Solutions*

o1 (OpenAI)

April 20, 2025

Questão 1

Solução

Para que o polinômio

$$p(x) = x^{57} + a\,x^{14} + b\,x^7 + 1$$

deixe resto $2x + 1$ ao ser dividido por $x^2 - x + 1$, reduzimos cada potência de x módulo $x^2 - x + 1$. Notamos que

$$x^2 = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = -1, \quad x^4 = -x, \quad x^5 = 1 - x, \quad x^6 = 1,$$

o que mostra que as potências de x se repetem a cada 6 passos. Logo,

$$x^{57} = x^{(6\cdot 9)+3} = x^3 = -1, \quad x^{14} = x^{(6\cdot 2)+2} = x^2 = x - 1, \quad x^7 = x^{(6\cdot 1)+1} = x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv x^{57} + a\,x^{14} + b\,x^7 + 1 \\ &\equiv (-1) + a(x-1) + b\,x + 1 \\ &\equiv (a+b)x + [-1 + 1 - a] \\ &\equiv (a+b)\,x - a. \end{aligned}$$

Comparando com o resto desejado $2x + 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} a + b &= 2, \\ -a &= 1 \quad \Longrightarrow \quad a = -1. \end{aligned}$$

Substituindo $a = -1$ em $a + b = 2$, obtemos $b = 3$.
ANSWER: $a = -1$ e $b = 3$.

*This exam was solved and automatically generated with gpt-resolve: `https://github.com/lgabs/gpt-resolve`

Questão 2

Solução

Seja a elipse centrada em $(r, 0)$ com semi-eixo maior $a = \sqrt{2}$ e excentricidade $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $c = a\,e = 1$ (distância do centro aos focos) e o semi-eixo menor é $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2-1} = 1$. A equação de E é:

$$\frac{(x-r)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{1^2} \;=\; 1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{(x-r)^2}{2} + y^2 \;=\; 1.$$

Para encontrar a inclinação máxima $\frac{y}{x}$ de um ponto (x, y) em E visto a partir da origem, consideramos a reta $y = m\,x$. Substituindo $y = m\,x$ na equação da elipse, obtemos:

$$\frac{(x-r)^2}{2} + m^2x^2 \;=\; 1.$$

A condição de tangência impõe que o discriminante do polinômio resultante em x seja nulo. Chega-se a:

$$r^2 \;=\; \frac{1 + 2\,m^2}{m^2}.$$

Desejando que o valor máximo de $\frac{y}{x}$ seja 1, fixamos $m = 1$. Assim,

$$r^2 \;=\; 1 + 2 \;\Longrightarrow\; r \;=\; \sqrt{3}.$$

ANSWER: $\sqrt{3}$

Questão 3

Solução

Para facilitar, definamos $x = \sin(\alpha)$ e $y = \sin(\beta)$. Do enunciado, temos:

$$\begin{aligned} x - y &= \tfrac{1}{4}, \\ x - 2y + \cos(\beta) &= \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Da primeira equação, $x = y + \frac{1}{4}$. Substituindo na segunda,

$$(y + \tfrac{1}{4}) - 2y + \cos(\beta) = \tfrac{3}{4} \implies -y + \cos(\beta) \quad = \tfrac{1}{2} \implies \cos(\beta) = y + \tfrac{1}{2}.$$

Usando $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$, obtemos

$$y^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \implies 2y^2 + y - \tfrac{3}{4} = 0 \implies 8y^2 + 4y - 3 = 0.$$

A raiz que se ajusta ao intervalo dado é

$$y = \sin(\beta) = -\tfrac{1+\sqrt{7}}{4}, \quad \cos(\beta) = \tfrac{1-\sqrt{7}}{4}.$$

Então

$$x = \sin(\alpha) = y + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos(\alpha) = -\tfrac{3}{4}$$

(negativa pois $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$). Finalmente,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ &= \left(-\tfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\tfrac{1-\sqrt{7}}{4}\right) + \left(-\tfrac{3}{4}\right)\left(-\tfrac{1+\sqrt{7}}{4}\right) \\ &= \tfrac{-\sqrt{7}+7}{16} + \tfrac{3+3\sqrt{7}}{16} = \tfrac{2\sqrt{7}+10}{16} = \tfrac{\sqrt{7}+5}{8}. \end{aligned}$$

ANSWER: $\dfrac{\sqrt{7}+5}{8}$.

