Problemes de Càlcul amb Vàries Variables. Full 6

Integrals dobles i triples

1. Trobeu l'àrea de les següents regions:

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2 \leq y \leq x; \\ (b) & x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1; \\ (c) & \text{Un pètal de la corba } r = \sin 3\theta.; \end{array}$$

2. Verifiqueu el teorema de Green sobre la circumferència $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ per al camp $\mathbf{v}(x,y) = (y, 2x)$.

3. Comproveu que el teorema de Green és aparenment violat al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ per al camp vectorial

$$\mathbf{v}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$$

   Expliqueu que realment no hi ha cap contradicció.

4. Verifiqueu el teorema de Green per al camp vectorial $f(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ sobre el contorn tancat que determinen les corbes $y^2 = x$ i $y = x^2$.

5. Calculeu la integral de línia del camp $\mathbf{v} = (x - y, 1/x)$ sobre una el·lipse de semieix major a i semieix menor b. Penseu en un camp adient per a calcular l'àrea de l'el·lipse utilitzant el teorema de Green.

6. Determineu el volum comprès entre els plans $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, $y = 1$ i el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

7. Calculeu mitjançant una integral doble el volum d'un el·lipsoide d'equació $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.

8. Suposeu que U es la regió del pla (x,y) on $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $x^2 + y^2 \leq 5$. Utilitzeu coordenades polars per a avaluar

$$\int\int_U \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

9. Utilitzeu una integral doble per a trobar el volum del tetràedre amb vèrtexs a $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,3,0)$ i $(0,0,2)$.

10. Avalueu les integrals següents:

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^5 dz\, (x + yz)$$

$$\int\int\int_V dx\, dy\, dz \qquad\qquad V = \{(x,y,z)|1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 10\}$$

11. Avalueu $\int\int\int_V dx\, dy\, dz$ si V és el volum finit limitat pels plans $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ i $x + 2y + 3z = 6$.