Problemes de Càlcul amb Vàries Variables. Full 5

Integrals dobles i de línia

1. Determineu la longitud de les següents corbes:

$$\begin{aligned}(a)\, \boldsymbol{c}(t) &= (a\cos t, a\sin t, bt), 0 < t < 4\pi.\\ (b)\, x(t) &= R(t-\sin t),\ y(t) = R(1-\cos t), 0 < t < 2\pi.\end{aligned}$$

2. Calculeu les integrals de línia de les funcions escalars $f(x,y) = x^2 + y^2$ i $g(x,y) = \sqrt{a^2 - y^2}$ sobre la circumferència centrada a l'origen i de radi a.

3. Mostrar que la corba $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ està definida sobre un con. Trobeu la longitud del camí que surt del vèrtex i dóna una volta al con.

4. Demostra que el camí donat per $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t^2)$ està definit sobre un paraboloide. Troba la seva longitud d'ençà que surt del vèrtex fins que arriba al punt donat per $t = 2\pi$. Representa-ho gràficament.

5. Fes el mateix que en el problema anterior però considerant ara l'arc d'hèlix $\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ que uneix els punts $(1,0,0)$ i $(1,0,2\pi)$. Calculeu la integral de línia del camp $\mathbf{v} = (z,x,y)$ sobre aquesta corba.

6. Calculeu la integral de línia del camp vectorial $\mathbf{F} = (1/x, 1/y, 1/z)$ sobre la circumferència $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, $z = 1$, començant pel punt $(1,2,1)$ i recorrent:
(i) Tota la circumferència.
(ii) Una semicircumferència fins al punt $(3,2,1)$.

7. Calculeu la integral de línia del camp $\mathbf{v} = (\cos(x-y), \cos(x+y), z)$ sobre la corba que intersecta el paraboloide $z = x^2 + y^2$ i el pla $x = y$, des del punt $(-1,-1,2)$ al $(1,1,2)$.

8. Calculeu la integral de línia del camp $\mathbf{v} = (\cosh^2(1/2(y+z)), \sinh^2(1/2(y+z)), x)$ al llarg de la recta que passa $(1,0,0)$ i $(0,1,1)$. Integreu des del punt $(6,-5,-5)$ fins al $(-3,4,4)$.

9. Avalueu les integrals de les funcions següents en la regió indicada:

$$\begin{aligned}(a) f(x,y) &= x(5-y^2);\ 3 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 2\\ (b) f(x,y) &= \sin[\pi(x+y)];\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\\ (c) f(x,y) &= 3(x^2+y^2);\ \text{Regió del pla } (x,y) \text{ limitada per } y=0,\ y=2x,\ x=1.\\ (d) f(x,y) &= x+y;\ \text{Regió del pla } (x,y) \text{ on } y \ge 0,\ 0 \le x \le 2 \text{ i } y \le x^2.\end{aligned}$$

10. Canvieu l'ordre d'integració en les integrals dobles següents:

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy; \qquad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$$

11. Mitjançant una integral doble, avalua l'àrea del paral·lògram definit pels vectors $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ i $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ i comprova que és $(a_1b_2 - b_1a_2)$. Amb què relaciones aquesta quantitat?