ECA401 – MODELAGEM E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

AULA 12 - LABORATÓRIO

SISTEMAS DE 1ª ORDEM
IDENTIFICAÇÃO DA DINÂMICA DE UM MOTOR ELÉTRICO DE CORRENTE CONTÍNUA

Prof. Eduardo L. L. Cabral

1. INTRODUÇÃO

O objetivo desta atividade é analisar a dinâmica de um sistema de 1ª ordem composto por um motor elétrico de corrente contínua e obter o seu modelo dinâmico. Deseja-se identificar os parâmetros das funções de transferência entre a tensão de entrada do motor e a velocidade angular e entre a tensão de entrada e a posição angular.

A Seção 2 apresenta o modelo dinâmico do motor de corrente contínua utilizado nesta experiência, a Seção 3 apresenta uma breve introdução teórica sobre resposta temporal de sistemas contínuos de primeira ordem e a Seção 4 apresenta os fundamentos teóricos sobre identificação de sistemas em tempo contínuo. Finalmente a Seção 5 apresenta a parte experimental, ou seja, o que você deve fazer nesta atividade.

2. MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

O sistema utilizado nessa atividade consiste de um motor elétrico C.C. com um redutor de engrenagens, uma carga composta por uma inércia, um amplificador de tensão, um taco-gerador e um potenciômetro. Na Figura 1 é apresentado um esquema do sistema.

O objetivo da modelagem é estabelecer a função de transferência entre a tensão de entrada e a velocidade angular fornecida pelo tacômetro e a função de transferência entre a tensão de entrada e a posição angular fornecida pelo potenciômetro.

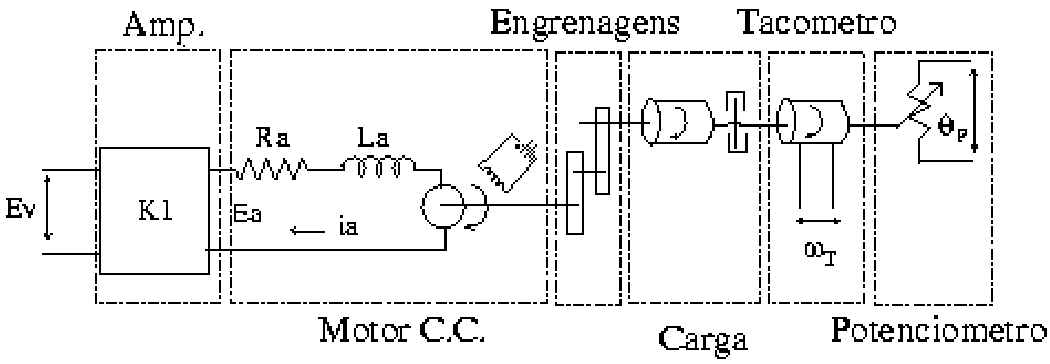

Figura 1 - Diagrama esquemático do sistema a ser modelado.

As equações do amplificador, do tacômetro e do potenciômetro são dadas respectivamente por:

$$e_a = K_{AMP} e_V \tag{1}$$

$$\omega_T = K_{TAC} \omega \tag{2}$$

$$\theta_P = K_P\theta \tag{3}$$

onde e_V é a tensão aplicada pela fonte de alimentação do motor, e_a é a tensão aplicada no circuito elétrico da armadura (motor), ω é velocidade angular do eixo do motor, ω_T é velocidade angular medida pelo tacômetro, θ é a posição o eixo do motor, θ_P é posição angular medida pelo potenciômetro, K_{AMP} é o ganho do amplificador, K_{TAC} é o ganho do tacômetro e K_P é o ganho do potenciômetro.

Para um motor elétrico de corrente de campo constante, o torque desenvolvido pelo motor, τ, é dado por:

$$\tau = K_T i_a \tag{4}$$

onde K_T é a constante de torque do motor e i_a é a corrente de armadura. Se a corrente i_a for revertida, o sinal do torque τ também será revertido, o que resultará na reversão da direção de rotação do motor.

Quando a armadura está em rotação, uma tensão proporcional ao produto do fluxo magnético pela velocidade angular ω é induzido na armadura. Para um fluxo magnético constante, a tensão induzida e_b é diretamente proporcional à velocidade angular:

$$e_b = \frac{1}{K_V}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega}{K_V} \tag{5}$$

onde e_b é a tensão induzida, também chamada de força contra-eletromotriz, K_V é constante de velocidade do motor e θ é o deslocamento angular do eixo de saída do motor.

A velocidade do motor de corrente contínua controlado por armadura é controlada pela tensão de armadura, e_a. A equação diferencial do circuito da armadura é dada por:

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \tag{6}$$

onde L_a é a indutância da armadura e R_a é a resistência da armadura. Substituindo a Equação (5), na Equação (6), tem-se:

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + \frac{\omega}{K_V} = e_a \tag{7}$$

A equação de equilíbrio dinâmico de torque no eixo do motor é dada por:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = \tau = K_T i_a \tag{8a}$$

ou

$$J\frac{d\omega}{dt}+b\omega=K_T i_a \tag{8b}$$

onde J é a inércia combinada do motor, carga e redutor, descrita no eixo do motor, e b é o coeficiente de atrito viscoso equivalente no motor, carga e engrenagens, descrito no eixo do motor.

