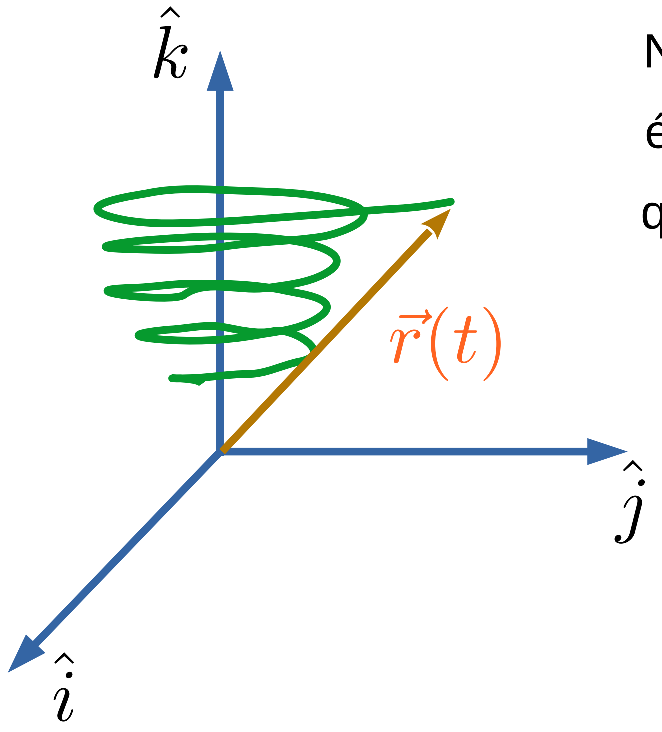
Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



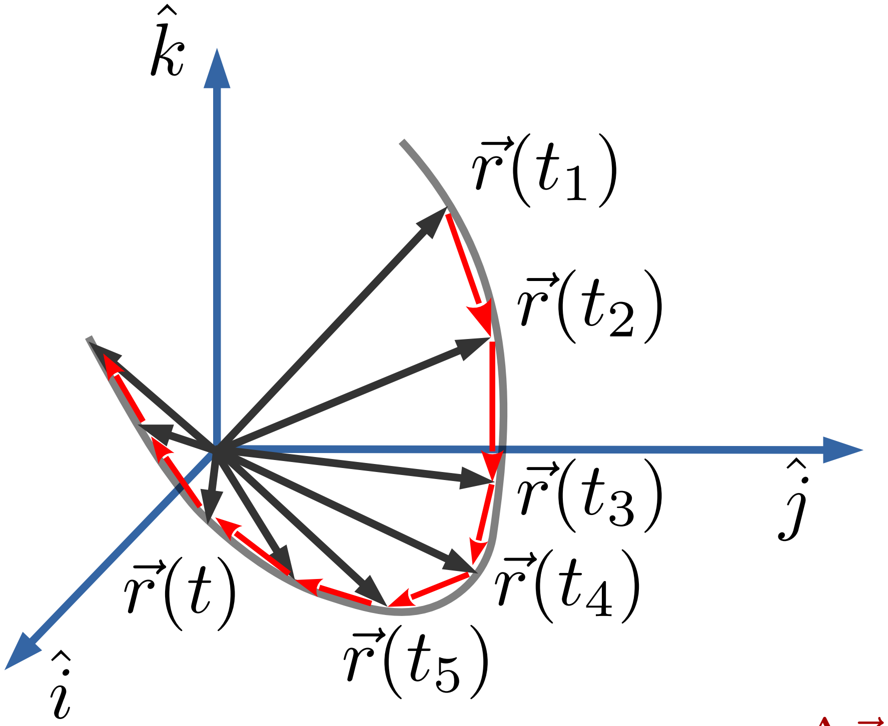
No espaço tridimensional (3 dimensões, 3D) o movimento é descrito por vetores (posição, velocidade e aceleração), que possuem componentes (projeções) em cada uma das direções independentes (î, ĵ e k)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor posição

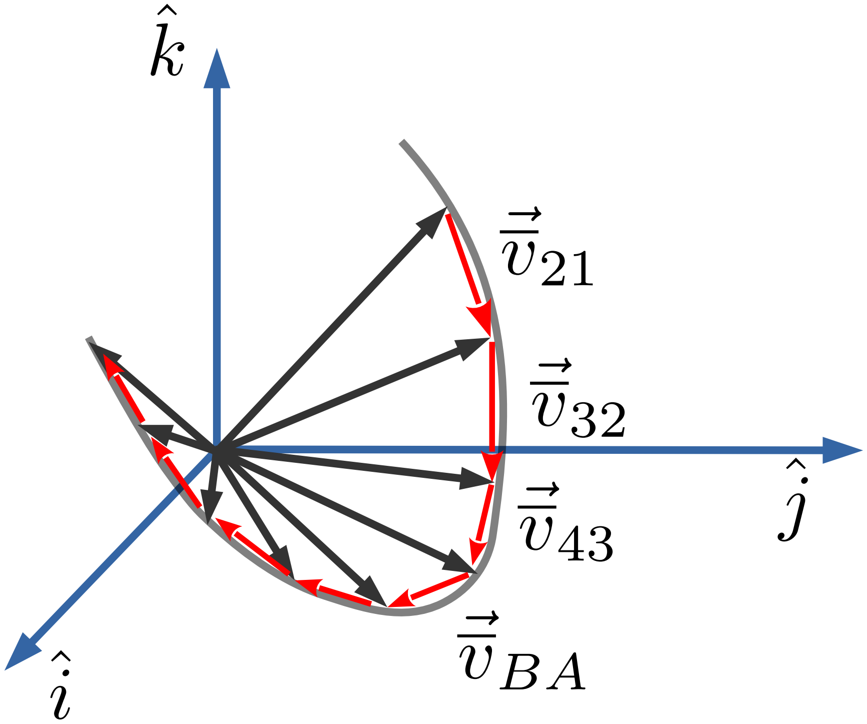
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Vetor deslocamento

$$\Delta\vec{r}_{BA} = \vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)$$

$$\Delta\vec{r}_{BA} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$
$$= \Delta x\ \hat{i} + \Delta y\ \hat{j} + \Delta z\ \hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor velocidade média

$$\vec{\overline{v}} = \overline{v}_x \hat{i} + \overline{v}_y \hat{j} + \overline{v}_z \hat{k}$$

