Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
SEL0360 — Princípios de Comunicação

12 de maio de 2020

Aluno:
Luís Filipe Vasconcelos Peres

Nº USP:
10310641

Trabalho 1 (P1)

Problemas

3.1

Do enunciado, temos que $f_c = 1MHz$, $f_s = 5kHz$ e $Q = 175$. Considerando o sinal e a mensagem como:

$$s(t) = A_c[1 + k_a \cdot m(t)] \cdot cos(2\pi f_c t)$$
$$m(t) = sin(2\pi f_s t)$$

Utilizando a identidade trigonométrica (1) do Apêndice, temos:

$$s(t) = A_c \cdot \left[cos(2\pi f_c t) + \frac{k_a}{2} \cdot sin[2\pi(f_s + f_c)t] + sin[2\pi(f_c - f_s)t]\right]$$
$$s(t) = A_c \cdot \left[cos(2\pi 10^6 t) + \frac{k_a}{2} \cdot sin[2\pi(5 \cdot 10^3 + 10^6)t] + sin[2\pi(5 \cdot 10^3 - 10^6)t]\right]$$
$$s(t) = A_c \cdot \left[cos(2\pi 10^6 t) + \frac{k_a}{2} \cdot sin[2\pi(1,005 \cdot 10^6)t] + sin[2\pi(0,995 \cdot 10^6)t]\right]$$

Podemos calcular a largura de banda:

$$BW = \frac{f_c}{Q} = \frac{10^6}{175} = 5.714,29\ Hz$$
$$\therefore\ BW \approx 5,71\ kHz$$

Assim, como $m(t)$ se aproxima suficientemente da largura de banda de 3 dB, podemos estimar sua atenuação para 50%. Dessa forma, temos:

$$k'_a = 0,5 \cdot k_a$$
$$\therefore\ k'_a = 0,25$$

O que nos traz a porcentagem de modulação de 25%.

3.2

(a) Do enunciado: $i = I_0 \cdot \left[exp\left(-\frac{v}{V_T}\right) - 1\right]$

Expandindo por Taylor até a 3^a ordem, obtemos: $i = I_0 \cdot \left[-\left(\frac{v}{V_T}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{V_T}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{v}{V_T}\right)^3\right]$

(b) Do enunciado: $v(t) = 0,01 \cdot [\cos(2\pi f_m t) + \cos(2\pi f_c t)]$, com $f_m = 1\ kHz$ e $f_c = 100\ kHz$. Para facilitar a representação de $v(t)$, vamos considerar:

$$\alpha = \pi t(f_c + f_m)$$
$$\beta = \pi t(f_c - f_m)$$

Substituindo, temos $v(t) = 0,01 \cdot [\cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)]$. Utilizando a identidade trigonométrica (2) do Apêndice, temos:

$$v(t) = 0,02 \cdot [\cos\alpha \cdot \cos\beta]$$

Com isso, podemos encontrar os termos v^2 e v^3 da expansão. Primeiro, v^2:

$$[v(t)]^2 = 0,02^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta$$

Pela identidade trigonométrica (3) do Apêndice e novamente a identidade (2), temos:

$$\begin{aligned}
[v(t)]^2 &= 0,02^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \\
&= 0,02^2 \cdot \left[\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\right] \cdot \left[\frac{1+\cos(2\beta)}{2}\right] \\
&= \frac{0,02^2}{4} \cdot [1 + \cos(2\beta) + \cos(2\alpha) + \cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)] \\
&= \frac{0,02^2}{4} \cdot \left[1 + \cos(2\beta) + \cos(2\alpha) + \frac{\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta)}{2}\right]
\end{aligned}$$

Substituindo de volta em α e β nos dá:

$$\begin{aligned}
[v(t)^2] =& \frac{0,02^2}{4} \cdot \Big(1 + \cos[2\pi t(f_c - f_m)] + \cos[2\pi t(f_c + f_m)] \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (\cos[2\pi t(f_c + f_m) - 2\pi t(f_c - f_m)] + \cos[2\pi t(f_c + f_m) + 2\pi t(f_c - f_m)])\Big) \\
=& \frac{0,02^2}{4} \cdot \Big(1 + \cos[2\pi t(f_c - f_m)] + \cos[2\pi t(f_c + f_m)] \\
&+ \frac{1}{2} \cdot [\cos(4\pi t f_m) + \cos(4\pi t f_c)]\Big)
\end{aligned}$$