Substituindo as Equações (1) e (2) nas Equações (7) e (8b), tem-se:

$$L_a\frac{di_a}{dt}+R_a i_a+\frac{\omega_T}{K_V K_{TAC}}=K_{AMP}e_V \tag{9}$$

$$\frac{J}{K_{TAC}}\frac{d\omega_T}{dt}+\frac{b\omega_T}{K_{TAC}}=K_T i_a \tag{10}$$

Aplicando Transformada de Laplace nas Equações (9) e (10), com condições iniciais iguais a zero, tem-se:

$$sL_a I_a(s)+R_a I_a(s)+\frac{\Omega_T(s)}{K_V K_{TAC}}=K_{AMP}E_V(s)\ , \tag{11}$$

$$\frac{sJ\Omega_T(s)}{K_{TAC}}+\frac{b\Omega_T(s)}{K_{TAC}}=K_T I_a(s)\ , \tag{12}$$

onde o símbolo $\mathscr{L}$ representa Transformada de Laplace, assim, $\Omega_T(s)=\mathscr{L}[\omega_T(s)]$, $E_V(s)=\mathscr{L}[e_v(s)]$ e $I_a(s)=\mathscr{L}[\mathrm{i}_a(s)]$.

Isolando $I_a(s)$ da Equação (12), substituindo na Equação (11) e rearranjando para isolar $W_T(s)$ em função de $E_V(s)$, obtém-se a função de transferência entre a tensão de entrada e_V e a velocidade angular medida pelo taco-gerador ω_T:

$$G_\omega(s)=\frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)}=\frac{K_{TAC}K_{AMP}K_T}{(L_a s+R_a)(Js+b)+K_T/K_V}\ , \tag{13}$$

Sabendo que:

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega \tag{14}$$

Aplicando Transformada de Laplace com condições iniciais iguais a zero, tem-se:

$$s\Theta(s)=\Omega(s) \tag{15}$$

onde $\Theta(s)=\mathscr{L}[\theta(s)]$ e $\Omega(s)=\mathscr{L}[\omega(s)]$. Substituindo as Equações (2) e (3) na Equação (15), obtém-se a relação entra a medida da posição angular medida pelo potenciômetro e a velocidade angular medida pelo tacômetro, ou seja:

$$\Theta_P(s)=\frac{K_P\Omega_T(s)}{sK_{TAC}} \tag{16}$$

Substituindo a Equação (16) na Equação (13) obtém-se a função de transferência entre a posição angular fornecida pelo potenciômetro θ_P e a tensão de entrada e_V:

$$G_\theta(s)=\frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)}=\frac{K_T K_{AMP} K_P}{s\left[(L_a s+R_a)(Js+b)+K_T/K_V\right]}\,. \tag{17}$$

Na Figura 2 é apresentado um diagrama de blocos do sistema.

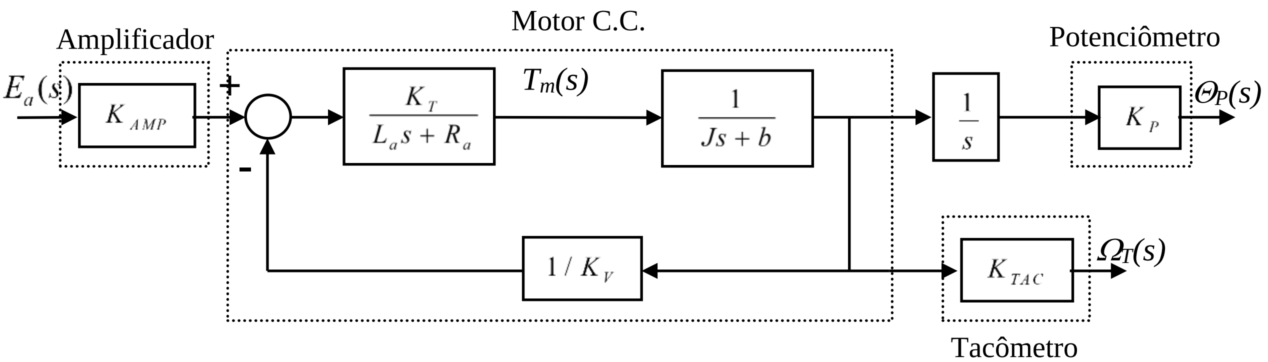

Figura 2 - Diagrama de blocos do sistema.

Usualmente, a indutância de armadura L_a é pequena e pode ser desconsiderada, assim, as funções de transferência $G_\omega(s)$ e $G_\theta(s)$ podem ser representadas da seguinte forma:

$$G_\omega(s)=\frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)}=\frac{K_{TAC}K_{AMP}K_T}{R_a(Js+b)+K_T/K_V}\,, \tag{18}$$

$$G_\theta(s)=\frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)}=\frac{K_P K_{AMP} K_T}{s\left[R_a(Js+b)+K_T/K_V\right]}\,. \tag{19}$$

Se K_T e K_V estiverem descritos no sistema internacional de unidades, então,

$$K_V = \frac{1}{K_T} \tag{20}$$

Usando a Equação (20), as Equações (18) e (19) ficam:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_{TAC} K_{AMP} K_T}{R_a(Js+b) + K_T / K_V}\ , \tag{21}$$

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_P K_{AMP} K_T}{s\left[R_a(Js+b) + K_T / K_V\right]}\ . \tag{22}$$

A Equação (21) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_w}{Ts+1} \tag{23}$$

onde:

$$K_w = \frac{K_{TAC} K_{AMP} K_V}{(K_V^2 R_a b + 1)} \tag{24}$$

$$T = \frac{K_V R_a J}{(K_V^2 R_a b + 1)} \tag{25}$$

Pela Equação (25) que fornece o ganho K_w, se o atrito for igual a zero (b = 0) e os ganhos da taco-gerador e do amplificador de potência forem iguais a um ($K_{TAC} = K_{AMP} = 1$) então $K_w = K_V$. Isso representa que a velocidade do motor é diretamente proporcional à constante de velocidade do motor. De fato isso pode ser observado pelas unidades de K_V que no sistema SI de unidades são [rad/s]/[volts]. Nota-se que o atrito nunca é zero, mas tem um valor muito pequeno e a constante de velocidade, K_V, fornecida pelos fabricantes de motores já considera o atrito nos mancais do motor sem carga.