Questão 4

Solução

Primeiramente, seja $m(\overline{AB}) = 6$, $m(\overline{AC}) = 10$ e $m(\overline{BC}) = 14$. Tomando BC como o lado oposto a A, definimos o semiperímetro:

$$s = \frac{6 + 10 + 14}{2} = 15.$$

A área K do triângulo é dada pela fórmula de Heron:

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{s\,(s - AB)\,(s - AC)\,(s - BC)} \\ &= \sqrt{15\ \times (15 - 6)\ \times (15 - 10)\ \times (15 - 14)} \\ &= \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1}\ =\ 15\sqrt{3}. \end{aligned}$$

O raio da excírculo oposta a BC (aquela que tangencia o lado BC e as extensões de AB e AC) é

$$r = \frac{K}{s - BC}\ =\ \frac{15\sqrt{3}}{15 - 14}\ =\ 15\sqrt{3}.$$

ANSWER: $15\sqrt{3}$.

Questão 5

Solução

Primeiro, calculamos

$$\begin{aligned}\log_{10}(3^{100}) &= 100 \cdot \log_{10}(3) \\ &= 100 \cdot 0,4771 \\ &= 47,71.\end{aligned}$$

Logo,

$$3^{100} = 10^{47,71} = 10^{47} \cdot 10^{0,71}.$$

Para estimar $10^{0,71}$, observamos que $\log_{10}(5) \approx 0,6990$ e $\log_{10}(6) \approx 0,7781$; assim, $10^{0,71}$ está entre 5 e 6, mais próximo de 5,1. Portanto,

$$3^{100} \approx 5,1 \times 10^{47},$$

e o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) é **5**.

ANSWER: 5

Questão 6

Solução

Seja $P(n)$ a probabilidade de a quarta **cara** ocorrer exatamente no n-ésimo lançamento. Como a moeda é justa, temos:

$$P(n) \;=\; \binom{n-1}{3}\,\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\,,$$

pois nas primeiras $n-1$ jogadas devem ocorrer exatamente 3 caras (escolhidas em $\binom{n-1}{3}$ modos) e a n-ésima jogada deve ser cara $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Para encontrar n que maximiza $P(n)$, analisamos o quociente

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\binom{n}{3}\,\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{\binom{n-1}{3}\,\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-1}{3}}\,\frac{1}{2} = \frac{n}{n-3}\,\frac{1}{2}\,.$$

Esse quociente é maior do que 1 para $3 < n < 6$, igual a 1 para $n = 6$ e menor do que 1 para $n > 6$. Logo, $P(n)$ cresce até $n = 6$, mantém o mesmo valor em $n = 7$ e decai a partir daí. Verificando os valores:

$$P(6) = \frac{\binom{5}{3}}{2^6} = \frac{10}{64} = 0,15625, \qquad P(7) = \frac{\binom{6}{3}}{2^7} = \frac{20}{128} = 0,15625.$$

Conclui-se que os valores de n que **maximizam** a probabilidade são $n = 6$ e $n = 7$.

ANSWER: 6 e 7.

Questão 7

Solução

Para que $p(x) = x^3 + a\,x^2 + b$ possua uma raiz real dupla r, devemos ter

$$p(r) = 0 \quad \text{e} \quad p'(r) = 0.$$

Como $p'(x) = 3x^2 + 2\,a\,x$, a condição $p'(r) = 0$ com $r \neq 0$ implica $3r + 2a = 0$, ou seja,

$$a = -\frac{3}{2}\,r.$$

Daí, de $p(r) = r^3 + a\,r^2 + b = 0$ obtemos

$$r^3 + \left(-\tfrac{3}{2}r\right)r^2 + b = 0 \implies -\tfrac{1}{2}r^3 + b = 0 \implies b = \tfrac{1}{2}\,r^3.$$

Logo, as raízes de $p(x)$ são $\{\, r\,(\text{dupla}), -\frac{r}{2}\,\}$.

