MAP361T : Exercices de révision - 3

Luca Ganassali

Mots clés : TCL, estimation.

Exercice 1 (***Etude de l'EMV pour le paramètre*** p ***de la loi binomiale***).
On fixe , $N \in \mathbb{N}$ et considère le modèle $\mathcal{P} = \{\mathcal{B}(N,p), p \in [0,1]\}$. On fixe $p^* \in [0,1]$, et on dispose d'un échantillon $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(N, p^*)$.

1) Pour tout $p \in [0,1]$, calculer la log-vraisemblance $l_n(\mathbf{x}, p)$. *Astuce : Ce sont des lois discrètes, donc on a juste a calculer le* log *d'un produit de probas.*

2) En déduire l'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{p}_{MV}$ pour le paramètre p^*.

3) Est-il sans biais, convergent, asymptotiquement normal ?

4) Donner un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour le paramètre p^*.

5) On s'intéresse aux estimateurs linéaires de p^*, c'est-à-dire à tous les estimateurs $\hat{p}$ de la forme $\langle \mathbf{x}, u \rangle$, où u est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique. On rappelle qu'on appelle risque quadratique associé à un estaimteur $\hat{p}$ la quantité

$$\mathcal{R}(\hat{p}) := \mathbb{E}_{p^*}\left[(\hat{p}(\mathbf{x}) - p^*)^2\right]$$

Exercice 2 (***Power laws***).
La *power law* de paramètre $\alpha > 1$, notée $\text{Pow}(\alpha)$ dans la suite, est la loi de densité $f_\alpha := C_\alpha x^{-\alpha} \mathbf{1}_{x \geq 1}$, où C_α est une constante.

1) Calculer C_α pour tout $\alpha > 1$. Pour $X \sim \text{Pow}(\alpha)$, X admet-il une espérance ? une variance ? Si oui, les donner.

2) Soient $X \sim \text{Pow}(\alpha)$ et $Y \sim \text{Pow}(\beta)$ indépendantes. Quelle est la loi de $\min(X, Y)$? *Astuce : avec les* min, *on sait maintenant que l'on utilise souvent la...*

3) Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels strictement supérieurs à 3, tels que $\alpha_n \to +\infty$. On considère une suite de v.a. $(X_n)_n$ indépendantes telle que chaque X_n est de loi $\text{Pow}(\alpha_n)$.

(*a*) Montrer que $(X_n)_n$ converge dans L^2 vers une variable à préciser.

(*b*) La suite $(X_n)_n$ converge-t-elle presque sûrement ? Discuter.

4) Si $X \sim \text{Pow}(\alpha)$, quelle est la loi de $\log X$?

Dans la suite de l'exercice, on fixe $\alpha^* > 1$ et on se donne un échantillllon $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n variables i.i.d. de loi $\text{Pow}(\alpha^*)$.

5) On veut estimer le paramètre α^*, qui est supposé inconnu.

(*a*) Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}_{MV}$ est donné par :

$$\hat{\alpha}_{MV} = 1 + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right)^{-1}.$$

Astuce : passer la vraisemblance en log *doit être un réflexe.*

(b) Montrer qu'il est convergent. *Astuce : LFGN.*

(c) Montrer qu'il est asymptotiquement normal, et donner les caractéristiques de la loi limite. *Astuce : méthode Delta.*

(d) L'estimateur $\hat{\alpha}_{MV}$ est-il biaisé ? *Astuce : En fait, on peut reconnaître la loi de certaines choses dans l'estimateur, si l'on cherche bien. Avec quelques calculs, c'est faisable.*

6) On suppose dans la suite que $\alpha^* > 3$.

(a) A l'aide de l'estimateur de la moyenne, donner un autre estimateur $\hat{\alpha}$ de α^*.

(b) Montrer qu'il est convergent.

(c) Montrer qu'il est asymptotiquement normal, et donner les caractéristique de la loi limite.

7) Au vu des résultats précédents, quel estimateur privilégeriez-vous ?