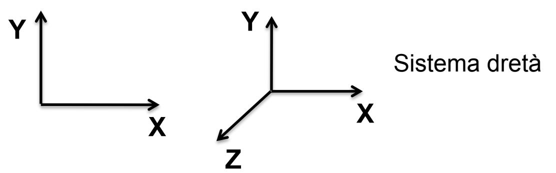
Transformacions geomètriques

MATERIAL DOCENT:
- Capítol 3 del CD
- Capítol 5 de "Computer Graphics using OpenGL"; F.S.Hill, Prentice Hall
- Qualsevol llibre de gràfics –bàsic- té un capítol de repàs.

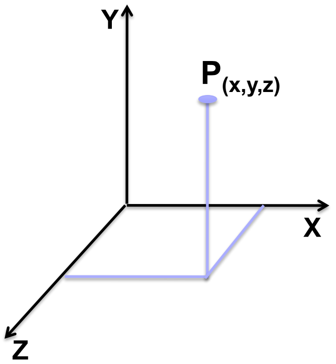
Conceptes a repassar

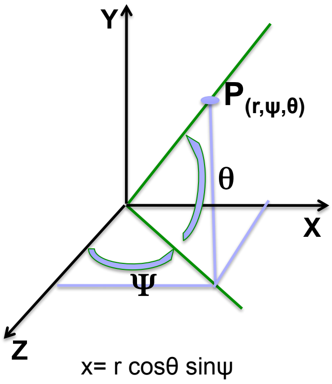
- Sistemes de coordenades
- Representació de punts, vectors, rectes i plans
- Producte escalar i vectorial entre vectors.
- Transformacions geomètriques



8

Coordenades d'un Punt

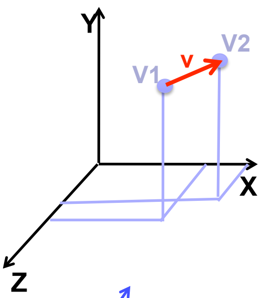


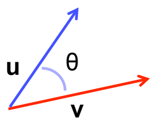


x= r cosθ sinψ
y= r sinθ
z= r cosθ cosΨ
r = sqrt ($x^2+y^2+z^2$)

9

Productes escalar i vectorial





Vectors:
- Indiquen una orientació
- Queden definits per dos punts **v= V2 – V1** =(a,b,c)
- Norma/mòdul d'un vector sqrt ($a^2 + b^2 + c^2$)

Producte escalar de dos vectors: ***v* *i* *u***
- és un escalar
- prod_esc = mod(v)*mod(u)*cos θ = ($u_x v_x + u_y v_x + u_z v_z$)

Producte vectorial de dos vectors: v i ***u***
- és un vector **w**
- **w** és perpendicular a **v** i **u**; regla de la mà dreta
- mod (w) = mod(v)*mod(u)* sin θ
- components => desenvolupament del determinant

10

Rectes i Plans

- Recta: 2 punts, 1 punt i 1 vector ,...

  $\mathbf{P_r} = \mathbf{P_o} + \lambda\, \mathbf{v}$, $\mathbf{P_o}$ és un punt de pas

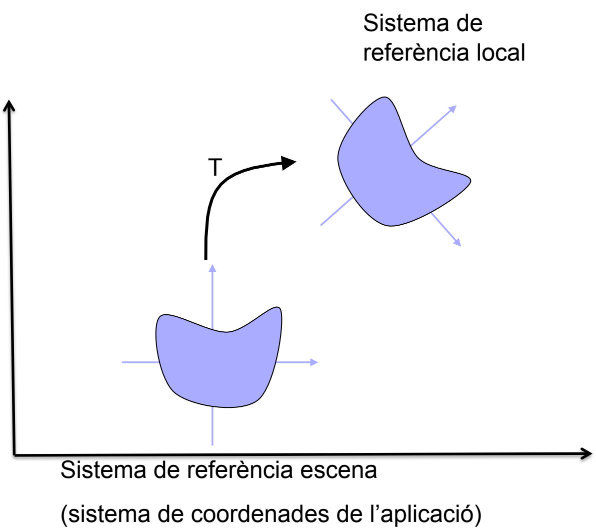
  $\mathbf{v}$ és vector director

- Pla: 3 punts, 1 punt i vector normal,...