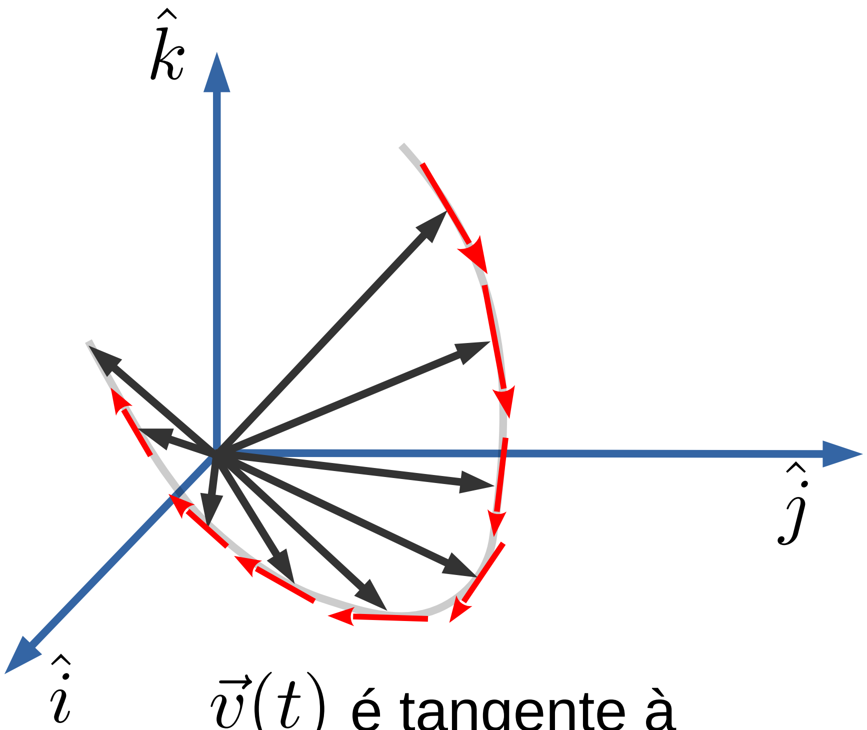
Vetor **velocidade média**

$$\vec{\overline{v}}_{BA} = \frac{\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\Delta \vec{r}_{BA}}{\Delta t_{BA}}$$

$$\vec{\overline{v}}_{BA} = \frac{\Delta x_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{i} + \frac{\Delta y_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{j} + \frac{\Delta z_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{k}$$

$$= \overline{v}_x \ \hat{i} + \overline{v}_y \ \hat{j} + \overline{v}_z \ \hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



$\vec{v}(t)$ é tangente à trajetória no ponto t

Vetor velocidade instantânea

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

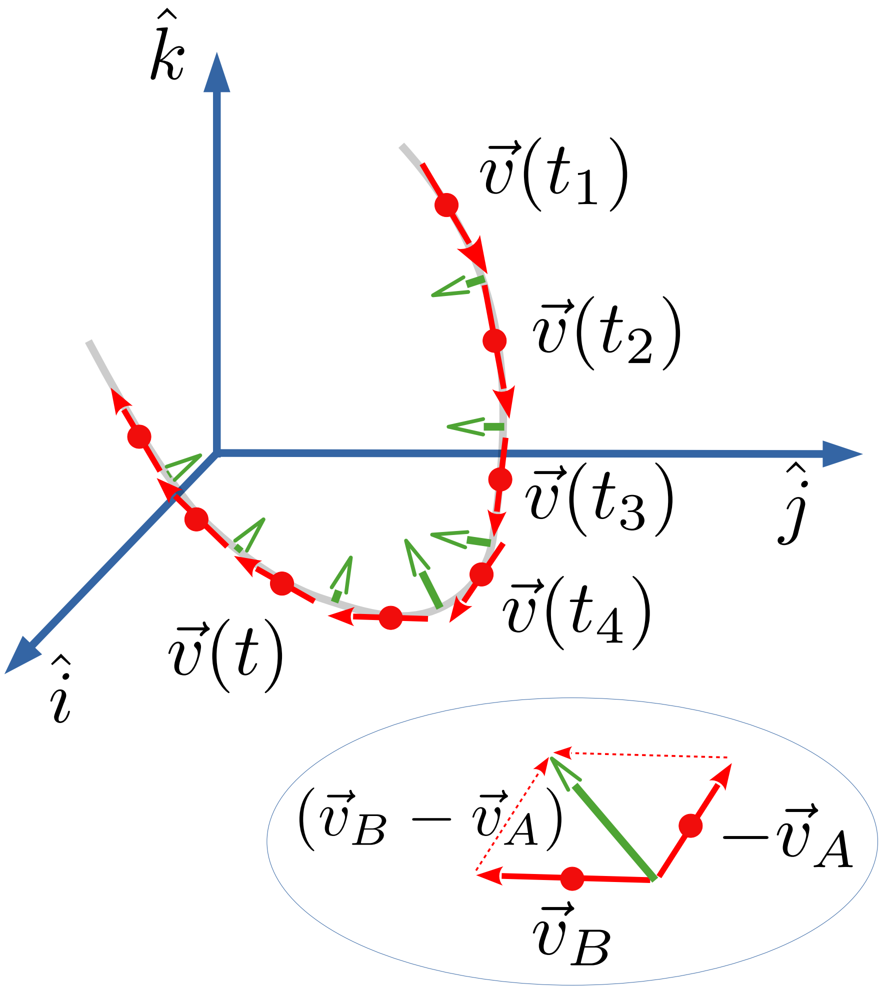
Vetor **velocidade instantânea**

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\hat{i} + \left[\frac{d}{dt}y(t)\right]\hat{j} + \left[\frac{d}{dt}z(t)\right]\hat{k}$$

$$= v_x(t)\ \hat{i} + v_y(t)\ \hat{j} + v_z(t)\ \hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor aceleração média

