张正友标定详细原理如下:

1. 相机成像模型

记世界坐标为, 像素坐标为.

齐次坐标分别为, .

建立小孔成像模型:

## (1)

其中, *s*为非零比例因子(对于每张图像通常不同), **A**为相机内参, **R**为3x3的旋转矩阵, **t**为3x1的平移矩阵.

,分别为图像在*u*, *v*轴的比例因子. *cx*, *cy*为偏移量, 为坐标轴倾斜角参数,与CCD有关,通常很小.

1. 标定模型平面与图像单应性关系

准备并拍摄标定板.获取标定板上的人工特征点,本例为棋盘格角点.

设标定板平面上点的世界坐标中**Z**为0.则式(1)可改写为:



此时,, . 用3x3的单应矩阵**H**表示:

 (2)

1. 求解单应性矩阵**H**

**H**[3, 3]=1, 此时:

 (3)

即: 







一共8个自由度, 故需4组线性无关点, 使得**H**有解:



而在实际情况中, 由于噪声与测量误差的存在, 棋盘格角点同行列上点并非线性相关,故对于有m x n组特征点对时, 有如下超定方程组:



记为, 记.

1. 最小二乘法

即求, 损失函数

导数时, 最小二乘解为.

1. QR
2. SVD
3. 内参的约束条件

由(2)(3)式可知:

, 

又由旋转矩阵特性可知:

**r1,r2**正交, 即: (4)

**|r1|=|r2|**,即: (5)

1. 相机标定解
2. 封闭解

 (6)

式(6)中B为对称矩阵, 定义向量

记H中第i列向量为, 则由式(6)得:

 (7)

由式(4), (5), (7)得:

 (8)

由式(8),6个自由度需至少6组方程,即观测k张图片(k>=3), 则可得方程组:

 (9)

由式(9),对V进行svd分解,得, 则向量**b**为最**E**中小特征值在**N**对应的特征向量.

求解出向量**b**后,即可得矩阵**B**.

1. 求解内参矩阵**A**

对式(6)中**B**, 作Cholesky分解,得:

, 则有:



 (10)

即得相机内参矩阵.

1. 求解外参矩阵[**R|t**]

由式(2)(3)可得:,由旋转矩阵向量正交性于单位性,得:

,即求出外参矩阵[**R|t**].

1. 求解畸变参数

设为理想像素坐标,为实际(有畸变的)像素坐标,为理想归一化坐标,为实际归一化坐标,, 若只考虑2阶径向畸变, 不考虑切向畸变,则有相机畸变模型:

 (11)

由,可得:,若忽略项,则将式(11)代入,得:



即:,写为矩阵形式:

 (12)

对于每个点有上述2组方程,对m张图片,每张图片标定板n个特征点,由式(12)可得2\*m\*n的超定方程组,记为:

 (13)

用最小二乘法求解式(13),可得, 即求解出畸变参数.

1. 最大似然估计

上述解为理想情况下, 实际存在噪声, 故使用最大似然估计完善.

设采集m张图片, 每张图片中有n个棋盘格角点, 且噪声符合高斯分布, 为第i张图像中第n个角点, 为点在第i张图上的投影, 为第i张图像的旋转矩阵通过Rodrigues公式转换的旋转向量, 则概率密度函数为:



似然函数:



使似然函数L最大,即使损失函数最小:



将上述解作为非线性优化的初值.