Solutions*

o3 (OpenAI)

April 21, 2025

Questão 1

Solução

Seja
$$p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1 \quad \text{e} \quad q(x) = x^2 - x + 1.$$

Ao dividir p por q obtém-se resto $r(x) = 2x + 1$. Logo, para cada raiz α de q vale $p(\alpha) = r(\alpha)$.

1. Raízes de q. Como $x^2 - x + 1 = 0$ tem raízes

$$\alpha = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta = \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

tem-se
$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \implies \alpha^2 = \alpha - 1, \quad \alpha^3 = -1, \quad \alpha^6 = 1$$

(e análogas para β).

2. Avaliando p nos expoentes reduzidos módulo 6:

$$x^{57} : 57 \equiv 3\ (6) \ \Rightarrow\ x^{57} = (x^3) = -1, \quad x^{14} : 14 \equiv 2\ (6) \ \Rightarrow\ x^{14} = x^2 = x-1, \quad x^7 : 7 \equiv 1\ (6) \ \Rightarrow\ x^7 = x.$$

Assim,

$$p(\alpha) = \alpha^{57} + a\alpha^{14} + b\alpha^7 + 1 = -1 + a(\alpha - 1) + b\alpha + 1 = \alpha(a + b) - a,$$
$$p(\beta) = \beta(a + b) - a.$$

3. Igualando aos valores do resto:

$$\alpha(a + b) - a = 2\alpha + 1,$$
$$\beta(a + b) - a = 2\beta + 1.$$

Subtraindo as equações,

$$(\alpha - \beta)(a + b - 2) = 0.$$

*This exam was solved and automatically generated with gpt-resolve: https://github.com/lgabs/gpt-resolve

Como $\alpha \neq \beta$, obtém-se

$$a + b - 2 = 0 \implies b = 2 - a.$$

Substituindo em $\alpha(a + b) - a = 2\alpha + 1$:

$$\alpha(2) - a = 2\alpha + 1 \implies -a = 1 \implies a = -1.$$

Finalmente,

$$b = 2 - a = 2 - (-1) = 3.$$

ANSWER: $a = -1,\ b = 3$.

Questão 2

Solução

A elipse E tem centro em $(r, 0)$, eixo maior sobre O_x e:

$$a = \sqrt{2}, \qquad e = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies c = e\,a = 1.$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$, segue

$$b^2 = a^2 - c^2 = 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1.$$

Logo, a equação de E é

$$\frac{(x-r)^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Parametrizando:

$$x = r + \sqrt{2}\cos\theta, \qquad y = \sin\theta \qquad (\theta \in [0, 2\pi)).$$

Para os pontos de E definimos

$$f(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{r + \sqrt{2}\cos\theta}.$$

Máximos de f ocorrem onde $f'(\theta) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(\theta) = 0 &\implies \cos\theta\,(r + \sqrt{2}\cos\theta) + \sqrt{2}\sin^2\theta = 0 \\ &\implies r\cos\theta + \sqrt{2} = 0 \implies \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{r}. \end{aligned}$$

(Como $r > 0$, exige-se $r \geq \sqrt{2}$ para $|\cos\theta| \leq 1$.)
Nessa posição,

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{2}{r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - 2}}{r} \ (> 0).$$

Então o valor máximo de y/x é

$$f_{\max} = \frac{\frac{\sqrt{r^2-2}}{r}}{r - \frac{2}{r}} = \frac{\sqrt{r^2-2}}{r} \cdot \frac{r}{r^2-2} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2}}.$$

O enunciado impõe $f_{\max} = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2}} = 1 \implies r^2 - 2 = 1 \implies r^2 = 3 \implies r = \sqrt{3}.$$

ANSWER: $r = \sqrt{3}$

Questão 3

Solução

Sejam
$$s_\alpha = \sin(\alpha), \qquad s_\beta = \sin(\beta), \qquad c_\beta = \cos(\beta).$$