$$\vec{\bar{a}} = \bar{a}_x \hat{i} + \bar{a}_y \hat{j} + \bar{a}_z \hat{k}$$

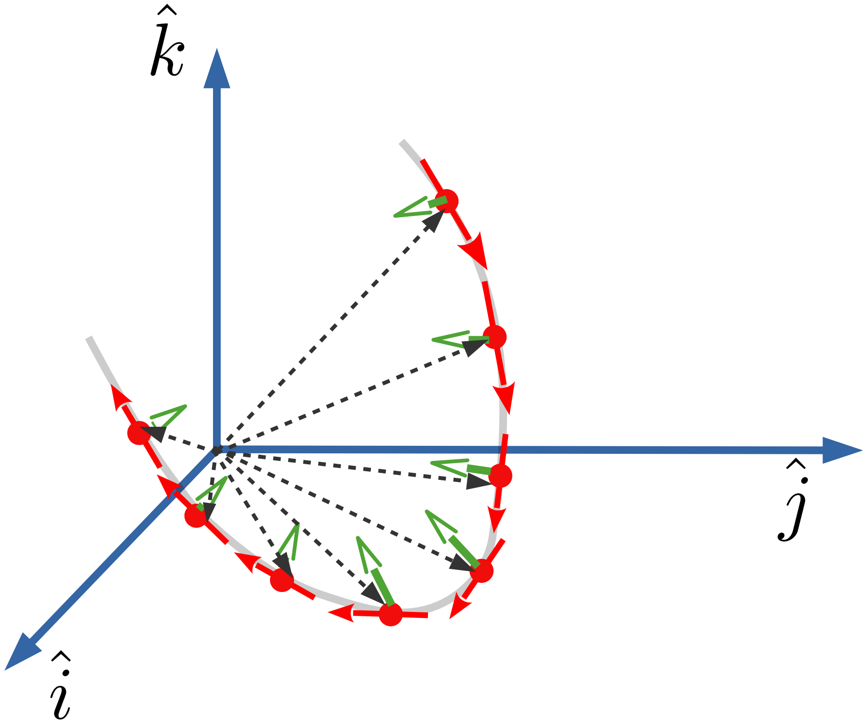
Vetor **aceleração média**

$$\vec{\bar{a}}_{BA} = \frac{\vec{v}(t_B) - \vec{v}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\Delta \vec{v}_{BA}}{\Delta t_{BA}}$$

$$\vec{\bar{a}}_{BA} = \frac{\Delta v^x_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{i} + \frac{\Delta v^y_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{j} + \frac{\Delta v^z_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{k}$$

$$= \bar{a}_x \ \hat{i} + \bar{a}_y \ \hat{j} + \bar{a}_z \ \hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



$\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$

Vetor aceleração instantânea

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Vetor **aceleração instantânea**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

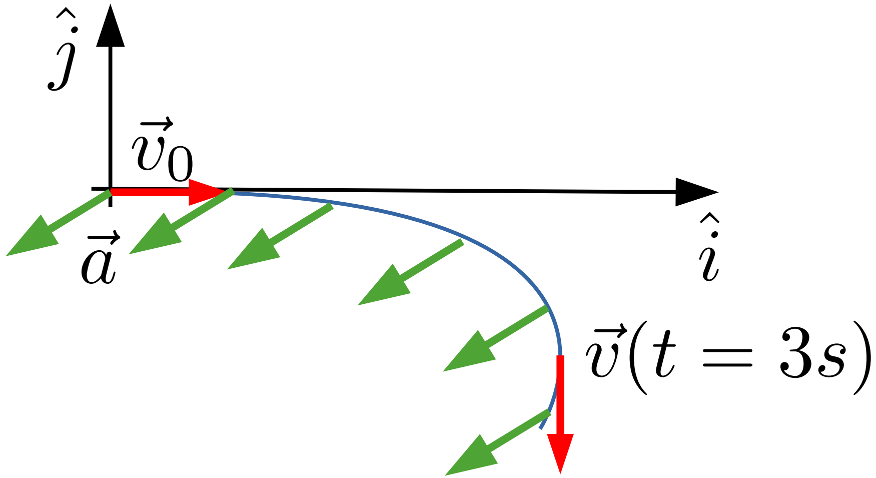
$$\vec{a}(t) = \left[\frac{d}{dt}v_x(t)\right]\hat{i} + \left[\frac{d}{dt}v_y(t)\right]\hat{j} + \left[\frac{d}{dt}v_z(t)\right]\hat{k}$$

$$= a_x(t)\ \hat{i} + a_y(t)\ \hat{j} + a_z(t)\ \hat{k}$$

Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D

Exemplo:

Uma partícula deixa a origem com uma velocidade $\vec{v} = (3,0\ m/s)\,\hat{i}$ e uma aceleração constante $\vec{a} = (-1.0\hat{i} - 0.5\hat{j})\ m/s^2$. Quando a partícula atinge o valor máximo da coordenada x, qual é (a) a velocidade e (b) qual é o vetor posição?



a) no ponto de retorno em $\hat{x}$

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 3\frac{m}{s} - 1\frac{m}{s^2} \times t = 0$$
$$\implies t = 3\ s$$

$$v_y(t = 3s) = v_{0y} + a_y t = -0.5\frac{m}{s^2}3\ s = -1.5\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}(t = 3s) = (0, -1.5)\frac{m}{s}$$

