OPTIMISATION DÉTERMINISTE
ING2 MATHS-INFO CYTECH

LOUIS GARRIGUE

Soit un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ une application $f : K \to \mathbb{R}$ bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant c$ pour tout $x \in K$. Optimiser f, c'est trouver le ou les minimums globaux de f sur k, c'est-à-dire trouver les solutions du problème

$$\inf_{x \in K} f(x),$$

s'il en existe. Ce problème très général a un ensemble indénombrable d'applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des sciences, en intelligence artificielle, en statistiques, en finance, en physique, etc.

Nous ne nous concentrerons pas seulement sur des problèmes abstraits et théoriques, mais nous donnerons les concepts suffisants pour le travail d'un ingénieur, et nous présenterons les méthodes permettant de résoudre très concrètement ces problèmes. Les TPs associés auront de nombreuses applications numériques. Un bon compris entre théorie et application sera suivi pour une formation ingénieur.

Pour réviser et aller plus loin dans le cours, nous conseillons la lecture du livre

"Introduction à l'Optimisation", Jean-Christophe Culioli, éditions Ellipses [?]

Contents

Date: September 20, 2025.

1. Rappels sur la différentiation

Nous aurons besoin de manipuler les dérivées. En effet, par exemple si $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et si on veut la minimiser sur $\mathbb{R}$, il faut d'abord trouver les points $x \in \mathbb{R}$ tels que $f'(x) = 0$. Sur $\mathbb{R}^d$, la différentiation est plus délicate.

Généralement, on nomme "application" un élément qui à chaque élément d'un espace de départ, associe un élément d'un espace d'arrivée. Quand l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, on parle aussi de "fonction".

Dans toute cette section, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sera ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1.1. **Gradient et différentielle.**

1.1.1. *Gradient.* Rappelons que le gradient d'une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ est l'application notée $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ donnée par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega, \qquad (\nabla f)(x) := \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} f)(x) \\ \vdots \\ (\partial_{x_d} f)(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Par exemple si $d = 2$ et $f(x) = x_1^2 + 3x_2$, alors $(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nous noterons aussi $\nabla f(x) := (\nabla f)(x)$ pour alléger le texte.

1.1.2. *Différentielle.* Prenons une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, donc plus générale que pour la définition du gradient. On rappelle la définition de la différentielle de f, notée $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des applications linéaires allant de $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1 (Différentielle en x)**.** *Prenons $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Supposons qu'il existe un application linéaire $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ et $c > 0$ et $s \in [0, r]$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\| \leqslant s$,*

$$\|f(x+y) - (f(x) + Ly)\| \leqslant c \|y\|^2 .$$

Alors f est différentiable en x et on note $\mathrm{d}_x f = L$.

On dit que f est différentiable sur Ω si elle l'est en tout point de Ω.

La différentielle généralise les développements limités d'ordre 1, c'est-à-dire qu'on peut écrire que pour tout $x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^d$ tel que $x + y \in \Omega$,

$$f(x+y) = f(x) + (\mathrm{d}_x f)\, y + O(\|y\|^2), \tag{2}$$

quand $\|y\| \to 0$. Pour un $x \in \Omega$ donné, $\mathrm{d}_x f$ est une application linéaire allant de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$. Si f et g sont deux applications composables et $\mathcal{C}^1$, $g \circ f$ est aussi $\mathcal{C}^1$ et la règle de la chaîne donne

$$\mathrm{d}_x(f \circ g) y = \big(\mathrm{d}_{g(x)} f\big) \circ (\mathrm{d}_x g)\, y. \tag{3}$$

Exercice 1.2. *L'application exponentielle* $\exp : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *est définie par* $\exp(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. *Calculer sa différentielle en 0.*

Solution. On prend $A = 0$. On a

$$\exp(A+H) = \exp H = 1 + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = \exp A + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}.$$

On conjecture que $(\mathrm{d}_A \exp) H = H$. On pose $LH := H$, qui est une application linéaire. On a

$$\begin{aligned}\|\exp(A+H) - ((\exp A) + LH)\| &= \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \|H\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{(k+2)!} \\ &\leqslant \|H\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \|H\|^2 e^{\|H\|}.\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\exp(A+H) = \exp(A) + LH + O_{\|H\|\to 0}\left(\|H\|^2\right),$$

donc exp est différentiable en 0 et $(\mathrm{d}_0 \exp)H = LH = H$, i.e. $\mathrm{d}_0 \exp = \mathbb{1}_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})}$. □

1.1.3. *Dérivée.* Prenons un intervalle I. Pour les applications $\xi : I \to \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire quand l'espace de départ est plongé dans $\mathbb{R}$, on définit la dérivée de ξ par

$$\xi'(t) := \frac{(\mathrm{d}_t \xi)\, s}{s} \in \mathbb{R}^d$$

pour tout $t \in I$ et tout $s \in \mathbb{R}$. Si $\xi : I \to \mathbb{R}$, la dérivée coïncide avec le gradient.

1.1.4. *Autre définition du gradient.* Reprenons une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Sur tout point $x \in \Omega$, le gradient $\nabla f(x)$ peut être en fait défini à partir de la différentielle par dualité (via le théorème de Riesz disant que les formes linéaires on un vecteur représentant) via

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad (\mathrm{d}_x f)\, y = \langle \nabla f(x), y \rangle, \tag{4}$$

et on peut montrer qu'il est bien égal à celui donné en (1). La différentielle ne dépend pas du produit scalaire alors que le gradient si.

Lorsque ces quelques règles sont bien maitrisées, on ne se trompe plus dans les calculs de dérivation de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$.

