Càlcul amb vàries variables Feb. 2008

1. Donada la funció:

$$f(x,y) = \begin{cases} (\sqrt{x+y})^n \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Demostreu per a quins valor de $n\epsilon\mathbb{N}$ es verifica que

   - $f(x,y)$ és contínua a tot $\mathbb{R}^2$
   - $f(x,y)$ és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$

   (2 punts)

2. Determina si la funció $x = f(y,z)$ definida implícitament per l'equació:

$$\pi + x^2 - 2y + z + exp[x + y - z^2 - \pi/2] - sin(z - (x+y) + \pi/2) = 1$$

   té, en el punt $(0, \pi/2, 0)$, un màxim, mínim o punt d'enforcadura.

   (3 punts)

3. Donat el camp vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2z, 0, x)$, calculeu les integrals de superfície

$$\int_S \left(\nabla \times \overrightarrow{F}\right) \cdot d\overrightarrow{S}$$

   per els següents casos:

   - quan la superfície S és $x^2 + z^2 = a\ y, \quad 0 \leq y \leq L, \quad a, L > 0.$
   - quan S és $x^2 + z^2 \leq a\ L, \quad y = L, \quad a, L > 0.$

   Hi ha alguna raó perquè les dues integrals anteriors siguin iguals ?

   (3 punts)

4. Calculeu l'àrea de la regió del pla R tancada entre la corba $y = x^2$ i la corba $y = x(1-x)$, a partir d'una integral doble de la forma $\int\int_R dxdy\ f(x,y)$, per una certa funció $f(x,y)$.

   Fent el canvi de variable $u = x^2 + y, v = x^2 - y$, verifiqueu el resultat anterior a partir de la corresponent integral doble en les noves variables u, v.

   (2 punts)