Para a função de transferência $G_\theta(s)$ tem-se:

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\theta}{s(Ts+1)}\ , \tag{26}$$

onde:

$$K_\theta = \frac{K_P K_{AMP} K_V}{(K_V^2 R_a b + 1)} \tag{27}$$

Dessa forma, em resumo, para o motor CC tem-se as seguintes funções de transferência:

$$\boxed{G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_w}{Ts+1}} \tag{28}$$

$$\boxed{G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\theta}{s(Ts+1)}} \tag{29}$$

3. Resposta Temporal de Sistemas de 1ª Ordem

Somente como recordação, um sistema de primeira ordem sem zero finito pode ser descrito pela seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{g}{(Ts+1)} \tag{30}$$

onde, *Y(s)* é a saída do sistema, *U(s)* é a entrada do sistema, *g* é o ganho do sistema e *T* é a constante de tempo do sistema. O polo deste sistema está localizado em $-1/T$ no plano *s*.

A resposta a uma entrada na forma de um degrau unitário ($U(s) = 1/s$) do sistema da Equação (30), é dada por:

$$Y(s) = \frac{g}{(Ts+1)}\frac{1}{s} \tag{31}$$

A Transformada Inversa de $Y(s)$ fornece $y(t)$, dado por:

$$y(t) = g(1 - e^{-t/T}), \text{ para } t \geq 0 \tag{32}$$

Na Figura 3 é apresentada a resposta de um sistema de 1ª ordem à uma entrada na forma de degrau unitário, onde pode-se observar o efeito do ganho do sistema e da constante de tempo na resposta à uma entrada na forma de degrau unitário.

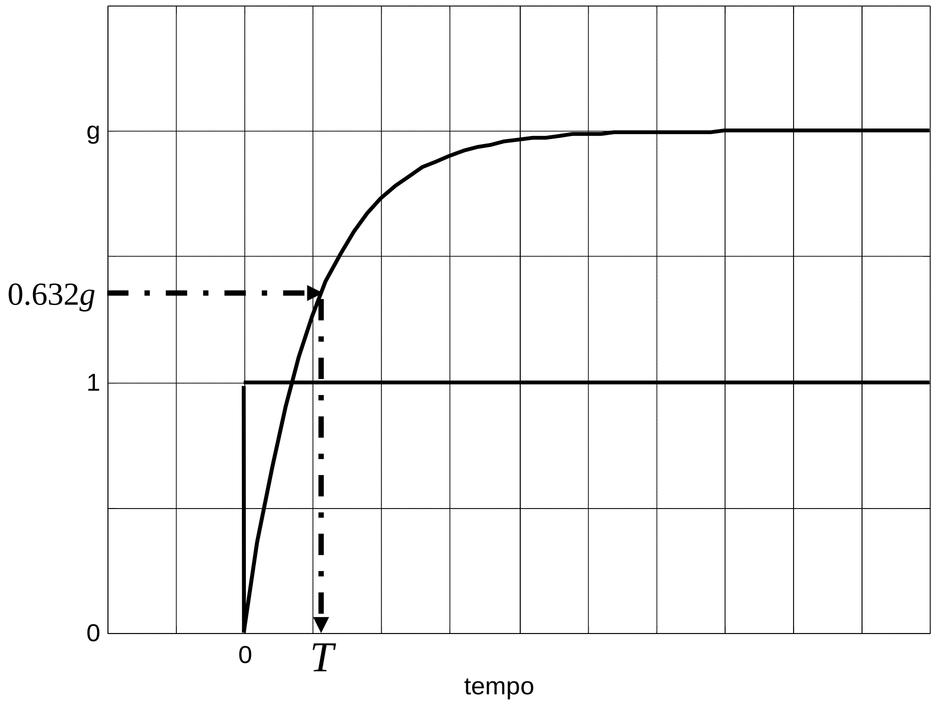

Figura 3 - Resposta temporal de um sistema de 1ª ordem devido à uma entrada na forma de degrau.

3.1. Resposta temporal de sistemas de 1ª ordem em tempo discreto

Atualmente todos os processos físicos são monitorados e controlados por um computador. Os processos controlados/monitorados por computador são chamados processos em tempo discreto. A interface de um processo com um computador é feita por meio de dois dispositivos:

- Conversor analógico-digital (A/D), que converte uma saída analógica do sistema, medida por um sensor, em uma variável digital que pode ser lida pelo computador;
- Conversor digital-analógio (D/A), que converte uma variável digital de entrada do sistema, calculada pelo computador, para uma variável analógica utilizada por um atuador do sistema.