  $ax+by+cz+d = 0$ equació implícita

11

Transformacions

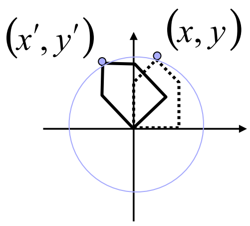


12

Exemples de Transformacions Linials

- Rotacions 2D

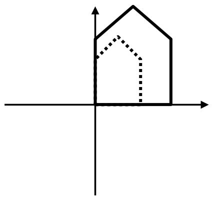
$x' = \cos\theta\ x - \sin\theta\ y$
$y' = \sin\theta\ x + \cos\theta\ y$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Escalat 2D

$x' = s_x\ x$
$y' = s_y\ y$

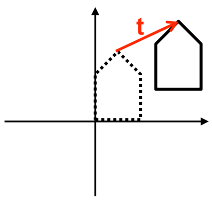


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \end{pmatrix}$$

13

Exemples de Transformacions

- Translació de punts



$x' = x + t_x$
$y' = y + t_y$

No es pot codificar com matriu M_{3x3} tal que **P'** = M **P**

14

Coordenades homogènies - 2D

Pas de coords del pla a coords homogènies:

- Punts (x,y) → (x,y,1)
- Vectors (x,y) → (x,y,0)

Pas de coords homogènies a coords del pla:

- Punts (x,y,w) → (x/w, y/w)
- Vectors (x,y,0) → (x,y)

15

Coordenades homogènies - 3D

Pas de coords de l'espai a coords homogènies:

- Punts (x,y,z) → (x,y,z,1)
- Vectors (x,y,z) → (x,y,z,0)

Pas de coords homogènies a coords de l'espai:

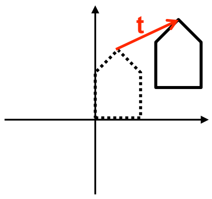
- Punts (x,y,z,w) → (x/w, y/w, z/w)
- Vectors (x,y,z,0) → (x,y,z)

16

Exemples 2D de Transformacions Afins

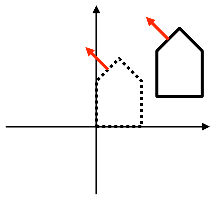
- Translació de punts

$x' = x + t_x$
$y' = y + t_y$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Translacions no afecten als *vectors*

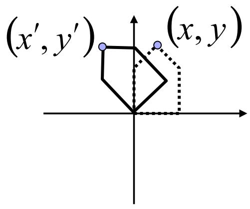


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

17

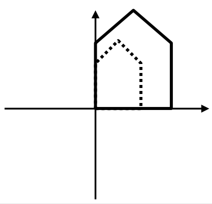
Exemples 2D (en coord, homogènies)

- Rotacions



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Escalat



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x x \\ s_y y \\ 1 \end{pmatrix}$$

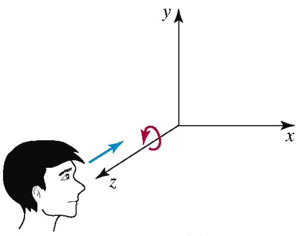
18

Matriu d'escalat 3D

$$S(s_x,s_y,s_z)=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$S(s_x,s_y,s_z)\cdot P=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} xs_x\\ ys_y\\ zs_z\\ 1\end{bmatrix}$$

Matriu de rotació sobre l'eix Z

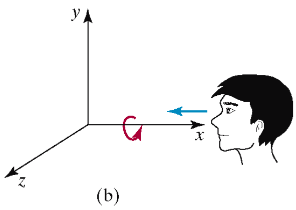


(a)

x' = x cos α – y sin α
y' = y sin α + y cos α
z' = z

$$R_Z(\alpha)\cdot P=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha\\ x\sin\alpha + y\cos\alpha\\ z\\ 1\end{bmatrix}$$

Matriu de rotació sobre l' eix X

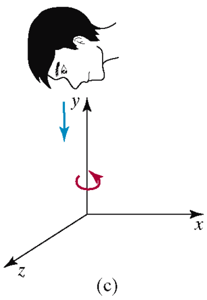


$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\alpha)\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

21

Matriu de rotació sobre l' eix Y



$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha)\cdot P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ y \\ -x\sin\alpha + z\cos\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

22

Matriu de translació

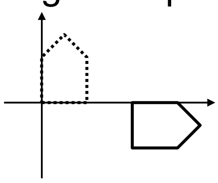
$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(t_x, t_y, t_z) \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

23

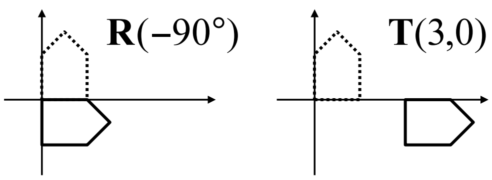
Composició de Transformacions

- Imaginem que volem



No es pot fer amb cap de les matrius anteriors

- Cal composar/efectuar dues transformacions



M = T (3,0) · R(-90º)

