Solutions*

o4-mini (OpenAI)

April 20, 2025

Questão 1

Solução

Reduzimos as potências de x em $\mathbb{R}[x]/(x^2 - x + 1)$:

$$x^2 \equiv x - 1, \qquad x^3 \equiv -1, \qquad x^6 \equiv 1.$$

Logo,

$$x^{57} \equiv x^3 \equiv -1, \qquad x^{14} \equiv x^2, \qquad x^7 \equiv x.$$

Assim,

$$p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1 \equiv -1 + ax^2 + bx + 1 = ax^2 + bx \overset{!}{\equiv} 2x + 1.$$

Como $x^2 \equiv x - 1$, tem-se

$$a(x-1) + bx = 2x + 1 \implies (a + b - 2)x - a = 1.$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} a + b - 2 = 0, \\ -a - 1 = 0, \end{cases} \qquad \implies \quad a = -1,\ b = 3.$$

ANSWER: $a = -1,\ b = 3$.

*This exam was solved and automatically generated with gpt-resolve: `https://github.com/lgabs/gpt-resolve`

Questão 2

Solução

Seja $a = \sqrt{2}$ o semieixo maior e $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a excentricidade. Então

$$c = a\,e = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \quad b^2 = a^2(1 - e^2) = 2\big(1 - \tfrac{1}{2}\big) = 1.$$

A elipse, centrada em $(r, 0)$ e de eixos alinhados com O_x e O_y, tem equação

$$\frac{(x-r)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \frac{(x-r)^2}{2} + y^2 = 1.$$

Para que $\frac{y}{x}$ atinja seu valor máximo igual a 1, a reta $y = x$ deve ser tangente à elipse. Substituindo $y = x$ na equação:

$$\frac{(x-r)^2}{2} + x^2 = 1 \implies \frac{x^2 - 2rx + r^2}{2} + x^2 = 1 \implies 3x^2 - 2r\,x + (r^2 - 2) = 0.$$

A condição de tangência é discriminante nulo:

$$\Delta = (-2r)^2 - 4{\cdot}3\,(r^2 - 2) = 4r^2 - 12r^2 + 24 = 0 \implies 8r^2 = 24 \implies r^2 = 3 \implies r = \sqrt{3}.$$

ANSWER: $\sqrt{3}$

Questão 3

Solução

Das equações

$$\begin{aligned} \sin\alpha - \sin\beta &= \tfrac{1}{4}, \\ \sin\alpha - 2\sin\beta + \cos\beta &= \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

defina

$$A = \sin\alpha, \quad B = \sin\beta, \quad C = \cos\beta.$$

Então

$$A - B = \tfrac{1}{4}, \quad A - 2B + C = \tfrac{3}{4} \implies C - B = \tfrac{1}{2}.$$

Logo

$$A = B + \tfrac{1}{4}, \quad C = B + \tfrac{1}{2}.$$

Como $B^2 + C^2 = 1$,

$$B^2 + (B + \tfrac{1}{2})^2 = 1 \implies 2B^2 + B - \tfrac{3}{4} = 0 \implies B = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}.$$

No intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ temos $\cos\beta < 0$, então

$$\sin\beta = B = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4}, \quad \cos\beta = C = B + \tfrac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}.$$

Segue

$$\sin\alpha = A = B + \tfrac{1}{4} = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos\alpha = -\frac{3}{4} \quad (\alpha \text{ em Q3}).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ &= \Big(-\frac{\sqrt{7}}{4}\Big)\Big(\frac{1 - \sqrt{7}}{4}\Big) + \Big(-\frac{3}{4}\Big)\Big(\frac{-1 - \sqrt{7}}{4}\Big) \\ &= \frac{7 - \sqrt{7} + 3 + 3\sqrt{7}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{7}}{16} = \frac{5 + \sqrt{7}}{8}. \end{aligned}$$

ANSWER: $\dfrac{5 + \sqrt{7}}{8}$.

Questão 4

Solução

Seja $a = BC = 14$, $b = CA = 10$ e $c = AB = 6$. O semiperímetro vale

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{14+10+6}{2} = 15\,.$$

A área do triângulo, por fórmula de Heron, é

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15\cdot(15-14)\cdot(15-10)\cdot(15-6)} = \sqrt{15\cdot 1\cdot 5\cdot 9} = 15\sqrt{3}\,.$$

O círculo que tangencia o segmento BC e as retas suporte de AB e AC é o excírculo oposto a A, cujo raio é

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{15\sqrt{3}}{15-14} = 15\sqrt{3}\,.$$

ANSWER: $15\sqrt{3}$.