A Figura 4 apresenta um processo monitorado/controlado por um computador e as variáveis de entrada e saída envolvidas. A interface do computador com o sistema físico somente é realizada nos instantes de tempo múltiplos do intervalo ou período de amostragem (T_a). A escala de tempo definida por KT_a é chamada tempo discreto.

Um sistema dinâmico no domínio do tempo contínuo pode ser convertido para tempo discreto. Para facilitar o entendimento, nessa atividade, essa transformação é realizada aproximando as derivadas por uma diferença finita. Observe que a transformação exata é realizada de forma diferente e essa teoria será vista na disciplina Controle 1.

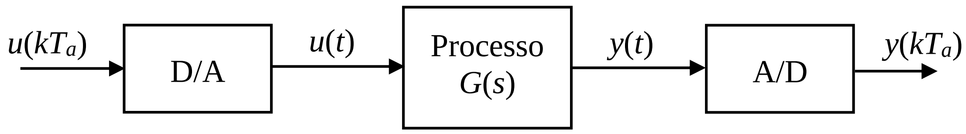

Figura 4 – Processo físico monitorado por computador.

A Equação (30) representa a função de transferência de um sistema de 1ª ordem. A equação diferencial equivalente à essa função de transferência é dada por:

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = gu(t) \tag{33}$$

Usando uma diferença finita para frente para aproximar a derivada, tem-se:

$$\frac{y(kT_a + T_a) - y(kT_a)}{T_a} = \frac{y(kT_a)}{T} + \frac{gu(kT_a)}{T} \tag{34}$$

Rearranjando, resulta:

$$y(kT_a + T_a) = ay(kT_a) + bu(kT_a) \tag{35}$$

onde *a* e *b* são coeficientes constantes dados por:

$$a = 1 + \frac{T_a}{T} \tag{36}$$

$$b = \frac{gT_a}{T} \tag{37}$$

A Equação (35) é denominada de equação de diferenças. Assumindo a condição inicial $y(0) = y_0$ e conhecendo-se $u(kT_a)$ para todo kT_a, pode-se calcular $y(kT_a)$ para todo kT_a, como se segue:

$$\begin{aligned} &y(T_a) = ay_0 + bu(0); \\ &y(2T_a) = ay(T_a) + bu(T_a) = a^2 y_0 + abu(0) + bu(T_a); \\ &y(3T_a) = ay(2T_a) + bu(2T_a) = a^3 y_0 + a^2 bu(0) + bau(T_a) + bu(2T_a); \\ &\vdots \\ &y(kT_a) = a^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} bu(jT_a). \end{aligned} \tag{38}$$

Nesta última equação, o primeiro termo do lado esquerdo representa a resposta do sistema devido à condição inicial diferente de zero (resposta homogênea) e o segundo termo corresponde à resposta forçada devido à entrada do sistema.

4. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

O processo de identificação de sistemas consiste na abordagem experimental da modelagem de sistemas. O processo de identificação de sistemas incluiu as seguintes etapas:

- Planejamento experimental;
- Seleção da estrutura do modelo;
- Estimativa dos parâmetros;
- Validação.

Nesta experiência você irá identificar o modelo do motor CC descrito na Seção 2 de duas formas diferentes:

1) Utilizando a resposta temporal do sistema em tempo contínuo. A partir do conhecimento do sistema obtido na modelagem do mesmo (Seção 2) é possível calcular as constantes da função de transferência do sistema em tempo contínuo.
2) Utilizando a resposta temporal do sistema amostrado. A partir de uma estrutura do modelo obtida pelo conhecimento do mesmo, ajusta-se um modelo a esta resposta e, assim, calcula-se os coeficientes da equação de diferenças finitas.

Cada uma destas abordagens tem as suas vantagens e desvantagens. A abordagem em tempo contínuo exige um conhecimento detalhado do sistema e entradas de forma bem específicas. Contudo, os parâmetros identificados tem um significado físico bem definido, permitindo assim uma fácil avaliação do modelo obtido. A abordagem em tempo discreto exige apenas que se conheça a ordem do modelo e tem a grande vantagem de não necessitar de entradas com formas bem definidas, contudo, o significado físico dos parâmetros do modelo obtido pode ser difícil de ser determinado.

4.1. Identificação dos parâmetros do motor em tempo contínuo

Como visto na Seção 2, a função de transferência entre a tensão de entrada no motor e a velocidade angular do Motor CC pode ser descrita pela seguinte expressão de 1ª ordem:

$$\boxed{G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_w}{Ts+1}} \tag{39}$$

Os valores de K_w e T podem ser obtidos obtidos experimentalmente através da análise da resposta a um degrau de amplitude A, cuja Transformada de Laplace é dada por:

$$E_V(s) = \frac{A}{s}, \tag{40}$$

Assim,

$$\Omega_T(s) = \frac{K_\omega}{Ts+1}.\frac{A}{s}. \tag{41}$$

A resposta no tempo para $\omega_T(t)$ é dada por:

$$\omega_T(t) = AK_w\left(1 - \exp\left[-\frac{t}{T}\right]\right). \tag{42}$$

Calculando o valor de $\omega_T(T)$, $\omega_T(2T)$, $\omega_T(3T)$ e $\omega_T(4T)$ obtém-se:

$$\begin{cases} \omega_T(T)=0{,}632AK_\omega,; \\ \omega_T(2T)=0{,}865AK_\omega,; \\ \omega_T(3T)=0{,}950AK_\omega\text{; e} \\ \omega_T(4T)=0{,}982AK_\omega. \end{cases}$$

Com um degrau de amplitude A na entrada do sistema, o valor final da saída é igual ao produto AK_ω. A constante de tempo T pode ser determinada através da relação $\omega_T(T)=0{,}632AK_\omega$, ou pode-se também determinar o valor de T através do valor de $\omega_T(t)$ calculado para múltiplos de T, como por exemplo: $\omega_T(4T)=0{,}982AK_\omega$. A Figura 4 ilustra como obter os parâmetros do motor CC.

