

4. Vecteurs gaussiens

Objectifs : Se familiariser avec les vecteurs gaussiens, leurs propriétés et les calculs associés. Les exercices 4.1 à 4.3 sont à faire pendant le TD, le 4.4 est à chercher de votre côté.

Exercice 4.1 (Pour commencer). Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire sur \mathbb{R}^2 ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$f(x, y) = C \exp(-x^2 + xy - y^2/2),$$

où C est une constante de normalisation que l'on ne demande pas de calculer.

1. Montrer que Z est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance. On pourra commencer par chercher $\mu \in \mathbb{R}^2$ et $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symétrique telle que $-x^2 + xy - y^2/2 = \frac{1}{2}(X - \mu)^T M (X - \mu)$ pour $X = (x, y)$.
2. Quelle est la loi de X ? de Y ? de $2X - Y$?
3. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendants.
4. Soit $B = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $B^2 = \Sigma^{-1}$. Quelle est la loi du vecteur BZ ?

Exercice 4.2 (Un contre-exemple). Soit X variable réelle gaussienne standard, et S une variable aléatoire de Rademacher, i.e. telle que $\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(S = -1) = 1/2$. On suppose S et X indépendantes. On définit le vecteur aléatoire $Z = (X, SX)$.

Montrer que les coordonnées de Z sont des gaussiennes $\mathcal{N}(0, 1)$, mais que Z n'est pas un vecteur gaussien. On pourra montrer que la fonction de répartition de SX est encore celle d'une gaussienne standard.

Exercice 4.3 (Indépendance entre moyenne et variance empiriques dans le modèle gaussien). On considère un échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ^2 inconnus.

1. On s'intéresse à la variance empirique de l'échantillon définie par $S_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. En utilisant le théorème de Cochran, déterminer la loi de S_n et montrer que S_n et \bar{X} sont indépendants. On pourra introduire le vecteur e de \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées valent 1.
2. On s'intéresse à la variance empirique débiaisée, définie par $S'_n := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Quelle est la loi de $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S'_n}}$?

Exercice 4.4 (Test des variances dans le modèle gaussien). Nous considérons deux échantillons gaussiens indépendants. Le premier, $X^{(1)}$, est de taille n_1 et i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. Le second, $X^{(2)}$, est de taille n_2 et i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. On note S'_1 (resp. S'_2) la variance empirique débiaisée pour l'échantillon $X^{(1)}$ (resp. $X^{(2)}$). On veut tester

$$\mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

1. Sous l'hypothèse nulle, quelle est la loi de $\frac{S'_1}{S'_2}$?
2. En déduire un test de niveau $\alpha \in]0, 1[$ répondant au problème.
3. Exprimer sa puissance en fonction de σ_1^2, σ_2^2 et une certaine fonction de répartition.