1.2. **Hessienne.** Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. On note $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques de taille $d \times d$. On appelle Hessienne de f l'application $\nabla^{\otimes 2} f : \Omega \to \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, où

$$\left(\nabla^{\otimes 2} f\right)(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant d}.$$

Lemma 1.3. *Pour tout $x \in \Omega$, on a bien $\nabla^{\otimes 2} f(x) \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$.*

Proof. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$, par le théorème de Schwartz. □

On ne le prouvera pas mais on a, pour $\|y\| \to 0$, le développement limité d'ordre 2 suivant, pour toute direction $y \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x+y) = f(x) + (\mathrm{d}_x f)\, y + \left\langle y, \left(\nabla^{\otimes 2} f\right) y \right\rangle + O(\|y\|^3). \tag{5}$$

Comme $\nabla^{\otimes 2} f(x)$ est symétrique, on peut la diagonaliser. Il existe une matrice orthogonale $P(x) \in O_d(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $P(x)P(x)^T = 1$) et $D(x) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$\nabla^{\otimes 2} f(x) = P(x) D(x) P(x)^{-1}. \tag{6}$$

1.3. **Exemples de calculs.** Donnons quelques exemples simples.

1.3.1. $t \mapsto f(ta+b)$. Supposons $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $a, b \in \mathbb{R}^d$, et prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$w(t) := f(ta+b)$$

et on veut calculer sa dérivée. On peut poser $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ définie par $m(t) := ta+b$, on a alors $w = f \circ m$, donc la règle de la chaîne (3) donne, pour tout $t, s \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{d}_t w)\, s = \left(\mathrm{d}_{m(t)} f\right) \circ (\mathrm{d}_t m)\, s.$$

Or, on peut calculer que $(\mathrm{d}_t m)s = as$ donc

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\left(\mathrm{d}_{m(t)} f\right) \circ (\mathrm{d}_t m)\, s}{s} = \frac{\left(\mathrm{d}_{m(t)} f\right) \circ as}{s} = \left(\mathrm{d}_{m(t)} f\right) \circ a = \langle \nabla f(m(t)), a \rangle \\ &= \langle \nabla f(ta+b), a \rangle . \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple qu'en passant par (1). De même, on peut calculer

$$w''(t) = \left\langle a, \left(\left(\nabla^{\otimes 2} f\right)(ta+b)\right) a \right\rangle .$$

1.3.2. *Norme.* Calculons la différentielle de l'application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \|x\|^2$.

On a $f(x) = f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^d x_k^2$ donc

$$\left(\partial_{x_j} f\right)(x) = \sum_{k=1}^d \partial_{x_j} x_k^2 = \sum_{k=1}^d 2\delta_{k=j} x_k = 2x_j$$

et

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} f)(x) \\ \vdots \\ (\partial_{x_d} f)(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_d \end{pmatrix} = 2x.$$

On calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x_k^2 = 2\delta_{i=j}$ donc $\nabla^{\otimes 2} f(x) = 2 \times \mathbb{1} = 2$ où $\mathbb{1}$ est la matrice identité.

1.3.3. *Formes quadratiques.*

Proposition 1.1: Gradient et Hessienne d'une forme quadratique

Soit $b \in \mathbb{R}^d$ et $c \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c. \tag{7}$$

On a alors

$$\nabla f(x) = \left(A^T + A\right) x + b, \qquad \text{et} \qquad \nabla^{\otimes 2} f(x) = A^T + A.$$

Sous cette forme, f est appelée une forme quadratique.

Proof. On fait un calcul direct et un calcul via la différentielle. On verra que le calcul utilisant la différentielle est beaucoup plus simple et rapide.

- Calcul direct. On appelle $g(x) := \langle Ax, x\rangle$ et $h(x) := \langle b, x\rangle$. Alors $g(x) = \sum_{i=1}^d (Ax)_i x_i = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} A_{ij} x_j x_i$ donc

$$\begin{aligned}(\partial_{x_k} g)(x) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} A_{ij}\partial_{x_k} x_j x_i = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} A_{ij}\left(2x_k\delta_{k=i=j} + x_i\delta_{k=j,i\neq k} + x_j\delta_{k=i,j\neq k}\right)\\ &= 2A_{kk}x_k + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ i\neq k}} A_{ik}x_i + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant d\\ j\neq k}} A_{kj}x_j = \sum_{i=1}^d A_{ik}x_i + \sum_{j=1}^d A_{kj}x_j\\ &= \left(A^t x\right)_k + (Ax)_k.\end{aligned}$$

De même, $h(x) = \sum_{i=1}^d b_i x_i$ donc $\partial_{x_k} h(x) = b_k$.

- En utilisant $\mathrm{d}_x f$. On a

$$\begin{aligned}f(x+y) &= \langle A(x+y), x+y\rangle + \langle b, x+y\rangle + c\\ &= f(x) + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle + \langle b, y\rangle\\ &= f(x) + \left\langle (A+A^T)x + b, y\right\rangle + O(\|y\|^2).\end{aligned}$$

Donc pour que la définition (2) soit respectée, on déduit la différentielle $(\mathrm{d}_x f)y = \left\langle (A+A^T)x + b, y\right\rangle$. Or, le gradient est défini via (4) donc $\nabla f(x) = (A+A^T)x + b$.