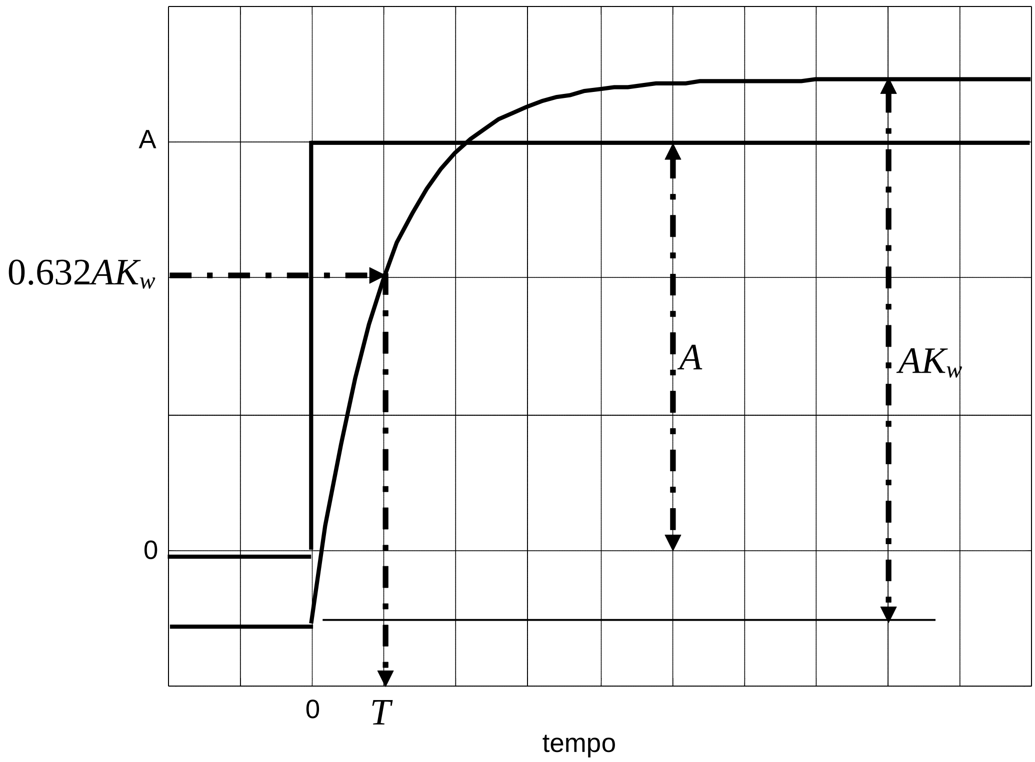

Figura 4 - Obtenção dos parâmetros da função de transferência de 1ª ordem do motor CC.

Como visto na Seção 2, a função de transferência entre a tensão de entrada e a posição angular do motor CC pode ser dada pela seguinte expressão de 2ª ordem:

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\theta}{s(Ts+1)} \tag{43}$$

Os valores de K_θ e T podem ser obtidos experimentalmente através da análise da resposta do sistema a um degrau com amplitude A, ou seja:

$$\Theta_P(s) = \frac{K_\theta}{s(Ts+1)} . \frac{A}{s} \tag{44}$$

A resposta no tempo para $\theta_P(t)$ é dada por:

$$\theta_P(t) = AK_\theta \left[t - T + T\,exp\left(\frac{-t}{T}\right) \right] \tag{45}$$

Para $t \rightarrow +\infty$ (ou seja, em regime estacionário de velocidade constante) a resposta no tempo é dada por:

$$\theta_P(t) = AK_\theta[t - T] \quad (46)$$

Para se determinar a constante de tempo T, é necessário calcular para o regime estacionário qual a distância no eixo de tempo, para um mesmo valor de ordenada, entre a função $\theta_P(t)$ e a reta que passa pela origem do tempo com mesma inclinação de $\theta_P(t)$, ou seja, a reta definida por:

$$y_r(t) = AK_\theta t \quad (47)$$

Note que as funções $y_r(t)$ e $\theta_P(t)$ são paralelas para $t \to \infty$, como mostra a Figura 5. Comparando as Equações (46) e (47) nota-se que para tempo muito grande:

$$\theta_P(t) = y_r(t - T) \quad (48)$$

ou seja, para $t \to \infty$ e para um mesmo valor de ordenada ($\theta_P = y_r$) as duas funções estão separadas por um intervalo de tempo equivalente a T.

A inclinação da Equação (46) pode ser obtida diretamente do gráfico, assim, pode-se obter experimentalmente o produto AK_θ. Dessa forma, tendo o valor experimental da inclinação da curva $\theta_P(t)$, pode-se obter o ganho K_θ. Porém, existe uma forma mais fácil de calcular o ganho K_θ, que consiste primeiramente subtrair a Equação (46) da Equação (47), resultando na seguinte expressão:

$$y_R(t) - \theta(t) = AK_\theta t - AK_\theta[t - T] = AK_\theta T \quad (49)$$

Note que essa expressão é válida somente para tempo muito grande. Da Equação (49), pode-se concluir que a diferença entre $y_r(t)$ e $\theta(t)$ para um dado instante de tempo é igual a AK_θ . Portanto, a constante de tempo T e o produto AK_θ podem ser obtidos diretamente das curvas $y_r(t)$ e $\theta(t)$ conforme mostrado na Figura 5.

