Problemes de Càlcul amb Vàries Variables. Full 4

Diferenciabilitat 2

1. Calculeu la matriu Jacobiana de les següents funcions:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sinh 2x \cosh 2y e^z$
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x^y \log y, \cos(x^2 - y^2))$
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, h(x) = (e^{\sin x}, \cos(e^x), \tan(\sin x))$

2. Trobeu el pla tangent a la superfície
$$1 - x\sin(\pi z) - y\cos(\pi z) - z^2 = 0$$
en el punt $(0, 0, 1)$.

3. Demostra que una funció de la forma $u(x, y) = f(x)g(y)$ satisfà l'equació diferencial
$$uu_{xy} - u_x u_y = 0.$$

4. Proveu que si $z = f(x, y)$ és l'equació d'un con, aleshores
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$$

5. Sigui $F(x, y) = f(a\,x + g(b\,y^2))$, a i b constants. Trobeu les fórmules corresponents a totes les derivades parcials de F de primer i segon ordre expresades en funció de derivades de f i g. Comproveu que
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}$$

6. Sigui $u = f(x, y)$, on $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$. Trobeu $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ en termes de u_r i u_θ.

7. Determineu si es pot resoldre l'equació $f(x, y) = 0$ per x com a funció de y al voltant de (x_0, y_0), per

   (a) $f(x, y) = \sqrt{\log\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2\right)}$ $\qquad (x_0, y_0) = (-1/2, 3)$
   (b) $f(x, y) = \sin(y - x) + 1$ $\qquad (x_0, y_0) = (\pi/4, -\pi/4)$

8. Determineu si les equacions següents tenen solució única al voltant dels punts indicats:

   (a) $u^2 + uv + v^2 + 3u + 3v - 4 = 0$ $\qquad (u_0, v_0) = (1, 0)$
   (b) $\log(uv) + 2uv + \log(2/e) = 0$ $\qquad (u_0, v_0) = (1/2, 1)$

9. Trobeu les primeres i les segones derivades de les solucions de l'exercici anterior.

10. Demostreu que l'equació $u^2 - v^2 + w + \sin(uvw) = 0$ pot resoldre's per w a prop de $(u, v, w) = (0, 0, 0)$. Trobeu les derivades parcials de la solució.

11. Trobeu els valors màxims i mínims de la funció v que satisfà
$$u^2 - 2uv + v = 3$$

12. Determineu els extrems de les funcions $y(x)$ definides implícitament a través de les equacions:

$$\begin{aligned} (a)\, x^3 + y^3 - 3xy &= 0 \\ (b)\, x^2 + y^2 + kxy &= 0 \end{aligned}$$

13. Considereu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x, y, z) = 4y + 3z - x + 2$$
$$f_2(x, y, z) = 5y + 4z - 2x$$

Proveu que l'equació $(f_1, f_2) = (0, 0)$ determina y i z com a funcions de x, i trobeu y' i z'.

14. Trobeu les equacions de la tangent i de la normal a les corbes següents:

(a) $x^2 - y^2 + xy = 0$
(b) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$
(c) $\cosh(x - y) + \sin y = 0$
(d) $x^2 - y^2 + y + \sin x = 0$

15. La corba $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$ té un punt doble a l'origen. Quines son les seves tangents?

16. La corba $x^3 - y^3 + axy = 0$ té un punt doble a l'origen. Quines son les seves tangents?

17. Estudieu la corba $(x - b)^2(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0$ al voltant de l' origen.

18. Trobeu els Jacobians de cadascuna de les següents transformacions:

$$\begin{cases} u = e^x \sin y \\ v = e^x \cos y \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \tan(x - y) \\ v = \cos(x + y), \end{cases} \quad -\pi/2 < x - y < \pi/2$$

Trobeu les derivades parcials de x i de y respecte de u i v.

19. Per a quines de les següents transformacions succesives pot definir-se x, y com funcions continuament diferenciables de u, v al voltant del punt indicat, (u_0, v_0)?