- Hessienne. On calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{1\leqslant k,p\leqslant d} A_{kp}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} x_k x_p = \sum_{1\leqslant k,p\leqslant d} A_{kp}\delta_{\substack{k=i,p=j\\ \text{ou}\\ k=j,p=i}} = A_{ij} + A_{ji} = (A+A^T)_{ij}.$$

donc $\nabla^{\otimes 2} f(x) = A + A^T$. □

1.3.4. *Forme quadratique particulière.* Si $f(x_1, x_2) := x_1^2 + \lambda x_2^2$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\nabla f(x) = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_2\end{pmatrix}$ and $\nabla^{\otimes 2} f(x) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

1.4. **Rappels sur les matrices.**

Definition 1.4 (Matrices symétriques)**.** *Prenons $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.*

- *Si $M^T = M$, on dit que M est symétrique et on note $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$*

- *Si $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ et si toutes les valeurs propres de M sont positives, on dit que M est positive et on note $M \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ ou $M \geqslant 0$, c'est équivalent à ce que $\forall y \in \mathbb{R}^d, \langle y, My\rangle \geqslant 0$.*
- *Si $M \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ et si toutes les valeurs propres de M sont strictement positives, on dit que M est définie positive et on note $M \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ ou $M > 0$, c'est équivalent à ce que $\forall y \in \mathbb{R}^d, \langle y, My\rangle > 0$.*

Pour M symétrique, on a $M = P^T DP$ où $D = \mathrm{diag}\big(\lambda_1, \dots, \lambda_d\big)$ et P est orthogonale, donc pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle y, My\rangle = \left\langle y, P^T DPy\right\rangle = \langle Py, DPy\rangle = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \left((Py)_j\right)^2 . \tag{8}$$

Preuve dans la définition 1.4 . Montrons que $M \in \mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ est équivalent à $\forall y \in \mathbb{R}^d, \langle y, My\rangle \geqslant 0$.

Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont positives. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, alors on voit par (8) que $\langle y, My\rangle \geqslant 0$.

Supposons que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\langle y, My\rangle \geqslant 0$. Soit $e_1, \dots, e_d \in \mathbb{R}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$, alors on voit par (8) que $\langle P^{-1}e_j, MP^{-1}e_j\rangle = \lambda_j$ et donc $\lambda_j \geqslant 0$. □

2. Convexité

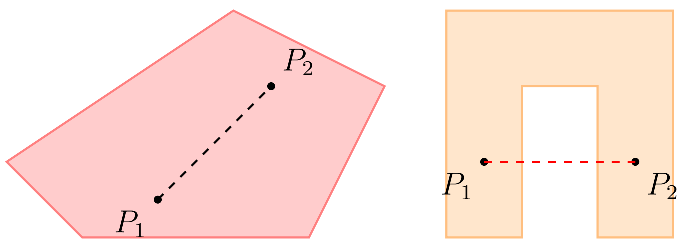
2.1. Ensembles convexes.

Definition 2.1 (Intervalle)**.** *Un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas réduit à un singleton. Il est donc de la forme $[b, +\infty[$ ou $]b, +\infty[$ ou $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ ou $]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.*

Definition 2.2 (Ensemble convexe)**.** *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est dit convexe si*

$$\forall x, y \in K,\ \forall t \in [0, 1], \qquad tx + (1-t)y \in K.$$

Autrement dit, un ensemble est convexe si quand on prend deux points lui appartenant, le segment reliant ces deux points y est également. En dimension $d = 1$, les ensembles convexes sont les intervalles et les singletons. En figure 1, en dimension $d = 2$, nous dessinons deux exemples.



Ensemble convexe Ensemble non convexe

Figure 1. Exemples sur la convexité en dimension 2

2.1.1. *Exemples.*

- $\mathbb{R}^d$ est convexe
- la boule ouverte de centre $a \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $R > 0$, $B(a, R) \subset \mathbb{R}^d$, est convexe
- n'importe quel sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ est convexe
- pour $d = 1$, un ensemble $C \subset \mathbb{R}$ est convexe ssi c'est un intervalle
- les demi-espaces affines
$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \langle a, x \rangle \leqslant \lambda \right\},$$
où $a \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, sont convexes.

2.2. **Fonctions convexes.**

Definition 2.3 (Convexité des fonctions)**.** *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ et une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est*

- *convexe si*
$$\forall x, y \in K,\ \forall t \in [0,1], \qquad f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$
- *strictement convexe si*
$$\forall x, y \in K \text{ tels que } x \neq y,\ \forall t \in]0,1[, \qquad f\left(tx + (1-t)y\right) < tf(x) + (1-t)f(y).$$
- *fortement convexe s'il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall x, y \in K,\ \forall t \in [0,1], \qquad f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) - \alpha t(1-t)\left\|x - y\right\|^2$$
- *concave si $-f$ est convexe.*

On a que fortement convexe $\Longrightarrow$ strictement convexe $\Longrightarrow$ convexe. En figure 2 nous donnons quelques exemples. Les fonctions affines sont les seules fonctions convexes et concaves. Visuellement, une fonction est convexe ssi son graph est au-dessus de tous ses plans tangents, ou encore ssi les arcs reliant deux points du graph sont au-dessus du graph.

