Problemes de Càlcul amb Vàries Variables. Full 8

Teoremes integrals de Stokes i Gauss

1. Calcula la integral de línia del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z, x - z, y - x)$ sobre el cercle unitat. Repeteix el càlcul per a la semiesfera de radi unitat i finalment per a $\frac{1}{4}$ d'esfera. Comprova en cada cas que es satisfà el teorema de Stokes. Repeteix l'exercici utilitzant ara el camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$.

2. Calculeu la integral del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x)$ en el disc unitari.

3. Verifiqueu que es satisfà el teorema de Stokes bo i avaluant el camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, y)$ sobre la capa triangular superior del volum delimitat pels plans $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ i $x + 2y + 3z = 6$.

4. Donada la corba tancada en el primer quadrant definida per la intersecció dels plans xz, yz, $z = a$, $z = b$ i el con d'equació

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

   verifiqueu el teorema de Stokes pel camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, y)$.

5. Sigui la superfície definida a $\mathbf{R^3}$ limitada pels lligams:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

   $z = c$, $z = 2c$ $(c > 0)$ Verifiqueu el teorema de Stokes per al camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$.

6. Donada una teula cilíndrica definida per

$$x^2 + y^2 = R^2$$

   x negatives i z limitada pels plans $z = 0$, $z = L$, verifiqueu el teorema de Stokes per al camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$.

7. Calculeu el flux del camp $\mathbf{F}(x, y, z) = (ax, ay, z^2)$ a través de l'esfera de radi R. Verifiqueu explícitament el teorema de Gauss.

8. Comproveu que el teorema de Gauss es compleix per al camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ a la regió limitada per

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

   , $z = a$, $z = R$.

9. Donat el volum tancat dins de la superfície

$$ax^2 + ay^2 = z$$

   i del pla $z = a$, verifiqueu explícitament el teorema de Gauss per al camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

10. Verifiqueu el teorema de la divergència pel camp vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, 0)$ sobre el cilindre de base centrada a $(0, L, 0)$, radi R i altura H.

11. Donat el cub definit pels vèrtexs $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ i $(0,0,1)$, verifica que es satisfà el teorema de la divergència per als camps vectorials $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ i $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

12. Donat el camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, 1-y^2, xy^3)$, verifiqueu el teorema de Stokes en la regió compresa per les superfícies $x^2+y^2-3z=0$, $z=\frac{2}{3}$, $x-y=0$. Calculeu l'àrea de la regió en qüestió.

13. Verifiqueu el teorema de Gauβ en la regió $x^2+y^2-z^2 \leq 1$, $z=2$, $z=-4$ per al camp vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x,z,y)$. Calculeu també el volum de la regió i la seva superfície.

14. Verifiqueu el teorema de Stokes per al camp vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yx, zy)$$

a la superfície helicoidal parametritzada per

$$\mathbf{h}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v) \qquad (u,v)\,\epsilon\,[0,1]\times[0,2\pi]$$

Calculeu l'àrea de l'helicoide.

15. Considera les dues funcions

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \\ \psi(x,y,z) &= \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \end{aligned}$$

Verifiqueu el teorema de Gauss per al camp vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\,\phi$ sobre la regió determinada per

$$S = \{(x,y,z)|\psi(x,y,z) = 1, x>0, y>0, z>0\}$$

Calculeu el volum i la superfície de la regió.