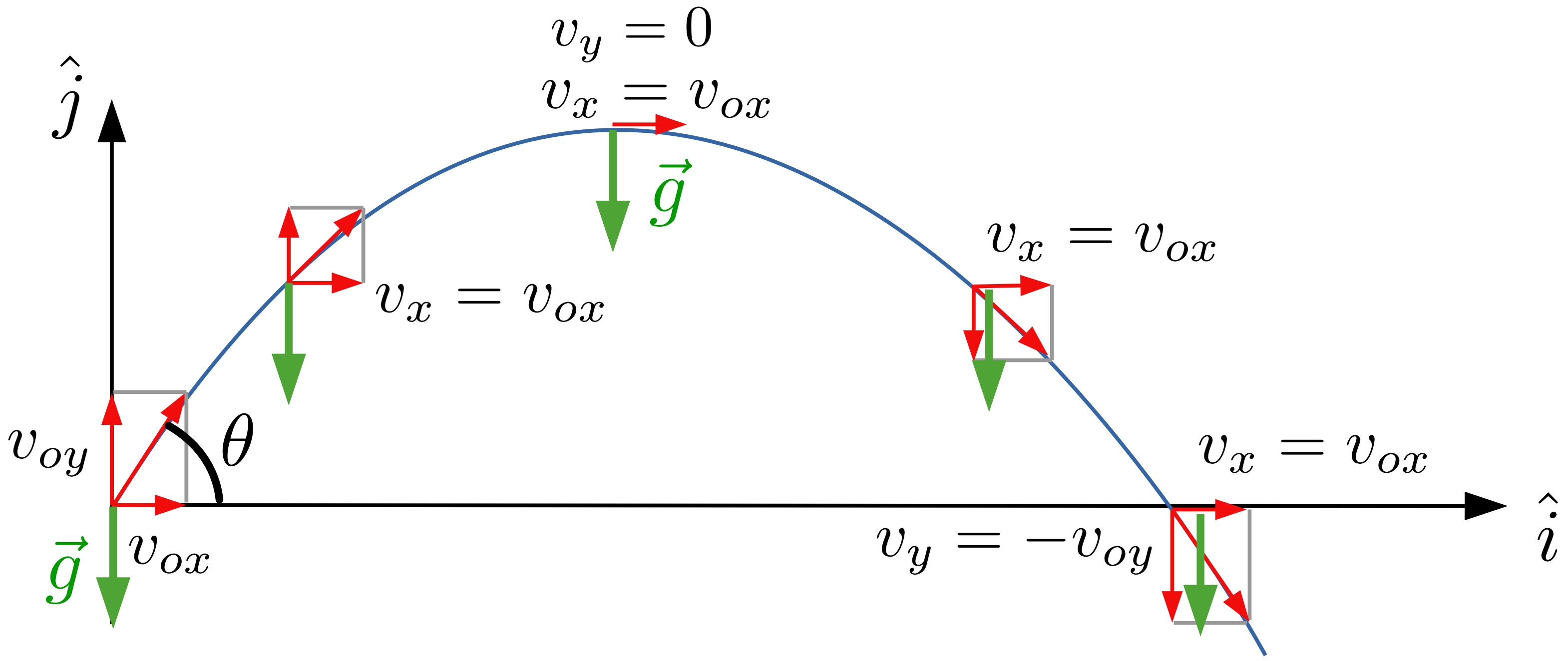
a) posição em t=3s

$$x(t = 3s) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = 3\frac{m}{s}3s - 1\frac{m}{s^2}(3s)^2/2 = 4.5m$$

$$y(t = 3s) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} = -0.5\frac{m}{s^2}(3s)^2/2 = -2.25m$$

Movimento Balístico

- Caso especial do movimento bidimensional
- Movimento no plano vertical, com velocidade inicial $\boldsymbol{v_0}$ e aceleração **<u>constante</u>**
- Aceleração ***a* = -*g***
- Partícula que executa movimento balístico é denominada projétil.



Movimento Balístico: Características

- Aceleração constante: $\vec{a} = (0, -g)$

- Movimento na direção horizontal é: $x(t) = x_0 + v_x t$

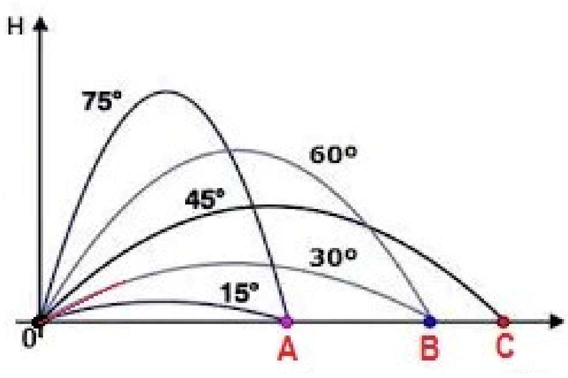
$$v_x(t) = v_{ox} = |\vec{v}_0| cos\theta = \text{constante}$$

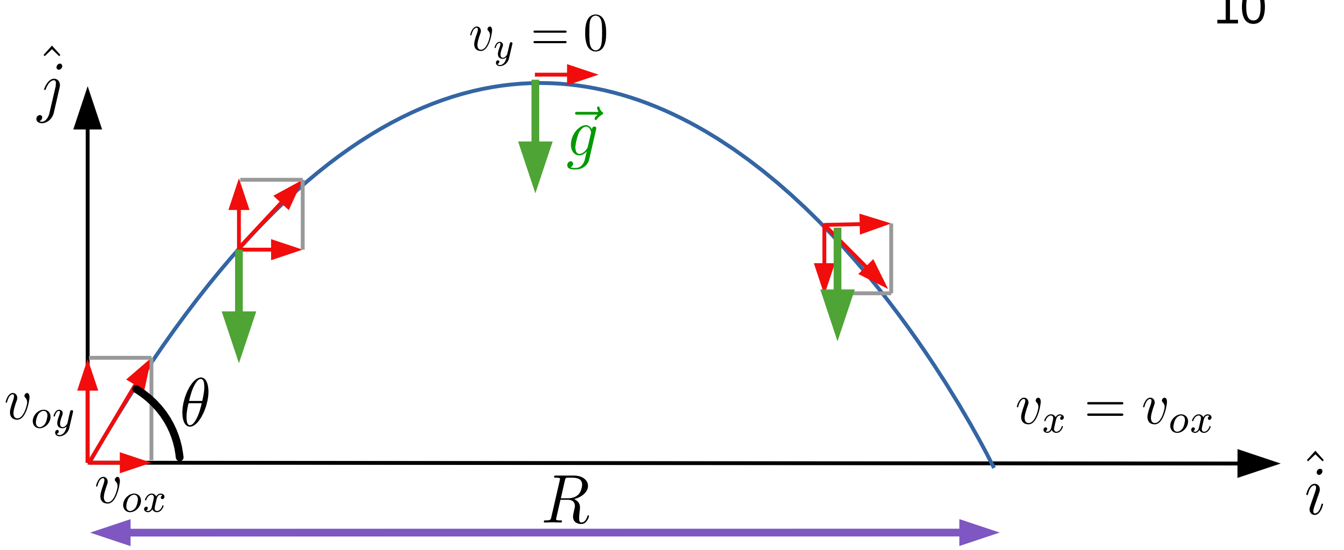
- Movimento na direção vertical é: $y(t) = y_0 + v_{oy} t - g t^2/2$

$$v_y(t) = v_{oy} - gt \quad , \quad v_{oy} = |\vec{v}_0| sen\theta$$

$$a_y(t) = -g$$

Movimento Balístico





- Alcance do lançamento:

No eixo horizontal, Δx = R:

$$\mathrm{R} = \mathrm{v}_0 cos\theta\ t \Longrightarrow t = R/v_0 cos\theta$$

No eixo vertical, Δy = 0:

$$0 = v_0 sin\theta\ t - gt^2/2$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2 sin\theta cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}}$$

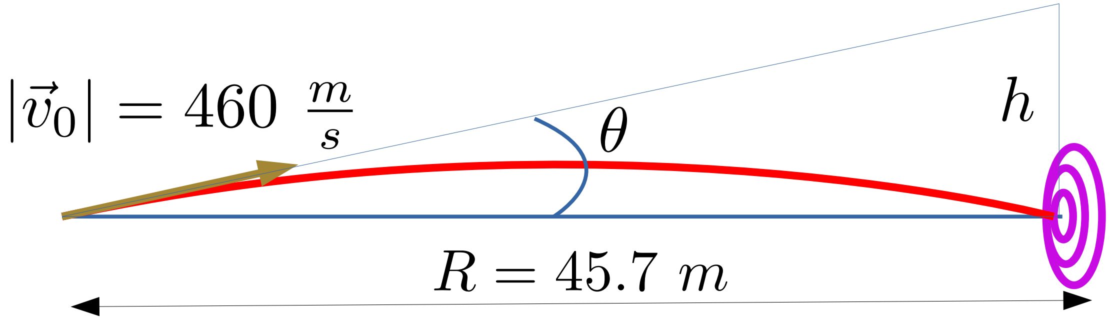
$$\theta = 45^o \Longrightarrow R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$\theta = 0^o, 90^o \Longrightarrow R = 0$$