Os pontos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ e $(0, b)$, com $x_1 = r$ e $x_2 = -\frac{r}{2}$, devem formar um triângulo retângulo. A distância entre $(r, 0)$ e $\left(-\frac{r}{2}, 0\right)$ é $\frac{3|r|}{2}$. As outras distâncias são

$$\sqrt{r^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\left(-\tfrac{r}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Verifica-se que a soma dos quadrados dessas duas últimas é igual ao quadrado da primeira quando $r^4 = 2$. Assim, podemos escolher $r > 0$ e ter

$$r = \sqrt[4]{2}, \quad a = -\tfrac{3}{2}\,\sqrt[4]{2}, \quad b = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = 2^{-\frac{1}{4}}.$$

ANSWER: $a = -\frac{3}{2}\,\sqrt[4]{2}$ e $b = 2^{-\frac{1}{4}}$.

Questão 8

Solução

Observe que a matriz $A_k = (a_{ij})$ de ordem k, com $a_{ij} = \max\{i, j\}$, pode ser transformada por meio de subtrações de linhas de modo a exibir um padrão para $\det(A_k)$. Para pequenos valores de k:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 1, \\ \det(A_2) &= -2, \\ \det(A_3) &= 3, \\ \det(A_4) &= -4. \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\det(A_k) = (-1)^{k-1}\, k.$$

Assim, a soma pedida é

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = \sum_{k=1}^{2025} \left[(-1)^{k-1} k\right] = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2025.$$

Agrupando em pares $(1-2) + (3-4) + \cdots + (2023 - 2024)$ e deixando 2025 isolado, cada par vale -1 e há 1012 pares, de modo que

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = -1012 + 2025 = 1013.$$

ANSWER: 1013.

Questão 9

Solução

Para que A seja invertível e satisfaça $A^{-1} = A^T$, devemos ter

$$AA^T = I,$$

ou seja, A é **ortogonal** no sentido de ter linhas (e colunas) que formam uma base ortonormal. Porém, como as entradas são **inteiras**, cada linha deve ter norma 1 e ser ortogonal às demais. A única forma de isso ocorrer em $\mathbb{Z}^5$ é cada linha ter exatamente uma entrada igual a ± 1 e as demais iguais a 0, sem sobreposições de posições entre as linhas (pois seriam linearmente dependentes).

Logo, cada linha corresponde a escolher uma das 5 posições para o 1 (ou -1) de modo que não haja repetição de posições entre linhas. Isso define uma **permutação** de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, resultando em 5! possibilidades de organização das linhas, e para cada linha há 2 escolhas de sinal ($+1$ ou -1), resultando em 2^5 escolhas adicionais.

Portanto, o total de matrizes 5×5 invertíveis, com entradas inteiras e satisfazendo $A^{-1} = A^T$, é

$$2^5 \times 5! \; = \; 32 \times 120 \; = \; 3840.$$

ANSWER: 3840.

Questão 10

Solução

Considere o **cubo** de aresta 2 e sua **diagonal** principal dada pelo vetor $\mathbf{d} = (1, 1, 1)$. Na projeção ortogonal sobre o plano perpendicular a $\mathbf{d}$, apenas as três **faces** cujas normais tenham produto escalar **positivo** com $\mathbf{d}$ contribuem para a área projetada.

No cubo, cada face tem área $2^2 = 4$ e normais $\pm(1, 0, 0)$, $\pm(0, 1, 0)$, $\pm(0, 0, 1)$. Das seis faces, apenas aquelas com normais $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ formam **ângulo menor que 90°** com $\mathbf{d}$. Se $\widehat{\mathbf{d}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ é o versor na direção de $\mathbf{d}$, então cada uma das três faces "visíveis" projeta-se com fator

$$\cos(\theta) = \left|\widehat{\mathbf{d}} \cdot (1, 0, 0)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

resultando em área projetada $4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ para cada face. Somando as três contribuições, obtemos:

$$\text{Área da projeção} = 3 \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

ANSWER: $4\sqrt{3}$.