2\} \subset G_1 \\ Im(f) &= \{f(x) : x \in G_1\} \subset G_2 \end{aligned}$$

São subgrupos e respectivamente chamados de núcleo (*Kernel*) e imagem (*Image*) de  $f$ .

## Homomorfismo de grupos - Exemplos

1. Considere  $sign : (S_n, \circ) \rightarrow (\{1, -1\}, \cdot)$ .

Sabemos que  $sign$  satisfaz, sendo  $e$  a permutação  $\in S_n$  neutra:

$$\begin{aligned} sign(a \circ b) &= sign(a) \cdot sign(b) \\ sign(e) &= 1 \end{aligned}$$

2. Considere  $det_n : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \cdot)$ , é um homomorfismo pois:

$$\begin{aligned} det(Id) &= \vec{1} \\ det(AB) &= det(A) \cdot det(B) \end{aligned}$$

Note que:  $Ker(det_n) = SL_n(\mathbb{K})$

## Transformações Lineares e Funcionais Lineares - Definição

Sabemos que um espaço vetorial é um grupo abeliano sobre o qual é definida uma segunda operação, denotada por **multiplicação por escalar**. Aqui estendemos a noção de homomorfismos de grupos para espaços vetoriais, nessa situação, claramente é preciso levar em conta a multiplicação por escalar. Considere  $+$  como a operação num grupo abeliano.

Sejam  $V_1$  e  $V_2$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma **transformação linear** entre  $V_1$  e  $V_2$  é sempre denotada por:

$$T : V_1 \rightarrow V_2$$

Tal que

1.  $T(v + w) = T(v) + T(w)$
2.  $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

Se  $V_2 = \mathbb{K}$ , então  $T$  é um funcional linear e denotamos como  $T : V_1 \rightarrow \mathbb{K}$ .

Utilizamos o nome **linearidade** de  $T$  para nos referir às propriedades citadas acima:

$$T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i T(v_i)$$

## Transformações Lineares e Funcionais Lineares - Núcleo e Imagem

Analogamente ao que foi definido para grupos, temos para Transformações e Funcionais Lineares:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= \{x \in V_1 : T(x) = \vec{0}\} \subset V_1 \\ \text{Im}(T) &= \{T(x) \in V_2 : x \in V_1\} \subset V_2 \end{aligned}$$

Denotando  $\vec{0}$  como o vetor nulo de ambos os espaços vetoriais, temos:

$$T(\vec{0}) = \vec{0}$$

Note que  $\text{Ker}(T)$  e  $\text{Im}(T)$  são subgrupos e subespaços vetoriais.

## Nulidade e Posto - Definição

Seja  $T : V_1 \rightarrow V_2$  uma transformação linear entre  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, definimos:

- a. **Nulidade de  $T$**  =  $N(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T))$
- b. **Posto de  $T$**  =  $P(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T))$

Seja  $T : V_1 \rightarrow V_2$  uma transformação linear entre  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais.

- Se  $T$  é uma função injetora,  $T$  é um **monomorfismo**.
- Se  $T$  é uma função sobrejetora,  $T$  é um **epimorfismo**.
- Se  $T$  é uma bijeção,  $T$  é um **isomorfismo**.
- Se  $V_1 = V_2$ ,  $T$  é um **operador linear**, em vez de transformação linear.

## Injetividade de Transformações Lineares

Seja  $T : V_1 \rightarrow V_2$  uma transformação entre  $\mathbb{K}$ -espaços lineares.

1.  $T$  é um monomorfismo se, e somente se  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$

- Prova do item 1:

$$T(x) = T(y) \leftrightarrow T(x - y) = \vec{0} \leftrightarrow x - y \in \text{Ker}(T)$$

Portanto, temos que  $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$  se, e somente se  $T(x) = T(y) \rightarrow x = y$

2. Se  $T$  é um isomorfismo linear, então  $T^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$  existe e é linear, e  $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$

- Prova do item 2:

Sendo  $T$  uma bijeção, a existência da inversa é trivial, portanto, provaremos apenas sua linearidade.

Seja  $z = T(x)$ ,  $w = T(y)$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ , logo,  $T(x) + T(y) = z + w$ ,  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} T^{-1}(z) &= x \text{ e } T^{-1}(w) = y \\ T^{-1}(z + w) &= x + y = T^{-1}(z) + T^{-1}(w) \\ T^{-1}(\lambda z) &= \lambda T^{-1}(z) \end{aligned}$$

O que prova a linearidade de  $T$ . Note que  $T^{-1}$  é um isomorfismo linear.