P' = T (3,0) · (R(-90º) **P**) = (T (3,0) · R(-90º)) **P** = M · **P**

24

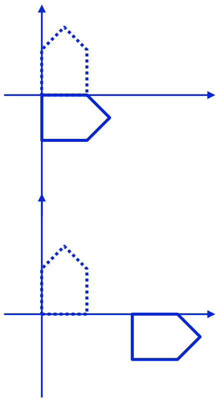
Composició de Transformacions

T (3,0) · **R**(-90º) ≠ **R**(-90º) · **T** (3,0)

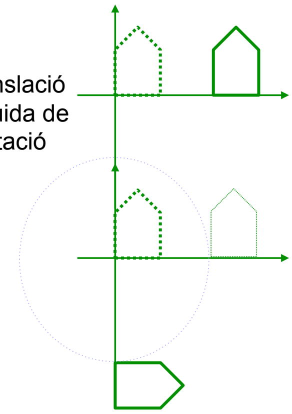
❷ ❶ ❷ ❶

- Multiplicació de matrius no és commutativa

Rotació seguida de translació



Translació seguida de rotació

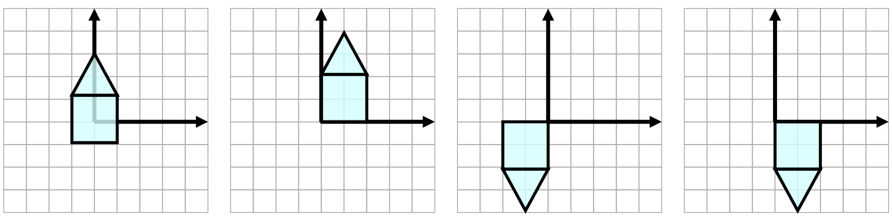


25

Concatenació de Transformacions

❸ ❷ ❶

Exemple: TG= T(2, 0, 0) · R_z(180) · T(1,1,0)



P'= (T(2, 0, 0) · R_z(180) · T(1,1,0)) **P**

26

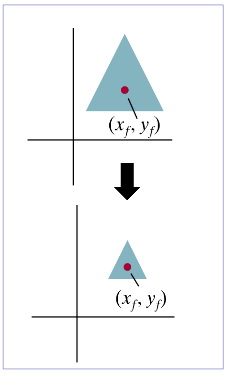
Escalat respecte d'un punt

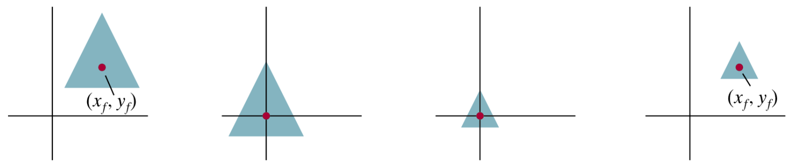
$$T(x_f,y_f)\cdot S(s_x,s_y)\cdot T(-x_f,-y_f)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & x_f\\ 0 & 1 & y_f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -x_f\\ 0 & 1 & -y_f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}s_x & 0 & (1-s_x)\cdot x_f\\ 0 & s_y & (1-s_y)\cdot y_f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

En 3D similar





(a) (b) (c) (d)

27

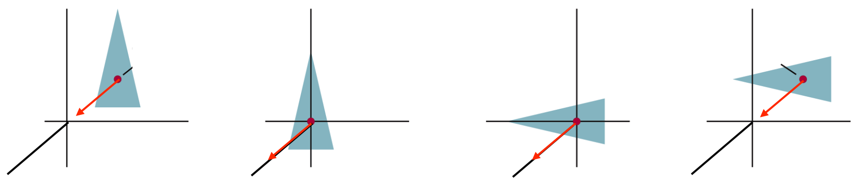
Rotació respecte eix paral·lel a l'eix z que pasa per (x_r,y_r,z_r)

$$T(x_r,y_r,z_r)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_r,-y_r,-z_r)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & x_r\\ 0 & 1 & 0 & y_r\\ 0 & 0 & 1 & z_r\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0 & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -x_r\\ 0 & 1 & 0 & -y_r\\ 0 & 0 & 1 & -z_r\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & x_r(1-\cos\theta)+y_r\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & y_r(1-\cos\theta)-x_r\sin\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Penseu la composició per a fer un gir respecte d'un eix no paral·lel a un eix coordenat



(a) (b) (c) (d)

29

Altres Propietats de les TG

- No conmutativa; SI associativa
- Invertibles: $M \cdot M^{-1} = I$
- $T(t_x,t_y,t_z) \rightarrow T^{-1} = (-t_x,-t_y,-t_z)$
- $G_x(\theta) \rightarrow G_x^{-1} = G_x(-\theta)$; G_x^{-1} és la trasposta $G_x(\theta)$
- $S\ (s_x,s_y,s_z) \rightarrow S^{-1} = (1/s_x,\ 1/s_y,\ 1/s_z)$