1. Do enunciado
$$s_\alpha - s_\beta = \tfrac{1}{4} \tag{1}$$
$$s_\alpha - 2s_\beta + c_\beta = \tfrac{3}{4} \tag{2}$$

2. Subtraindo (1) de (2):
$$c_\beta - s_\beta = \tfrac{1}{2}. \tag{3}$$

3. Determinando s_β e c_β. Pela (3), $c_\beta = s_\beta + \frac{1}{2}$. Usando $c_\beta^2 + s_\beta^2 = 1$:
$$\begin{aligned}(s_\beta + \tfrac{1}{2})^2 + s_\beta^2 = 1 &\implies 2s_\beta^2 + s_\beta - \tfrac{3}{4} = 0 \\ &\implies s_\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

Como $\beta \in [\pi/2, 3\pi/2]$ implica $\cos(\beta) \le 0$, escolhe-se
$$s_\beta = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}, \qquad c_\beta = \frac{1-\sqrt{7}}{4}\ (<0).$$

4. Determinando s_α e c_α. Da (1):
$$s_\alpha = \tfrac{1}{4} + s_\beta = \frac{-\sqrt{7}}{4}.$$

Logo
$$c_\alpha = -\sqrt{1 - s_\alpha^2} = -\sqrt{1 - \tfrac{7}{16}} = -\frac{3}{4},$$
pois $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2] \Rightarrow \cos(\alpha) \le 0$.

5. Calculando $\sin(\alpha+\beta)$:
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta \\ &= \Big(-\frac{\sqrt{7}}{4}\Big)\Big(\frac{1-\sqrt{7}}{4}\Big) + \Big(-\frac{3}{4}\Big)\Big(\frac{-1-\sqrt{7}}{4}\Big) \\ &= \frac{-\sqrt{7}(1-\sqrt{7}) + 3(1+\sqrt{7})}{16} \\ &= \frac{-\sqrt{7} + 7 + 3 + 3\sqrt{7}}{16} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{7}}{16} = \frac{5+\sqrt{7}}{8}.\end{aligned}$$

ANSWER: $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{5+\sqrt{7}}{8}$.

Questão 4

Solução

Se uma circunferência é tangente ao lado BC e às retas que contêm AB e AC, ela é a excircunferência oposta ao vértice A. O raio dessa excircunferência (r_a) satisfaz

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a},$$

em que $a = m(BC)$, $b = m(AC)$, $c = m(AB)$, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro e Δ é a área do triângulo.

1. Cálculo de s:

$$s = \frac{14+10+6}{2} = 15.$$

2. Cálculo de Δ (fórmula de Heron):

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{15 \cdot (15-14) \cdot (15-10) \cdot (15-6)} \\ &= \sqrt{15 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} \\ &= \sqrt{675} = 15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

3. Raio da excircunferência oposta a A:

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{15\sqrt{3}}{15-14} = 15\sqrt{3}.$$

ANSWER: $15\sqrt{3}$

Questão 5

Solução

Para obter o primeiro algarismo de 3^{100} basta analisar a parte decimal do logaritmo decimal desse número.

$$\begin{aligned}\log_{10}(3^{100}) &= 100 \log_{10} 3 \\ &= 100 \times 0,4771 \\ &= 47,71\end{aligned}$$

1. A parte inteira 47 indica que 3^{100} possui $47 + 1 = 48$ algarismos. 2. A parte decimal $0,71$ satisfaz $10^{0,71} < 6$ e $10^{0,71} > 5$. Para confirmar, compare-se com os logaritmos dos inteiros consecutivos:

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0,3010 = 0,6990 < 0,71$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781 > 0,71$$

Logo

$$10^{0,6990} = 5 < 10^{0,71} < 10^{0,7781} = 6,$$

isto é, o número 3^{100} situa-se entre 5×10^{47} e 6×10^{47}. Portanto, o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) é 5.

ANSWER: 5

Questão 6

Solução

Seja $P(n)$ a probabilidade de a quarta **cara** ocorrer exatamente no n-ésimo lançamento de uma moeda honesta ($n \geq 4$).