Movimento Balístico

Exemplo:

Um rifle que atira balas a 460 m/s é apontado para um alvo situado a 45.7 m de distância. Se o centro do alvo está na mesma altura do rifle, para que altura acima do alvo o cano do rifle deve ser apontado para qua a bala atinja o centro do alvo?



$$R = v_0 cos\theta \ t \Longrightarrow t = R/v_0 cos\theta$$

$$0 = v_0 sin\theta \ t - gt^2/2$$

- Se R >> h, e Θ→0, podemos aproximar

$$h \approx \theta(rad) \times R \Longrightarrow h \approx 4.84cm$$

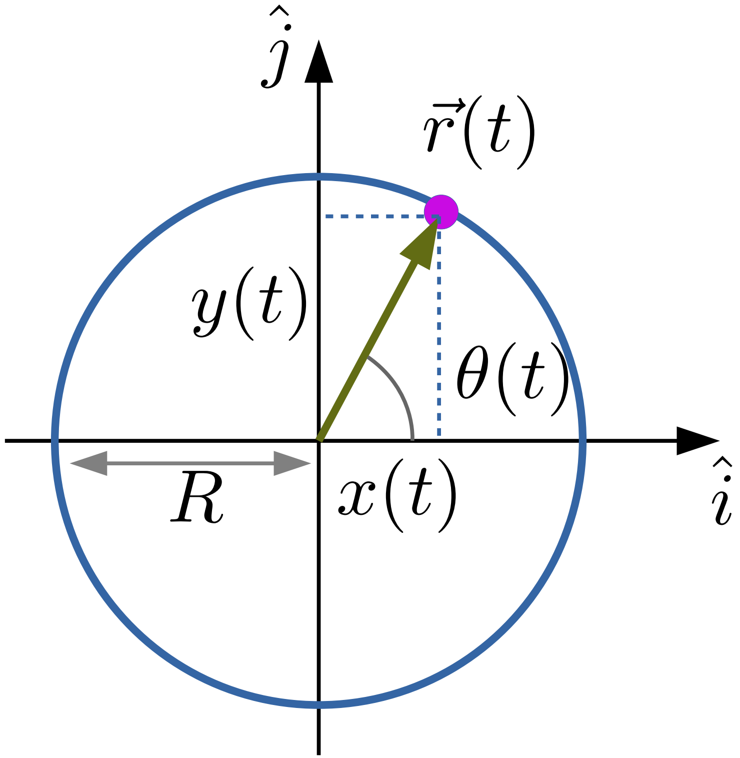
$$R = \frac{2v_0^2 sin\theta cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$$

$$\theta = \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{Rg}{v_0^2}\right) = 0.0606345^o = 1.06 \times 10^{-3} rad$$

Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Partícula move-se sobre o círculo de raio R
- Posição da partícula é dada pelo vetor ***r***(t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$
$$= R\ cos(\theta(t))\hat{i} + R\ sen(\theta(t))\hat{j}$$



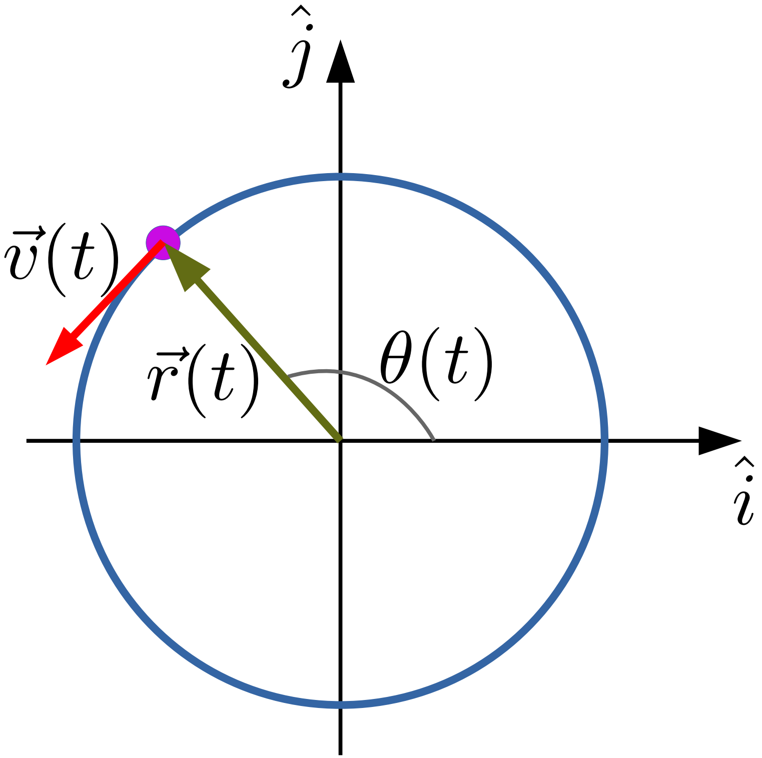
- Tamanho (norma) do vetor ***r***(t) é constante = R:

$$|\vec{r}(t)| = \left[x^2(t) + y^2(t)\right]^{1/2}$$
$$= \left[R^2\left(cos^2(\theta(t)) + sen^2(\theta(t))\right)\right]^{1/2}$$
$$= R$$

Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- A *velocidade (frequência) angular* do movimento MCU é constante

$$\omega = \frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\theta}$$



- O período do movimento MCU é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi \times f \quad , \quad f = \frac{1}{T}$$

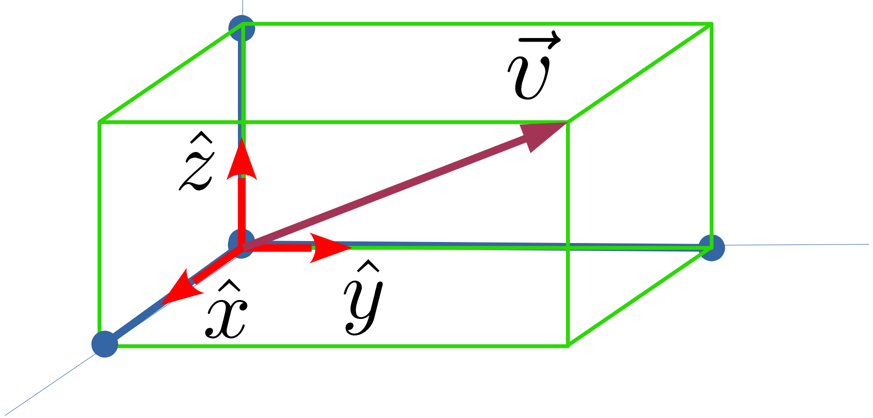
- com ω em rad/s.
- O vetor velocidade ***v***(t) é tangente à trajetória

Diferentes sistemas de coordenadas.