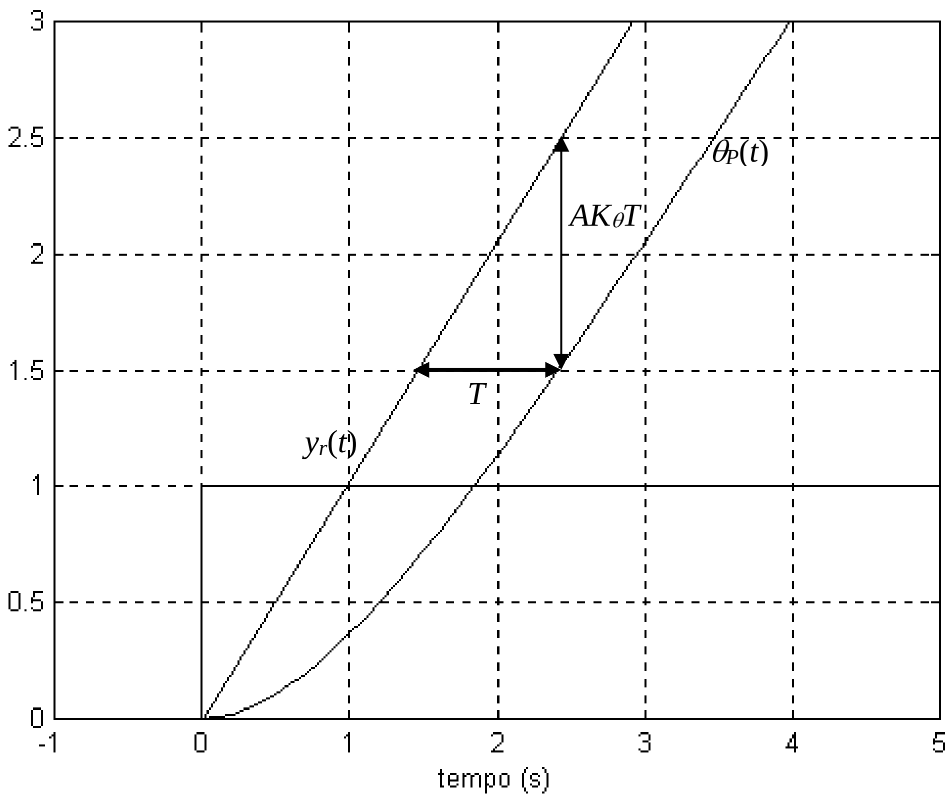

Figura 5 - Obtenção dos parâmetros da função de transferência de 2ª ordem do motor CC.

4.2 Identificação dos parâmetros do motor em tempo discreto

A maioria dos métodos clássicos de identificação de sistemas em tempo contínuo depende basicamente da forma do sinal de entrada no sistema. Em geral é difícil e caro realizar experimentos em processos industriais e mais difícil ainda gerar sinais de entrada de uma forma precisa. Portanto é desejável ter-se métodos de identificação de sistemas que não requerem sinais de entrada especiais. O processo de identificação de sistemas em tempo discreto não exige nenhum sinal de entrada especial, o único requisito é que o sinal de entrada "excite" todos os "modos" de interesse do processo que se deseja identificar.

A estrutura do modelo a ser identificado deve ser obtida através de conhecimento prévio do sistema. Para o caso do motor elétrico, o modelo em tempo discreto é dado pela Equação (35). O método mais simples que pode ser utilizado para o cálculo dos coeficientes do modelo é o Método dos Mínimos Quadrados.

A equação (35) consiste de uma equação de recorrência para um sistema de 1ª ordem, que pode ser utilizada para calcular (estimar) a nova saída do sistema conhecendo-se uma saída passada e a entrada presente, ou seja:

$$\bar{y}(kT_a + T_a) = ay(kT_a) + bu(kT_a) \tag{50}$$

onde $\bar{y}(kT_a)$ é uma estimativa da saída presente calculada pelo modelo do sistema.

Aplicando a Equação (50), iniciando no instante T_a e avançando no tempo até o tempo NT_a, obtém-se $(N – 1)$ equações da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(T_a) &= ay(0) + bu(0) \\ y(2T_a) &= ay(T_a) + bu(T_a) \\ y(3T_a) &= ay(2T_a) + bu(2T_a) \\ \\ y(NT_a) &= ay((N-1)T_a) + bu((N-1)T_a) \end{aligned} \tag{51}$$

Nestas equações todas as saídas e as entradas do sistema são conhecidas e os coeficientes do modelo, ou seja, a e b são desconhecidos. Portanto, estas equações formam um sistema de N–1 equações e 2 incógnitas, que pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados. Se a dinâmica do sistema apresentasse um atraso na entrada, este atraso seria facilmente introduzido pela utilização de entradas em outros instantes de tempo.