Para isso, nos $n-1$ primeiros lançamentos devem ter ocorrido exatamente 3 caras, e o n-ésimo lançamento deve ser cara. Como cada lançamento é independente e $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$, temos

$$P(n) = \binom{n-1}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Queremos maximizar $P(n)$ para $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$. Comparemos termos consecutivos:

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-1}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{n-3} \cdot \frac{1}{2}.$$

1. $P(n)$ cresce enquanto $\dfrac{P(n+1)}{P(n)} > 1$:

$$\frac{n}{n-3} \cdot \frac{1}{2} > 1 \implies n > 2(n-3) \implies n < 6.$$

Logo $P(n)$ é crescente para $4 \leq n < 6$.

2. Para $n = 6$,

$$\frac{P(7)}{P(6)} = \frac{6}{6-3} \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

portanto $P(7) = P(6)$.

3. Para $n \geq 7$,

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{n}{n-3} \cdot \frac{1}{2} < 1,$$

logo $P(n)$ decresce a partir de $n = 7$.

Conclusão: os valores que maximizam a probabilidade são $n = 6$ e $n = 7$ (mesma probabilidade em ambos).

ANSWER: $n = 6$ ou 7.

Questão 7

Solução

1. Estrutura das raízes

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + b$. Suponha que r seja a raiz real dupla e s a terceira raiz. Então

$$p(x) = (x - r)^2(x - s).$$

2. Relações de Viète

Para o polinômio monico x^3+px^2+qx+r vale $\sum$ raízes $= -p$, $\sum$ produtos 2 a 2 $= q$, $\prod$ raízes $= -r$. Comparando com $x^3 + ax^2 + 0x + b$:

$$\begin{aligned} 2r + s &= -a, \\ r^2 + 2rs &= 0, \\ r^2 s &= -b. \end{aligned}$$

Como queremos raízes distintas, $r \neq 0$. Da segunda equação: $r^2 + 2rs = 0 \;\Rightarrow\; r + 2s = 0 \;\Rightarrow\; s = -\dfrac{r}{2}$.

Substituindo em $2r + s = -a$:

$$2r - \frac{r}{2} = -a \;\Rightarrow\; a = -\frac{3r}{2}.$$

E de $r^2 s = -b$:

$$r^2\left(-\frac{r}{2}\right) = -b \;\Rightarrow\; b = \frac{r^3}{2}.$$

3. Condição geométrica

Os vértices do triângulo são $A(r, 0)$, $B\left(-\dfrac{r}{2}, 0\right)$, $C\left(0, \dfrac{r^3}{2}\right)$.

Comprimentos ao quadrado:

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(r + \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{9r^2}{4}, \\ AC^2 &= r^2 + \left(\frac{r^3}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^6}{4}, \\ BC^2 &= \frac{r^2}{4} + \frac{r^6}{4}. \end{aligned}$$

Testando o ângulo reto:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \implies \left(r^2 + \frac{r^6}{4}\right) + \left(\frac{r^2}{4} + \frac{r^6}{4}\right) = \frac{9r^2}{4}.$$

Simplificando:

$$\frac{5r^2}{4}+\frac{r^6}{2}=\frac{9r^2}{4} \implies 2r^6=4r^2 \implies r^6-2r^2=0 \implies r^2\left(r^4-2\right)=0.$$

Como $r \neq 0$: $r^4=2 \;\Rightarrow\; r=\pm 2^{1/4}$.

4. Valores de a e b

Para $r = \ 2^{1/4}$:

$$a=-\frac{3}{2}\,2^{1/4}, \qquad b=\frac{1}{2}\,2^{3/4}.$$

Para $r=-2^{1/4}$:

$$a=\frac{3}{2}\,2^{1/4}, \qquad b=-\frac{1}{2}\,2^{3/4}.$$

5. Conclusão

O par (a,b) pode assumir dois conjuntos de valores simétricos.

ANSWER: $(a,b)=\left(-\frac{3}{2}\,2^{1/4},\ \frac{1}{2}\,2^{3/4}\right)$ ou $(a,b)=\left(\frac{3}{2}\,2^{1/4},\ -\frac{1}{2}\,2^{3/4}\right)$.

Questão 8

Solução

Seja $A_k = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ com $a_{ij} = \max\{i, j\}$.

