PREMIERE DEMONSTRATION DE LA FOMULE FERMEE DES NOMBRES DE STRILING DE SECONDE ESPECE.

Soit deux opétateurs Iet E tels que l'opérateur *identité* I transforme un polynôme ou fonction $f(x)$ en elle-même et l'opérateur *translation* E transforme celui-ci en $f(x+1)$:

Definition 1. $I(f(x)) = f(x)$

et

Definition 2. $E(f(x)) = f(x+1)$

Les n-ièmes puissances de E sont les opérateurs E^n pour lesquels

$$E^n(f(x)) = f(x+n)$$

En écrivant l'opérateur de translation E sous la forme $E = I + \triangle$, ou $\triangle$est l'opérateur *différence*, nous avons $E^n = (I+\triangle)^n$ et, d'après le théorème du binôme de Newton,

$$E^n = (I+\triangle)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k$$

puisque I^{n-k} vaut 1.

Pour chaque polynôme $f(x)$ nous avons

$$f(x+n) = E^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k(f(x))$$

qui est la forme générale de la formule de Gregory-Newton.

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k(f(0))$$

pour $f(x) = x^n$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k(0^n)$$

et pour $f(n) = n^n$

$$n^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k(0^n) \tag{1}$$

A partir de $E = I + \triangle$, on trouve que $\triangle = E - I$. Considant les puissances $\triangle^k$, nous pouvons écrire en appliquant le théorème du binôme de Newton

$$\triangle^k = (E-I)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-I)^{k-r} E^r = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} E^r$$

Applicons maintenant $\triangle^k$à $f(x) = x^n$, on trouve

$$\triangle^k(x^n) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} E^r(x^n) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r}(x+r)^n$$

pour $x = 0$,

$$\triangle^k(0^n) = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} r^n \tag{2}$$

En outre, nous avons que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (x)_k$$

et

$$n^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (n)_k \tag{3}$$

avec $(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$ étant le *polynôme factoriel décroissant* et$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = S(n,k)$ étant les nombres de Stirling de seconde espèce.
Remarquons que

$$(n)_k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...1}{(n-k)(n-k-1)...1} = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{4}$$

En appliquant 1 et 2, on obtient

(5)
$$n^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k(0^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} r^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} r^n$$

A partir de 3 et 4, on a que

$$n^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (n)_k = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \frac{n!}{(n-k)!} \tag{6}$$

Finalement de 5 et 6, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} r^n$$

et nous retrouvons la formule fermée des nombres de Stirling de seconde espèce:

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} r^n$$