Considere  $n = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$  e  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V_1$ . Como  $T$  é sobrejetora, temos que  $z \in V_2 \rightarrow \exists x \in V_1 (T(x) = z)$ . Dado que  $\beta$  é uma base de  $V_1$ , e considerando  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  podemos escrever  $x$  como  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ , pela linearidade de  $T$ , temos  $T(x) = \sum_{i=1}^n T(\lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i)$ .

Como não houve perda de generalidade na suposição de  $z$ , podemos escrever qualquer  $z \in V_2$  como  $T(\beta) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ , logo, temos que  $T(\beta)$  é conjunto gerador de  $V_2$ , e, portanto, deste podemos extrair uma base, o que nos dá  $\dim_{\mathbb{K}}(V_1) = n = |\beta| = |T(\beta)| \geq \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$ , no entanto, como  $T^{-1}$  é um isomorfismo linear, sabemos que  $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) \geq \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$ , resultando em  $\dim_{\mathbb{K}}(V_2) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$ .

## Transformações Lineares - Exemplos

1. Considere a função traço,  $Tr : (M_n(\mathbb{K}), +) \rightarrow (\mathbb{K}, +)$ , tal função recebe uma matriz e retorna a soma de todos os valores da sua diagonal principal  $a_{ii}, i \in [1, n]$ . Percebe-se que  $Tr$  é um homomorfismo de grupos abelianos, e também uma transformação linear, pois:  $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ , com  $\lambda \in \mathbb{K}$ , segue  $Tr$  é um funcional linear (transformação do espaço vetorial ao corpo em qual o espaço está definido sobre).
2. Seja  $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções contínuas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , sobre esse espaço, definimos a seguinte função:

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

Dos cursos anteriores, sabemos que:

$$\begin{aligned} T(f + \lambda g) &= \int_0^1 [f(x) + \lambda g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \lambda \int_0^1 g(x) dx \\ &= T(f) + \lambda T(g) \end{aligned}$$

Note que  $T$  é um **funcional** linear sobre  $V$ .  $Ker(T)$  são todas as função cuja integral de 0 a 1 é igual a 0. Como  $f(x) = \frac{1}{2} - x$ .

3. Seja  $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e  $T : V \rightarrow V$  e definimos a função  $T$  como

$$T(f) = f'$$

Lembramos que:

$$T(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' = f' + \lambda g' = T(f) + \lambda T(g)$$

Verificado que  $T$  é um homomorfismo de grupos abelianos (pois as operação se mantém) sobre os quais a multiplicação por escalar vale, assim como para a função  $T$ , temos que, sabendo que o domínio e o contradomínio da função são os mesmos,  $T$  é um operador linear. Note também que  $Ker(T)$  é o conjunto das funções constantes, implicando  $f' = 0$ .

4. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $T(x, y, z) = x$  (a projeção na primeira coordenada). Sendo  $u = (x, y, z)$  e  $v = (a, b, c)$ , ambos  $\in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

$$T(u + \lambda v) = T(x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c) = x + \lambda a = T(u) + \lambda T(v)$$

## Aula 14 - Transformações Lineares (Parte 2)

### Teorema - Imagem/Núcleo em Posto/Nulidade

Seja  $T : V_1 \rightarrow V_2$  uma transformação linear entre  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão finita, então, temos

1.  $\dim(V_1) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$
2.  $\dim(V_1) = N(T) + P(T)$

### Transformação Linear - Propriedade Fundamental

Seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear entre  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente. Seja  $\alpha$  uma base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$ .

Logo, dado  $v \in V$  existem  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i,$$

logo,

$$T(v) = \sum_{i=1}^n x_i T(v_i)$$

Note que  $(x_1, \dots, x_n) = [v]_\alpha$ , logo, sabendo apenas  $[v]_\alpha$  e  $T(v_1), \dots, T(v_n)$ , podemos saber a imagem de  $v$  por  $T$ . Lembre-se que essa propriedade vale apenas para transformações lineares, pois depende de suas propriedades, como a linearidade.

### Exemplo

- Seja  $\beta = \{(0, 1), (1, 0)\}$  uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear tal que  $f(1, 0) = 2$  e  $f(0, 1) = 1$ . Então tem-se que:

$$f(x, y) = f(x'(1, 0) + y'(0, 1)), \text{ porque } (x, y) = x'(1, 0) + y'(0, 1) \text{ e } (x', y') = [(x, y)]_\beta$$

$$f(x'(1, 0) + y'(0, 1)) = f(x'(1, 0)) + f(y'(0, 1)) = x'f(1, 0) + y'(0, 1) = 2x' + y'$$

Estendemos agora essa propriedade, seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear entre  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente.