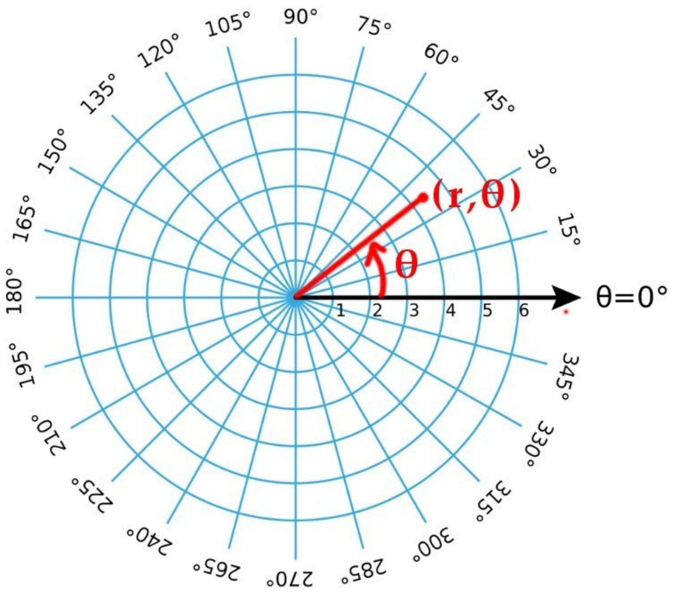
- Existem diversos sistemas de coordenadas. Dois exemplos:

Sistema retangular cartesiano (3D)

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$



Sistema curvilíneo polar (2D)



$$\vec{r} = (r, \theta)$$

O sistema polar é muito útil para descrever movimentos circulares

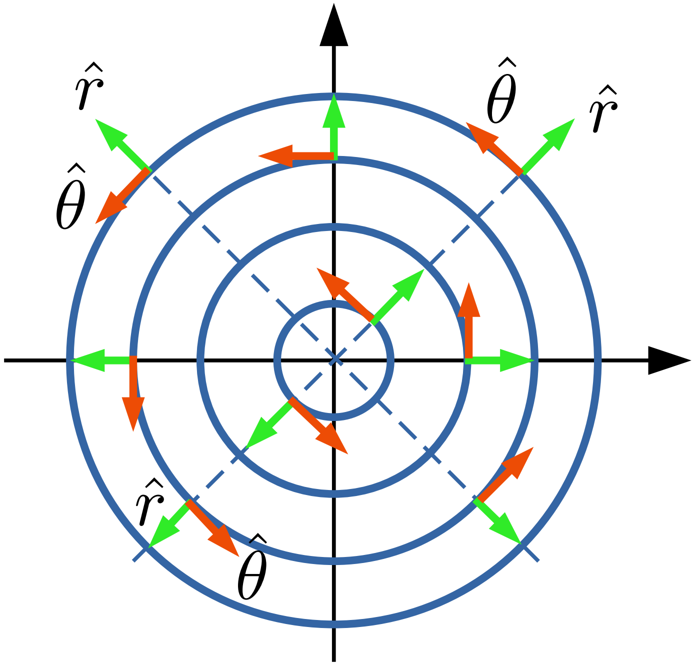
Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Sistema de coordenadas curvilíneas polares.
- No sistema polar de coordenadas, temos:

$$\hat{r} = cos(\theta)\hat{i} + sen(\theta)\hat{j}$$

$$|\hat{r}| = \left[cos^2\theta + sen^2\theta\right]^{1/2} = 1$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



$$\hat{\theta} = -sen(\theta)\hat{i} + cos(\theta)\hat{j}$$

$$|\hat{\theta}| = \left[sen^2\theta + cos^2\theta\right]^{1/2} = 1$$

$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = cos\theta(-sen\theta) + sen\theta cos\theta = 0 \Longrightarrow \hat{r} \perp \hat{\theta}$ em qualquer ponto.

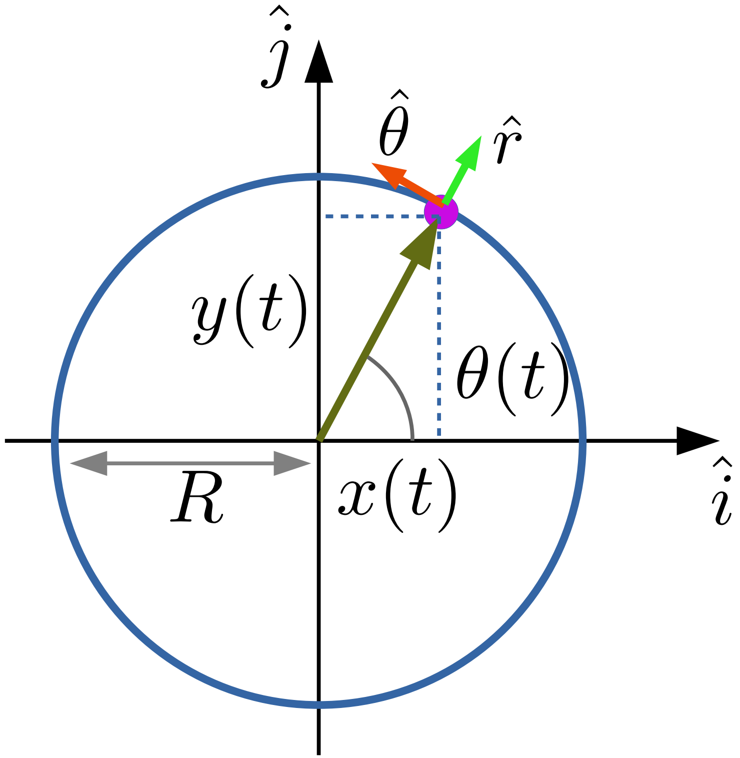
Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Vetor posição:
- Coordenadas retangulares CARTESIANAS:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$
$$= R\ cos(\theta(t))\hat{i} + R\ sen(\theta(t))\hat{j}$$

- Coordenadas curvilíneas POLARES:

$$\vec{r}(t) = R\left\{cos(\theta(t))\hat{i} + sen(\theta(t))\hat{j}\right\}$$
$$= R\ \hat{r}(\theta(t))$$



Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Derivadas de funções trigonométricas

$$\frac{d}{d\theta}cos\theta = -sen\theta \quad , \quad \frac{d}{d\theta}sen\theta = cos\theta$$

