Problemes de Càlcul amb Vàries variables. Full 2

Continuïtat i diferenciabilitat

1. Verifiqueu que les funcions següents són contínues a l'origen:

   (a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (b) $g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

   (c) $h(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (d) $j(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   Feu-ho a partir de la definició, trobant un $\delta(\epsilon)$ adequat.

2. Verifiqueu que les funcions següents

   (a) $f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$

   (b) $f_2(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

   són contínues a l'origen. Feu-ho trobant un $\delta(\epsilon)$ adequat. Suposeu que les dues funcions són les components d'una funció vectorial $F(x,y) = (f_1, f_2)$, i trobeu la $\delta(\epsilon)$ en aquest cas.

3. Estudieu la continuïtat a l'origen de les següents funcions:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & y \neq 0, \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ (b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

   (c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2-y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$ (d) $j(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2y+y^3-x} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

4. Considereu les funcions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definides per

   (a) $$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin(\dfrac{1}{x})\cos(\dfrac{1}{y}) & \text{si } x \neq 0 \text{ o } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ i } y = 0 \end{cases}$$

   (b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Calculeu, si existeixen, els límits reiterats ($\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$ i $\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$ i el límit a l'origen.

5. Estudieu a quin valor tendeixen les funcions següents

   (a) $f(x,y) = \dfrac{3(x-y)}{x+y}$

   (b) $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-x+y}$

   quan (x,y) s'aproximen a l'origen per sobre de qualsevol recta $y = ax$.

6. Trobeu la derivada direccional de $f(x,y,z) = z^2 + 2x^2 - y^2$ en el punt $(1,0,1)$ en la direcció $(4,3,0)$. En quina direcció és màxima? Quin és el valor de la derivada direccional màxima?

7. Calculeu el vector gradient de les següents funcions:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\log(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0. \end{cases}$ (b) $g(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0. \end{cases}$

8. Calcula el diferencial total de les següents funcions:

(a) $f(x,y,z) = x^2y\log z$

(b) $g(u,v) = \sin(\dfrac{u}{\cos v})$

(c) $h(x,y) = f(x^2+y^2)$, on f és una funció diferenciable a tot arreu.

On pots assegurar (sense fer més càlculs) que seràn diferenciables aquestes funcions?

9. Donada la següent funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 & x^2+y^2 \leq 2 \\ e^{\frac{2x}{n}}\cos^2\left[\frac{(x^2+y^2)\pi}{2}\right] & x^2+y^2 \geq 2 \end{cases}$$

Determina els valors de n que asseguren continuïtat en algun punt. Determina aquest o aquests punts. És diferenciable la funció en aquests punts?

10. Donada la següent funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^n \sin(x^2+y^2)^m & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

determineu per a quins valors de m i n la funció és contínua. Trobeu ara els valors de m i n per tal que sigui diferenciable.