Seja  $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$  e  $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$  uma base de  $W$ .

Então, dado  $v \in V$ , existem escalares  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  tais que

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \text{ em outras palavras,}$$
$$[v]_\alpha = (x_1, \dots, x_n)$$

Temos, então:

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(v_i)$$

E, para cada  $i$ , temos que  $T(v_i) \in W$ , e, portanto:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j, \text{ ou seja,}$$

$$[T(v_i)]_\beta = (a_{i1}, \dots, a_{im})$$

Podemos dizer, então:

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}\right) w_j, \text{ logo,}$$

$$[T(v)]_\beta = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{im} x_i\right)$$

De forma matricial, temos:

$$[T(v)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} [v]_\alpha$$

Note que as colunas da matriz são representam, cada uma,  $[T(v_i)]_\beta = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ . Ela em si é uma matriz  $m \times n \in M_{mn}(\mathbb{K})$  e a denotaremos como  $[T]_\alpha^\beta$ .

Dessa forma, podemos escrever a relação

$$[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta \cdot [v]_\alpha$$

Esta nos diz como obter as coordenadas de  $T(v)$  sabendo apenas  $[T]_\alpha^\beta$  e  $[v]_\alpha$ .

Podemos, então, interpretar  $T$  como

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

e definir  $T(X)$  como

$$T(X) = AX \mid A = [T]_\alpha^\beta, X = [v]_\alpha$$

No caso em que  $v \in \text{Ker}(T)$ , temos

$$T(v) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(v) = \vec{0} \Leftrightarrow [T(v)]_\beta = (0, \dots, 0)$$

Ou seja, para encontrar o núcleo de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, basta resolvermos um sistema linear homogêneo.

Note que

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{K}} [T(v_1), \dots, T(v_n)]$$

Obtendo, assim, uma base da imagem  $\text{Im}(T)$  dentro do conjunto  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ .

### Exemplo

Suponha  $\alpha = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\beta = \{a_1, \dots, a_n\}$

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2, \text{ e, logo, } [v]_\alpha = (x_1, x_2)$$

A linearidade de  $T$  implica em

$$T(v) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2)$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3, \text{ logo } [T(v_1)]_\beta = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3, \text{ logo } [T(v_2)]_\beta = (a_{12}, a_{22}, a_{32}) \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) \\ &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3) \\ &= w_1(x_1 a_{11} + x_2 a_{12}) + w_2(x_1 a_{21} + x_2 a_{22}) + w_3(x_1 a_{31} + x_2 a_{32}) \end{aligned}$$

Resultando em

$$\begin{aligned} [T(v)]_\beta &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12}, x_1 a_{21} + x_2 a_{22}, x_1 a_{31} + x_2 a_{32}) = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot [v]_\alpha \\ \text{Com } [T]_\alpha^\beta &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que as colunas de  $[T]_\alpha^\beta$  são as coordenadas de  $T(v_1)$  e  $T(v_2)$ .

Podemos interpretar  $T$  como

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Temos, em particular

$$v \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(v) = \vec{0} \Leftrightarrow [T(v)]_\beta = (0, 0, 0)$$

$$[T]_\alpha^\beta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E, também

$$\begin{aligned} w \in \text{Im}(T) &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 (w = T(v)) \Leftrightarrow \exists v \in V ([T(v)]_\beta = [w]_\beta) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 ((y_1, y_2, y_3) = [w]_\beta = [T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha) \end{aligned}$$

$$[T]_\alpha^\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Note que  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  é a solução do sistema linear.



### Matriz associada a uma transformação linear

Sejam  $V$  e  $W$   $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão  $n$  e  $m$ , respectivamente, com  $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  e  $\beta$  uma base de  $W$  e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear.

Logo, existe uma matriz  $[T]_{\alpha}^{\beta} \in M_{mn}(\mathbb{K})$ , tal que

$$\forall v \in V, [T(v)]_{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\alpha}$$

Sendo as colunas de  $[T]_{\alpha}^{\beta}$  os escalares  $[T(v_i)]_{\beta}$ , com  $1 \leq i \leq n$ .