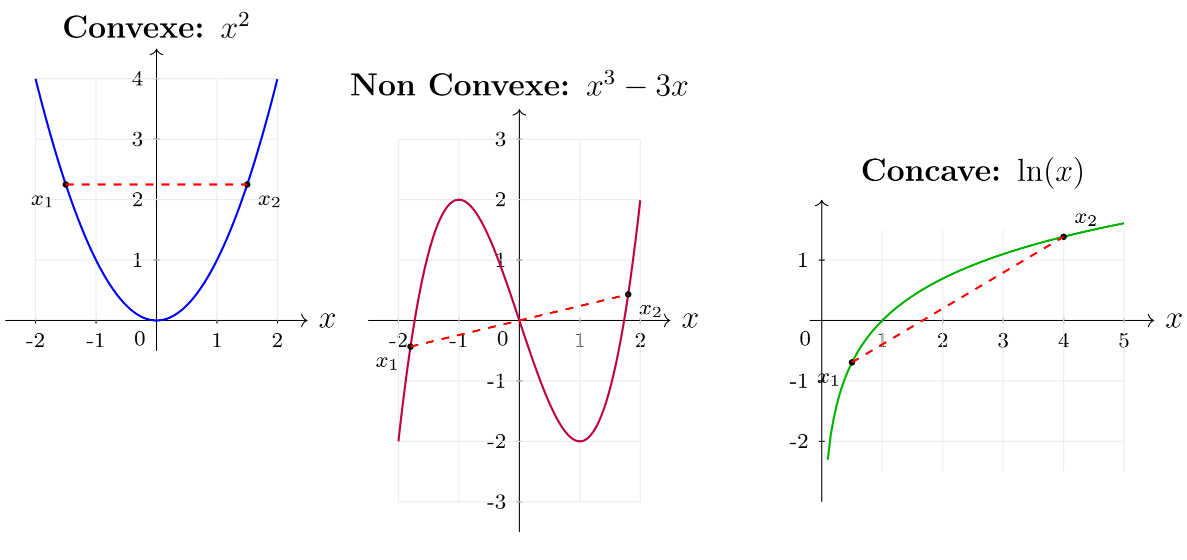


FIGURE 2. Exemples sur la convexité des fonctions en dimension un.

2.2.1. *Fonctions différentiables.* Lorsque f est $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire qu'elle est différentiable et que $x \mapsto \nabla f(x)$ est continue, la convexité peut s'exprimer plus simplement en utilisant le gradient.

Proposition 2.4 (Caractérisation de la convexité avec ∇f)**.** *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de K. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est convexe sur K,*
(2) $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$, $\forall x, y \in K$,
(3) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$, $\forall x, y \in K$,
(4) *(Si f est $\mathcal{C}^2$)* $\nabla^{\otimes 2} f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in K$.

La seconde assertion signifie que f est au-dessus de son développement d'ordre 1. On peut énoncer le même résultat en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes dans les assertions précédentes.

Proof. Prouvons que (1) implique (2). On prend $x, y \in K$. On va se réduire au cas de dimension 1 en posant $\xi(t) := f(x + t(y - x))$. On a $\xi(0) = f(x)$, $\xi(1) = f(y)$. Comme f est convexe, $\xi(t) \leqslant t\xi(1) + (1-t)\xi(0)$, donc la courbe de ξ est en-dessous de la droite passant par $(0, \xi(0))$ et $(1, \xi(1))$. On a donc $\frac{1}{t}\left(\xi(t) - \xi(0) \leqslant \xi(1) - \xi(0)\right.$ et en faisant $t \to 0$ on obtient $\xi'(0) \leqslant \xi(1) - \xi(0)$. Or, $\xi'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle$ (voir Section (1.3.1)) donc $\xi(0) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ et on obtient le résultat.

Prouvons que (2) implique (3). On écrit (1) en échangeant x et y puis avec (1) on obtient

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leqslant f(y) - f(x) \leqslant \langle \nabla f(y), y - x \rangle .$$

Prouvons que (2) implique (4). On prend $y = x + tz$, où $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + tz) = f(x) + t \langle \nabla f(x), y \rangle + t^2 \left\langle z, \left(\nabla^{\otimes 2} f(x)\right) z \right\rangle + O(t^3)$$

donc

$$0 \underset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{t^2} \left(f(x + tz) - f(x) - t \langle \nabla f(x), y \rangle \right) = \left\langle z, \left(\nabla^{\otimes 2} f(x)\right) z \right\rangle + O(t)$$

on fait $t \to 0$ et on obtient $\langle z, (\nabla^{\otimes 2} f(x)) z \rangle \geqslant 0$. C'est vrai pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ donc on peut conclure. □

La stricte convexité a la même caractérisation en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes.

Proposition 2.5 (Caractérisation de la forte convexité avec ∇f)**.** *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de K. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est α-fortement convexe sur K, avec $\alpha > 0$*
- $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in K$
- $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant \alpha \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in K.$
- *(Si f est $\mathcal{C}^2$)* $\nabla^{\otimes 2} f(x) \geqslant \alpha$, $\forall x \in K$

La condition $\nabla^{\otimes 2} f(x) \geqslant \alpha$ est équivalente à ce que les valeurs propres de $A^T + A$ soient supérieures à α, ou encore à ce que tous les éléments diagonaux de $D(x)$ (définie en (6)) soient supérieurs à α.

Definition 2.6 (Fonction elliptique). *On appelle fonction elliptique une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et fortement convexe.*

2.2.2. *Dimension 1.* Les propriétés se simplifient en dimension 1. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Alors on a

$$\begin{aligned}
&f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante} \iff f'' \geqslant 0,\\
&f \text{ strictement convexe} \iff f' \text{ strictement croissante} \iff f'' > 0,\\
&f \text{ fortement convexe} \iff f'' \geqslant \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Proposition 2.7 (Propriétés des fonctions convexes en dimension 1). *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors f est continue et localement lipschitzienne sur $\mathring{I}$. En tout point $a \in \mathring{I}$ (qui signifie l'intérieur de I), f admet une dérivée à gauche $f'_g(a)$ et une dérivée à droite $f'_d(a)$, pas forcément égales. De plus, pour tout $a, b \in \mathring{I}$, on a*

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b).$$

En particulier, les dérivées gauches et droites f'_g et f'_d sont croissantes. Nous ne donnons pas la preuve. La fonction f n'est pas forcément continue sur les bords de I.

2.3. Exemples.

Proposition 2.8 (Combinaisons linéaires et compositions).

(1) *Soient $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions convexes, et $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Alors $\sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$ est convexe.*
(2) *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe croissante. Alors $g \circ f$ est convexe.*

Preuve de (2). Comme $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, alors,

$$g \circ f(tx+(1-t)y) \underset{g \text{ croissante}}{\leqslant} g(tf(x)+(1-t)f(y)) \underset{g \text{ convexe}}{\leqslant} tg \circ f(x)+(1-t)g \circ f(y).$$

□

La composée de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe, par exemple $f(x) = -x$ et $g(x) = e^x$ sont convexes mais $g \circ f(x) = e^{-x}$ est concave.