Analogamente para v^3:

$$
\begin{aligned}
[v(t)]^3 &= 0,02^3 \cdot \left[\frac{3\cos\alpha + \cos(3\alpha)}{4}\right] \cdot \left[\frac{3\cos\beta + \cos(3\beta)}{4}\right] \\
&= \frac{0,02^3}{16} \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] + \frac{3}{2} \cdot [\cos(\alpha+3\beta) + \cos(\alpha-3\beta)]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{2} \cdot [\cos(3\alpha+\beta) + \cos(3\alpha-\beta)] + \frac{1}{2} \cdot [\cos(3\alpha+3\beta) + \cos(3\alpha-3\beta)]\right) \\
&= \frac{0,02^3}{16} \cdot \left(\frac{9}{2} \cdot [\cos(2\pi t f_c) + \cos(2\pi t f_m)] + \frac{3}{2} \cdot (\cos[2\pi t(2f_c - f_m)] + \cos[2\pi t(2f_m - f_c)]\right. \\
&\qquad + \frac{3}{2} \cdot (\cos[2\pi t(2f_c + f_m)] + \cos[2\pi t(2f_m + f_c)]) \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2} \cdot [\cos(6\pi f_c t) + \cos(6\pi f_m t)]\right)
\end{aligned}
$$

Com isso, podemos inferir que as componentes de frequência no sinal de saída serão:

$$
\begin{aligned}
f_m &= 1\ kHz \\
2 \cdot f_m &= 2\ kHz \\
3 \cdot f_m &= 3\ kHz \\
f_c - 2 \cdot f_m &= 98\ kHz \\
f_c - f_m &= 99\ kHz \\
f_c &= 100\ kHz \\
f_m + f_c &= 101\ kHz \\
f_c + 2 \cdot f_m &= 102\ kHz \\
2 \cdot f_c - f_m &= 199\ kHz \\
2 \cdot f_c &= 200\ kHz \\
2 \cdot f_c + f_m &= 201\ kHz \\
3 \cdot f_c &= 300\ kHz
\end{aligned}
$$

(c) O filtro passa-faixa terá o eixo de simetria em $f_c = 100\ kHz$, com raio de $2f_m$.

(d)

3.3

Do enunciado: $i_0 = a_1 \cdot v_i + a_3 \cdot v_i^3$

(a) Consideremos o modelo em que o sinal de entrada é uma onda senoidal cuja frequência equivale a metade da frequência de portadora:

$$
\begin{aligned}
v_i &= A_c \cdot \cos\left[2\pi t \left(\frac{1}{2} \cdot f_c\right)\right] + m(t) \\
v_i &= A_c \cdot \cos(\pi t \cdot f_c) + m(t)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo v_i em i_0 e desenvolvendo:

$$
\begin{aligned}
i_0 &= a_1 \cdot v_i + a_3 \cdot v_i^3 \\
&= a_1[A_c \cdot \cos(\pi t \cdot f_c) + m(t)] + a_3[A_c \cdot \cos(\pi t \cdot f_c) + m(t)]^3 \\
&= a_1[A_c \cdot \cos(\pi t \cdot f_c) + m(t)] \\
&+ a_3 \cdot \left(\frac{1}{4} A_c^3 \cdot [\cos(3\pi t f_c) + 3\cos(\pi f_c t)] \right. \\
&+ \left. \frac{3}{2} A_c^2 \cdot [1 + \cos(2\pi t f_c)] \cdot m(t) + 3A_c \cdot \cos(\pi t f_c) \cdot m^2(t) + m^3(t) \right)
\end{aligned}
$$

Precisamos de um filtro passa-faixa com frequência centrada em f_c e largura de banda L tal que $f_c - L > \frac{f_c}{2} + 2L$. Então encontramos que $f_c > 6L$.