Define-se os seguintes vetores e matrizes:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{2x1} \tag{52}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y(T_a) \\ y(2T_a) \\ y(3T_a) \\ \vdots \\ y(NT_a) \end{bmatrix}_{(N-1)x1} \tag{53}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(T_a) & u(T_a) \\ y(2T_a) & u(2T_a) \\ \vdots & \vdots \\ y((N-1)T_a) & u((N-1)T_a) \end{bmatrix}_{(N-1)x2} \tag{54}$$

onde $\vec{y}$ é o vetor com as saídas presentes, $\vec{p}$ é o vetor de parâmetros do modelo e $\underline{A}$ é uma matriz que contém as saídas passadas e as entradas do sistema. Com estas definições, a Equação (51) pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$\vec{y} = \underline{A}\vec{p} \tag{55}$$

Os parâmetros do sistema podem ser calculados invertendo-se a matriz $\underline{A}$ e multiplicando o resultado pelo vetor $\vec{y}$. Contudo, observa-se que a matriz $\underline{A}$ em geral não é uma matriz quadrada e, portanto, não tem inversa. Dessa forma, no lugar da inversa da matriz $\underline{A}$ utiliza-se a sua pseudo-inversa, que neste caso é dada pela seguinte expressão:

$$\underline{A}^{\#} = (\underline{A}^t \underline{A})^{-1} \underline{A}^t \,. \tag{56}$$

Nota-se que a dimensão da matriz $\underline{A}$ é (N –1)x2 e a dimensão da sua pseudo-inversa é 2x(N–1). A pseudo-inversa da matriz dada pela equação (54) sempre existirá se as suas colunas forem linearmente independentes, que é o caso da matriz $\underline{A}$ para modelos de qualquer ordem.

Assim, os parâmetros do modelo (vetor $\vec{p}$) pode ser calculado, da seguinte forma:

$$\vec{p} = \underline{A}^{\#} \vec{y} = (\underline{A}^t \underline{A})^{-1} \underline{A} \vec{y} \,. \tag{57}$$

Observa-se que ao calcular os parâmetros do modelo segundo a equação anterior, está-se minimizando o quadrado do erro entre as saídas do sistema estimadas pelo modelo, segundo a equação (50), e as saídas reais do sistema obtidas no processo de aquisição de dados, ou seja, minimiza-se a função custo $J(\vec{p})$, dada por:

$$J(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left[y(kT_a) - \bar{y}(kT_a) \right]^2 \,. \tag{58}$$

Finalmente observa-se que existem muitos outros métodos para se identificar modelos de sistemas em tempo discreto, sendo que a maioria destes métodos é mais eficiente do que o método dos mínimos quadrados. Alguns métodos comumente utilizados são os seguintes: Mínimos Quadrados Estendido, Mínimos Quadrados Generalizados e Máxima Probabilidade. Cada método de identificação de sistemas tem a sua aplicação, por exemplo, alguns métodos são adequados para identificação de sistemas não lineares nos parâmetros, como o Método do Filtro de Kalman. O MATLAB possui algumas funções para realizar identificação de sistemas em tempo discreto, tais como, `armax` e `arx`.

5. PARTE EXPERIMENTAL

O objetivo dessa experiência o é levantar os parâmetros K_ω, K_θ e T do modelo do motor CC em tempo contínuo e os parâmetros a e b do modelo em tempo discreto.

5.1 PARTE 1: Visualização do arquivo de dados

Os dados de operação do motor estão no arquivo *data.mat*. Para visualizar os dados você deve gerar os gráficos utilizando o MATLAB. Para isso você deve realizar a leitura dos dados que estão dentro do arquivo utilizar o seguinte comando:

```
load data.mat
```

Esse comando carrega o conteúdo do arquivo *data.mat* numa matriz denominada `data`. Nesse arquivo a primeira coluna é o vetor de tempo em segundos, a segunda coluna é a posição angular do motor em pulsos do encoder e a terceira coluna é a velocidade angular em Hz. Note que cada volta do motor corresponde a 5280 pulsos do encoder.

Para construir os gráficos das variáveis você pode criar um *batch file* com os seguintes comandos:

```
Ta=(data(2,1)-data(1,1))  % período de amostragem em segundos

[lin,col]=size(data);     % guarda no. de linhas e colunas

t=data(:,1);              % vetor de tempo em segundos

teta=data(:,2)*2*pi/5280; % vetor de posição angular em rad

w=data(:,3)*2*pi;         % vetor de velocidade angular em rad/s

V=data(:,4);             % vetor de tensão aplicada no motor em volts

plot(t,data(:,1),t,data(:,2),t,data(:,3),t,data(:,4));grid
```

O resultado destes comandos é a construção de um gráfico com as 4 curvas simultâneas. Obviamente, você deverá realizar ajustes para obter gráficos com informações úteis para a identificação do motor. Por exemplo, você pode selecionar para a construção do gráfico somente uma variável, ou apenas trechos dos dados da matriz *data*, ou simplesmente utilizar o comando *zoom* do MATLAB.

5.2. PARTE 2: Identificação do modelo do motor CC no domínio do tempo contínuo

Nesta parte da experiência, o objetivo é levantar os parâmetros K_ω, K_θ e T, que definem os modelos em tempo contínuo adotados para aproximação do motor CC, ou seja:

$$G_\omega(s) = \frac{\Omega_T(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\omega}{Ts+1}$$

$$G_\theta(s) = \frac{\Theta_P(s)}{E_V(s)} = \frac{K_\theta}{s(Ts+1)}$$

Os sinais são satisfatórios de tal forma que os parâmetros K_ω, K_θ, e T podem ser obtidos a partir dos gráficos da tensão aplicada, da velocidade angular e da posição angular de maneira bastante simples.