(1) Les normes sont convexes

Proof. Soit $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une norme. Pour $t \in [0, 1]$ on a

$$N(tx + (1-t)y) \underset{\substack{\text{ineg.}\\ \text{triang.}}}{\leqslant} N(tx) + N((1-t)y) = tN(x) + (1-t)N(y).$$

□

(2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ est fortement convexe avec $\alpha = 2$.

Proof. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nabla f(x) = f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2 > 0$. □

(3) La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^p$ est convexe ssi $p \geqslant 1$ ou $p \leqslant 0$.

Proof. On a $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Or, $p(p-1) \geqslant 0$ ssi $p \geqslant 1$ ou $p \leqslant 0$. □

(4) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ est strictement convexe mais pas fortement convexe.

Proof. On a $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ mais $f''(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$. □

(5) La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|^2$ est fortement convexe avec $\alpha = 2$.

Proof. On a $\nabla f(x) = 2x$, on déduit $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle = 2\|y-x\|^2$. □

(6) Plus généralement, soit f une forme quadratique avec les mêmes notations que la proposition 1.1. On a

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle = \left\langle (A + A^T)(y-x), y-x \right\rangle = 2\left\langle A(y-x), (y-x)\right\rangle .$$

Par conséquent,

(a) A est semi-définie positive $\Leftrightarrow$ f convexe.
(b) A est définie positive de plus petite valeur propre $\lambda_{\min} > 0 \Leftrightarrow f$ fortement convexe avec $\alpha = \lambda_{\min}$.

2.4. **Fonctions coercives.**

Definition 2.9 (Coercivité)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble non borné (par exemple, $\mathbb{R}^d$). Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite coercive sur Ω si*

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ \|x\|\to+\infty}} f(x) = +\infty.$$

Ceci peut s'écrire de façon équivalente :

- $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}, \qquad \|x_k\| \to +\infty \implies f(x_k) \to +\infty$,
- $\forall M > 0, \exists R > 0, \forall x \in \Omega \qquad \|x\| \geqslant R \implies f(x) \geqslant M$.

La coercivité ne dépend pas de la norme choisie. Comme toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^d$, en pratique, on choisit la norme la plus adaptée à la fonction f étudiée.

On verra que la coercivité est importante dans le théorème 3.4.

Proposition 2.10. *Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe non borné. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et fortement convexe sur K, alors f est coercive sur K.*

On peut résumer en disant "fortement convexe $\implies$ coercive".

Proof. La seconde assertion de la Proposition 2.5 pour les fonctions fortement convexes nous permet d'écrire pour tout $x, y \in K$,

$$f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2. \tag{9}$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle \nabla f(x), x-y\rangle \leqslant \|\nabla f(x)\|\|x-y\|, \quad \text{donc} \quad \langle \nabla f(x), y-x\rangle \geqslant -\|\nabla f(x)\|\|x-y\|.$$

En injectant la dernière inégalité dans (9),

$$f(y) \geqslant f(x) + \|y-x\| \left(\frac{\alpha}{2}\|y-x\| - \|\nabla f(x)\|\right).$$

En fixant $x \in K$ et en faisant $\|y\| \to +\infty$ (ce qui implique $\|y-x\| \to +\infty$), on obtient le résultat. □

Exemples de fonctions coercives:

(1) Par la Proposition 2.10, les formes quadratiques, i.e. les fonctions de la forme

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c, \tag{10}$$

sont fortement convexes, donc coercives, si A est définie positive.

(2) Toute fonction minorée par une fonction coercive est coercive.

Un autre exemple simple nécessite une preuve.

Lemma 2.11. *Soient $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions minorées et coercives. La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ est coercive.*

Proof. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i est minorée par une constante m_i. Posons $m = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |m_i|$ et soit $M > 0$ fixé. Comme chaque f_i est coercif, il existe une constante $R_i > 0$ telle que

$$\forall x_i \in \mathbb{R}, \quad |x_i| \geqslant R_i \Rightarrow \ f_i(x_i) \geqslant M + nm\ .$$

Soit $R = \max_{1\leqslant i\leqslant n} R_i$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec $\|x\|_\infty \geqslant R$, il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| \geqslant R \geqslant R_i$ et donc $f_i(x_i) \geqslant M + nm$. Pour $j \neq i$,

$$f_j(x_j) \geqslant m_j \geqslant -m.$$

On a donc $f(x) \geqslant M$ et on a montré que

$$\forall M \geqslant 0,\ \exists R > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\|_\infty \geqslant R\ \Rightarrow\ f(x) \geqslant M\ .$$

Par conséquent, $\lim_{\|x\|_\infty \to \infty} f(x) = +\infty$ ce qui prouve la coercivité de f. ☐

2.5. **Vocabulaire.** Cherchons les minimas locaux de $f : K \to \mathbb{R}$ où $K \subset \mathbb{R}^d$.

2.5.1. *Sans ou sous contraintes.*

- Si K est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on parle de minimisation sans contrainte pour le problème $\inf\limits_{x\in K} f(x)$. Les extremas sont alors dit libres car ils vérifient l'équation d'Euler (11).
- Sinon, on parle de minimisation sous contrainte. Les extremas sont alors dit liés.

Par exemple si $K = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in K \mid x_1 = 0, x_2 \geqslant x_3\}$ on est dans le cadre d'une minimisation sous contraintes.

On parle d'optimisation convexe si f est une fonction convexe et si K est un ensemble convexe.

2.5.2. *Infimum.* Dans cette section on prendra toujours

$$f : K \to \mathbb{R}, \qquad \inf_{x\in K} f(x).$$

On cherche à minimiser f sur K.