(a) $\xi = e^x \cosh y, \quad \eta = e^x \sinh y$
$u = \xi^2 + \eta^2, \quad v = 2\xi\eta, \qquad u_0 = 1, v_0 = 0$

(b) $\xi = \cosh x + \sinh y, \quad \eta = \sinh y - \cosh x$
$u = e^{\xi+\eta}, \quad v = e^{\xi-\eta} \qquad u_0 = v_0 = 1$

Trobeu en cada cas el Jacobià $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

20. Considereu la transformació

$$\begin{cases} u = \phi(\xi, \eta) \\ v = \psi(\xi, \eta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = f(x) \\ \eta = g(y) \end{cases}$$

Proveu que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{f'(x)g'(y)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)}$$

21. Es pot resoldre l'equació

$$\begin{aligned} x\cos(v+u) + y\sin(v-u) + z^2 &= 1 \\ \cos(2u) + y &= 1 \end{aligned}$$

per a x i y com a funcions contínuament diferenciables de les variables restants, a prop del punt $u = \pi/4, v = -\pi/4, x = y = z = 1$?

22. Trobeu explícitament la transformació inversa $\mathbf{\Psi}^{-1}$ de la següent transformació:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{cases} u & = x + e^y \\ v & = x - e^y \end{cases}$$

En quins punts (u, v) està definida $\mathbf{\Psi}^{-1}$? Trobeu els jacobians de $\mathbf{\Psi}$ i $\mathbf{\Psi}^{-1}$ i verifiqueu que es compleix el teorema de la funció inversa.

23. En mesurar l'alçada i el radi d'un cilindre hom fa un error d'un 1%. Calcula l'error relatiu en la seva àrea.

24. Doneu un valor aproximat de $\cos((.1) - (.98)^{1/4} + 1)$ i de $0.97^{1.07}$.

25. Desenvolupeu en sèrie de Taylor fins a segon ordre la funció $f(x,y) = \sin(x-y)\mathrm{e}^{-2x^2+x}$ al voltant de l'origen.

26. Demostreu que la llei dels cosinus en trigonometria hiperbòlica,

$$\cosh z = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \cos\theta,$$

es redueix al voltant de l'origen a la llei euclidiana dels cosinus,

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta.$$

27. Trobeu el desenvolupament de Taylor fins a ordre 2 de les funcions següents:

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-y} \qquad\qquad g(x,y) = e^{x+y}$$

28. Utilitzant multiplicadors de Lagrange trobeu la distància mínima entre la recta $y = ax + b$ i la circumferència $x^2 + y^2 = R^2$.

29. Estudieu els punts crítics de les següents funcions:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) f(x,y) = x^4 + y^4 - 2y^2 + 4xy - 2x^2 \\ &(\mathrm{b}) f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y),\ x, y \,\epsilon\, (0, 2\pi) \\ &(\mathrm{c}) f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy \end{aligned}$$

30. Trobeu els extrems de les funcions llistades a continuació sotmeses als lligams que s'indiquen:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) f(x,y,z) = x - y + z; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ &(\mathrm{b}) f(x,y) = x; \qquad x^2 + 2y^2 = 3 \\ &(\mathrm{c}) f(x,y,z) = x + y + z; \qquad x^2 + y^2 = 1,\ 2x + z = 1 \end{aligned}$$

31. Trobeu els punts de la corba $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ que estan a distància màxima i mínima de l'origen.

32. Determineu la distància mínima entre les corbes d'equacions $x+y=4$ i $x^2+4y^2=4$.

33. Calculeu el volum màxim d'un paral·lelepípede de cares paral·leles als eixos coordenats, inscrit dins de l'el·lipsoide d'equació $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

34. Calculeu el valor màxim de la funció $f(x,y)=a^2x^2+b^2y^2$ sobre l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on $a>b$.

35. Trobeu els extrems absoluts de la funció $f(x,y)=x^4+2x^2y-x^3+3y^2$ definida sobre el recinte
$$\{(x,y)\,\epsilon\,\mathbf{R^2}|\,|x|=1,\,|y|=1\}$$

36. Considereu la funció $f(x,y)=(x^2+3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$.
(i) Determineu el caràcter dels seus punts crítics,
(ii) Calculeu els extrems absoluts de la funció en el recinte $[\frac{\pi}{2},\pi]\times[\frac{\pi}{2},\pi]$.

37. Determineu el màxim absolut de la funció $f(x,y,z)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$ sobre la regió definida com
$$K=\{(x,y,z)|\phi(x,y,z)=1,\,x\geq 0,\,y\geq 0\,z\geq 0\}\quad \phi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$