Questão 5

Solução

$$\begin{aligned}
\log_{10}(3^{100}) &= 100\log_{10}3 = 100\times 0,4771 = 47,71\\
3^{100} &= 10^{47,71} = 10^{47}\cdot 10^{0,71}\\
10^{0,71} &= 10^{0,70}\times 10^{0,01}\approx 5,01\times 1,02\approx 5,13
\end{aligned}$$

Portanto, o **primeiro algarismo** (mais significativo) de 3^{100} é **5**. ANSWER: 5

Questão 6

Solução

A probabilidade de obter a 4ª cara exatamente no n-ésimo lançamento é dada pela distribuição binomial negativa:

$$P(n) = \binom{n-1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-4} = \binom{n-1}{3}2^{-n}, \qquad n \geq 4.$$

Para encontrar o(s) n que maximizam $P(n)$, calculamos

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\binom{n}{3}2^{-(n+1)}}{\binom{n-1}{3}2^{-n}} = \frac{\binom{n}{3}}{\binom{n-1}{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2(n-3)}.$$

Logo,

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} \geq 1 \iff n \leq 6, \quad \frac{P(n+1)}{P(n)} \leq 1 \iff n \geq 6.$$

Isso mostra que $P(n)$ cresce até $n = 6$ e decresce a partir de $n = 6$, com

$$P(6) = \binom{5}{3}2^{-6} = \frac{10}{64}, \quad P(7) = \binom{6}{3}2^{-7} = \frac{20}{128} = \frac{10}{64},$$

logo atinge o valor máximo em $n = 6$ e $n = 7$.

ANSWER: $n = 6$, 7.

Questão 7

Solução

Pressupomos que $p(x)$ tem raiz dupla r e raiz simples s, isto é

$$p(x) = (x-r)^2(x-s) = x^3 - (2r+s)x^2 + (r^2+2rs)x - r^2 s.$$

Como $p(x) = x^3 + ax^2 + b$, comparando coeficientes obtemos

$$\begin{aligned} 2r + s &= -a, \\ r^2 + 2rs &= 0, \\ -r^2 s &= b. \end{aligned}$$

De $r^2 + 2rs = 0$ e $r \neq 0$ segue $s = -\frac{r}{2}$. Então

$$a = -\frac{3r}{2}, \qquad b = \frac{r^3}{2}.$$

Sejam $A = (r, 0)$, $B = (s, 0)$ e $C = (0, b)$. O triângulo é retângulo em C se

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (r, -b) \cdot (s, -b) = rs + b^2 = 0.$$

Substituindo $s = -\frac{r}{2}$ e $b = \frac{r^3}{2}$,

$$-\frac{r^2}{2} + \frac{r^6}{4} = 0 \implies r^4 = 2 \implies r = \pm 2^{1/4}.$$

Logo, os pares (a, b) são

$$\big(a, b\big) = \left(-\tfrac{3}{2}2^{1/4},\, 2^{-1/4}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\tfrac{3}{2}2^{1/4},\, -2^{-1/4}\right).$$

ANSWER: $(a, b) = \big(-\frac{3}{2}\,2^{1/4},\, 2^{-1/4}\big)$ ou $(\frac{3}{2}\,2^{1/4},\, -2^{-1/4})$.

Questão 8

Solução

Observamos que, para cada k, aplicando às linhas de A_k as operações elementares

$$L_i \longmapsto L_i - L_{i-1}, \quad i = k, k-1, \dots, 2,$$

o determinante não se altera e a matriz fica na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expandindo pelo primeiro linha, só o último menor contribui, dando

$$\det(A_k) = (-1)^{1+k}\, k = (-1)^{\,k-1}\, k.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) &= \sum_{k=1}^{2025} (-1)^{\,k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 2025 \\ &= \frac{2025+1}{2} = 1013. \end{aligned}$$

ANSWER: 1013

Questão 9

Solução

Da condição $A^{-1} = A^T$ segue

$$AA^T = I,$$

ou seja, A é ortogonal com entradas inteiras. Logo cada linha de A tem norma 1 e é ortogonal às demais, o que implica que em cada linha e em cada coluna há exatamente um único elemento não nulo, valendo esse elemento $+1$ ou -1. Assim, A é uma matriz de permutação assinada.

São 5! escolhas para a permutação das colunas e, para cada uma das 5 linhas, 2 escolhas de sinal. Portanto,

$$\begin{aligned}\#\{A\} &= 5! \times 2^5 \\ &= 120 \times 32 \\ &= 3840.\end{aligned}$$

ANSWER: 3840

Questão 10

Solução

Seja o cubo de aresta 2 centrado na origem, com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Considere o plano ortogonal à diagonal principal, de vetor normal unitário

$$\mathbf{u} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.$$

A projeção ortogonal de todo o cubo sobre esse plano coincide com o fecho convexo das projeções dos seus vértices, que formam um hexágono regular de vértices $\pm(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}),\ \pm(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}),\ \pm(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

O raio da circunferência circunscrita a esse hexágono é

$$R = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{2 + \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

que, em um hexágono regular, é igual ao comprimento do lado s. Logo

$$s = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \text{área} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 4\sqrt{3}.$$

ANSWER: $4\sqrt{3}$