Tem-se que

$$v \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow [v]_{\alpha} \text{ é solução do sistema linear homogêneo } [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\alpha} = \vec{0}$$

Além disso

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{K}} [T(v_1), \dots, T(v_n)]$$

e

$$\begin{aligned} w \in \text{Im}(T) \subset W &\Leftrightarrow \exists v \in V \\ &\Leftrightarrow [v]_{\alpha} \text{ é solução do sistema linear homogêneo } [T]_{\alpha}^{\beta} \cdot X = [w]_{\beta} \end{aligned}$$

### Exemplo

Sejam  $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$T(p(x)) = \left( \int_{-1}^1 p(x) dx, p(-1) + p(1) \right)$$

$\alpha$  e  $\beta$  bases de  $P_3(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente.

1. Mostre que  $T$  é linear.
2. Encontre a matriz  $[T]_{\alpha}^{\beta}$ .
3. Determine  $\text{Im}(T)$  e  $\text{Ker}(T)$ .
4. Encontre um gerador para  $\text{Ker}(T)$ .

#### 1. Mostre que $T$ é linear

Para provar a linearidade de  $T$ , queremos provar que, sendo  $v, w \in P_3(\mathbb{R})$ , temos

$$T(v + \lambda w) = T(v) + T(\lambda w) = T(v) + \lambda T(w)$$

Certo, sabemos o que provar, então, do que aprendemos no curso de Cálculo I e conhecimento básico de polinômios e funções, temos

$$\begin{aligned} T(v + \lambda w) &= \left( \int_{-1}^1 v + \lambda w dx, (v + \lambda w)(-1) + (v + \lambda w)(1) \right) \\ &= \left( \int_{-1}^1 \lambda w dx, (\lambda w)(-1) + (\lambda w)(1) \right) + \left( \int_{-1}^1 v dx, (v)(-1) + (v)(1) \right) = T(v) + T(\lambda w) \\ &= \left( \lambda \int_{-1}^1 w dx, \lambda(w)(-1) + \lambda(w)(1) \right) + \left( \int_{-1}^1 v dx, (v)(-1) + (v)(1) \right) = T(v) + \lambda T(w). \quad \square \end{aligned}$$

## 2. Encontre a matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$

Queremos encontrar a matriz que, dado um  $v \in P_3(\mathbb{R})$ ,  $[v]_{\alpha}$  é solução do sistema  $[T]_{\alpha}^{\beta} \cdot X = [T(v)]_{\beta}$ . Sabemos que  $[T]_{\alpha}^{\beta}$  é a matriz associada à transformação linear  $T$  (podemos usar o termo, pois provamos sua linearidade acima).

Sejam, então,  $\alpha = \{p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2\}$  e  $\beta = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ , encontramos, então a imagem de cada vetor de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} T(p_1) &= \left( \int_{-1}^1 1, p_1(-1) + p_1(1) \right) = (2, 2) \rightarrow [T(p_1)]_{\beta} = (2, 2) \\ T(p_2) &= \left( \int_{-1}^1 x, p_2(-1) + p_2(1) \right) = (0, 0) \rightarrow [T(p_2)]_{\beta} = (0, 0) \\ T(p_3) &= \left( \int_{-1}^1 x^2, p_3(-1) + p_3(1) \right) = \left( \frac{2}{3}, 2 \right) \rightarrow [T(p_3)]_{\beta} = \left( \frac{2}{3}, 2 \right) \end{aligned}$$

Montamos, então a matriz  $[T]_{\alpha}^{\beta}$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

## 3. Determine $Im(T)$ e $Ker(T)$

Note que  $\{p_1, p_3\} = \{(2, 2), (\frac{2}{3}, 2)\}$  está contido em  $\alpha$  é um conjunto linearmente independente, omitimos  $(0, 0)$  pois este sempre é nulo.

Perceba que o conjunto dado é uma base de  $\mathbb{R}^2$ , facilmente, percebemos que

$$Im(T) = \mathbb{R}^2 = Span_{\mathbb{R}}[(2, 2), (\frac{2}{3}, 2)].$$

Para encontrar  $Ker(T)$ , fazemos  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in Ker(T) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \\ \begin{cases} 2a_0 + \frac{2a_2}{3} = 0 \\ 2a_2 + 2a_2 = 0 \end{cases} & \\ \Leftrightarrow & \\ a_0 = a_2 = 0 & \end{aligned}$$

Então temos  $p(x) = a_1p_2(x)$ , resultando em  $Ker(T) = Span[p_2(x)]$ , assim, simultaneamente encontramos  $Ker(T)$  e um gerador para ele, concluindo o exercício **4. Encontre um gerador para  $Ker(T)$** .  $\square$ .