Definition 2.12 (Fonction minorée)**.** *On dit que $f : K \to \mathbb{R}$ est minorée sur $K \subset \mathbb{R}^d$ s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in K,\ m \leqslant f(x)$. On dit que m est un minorant de f sur K.*

Definition 2.13 (Infimum)**.** *Supposons qu'il existe $\xi \in]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty\}$ tel que*

- $\forall x \in K,\ \xi \leqslant f(x)$

- *il existe* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ *telle que* $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \xi$.

Alors ξ *est appelé infimum de* f *sur* K *et noté* $\xi = \inf\limits_{x\in K} f(x) = \inf\limits_{K} f$.

L'infimum sur K existe toujours, il est fini si et seulement si f est minorée sur K. Si f n'est pas minorée sur K, alors $\inf\limits_{K} f = -\infty$.

Definition 2.14 (Suite minimisante)**.** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ *telle que*

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \inf_K f.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée suite minimisante du problème de minimisation.*

2.5.3. *Minimum.*

Definition 2.15 (Minimum global)**.** *S'il existe* $x_* \in K$ *tel que*

$$\forall x \in K, \qquad f(x_*) \leqslant f(x),$$

alors on dit que $f(x_*)$ *est un minimum global de* f *sur* K*, on note* $f(x_*) = \min\limits_{x\in K} f(x) = \min\limits_{K} f$*. On dit que* f *atteint son minimum en* x_* *et que le problème admet* x_* *comme solution.*

Par abus de langage, on dit parfois que x_* est un minimum mais on devrait toujours dire que x_* est un minimiseur. Un minimum existe si et seulement si un minimiseur existe. Le minimum n'existe pas toujours, et on va chercher à trouver des conditions de son existence. S'il existe, le minimum est un infimum.

Definition 2.16 (Minimum local)**.** *Supposons qu'il existe* $x_* \in K$ *et un voisinage* V *de* x_* *dans* Ω *tels que*

$$\forall x \in V \cap K, \qquad f(x_*) \leqslant f(x).$$

Alors x_* *est appelé minimum local de* F *sur* K *et* $f(x_*)$ *est appelé minimum local.*

Un minimum global est un minimum local mais le contraire est faux en général. Quand on dit juste "minimum", c'est implicitement qu'on dit minimum global.

3. Les principales conditions d'optimalité

3.1. K ouvert.

Pour tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on appelle $\partial\Omega := \overline{\Omega}\backslash\mathring{\Omega}$ son bord.

Théorème 3.1: Condition suffisante, K ouvert

On suppose que K est un <u>ouvert</u> <u>borné</u>, que f est continue sur $\overline{K}$, et qu'il existe un point $x_0 \in K$ tel que $\underline{\forall x \in \partial K,\ f(x_0) < f(x)}$. Alors f admet un minimum global sur K.

La condition $\forall x \in \partial K,\ f(x_0) < f(x)$ signifie que si f a un minimum sur $\overline{K}$, il ne sera pas atteint sur le bord, mais dans l'intérieur.

Proof. Comme l'ensemble $\overline{K}$ est compact, la fonction continue f admet un minimum x_* sur $\overline{K}$ par le thèorème de Weierstrass (qu'on reverra au théorème 3.4). Cet élément est donc tel que

$$\forall x \in \overline{K}, \ f(x_*) \leqslant f(x).$$

Montrons par l'absurde que $x_* \notin \partial K$. Supposons que $x_* \in \partial K$. On a $f(x_*) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \overline{K}$ donc $f(x_*) \leqslant f(x_0)$. Or, $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \in \partial K$, donc pour $x = x_*$, $f(x_*) > f(x_0)$. Cette contradiction nous permet de conclure que $x_* \notin \partial K$ et donc x_* est bien dans l'ouvert K. □

Exercice 3.1. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2}$. *Montrer que* f *a un minimum sur* $B(0,1)$ *la boule unité ouverte.*

Solution. On peut paramétrer le bord $\partial B(0,1)$, on a, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$g(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 + e^{\sin\theta} > 1 = f(0).$$

On applique le théorème 3.1 avec $x_0 = 0$. □

Théorème 3.2: Condition nécessaire, K ouvert

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un <u>ouvert</u> et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si x_* est un minimiseur local de f sur K, alors

$$\nabla f(x_*) = 0. \tag{11}$$

Proof. Soit y un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^d$. Comme $x_* \in K$ et que K est ouvert, il existe $h_0 > 0$ assez petit tel que $B(x_*, h_0) \subset K$, donc le point $x_* + hy$ appartient à K. Or x_* étant un minimum local du problème, on a $0 \leqslant f(x_* + hy) - f(x_*)$. Comme

$$f(x_* + hy) - f(x_*) = h \langle \nabla f(x_*), y\rangle + O(h^2),$$

en divisant l'inegalité ci-dessus par $h > 0$, on obtient $0 \leqslant \langle \nabla f(x_*), y\rangle + O(h)$ donc en faisant $h \to 0$ on a

$$0 \leqslant \langle \nabla f(x_*), y\rangle .$$

Comme cette inegalité est vraie pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, elle est également vraie pour $-y$. Donc $\langle \nabla f(x_*), -y\rangle \geqslant 0$, d'où $\langle \nabla f(x_*), y\rangle = 0$. On a montré

$$\langle \nabla f(x_*), y\rangle = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d,$$

c'est-à-dire que $\nabla f(x_*) = 0$. □

(11) est appelée équation d'Euler. Ce théorème est très important, il montre que quand on est sur un ouvert, il faut chercher les minimiseurs parmi les points annulant le gradient. Cette procédure donne les minimums locaux, il faudra les comparer entre eux pour trouver le/les minimums globaux.