- No movimento circular uniforme $\theta = \omega\ t$,

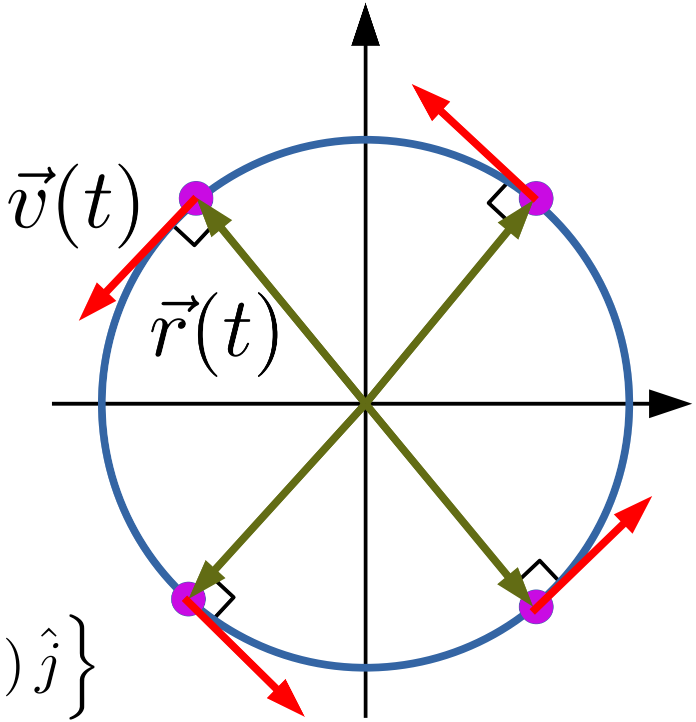
  portanto

$$\frac{d}{dt}cos\left(\theta(t)\right) = \frac{d}{d\theta}cos\theta \times \frac{d}{dt}\theta(t) = -sen\left(\theta(t)\right)\ \omega$$

$$\frac{d}{dt}sen\left(\theta(t)\right) = \frac{d}{d\theta}sen\theta \times \frac{d}{dt}\theta(t) = cos\left(\theta(t)\right)\ \omega$$

Movimento Circular Uniforme

Cinemática



- Posição: $\vec{r}(t) = R\,\hat{r}(\theta)$

- Velocidade: $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$

$$= R\,\frac{d}{dt}\hat{r}(\theta)$$

$$= R\,\frac{d}{dt}\left\{cos\left(\theta(t)\right)\hat{i} + sen\left(\theta(t)\right)\hat{j}\right\}$$

$$= R\left\{-\omega\; sen(\theta(t))\hat{i} + \omega\; cos(\theta(t))\hat{j}\right\}$$

$$= R\,\omega\;\hat{\theta} = v\hat{\theta}$$

$\therefore v = \omega R$, na direção de $\hat{\theta}(t)$

Movimento Circular Uniforme

Cinemática

- Velocidade: $\vec{v}(t) = \omega R\ \hat{\theta}(t)$

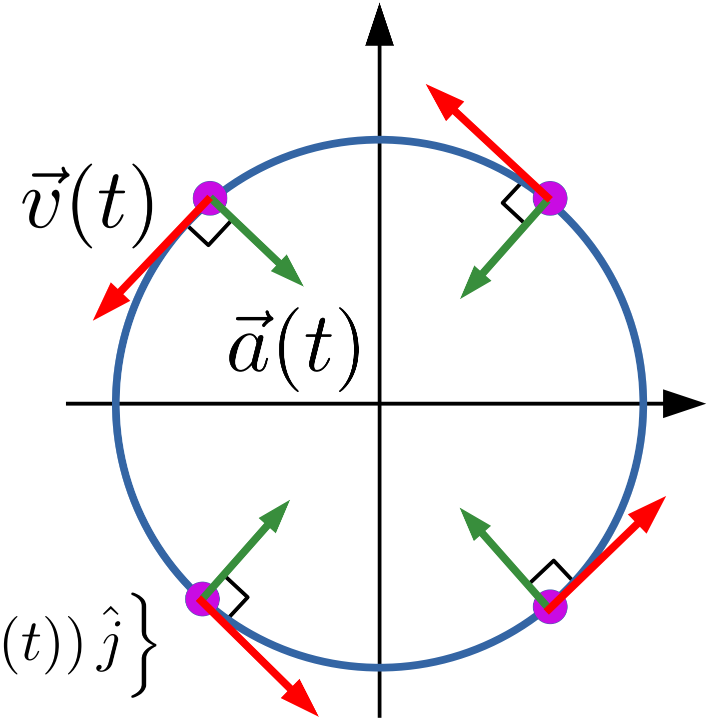
- aceleração: $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{v}(t)$

$$= \omega R\ \frac{d}{dt}\hat{\theta}$$

$$= \omega R\ \frac{d}{dt}\left\{-sen\left(\theta(t)\right)\hat{i} + cos\left(\theta(t)\right)\hat{j}\right\}$$

$$= \omega R\left\{-\omega\ cos(\theta(t))\hat{i} - \omega\ sen(\theta(t))\hat{j}\right\}$$

$$= \omega^2 R\,(-\hat{r}) = a\,(-\hat{r})$$



$\therefore a = \omega^2 R = v^2/R$, na direção do centro do círculo.

Movimento Circular Uniforme

Cinemática

- Posição: $\vec{r}(t) = R\ \hat{r}(t)$

- Velocidade: $\vec{v}(t) = \omega R\ \hat{\theta}(t)$

- Aceleração: $\vec{a}(t) = \omega^2 R\,(-\hat{r}(t)) = \dfrac{v^2}{R}\,(-\hat{r}(t))$

Movimento Circular Uniforme

Exemplo:

Em t_1 = 2,0 s, a aceleração de uma partícula em movimento circular no sentido anti-horário é (6,0 m/s²)î + (4,0 m/s²)ĵ. A partícula se move com velocidade escalar constante. Em t_2 = 5,0 s, a aceleração é (4,0 m/s²)î + (-6,0 m/s²)ĵ. Qual é o raio da trajetória da partícula se a diferença t_2-t_1 é menor que um período de rotação?

