SECONDE DEMONSTRATION DE LA FOMULE FERMEE DES NOMBRES DE STRILING DE SECONDE ESPECE.

Prouvons la relation suivante

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) (-1)^{k-j} j^n$$

ou $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = S(n,k)$ sont les nombres de Stirling de seconde espèce. En substituant $j^n = \sum_{r=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} j(j-1)(j-2)...(j-r+1)$ et $\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, et en simplifiant par $k!$, on obtient

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) (-1)^{k-j} j^n = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!} \sum_{r=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} j(j-1)(j-2)...(j-r+1)$$

Par ailleurs, $(j)_r = j(j-1)(j-2)...(j-r+1) = \frac{j!}{(j-r)!}$, et on peut simplifier par $j!$. Ayant $(j-r)!$ dans la relation ci-dessus, il faut que $r \leq j$ pour ne pas avoir le factoriel d'un nombre négatif et nous remplaçons $\sum_{r=0}^{n}$ par $\sum_{r=0}^{j}$, on obtient

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) (-1)^{k-j} j^n = \sum_{j=0}^{k} \sum_{r=0}^{j} (-1)^{k-j} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \frac{1}{(k-j)!(j-r)!}$$

Remplaçons également $\frac{1}{(k-j)!(j-r)!} = \frac{(k-r)!}{(k-j)!(j-r)!(k-r)!} = \left(\begin{array}{c} k-r \\ k-j \end{array} \right) \frac{1}{(k-r)!}$. Ayant $(k-r)!$ et $\left(\begin{array}{c} k-r \\ k-j \end{array} \right) = \frac{(k-r)!}{(k-j)!(j-r)!}$ dans la relation ci-dessus, il faut que $r \leq k$, $j \leq k$ et $r \leq j$, *i.e* $r \leq j \leq k$ pour ne pas avoir le factoriel d'un nombre négatif et nous remplaçons $\sum_{r=0}^{j}$ par $\sum_{r=0}^{k}$ et $\sum_{j=0}^{k}$ par $\sum_{j=r}^{k}$.

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{r=0}^{j} (-1)^{k-j} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} \frac{1}{(k-j)!(j-r)!} = \sum_{r=0}^{k} \frac{\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}}{(k-r)!} \sum_{j=r}^{k} (-1)^{k-j} \left(\begin{array}{c} k-r \\ k-j \end{array} \right)$$

De plus, nous savons que $(a+b)^c = \sum_{i=0}^{c} \left(\begin{array}{c} c \\ i \end{array} \right) a^i b^{c-i}$. Posons que $c = k-r$, $i = k-j$, $a = -1$ et $b = 1$. Nous pouvons alors remplacer $\sum_{j=k}^{k} \left(\begin{array}{c} k-r \\ k-j \end{array} \right) 1^{(k-r)-(k-j)} (-1)^{k-j}$ par $(1-1)^{k-r}$ci dessus[1].

Donc

[1] $\sum_{i=0}^{c} Z(i) = \sum_{k-j=0}^{k-r} Z(i) = \sum_{k-k-j=-k}^{k-k-r} Z(i) = \sum_{-j=-k}^{-r} Z(i) = \sum_{j=k}^{r} Z(i)$

$$\sum_{r=0}^{k}\frac{\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}}{(k-r)!}\sum_{j=k}^{k}(-1)^{k-j}\left(\begin{array}{c} k-r \\ k-j \end{array}\right)=\sum_{r=0}^{k}\frac{\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}}{(k-r)!}(1-1)^{k-r}$$

Or, pour $0 \leq r \leq k-1$, nous aurons que le dernier terme sera toujours sous la forme 0^{k-r}, avec $k-r>0$ et donc $\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}}{(k-r)!}(1-1)^{k-r}=0$. Il reste donc finalement

$$\sum_{r=0}^{k}\frac{\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}}{(k-r)!}(1-1)^{k-r}=\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}\frac{1}{0!}0^{0}=\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\}$$