On notera

$$Z := \{x \in K \mid \nabla f(x) = 0\} = K \cap \left((\nabla f)^{-1}(\{0\})\right) \tag{12}$$

l'ensemble des zéros du gradient, aussi appelé ensemble des points critiques. En définissant

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est un minimiseur local}\},$$

le théorème dit que

$$\mathcal{M} \subset Z$$

mais ces ensembles ne sont pas égaux en général. En effet, Z contient

- les minimums locaux
- les maximums locaux
- les points selle

Exercice 3.2. *Trouver les minimiseurs locaux et les minimiseurs globaux de* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2^4.$$

Solution. On cherche $\mathcal{M}$, par le théorème 3.2 on sait que $\mathcal{M} \subset Z$ donc on commence par chercher Z. On calcule

$$\nabla f(x) = 2\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^{\otimes 2} f(x) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6x_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

On commence par l'analyse. Si $x \in Z$, alors $x_1 = -x_2$ et $x_1 - x_2 + 2x_2^3$, ce qui implique $x_1 = -x_2$ et $x_2(x_2^2 - 1) = 0$ et donc en définissant $S := \{(0,0), (1,-1), (-1,1)\}$ on a $Z \subset S$. On vérifie facilement que $S \subset Z$ et donc $Z = S$. Trouvons $\mathcal{M}$ par deux méthodes différentes.

• Méthode utilisant la Hessienne. Comme $\mathcal{M} \subset Z$, il faut vérifier pour quels points de Z la Hessienne est définie positive. On a

$$\nabla^{\otimes 2} f(0,0) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla^{\otimes 2} f(1,-1) = \nabla^{\otimes 2} f(1,-1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\nabla^{\otimes 2} f(0,0)$ a une valeur propre négative donc $(0,0)$ n'est pas un minimiseur local, alors que les valeurs propres de $\nabla^{\otimes 2} f(1,-1)$ sont toutes les deux positives, donc $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont des minimiseurs locaux.

• Méthode sans la Hessienne. On a $f(0,x_2) - f(0,0) = x_2^2\,(x_2^2 - 1)$ qui est négatif pour x_2 petit, donc $(0,0)$ n'est pas un minimiseur local. On a

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) - f(1,-1) = f(x_1,x_2) - f(-1,1) &= x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + x_2^4 + 1 \\ &\geqslant -2x_2^2 + x_2^4 + 1 \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont des minimiseurs locaux.

Dans les deux cas on trouve donc $\mathcal{M} = \{(1,-1), (-1,1)\}$ et on remarque que $\mathcal{M} \neq Z$, $(0,0)$ est en fait un point selle.

On définit

$$\mathcal{G} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ est un minimiseur global}\}.$$

On sait que $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$, on a $f(1,-1) = f(1,-1)$. On ne peut pas conclure parce que f pourrait décroître en l'infini. Par l'inégalité de Young avec $p = 3$ et $q = 3/2$, on a $|2x_1x_2| \leqslant \frac{2}{3}\left(|x_1|^{3/2} + 2\,|x_2|^3\right)$ donc

$$f(x) \geqslant \left(x_1^2 - \tfrac{2}{3}\,|x_1|^{3/2}\right) + \left(x_2^4 - x_2^2 - \tfrac{4}{3}\,|x_2|^3\right).$$

On voit que f est coercive et donc $\mathcal{G} = \mathcal{M}$. $\square$

3.1.1. *Condition d'ordre 2.*

Théorème 3.3: Condition suffisante d'ordre 2

On suppose que K est un ouvert et que f est $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $x_* \in K$. On suppose aussi que $\nabla f(x_*) = 0$. Si $\nabla^{\otimes 2} f(x_*)$ est définie positive, alors x_* est un miminum local.

Si on a une direction $y \in \mathbb{R}^d$ dans laquelle la Hessienne est dégénérée, i.e. si $\langle y, \nabla^{\otimes 2} f(x_*) y\rangle = 0$, alors $f(x_* + y) = f(x_*) + O\left(\|y\|^3\right)$. L'ordre 2 ne suffit alors pas pour connaître le signe de $f(x_* + y) - f(x_*)$. Il faut donc regarder l'ordre 3.

Pour un point critique $x_* \in K$,

- Si $\nabla^{\otimes 2} f(x_*)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives alors x_* est un minimum local
- Si $\nabla^{\otimes 2} f(x_*)$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives alors x_* est un maximum local
- Si $\nabla^{\otimes 2} f(x_*)$ a au moins une valeur propre nulle, on ne peut pas conclure pour l'existence d'un maximum ou minimum local
- Si $\nabla^{\otimes 2} f(x_*)$ a au moins une valeur propre positive et au moins une négative, alors x_* est un point selle

3.2. K **fermé.**

Théorème 3.4: Condition suffisante, K fermé

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble non-vide et fermé dans $\mathbb{R}^d$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si K est borné ou f est coercive sur K, alors f admet un minimum global sur K.

C'est pour ce théorème que la coercivité est une propriété importante des fonctions. Rappelons que dans le cas où K est borné, f a aussi un maximum sur K.

Proof. Dans le premier cas, K est fermé et borné, donc il est compact. Comme f est continue, le théorème de Weierstrass assure que f est bornée sur K et elle atteint ses bornes. Donc il existe au moins un minimiseur.

Prouvons le second cas. Soit $x_0 \in K$ fixé. La coercivité de f sur K entraîne qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \quad \|x\| \geqslant r \quad \Rightarrow f(x) > f(x_0). \tag{13}$$

On note $\overline{B(0,r)}$ la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r. Sans perte de généralité, on prend r assez grand pour que $x_0 \in \overline{B(0,r)}$. Nous avons

$$\inf_{x \in K} f(x) = \inf_{x \in K \cap \overline{B(0,r)}} f(x).$$

Comme l'ensemble $K \cap \overline{B(0,r)}$ est fermé et borné et que f est continue, le théorème de Weierstrass assure que f atteint ses bornes dans $K \cap \overline{B(0,r)}$. Ceci assure l'existence d'un minimum x_* dans $K \cap \overline{B(0,r)}$. Ce minimum est aussi le minimum sur K. En effet, pour tout $x \in K$:

(1) soit $x \in K \cap \overline{B(0,r)}$, et alors $f(x) \geqslant f(x_*)$ car f atteint son minimum sur $K \cap \overline{B(0,r)}$ en x_*,

(2) soit $x \notin K \cap \overline{B(0,r)}$, auquel cas on a $f(x) > f(x_0) \geqslant f(x_*)$ où la seconde inégalité vient du fait que x_0 est dans la boule.

