# NOMBRES DE STIRLING DE SECONDE ESPÈCE

**Definition.** Le nombre $S(n,k)$ ou $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ de $k$-partitions[1] d'un ensemble $N = \{1, ..., n\}$ s'appelle nombre de Stirling[2] de seconde espèce.

Donc $S(n,k) > 0$ si $1 \leq k \leq n$ et $S(n,1) = 1$ pour tout $n$ car il n'existe qu'une seule façon de placer $n$ éléments dans un ensemble non vide. De plus, $S(n,k) = 0$ si $1 \leq n < k$ et si $k = 0$ et $n > 0$. Par contre et $S(0,0) = 1$ car il existe une seule façon de placer 0 éléments dans 0 ensembles.

Si un ensemble de $n > 0$ éléments est divisé en deux parties ($k = 2$), une de ces deux parties doit contenir le dernier élément plus, éventuellement un sous-ensemble des $n-1$ éléments restants. Il y a $2^{n-1}$ sous-ensemble possible puisque chaque éléments des $n-1$ restants est soit inclus ou ne l'est pas. Néanmoins, il faut veiller à ne pas y inclure tous les éléments restants, car il faut aboutir à deux ensembles non vides; on soustrait donc 1 pour obtenir, pour tout $n > 2$:

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$

En se basant sur un raisonnement similaire, on trouver la formule de récurrence générale: pour un ensemble de $n > 0$ éléments à partitionner en $k$ parties, on place le dernier élément dans une partie à lui seul (il y a $S(n-1,k-1)$ possibilités car il reste $n-1$ éléments pour $k-1$parties), ou on le place dans une des $k$ parties déjà existantes (formées à partir des $n-1$ premiers éléments). Dans ce second cas, il y a $kS(n-1,k)$ possiblités de placer ce dernier élément dans l'une des $S(n-1,k)$ parties. On obtient donc:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \tag{1}$$

On peut ainsi construire le tableau suivant:

| n | $S(n,0)$ | $S(n,1)$ | $S(n,2)$ | $S(n,3)$ | $S(n,4)$ | $S(n,5)$ | $S(n,6)$ | $S(n,7)$ | $S(n,8)$ | $S(n,9)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | |
| 8 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | |
| 9 | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 462 | 462 | 36 | 1 |

Il existe une relations faisant intervenir les nombres de Stirling de second espèce qui permettra par la suite de démontrer une formule fermée pour calculer directement $S(n,k)$.

[1]Une partition est un ensemble non ordonné de k blocs de $N$, ou $k$-partition quand on veut préciser le nombre de ses blocs, ou l'union de tous les blocs vaut $N$ et ou ces blocs sont disjoints deux à deux.

[2]Nommés d'après le mathématicien anglais James Stirling (1692-1770)

Définissions d'abord:

$$(x)_k = x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-k+1)$$

De la formule ci-dessus, nous trouvons, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $(x-k)(x-k-1)(x-k-2)...1$ que:

$$(x)_k = \frac{x!}{(x-k)!} \tag{2}$$

De plus, notons que:

$$\begin{aligned}(x)_{k+1} &= x(x-1)(x-2)...(x-(k+1)+2)(x-(k+1)+1)\\ &= x(x-1)(x-2)...(x-k-1+2)(x-k-1+1)\\ &= x(x-1)(x-2)...(x-k+1)(x-k)\\ &= (x)_k(x-k)\end{aligned}$$

et donc que:

$$(x)_{k+1} = (x)_k(x-k) \Leftrightarrow (x)_{k+1} = x(x)_k - k(x)_k \Leftrightarrow x(x)_k = (x)_{k+1} + k(x)_k \tag{3}$$

Démontrons, par induction, que:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (x)_k \tag{4}$$

La formule 4 est correcte pour $n = k = 1$. Puisque $x^n = xx^{n-1}$, et en supponsans 4 correcte, nous avons

$$xx^{n-1} = x\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} (x)_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} x(x)_k$$

En appliquant 3, nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} (x)_{k+1} + k(x)_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} (x)_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} k(x)_k$$

En remplaçant $k$ par $k-1$ dans le premier terme de la somme et en sommant de 0 à $n$ dans le second (avec $S(n-1,n) = 0$), nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} (x)_k + \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} k(x)_k = \sum_{k=0}^{n} (x)_k [\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}]$$

Et finalement, d'après la formule de récurrence 1 nous obtenons bien:

$$\sum_{k=0}^{n} [\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}](x)_k = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (x)_k$$