Dijkstra (4/11)

```
DIJKSTRA (G,,c,s)
para v em V(G) faça d[v] = INF
d[s] = 0, pi[s] = nil
Q = V(G) // Q recebe todos os vértices de G
enquanto Q não estiver vazio, faça
  u = Extract-Min(Q)
  para v nas adjacências de u, faça
    se v está em Q e d[u] + c(uv) < d[v]
      então pi[v] = u, d[v] = d[u] + c(uv)
devolva (pi,d)
```

Invariantes: $d[u] = \delta(s,u)$, se $u \notin Q$ e $d[u] \geq \delta(s,u)$, se $u \in Q$.

Prova (segunda):

Se $d[u] < \infty$, então existe um caminho de s até u de comprimento $d[u] \Rightarrow d[u] \geq \delta(s,u) \forall u \in V$.

Prova (primeiro):

Fato: Se $u \in Q$ satisfaz $d[u] = \min_{v \in Q} d[v]$, então $d[u] = \delta(s,u)$.

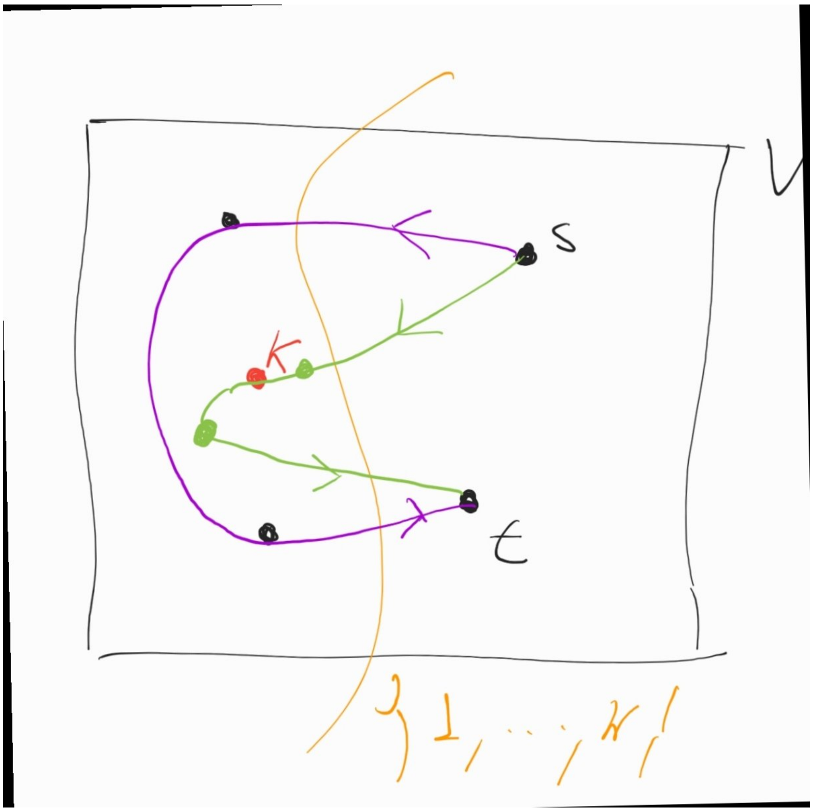
Prova:

- Se $u = s$, não há nada a se provar (Esta é a primeira iteração e $d[s] = 0 = \delta(s,u)$)
- Suponha $u \neq s$. Seja $P = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ um caminho de s a u de comprimento $\delta(s,u)$, onde $s = 1$ e $u = k$, $s \notin Q, u \in Q$. Tome $i := \min\{j \in 1, \ldots, k : v_j \in Q\} > 1$.
  Temos
  $$d[u] \leq d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + c(v_{i-1}v_i) \leq \delta(s, v_{i-1}) + c(v_{i-1}v_i) + \sum_{j=i}^{k} c(v_{j-1}v_j) = \delta(s,u). \square$$
  Note a importância de $u, v_{i-1} \notin Q$ e $v_i \in Q$ e $\delta(s, v_{i-1}) = \sum_{j=1}^{i-2} c(v_j v_{j+1})$.

Floyd-Warshall (4/11)

$$V = \{1, \ldots, n\}, k \in \{0, \ldots, n\}$$

- SP_k := problema de encontrar, para cada par $(s,t) \in V \times V$, o comprimento mínimo de um caminho de s até t cujos vértices internos estão em $\{1, \ldots, k\}$



Suponha que o caminho rosa não passa pelo vértice k, então não há nenhum caminho mais curto passando por k.

Suponha que um caminho rosa passa por k, então existe um caminho mínimo ($s - k$) e outro $k - t$.

Pointer para prova: Escrever Floyd Warshall (provar?) + informação + algoritmo p/ recuperar solução