1. **Determinante de A_k.** Para $r = k, k-1, \dots, 2$, substitua a linha r por $L_r - L_{r-1}$. Essas operações não alteram o determinante e produzem a matriz B_k:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Na última coluna de B_k há apenas o elemento k na primeira linha, os demais são zeros. Expandindo o determinante pela última coluna:

$$\det(A_k) = \det(B_k) = (-1)^{1+k}\, k\, \det(C_{k-1}),$$

onde C_{k-1} é a sub-matriz $(k-1) \times (k-1)$

$$C_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

claramente triangular com diagonal principal igual a 1. Logo $\det(C_{k-1}) = 1$ e

$$\boxed{\det(A_k) = (-1)^{k+1}\, k.}$$

2. **Soma solicitada.**

$$S = \sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = \sum_{k=1}^{2025} (-1)^{k+1} k.$$

Agrupando em pares $(2n-1,\, 2n)$ para $n = 1, \dots, 1012$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{1012} \big[(2n-1) - 2n\big] + 2025 \\ &= \sum_{n=1}^{1012} (-1) + 2025 \\ &= -1012 + 2025 \\ &= 1013. \end{aligned}$$

ANSWER: 1013

Questão 9

Solução

Seja $A \in M_5(\mathbb{Z})$ inversível e satisfazendo $A^{-1} = A^T$. Logo

$$A\,A^T = I_5,$$

isto é, as linhas (e colunas) de A formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^5$.

1. Comprimento das linhas Por $AA^T = I_5$ cada linha $r = (a_1, \dots, a_5)$ satisfaz

$$r \cdot r = \sum_{j=1}^{5} a_j^2 = 1.$$

Como $a_j \in \mathbb{Z}$, a única forma de a soma de quadrados inteiros ser 1 é ter exatamente um termo igual a ± 1 e os demais 0. Portanto cada linha de A contém um único ± 1 e os demais elementos 0.

2. Ortogonalidade das linhas Para linhas distintas r, s vale $r \cdot s = 0$. Se cada linha já possui um único ± 1, ortogonalidade implica que essas posições não podem coincidir. Assim cada coluna também contém exatamente um elemento ± 1 e os demais 0.

3. Estrutura de A Dessa forma A é uma matriz de permutação assinada:

$$A = DP,$$

onde P é uma matriz de permutação (representa um elemento de S_5) e $D = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)$ com $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

4. Contagem • Número de permutações de 5 elementos: $5! = 120$. • Escolhas independentes dos sinais nas 5 linhas: $2^5 = 32$.

$$\#A = 5! \cdot 2^5 = 120 \cdot 32 = 3840.$$

Todas essas matrizes satisfazem $A^{-1} = A^T$ (pois são ortogonais) e são invertíveis (determinante ± 1). Não existem outras matrizes inteiras com tal propriedade, pois qualquer linha ou coluna com dois valores não nulos violaria o comprimento 1 ou a ortogonalidade.

ANSWER: 3840

Questão 10

Solução

Considere o cubo de aresta 2 com vértices (x, y, z), onde $x, y, z \in \{0, 2\}$. Escolhemos o plano $\Pi : x + y + z = 0$, perpendicular à diagonal espacial $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Para projetar ortogonalmente um ponto $P = (x, y, z)$ sobre Π, basta eliminar a componente de P na direção de $\vec{n}$; equivalentemente, basta registrar suas coordenadas em dois vetores ortonormais contidos em Π:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Chamando (a, b) as coordenadas do projetado de P na base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$,

$$a = P \cdot \vec{v}_1 = \frac{x - y}{\sqrt{2}},$$
$$b = P \cdot \vec{v}_2 = \frac{x + y - 2z}{\sqrt{6}}.$$

Aplicando-se essa regra aos oito vértices do cubo obtêm-se seis pontos de mesmo módulo

$$\big(\pm\sqrt{2},\ \pm\frac{2}{\sqrt{6}}\big), \qquad \big(0,\ \pm\frac{4}{\sqrt{6}}\big),$$

isto é, seis vértices de um hexágono regular centrado na origem. O raio circunscrito desse hexágono é

$$R = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{2 + \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Para um hexágono regular de lado $s = R$, a área é

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = 4\sqrt{3}.$$

ANSWER: $4\sqrt{3}$.