Problemes de Càlcul amb Vàries Variables. Full 3

Diferenciabilitat

1. Siguin $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}$ i $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+2x^3}{x^2+y^2}$ amb $(x,y) \neq 0$. Són funcions contínues a $(0,0)$? Què val $f(0,0)$? Són diferenciables?

2. Són diferenciables a l'origen les següents funcions?

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x}\cos y$

   (b) $g(x,y) = \sqrt{|xy|}$

   (c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & (x,y) = \vec{0} \end{cases}$

3. Estudieu la continuïtat i la diferenciabilitat de les següents funcions:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & y \neq 0, \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ (b) $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$

   (c) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (d) $j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1} & x^2+y^2 > 1, \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & x^2+y^2 < 1 \end{cases}$

4. Definim

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq \vec{0}, \\ 0 & (x,y) = \vec{0}. \end{cases}$$

   (a) Proveu que $D_y f(x,0) = x$ per a tot x, i $D_x f(0,y) = -y$ per a tot y.

   (b) Proveu que $D_{xy} f(0,0) \neq D_{yx} f(0,0)$.

   Estudieu la continuïtat i la diferenciabilitat de $f(x,y)$.

5. (a) Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   Proveu que f és diferenciable a $x = 0$ però f' no és contínua en aquest punt.

   (b) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

   Proveu que f és diferenciable a (0,0) encara que ni $D_x f$ ni $D_y f$ són contínues a (0,0).

6. Demostreu que el pla tangent a la superfície

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 = 1$$

en el punt (x_0, y_0, z_0) és

$$a\,x_0\,x + b\,y_0\,y + c\,z_0\,z = 1$$

7. Trobeu les expressions per a les derivades parcials de les següents funcions.

(a) $F(x,y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$ (b) $F(x,y,z) = f(g(x+y), h(y+z))$

(c) $F(x,y,z) = f(x^y, y^z, z^x)$ (d) $F(x,y) = f(x, g(x), h(x,y))$

8. Siguin

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\to \left(\log\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right), e^{x+y+z-2}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\to (u^2, v^2, u^2 - v^2). \end{aligned}$$

Trobeu $Df(1,0,1)$, $Dg(0,1)$ i $D(g \circ f)(1,0,1)$

9. Sigui

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & x, y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

Demostreu que $D_{xy}f(0,0) \neq D_{yx}f(0,0)$.