(b)

3.4

(a) Do enunciado, temos v_1 e v_2. Podemos substituir v_1 em v_2:

$$
\begin{aligned}
v_2(t) &= a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_1^2(t) \\
v_1(t) &= A_c \cdot \cos(2\pi t f_c) + m(t) \\
v_2(t) &= a_1 \cdot [A_c \cdot \cos(2\pi t f_c) + m(t)] + a_2 \cdot [A_c \cdot \cos(2\pi t f_c) + m(t)]^2 \\
v_2(t) &= a_1 \cdot A_c \left[1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot 2m(t) \right] \cdot \cos(2\pi t f_c) + a_1 \cdot m(t) \\
&\quad + a_2 \cdot m^2(t) + a_2 \cdot A_c^2 \cdot \cos^2(2\pi t f_c)
\end{aligned}
$$

Podemos notar que a expressão do sinal AM com $k_a = 2a_2/a_1$ está representada pela expressão encontrada acima para v_2. Passando v_2 por um filtro obtemos a seguinte expressão:

$$
v_2(t) = a_1 \cdot A_c \left[1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot 2m(t) \right] \cdot \cos(2\pi t f_c)
$$

3.5

Do enunciado: $s(t) = A_c \cdot [1 + \mu \cos(2\pi t f_m)] \cdot \cos(2\pi t f_c)$

(a) Sabemos que $\mu = 2$ e que $f_c >> f_m$. A saída $v(t)$ produzida pelo detector de envoltória ideal é:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= A_c \cdot |1 + \mu \cos(2\pi t f_m)| \\
&= A_c \cdot |1 + 2\cos(2\pi t f_m)|
\end{aligned}
$$

Sabemos que, além de ser uma função par, $v(t)$ é periódica com período $1/f_m$, o que nos permite desenvolver a série:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi t f_m) \\
a_0 &= 2f_m \int_0^{\frac{1}{2f_m}} v(t)dt = \frac{A_c}{3} + \frac{4A_c}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
a_n &= 2f_m \int_0^{\frac{1}{2f_m}} v(t) \cdot \cos(2n\pi t f_m) dt \\
&= \frac{A_c}{n\pi} \cdot \left[2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \sin(n\pi)\right] + \frac{A_c}{(n+1)\cdot\pi} \cdot \left(2\sin\left[\frac{2\pi}{3}\cdot(n+1)\right] - \sin[(n+1)\cdot\pi]\right) \\
&+ \frac{A_c}{(n-1)\cdot\pi} \cdot \left(2\sin\left[\frac{2\pi}{3}\cdot(n-1)\right] - \sin[(n-1)\cdot\pi]\right)
\end{aligned}
$$

(b) Primeiro vamos encontrar a amplitude da fundamental. Pela expressão para a_n para $n = 1$ temos:

$$a_1 = A_c\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}\right)$$

Agora similarmente para o segundo harmônico, em $n = 2$:

$$a_2 = \frac{A_c\sqrt{3}}{2\pi}$$

Então podemos encontrar a razão:

$$
\begin{aligned}
r = \frac{a_2}{a_1} &= \frac{\left(\frac{A_c\sqrt{3}}{2\pi}\right)}{\left[A_c\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}\right)\right]} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi + 2\sqrt{3}} = 0,45265 \\
&\approx 0,453
\end{aligned}
$$