Lembre-se que o método para calcular os ganhos das funções de transferência da velocidade e da posição K_ω , K_θ foi msotrado na Seção 4.1 utilizando a hipótese de que o sistema é submetido a um degrau de amplitude *A*.

Após determinar os parâmetros do motor faça simulações para calcular a velocidade angular e a posição angular e compare os resultados do modelo com os dados experimentais. Esta simulação é realizada com a mesma tensão de entrada utilizada para gerar os transitórios no sistema real. Assim, utilizando a tensão de entrada no motor amostrada, que deve estar na quarta coluna da matriz de dados *data*, simule o modelo em para obter a estimativa da velocidade angular. Após isso, faça um gráfico com a velocidade angular calculada pelo modelo e a velocidade angular real amostrada e outro gráfico com a posição angular calculada pelo modelo e a posição angular real amostrada. Como exemplo, para calcular a velocidade angular você pode usar os seguintes comandos do MATLAB:

```
num = [0 Kw];
den = [T -1];
ws = lsim(num,den,V,t);
plot(t, w, t, ws, 'o');grid
xlabel('Tempo segundos)');
ylabel('Velocidade angular (rad/s)');
legend('Dados experimentais','Resultados do modelo');
```

Compare as respostas do modelo (posição e velocidade angular) com os resultados experimentais e analise os resultados obtidos.

5.3. PARTE 3: Identificação do modelo do motor CC no domínio do tempo discreto

Nesta parte da experiência, o objetivo é identificar o modelo do motor em tempo discreto. Somente o modelo da velocidade angular em função da tensão de entrada do motor será identificado em tempo discreto. Para realizar isso você deve seguir os seguintes passos:

1) Equação de diferenças da velocidade angular:

A equação de diferenças que representa o modelo do motor em tempo discreto é dada pela Equação (35-50), repetida abaixo.

$$\omega((k+1)T_a) = a\omega(kT_a) + bu(kT_a).$$

Esta equação de diferenças serve como a estrutura do modelo a ser identificado. A identificação deste modelo consiste no cálculo numérico dos coeficientes *a* e *b*.

2) Calcular os coeficientes da equação de diferenças:

Para calcular os coeficientes da equação de diferenças, você deve utilizar os dados experimentais da tensão de entrada e da velocidade angular do motor. Estes dados devem estar em uma matriz cuja 1ª coluna deve ser a velocidade angular e a 2ª coluna a tensão de entrada.

Com estes dados monte a matriz $\underline{A}$ e o vetor de saídas $\vec{y}$ conforme descritos nas Equações (53) e (54) apresentadas na Seção 4.2. A matriz $\underline{A}$ e o vetor $\vec{y}$ podem ser facilmente montados com os seguintes comandos do MATLAB:

```
A = [data(1:n-1,2), data(1:n-1,4)];
Y = [data(2:n,2)];
```

Nestes comandos, `n` é o número de pontos experimentai, `Y` é o vetor de saídas e `A` é a matriz $\underline{A}$.

Os coeficientes do modelo são calculados segundo a equação (57), que com comandos do MATLAB é implementada da seguinte forma:

```
p=pinv(A)*Y;
```

onde `pinv` é o comando do MATLAB utilizado para calcular a pseudo inversa de uma matriz e `p` é o vetor que contém os coeficientes da equação de diferenças do modelo de acordo com a Equação (52).

O MATLAB possui um comando que faz automaticamente todos os passos que você fez neste item. Este comando se chama `ARMAX,` verifique como usar esse comando com o *help*. Se tiver tempo calcule também os coeficientes do modelo com o comando `ARMAX` e compare os resultados com o que você calculou passo a passo.

3) Simulação do modelo em tempo discreto:

Após a identificação do modelo você deve realizar simulações para verificar o seu desempenho, ou seja, verificar se o modelo é capaz de fornecer resultados satisfatórios.

Esta simulação é realizada com a mesma tensão de entrada utilizada para gerar os transitórios no sistema real. Assim, utilizando a tensão de entrada no motor amostrada, que deve estar na quarta coluna da matriz de dados *data*, simule o modelo em tempo discreto para obter a estimativa da velocidade angular. Após isso, faça um gráfico com a velocidade angular calculada pelo modelo e a velocidade angular real amostrada. Para isso você pode usar os seguintes comandos do MATLAB:

```
num = [0 b];
den = [1 -a];
wd = dlsim(num,den,V);
plot(t, w, t, wd,'o');grid
xlabel('Tempo segundos)');
ylabel('Velocidade angular (rad/s)');
legend('Dados experimentais','Resultados do modelo');
```

Compare a resposta do modelo com os resultados experimentais e analise os resultados obtidos.

4) Comparação dos polos e ganhos dos sistemas identificados em tempo contínuo e discreto:

Como você conhece o polo e o ganho da função de transferência entre a tensão de entrada e a velocidade do sistema em tempo contínuo, você pode utilizar estes dados para verificar o modelo em tempo discreto identificado.

Para isso, calcule o polo (ou a constante de tempo) e o ganho do sistema em tempo discreto. O polo pode ser calculado pelo coeficiente a usando a Equação (36) e o ganho pelo coeficiente b usando a Equação (37).

Compare o polo (constante de tempo) do sistema identificado em tempo discreto com o polo ($-1/T$) que você obteve na parte 2. Analise os resultados.

Compare o ganho do modelo em tempo discreto com o ganho do modelo em tempo contínuo que você obteve na parte 2. Analise os resultados.