Examen de Càlcul de vàries variables. 2 de Juliol de 2008

1. Sigui
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y$$
i la regió del pla
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\} \quad on \quad 3 \leqslant a \leqslant 12$$
Trobeu, utilitzant Multiplicadors de Lagrange, els punts extrems de f a l'interior de D i digueu si són màxims o mínims. **(2.5 punts)**

2. Demostreu que l'equació $xy = \ln(\frac{x}{y})$ defineix una funció $y = f(x)$ en un entorn del punt $(\sqrt{e}, 1/\sqrt{e})$. Demostreu, també, que la funció $y = f(x)$ té en el punt $x = \sqrt{e}$ un extrem. Aquest punt és mínim o màxim? **(2.5 punts)**

3. **(2.5 punts)** Siguin les coordenades toroïdals:
$$\begin{aligned} x &= (A + r\sin(\theta))\cos(\phi) \\ y &= (A + r\sin(\theta))\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$
on $0 \leq r \leq B$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ i $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

   - Calculeu el Jacobià de canvi de coordenades.
   - Calculeu la integral següent en coordenades toroïdals:

$$I = \int\int\int_U f(x,y,z)dx\,dy\,dz; \quad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$U : (A - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = r^2$$

4. Donats els punts de l'espai determinats per
$$x^2 + y^2 = (H - z)^2 \quad on \quad 0 \leq z \leq H$$
i el camp vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,0)$, verifiqueu el teorema de la divergència.
(2.5 punts)