Ceci montre donc que x_* est un minimum de f sur K. □

Exercice 3.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*,* $f(x) := -x_1 x_2^2 + |x_1|^3 + e^{x_2} + |x_3|$*. Montrer que* f *admet un minimum sur* $\mathbb{R}^3$*.*

Solution. On a

$$f(x) \geqslant -2(x_1^2 + x_2^4) + |x_1|^3 + e^{x_2} + |x_3| = x_1^2(|x_1| - 2) + (e^{x_2} - 2x_2^4) + |x_3|\,,$$

donc f est coercive, et on peut conclure en utilisant le théorème 3.4. □

En pratique, sur un fermé borné K, pour trouver les minimums, il faudra chercher en deux étapes :

- dans l'intérieur $\mathring{K}$ qui est un ouvert. On cherchera donc dans ce cas les points qui annulent le gradient, on note $Z := \{x \in \mathring{K} \mid \nabla f(x) = 0\}$.
- sur le bord ∂K.

Autrement dit,

$$\min_{x \in K} f(x) = \min_{x \in Z \cap \partial K} f(x).$$

3.3. K **convexe.** Quand K est convexe, on a des conditions nécessaires et suffisantes utilisant le gradient.

Théorème 3.5: K convexe

Soit K un ensemble <u>convexe</u> et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$. Si x_* est un minimum local de f sur K, alors

$$\forall y \in K, \qquad \langle \nabla f(x_*), y - x_* \rangle \geqslant 0. \tag{14}$$

Si, en plus f est convexe, alors,

$$(14) \iff \quad x_* \text{ est un minimum global de } f \text{ sur } K.$$

L'inéquation (14) est appelée inéquation d'Euler. Elle signifie que partant de x_*, f croît dans toutes les directions qui restent dans K.

Avant de présenter ce résultat, il est important de voir que la condition (14) se réduit à l'équation d'Euler

$$\nabla f(x_*) = 0.$$

lorsque K est un ouvert (en particulier, lorsque $K = \mathbb{R}^d$).

Proof.

- Prouvons la première partie. Soit $y \in K$ et $h \in]0,1]$. Alors, $x_* + h(y - x_*) \in K$ car K est convexe. De plus, comme x_* est un minimum local de K,

$$\frac{f(x_* + h(y - x_*)) - f(x_*)}{h} \geqslant 0.$$

Or on a le développement de Taylor à l'ordre 1

$$\begin{aligned} f(x_* + h(y - x_*)) &= f(x_*) + (\mathrm{d}_{x_*} f)\,(h(y - x_*)) + O(h^2) \\ &= f(x_*) + h\,\langle \nabla f(x_*), y - x_* \rangle + O(h^2), \end{aligned}$$

donc $\langle \nabla f(x_*), y - x_* \rangle + O(h) \geqslant 0$. Enfin, on fait $h \to 0$.

• Prouvons la seconde partie. Le sens $\Longleftarrow$ se fait avec la partie précédente. Montrons le sens $\Longrightarrow$. Comme f est convexe sur K, pour tout $y \in K$,

$$f(y) \geqslant f(x_*) + \langle \nabla f(x_*), y - x_* \rangle$$

grâce à la formule (ii) de la Proposition 2.4. Comme $\langle \nabla f(x_*), y - x_* \rangle \geqslant 0$, on a donc $f(y) \geqslant f(x_*)$ pour tout $y \in K$ ce qui prouve que x_* est un minimum global de f sur K. □

Dans le cas où K est convexe et f est non seulement convexe, mais strictement ou fortement convexe, nous avons les deux résultats suivants qui permettront de garantir existence, unicité et caractérisation du minimiseur.

Théorème 3.6: Existence et unicité, K convexe

Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : K \to \mathbb{R}^d$ une fonction strictement convexe. Alors il existe au plus un minimiseur sur K.
Si en plus K est fermé et si f est $\mathcal{C}^1$ et fortement convexe, alors il existe un unique minimiseur global.

Proof.
• Nous allons raisonner par l'absurde. Soient x_1 et $x_2 \in K$ avec $x_1 \neq x_2$ deux points de minimum de f sur K. Nous avons donc $f(x_1) = f(x_2) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in K$. Comme f est strictement convexe et que $(x_1 + x_2)/2 \in K$ car K est convexe, nous avons

$$f\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \tfrac{1}{2} f(x_1) + \tfrac{1}{2} f(x_2) = f(x_1)$$

Ceci contredit le fait que x_1 soit un minimum.
• Comme f est fortement convexe et de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue et coercive. L'existence du minimum est garantie par le théorème 3.4. □

Par le théorème 3.5, ce minimiseur vérifie l'inéquation d'Euler (14).

Exercice 3.4. *On définit* $f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 - 4x_1 - 3x_2$*, montrer que* f *a un unique minimum sur* $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leqslant 3\}$.

Solution. K et f sont convexes, K est fermé, f est une forme quadratique avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ qui a ses valeurs propres strictement positives donc f est fortement convexe donc on peut appliquer le théorème 3.6. □

Laboratoire AGM - UMR 8088, CNRS - CY Cergy Paris Université, 2 avenue Adolphe Chauvin, Cergy-Pontoise, 95302 cedex, France
Email address: louis.garrigue@cyu.fr