Problemas computacionais

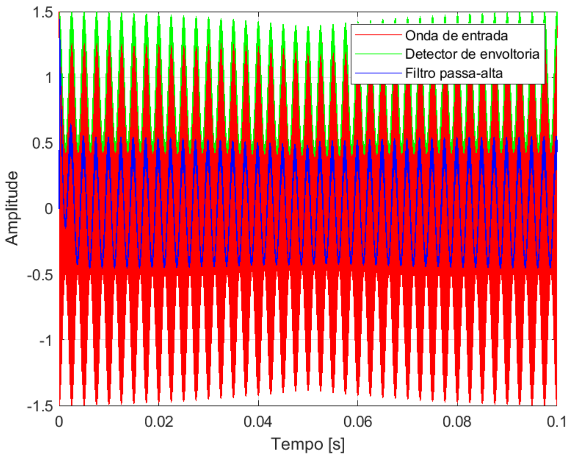

Figura 1: Caption

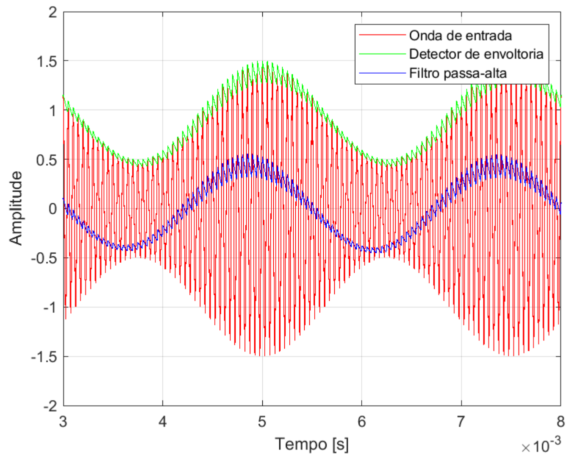

Figura 2: Caption

```
%%
% SEL0360 - Principios de Comunicacao
% Trabalho 1 (P1)
% LUIS FILIPE VASCONCELOS PERES
% 10310641
%
% Este e outros scripts que escrevi podem ser encontrados
% na minha pagina do GitHub:
% https://github.com/lfvperes/
%%
clear all; close all; clc;
fc = 20e3;          % frequencia de portadora:  20kHz
fm = 0.4e3;         % frequencia de modulacao:  400Hz
mi = 0.5;           % indice de modulacao:      50%
[onda_AM, t, V_env, V_filtro] = onda(fc, fm, mi);

opengl software;
f1 = figure;
plot(t, onda_AM, 'r');
hold on;
plot(t, V_env, 'g');
hold on;
plot(t, V_filtro, 'b');
legend('Onda de entrada','Detector de envoltoria', 'Filtro passa-alta');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Amplitude');
grid on;

f2 = figure;
plot(t, onda_AM, 'r');
hold on;
plot(t, V_env, 'g');
hold on;
plot(t, V_filtro, 'b');
legend('Onda de entrada','Detector de envoltoria', 'Filtro passa-alta');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Amplitude');
```

```
xlim([3e-3 8e-3]);
ylim([-2 2]);
grid on;

saveas(f1, 'sem-zoom', 'png');
saveas(f2, 'com-zoom', 'png');

function [onda, t, V_env, V_filtro] = onda(f_c, f_m, m_i)

    % item (a)
    fs = 160000;                    % Taxa de amostragem
    dT = 1/fs;                      % Periodo de amostragem

    t = linspace(0,.1,.1/dT);   % Vetor tempo
    onda = (1 + m_i * cos(2 * pi * t * f_m)).* cos(2 * pi * t * f_c); % ...
        Equacao da onda

    % item (b): Criar o detector de envoltoria
    V_env = zeros(1, length(onda)); % Vetor de zeros
    for k = 2:length(onda)
        if (onda(k) > (V_env(k - 1)))
            V_env(k) = onda(k);
        else
            V_env(k) = V_env(k - 1) - 0.023 * V_env(k - 1);
        end
    end

    % item (c): Criar o filtro passa-alta
    V_filtro = zeros(1, length(onda)); % Vetor de zeros
    RC = .001;
    beta = RC / (RC + dT);
    for k = 2:length(onda)
        V_filtro(k) = beta * V_filtro(k - 1) + beta * (V_env(k) - V_env(k ...
            - 1));
    end
end
```

Apêndice: Identidades trigonométricas

$$
\begin{aligned}
\sin(ax+ay) &= \sin(ax)\cdot\cos(ay) + \sin(ay)\cdot\cos(ax) \\
\sin(ax-ay) &= \sin(ax)\cdot\cos(ay) - \sin(ay)\cdot\cos(ax) \\
\sin(ax+ay) + \sin(ax-ay) &= 2\cdot\sin(ax)\cdot\cos(ay)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) + \\
&\quad (\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) \\
&= 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) \\
&= 2\cdot\cos^2\alpha - 1 \\
\Rightarrow\ 2\cdot\cos^2\alpha &= 1+\cos(2\alpha) \\
\therefore\ \cos^2\alpha &= \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}
\end{aligned} \tag{3}
$$