- No instante t_1=2,0 s:

$$\vec{a}_1 = (6.0, 4.0)\frac{m}{s^2}$$

$$\implies \hat{a}_1 = -\hat{r}_1 = \left(\frac{6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}\right)$$

$$\therefore \hat{r}_1 = \left(\frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{-4}{\sqrt{52}}\right)$$

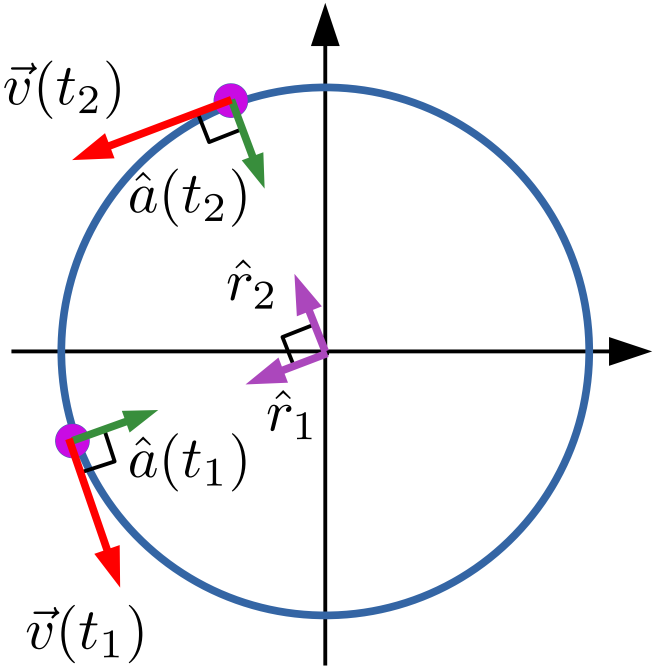
- No instante t_2 = 5,0 s:

$$\vec{a}_2 = (4.0, -6,0)\frac{m}{s^2}$$

$$\implies \hat{a}_2 = -\hat{r}_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{-6}{\sqrt{52}}\right)$$

$$\therefore \hat{r}_2 = \left(\frac{-4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}}\right)$$

$$\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = 0 \implies \hat{r}_1 \perp \hat{r}_2$$



$$a = \omega^2 R$$

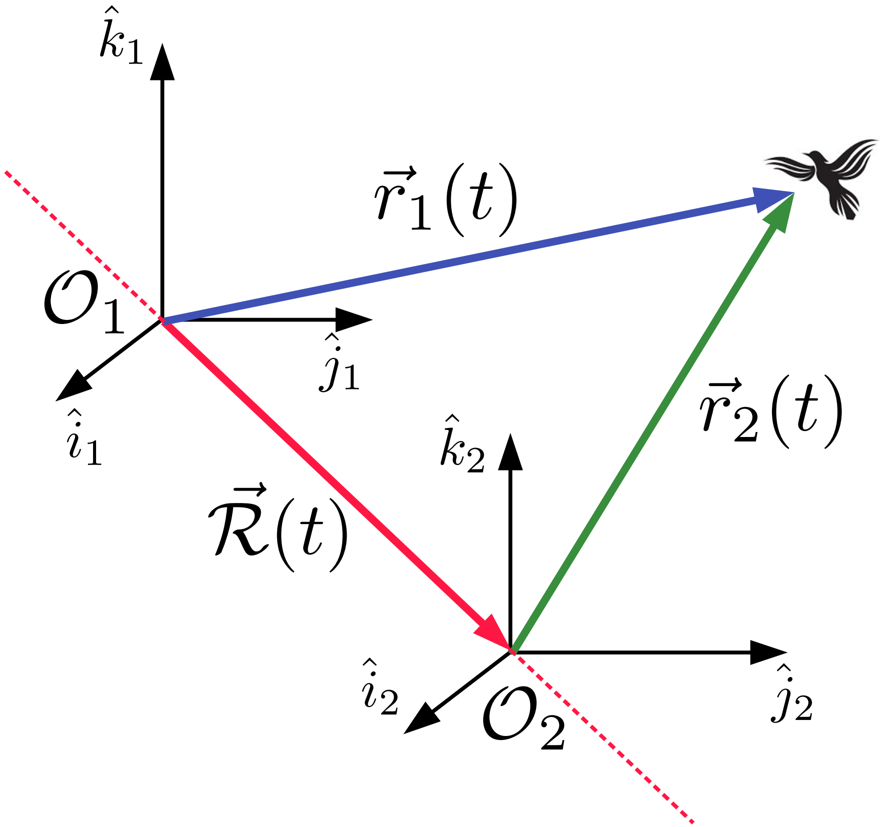
$$a = \sqrt{52}\frac{m}{s^2}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{3/2\pi}{3}\frac{rad}{s}$$

$$R = \frac{a}{\omega^2} = 2.923\ m$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em referenciais inerciais diferentes:

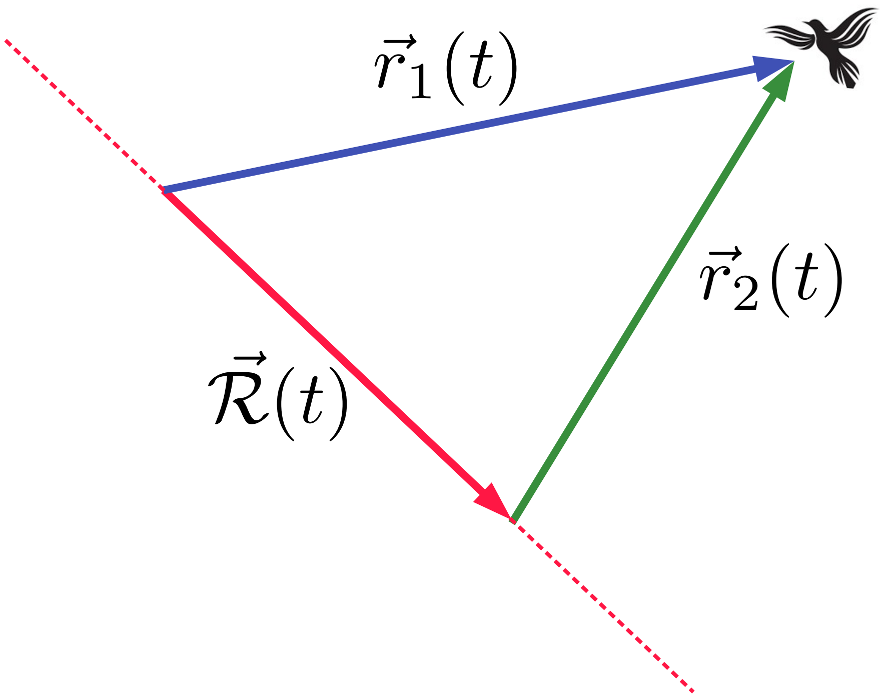


- Referenciais O_1 e O_2 movem-se entre si com movimento retilíneo e uniforme (MRU)
- Objeto visto pelo observador em O_1: $\vec{r}_1(t)$
- Objeto visto pelo observador em O_2: $\vec{r}_2(t)$
- Posição relativa entre O_1 e O_2: $\vec{\mathcal{R}}(t)$
- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em referenciais inerciais;



- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:

$$\boxed{\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)}$$

ou

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{\mathcal{R}}(t)$$

- Velocidade do objeto:

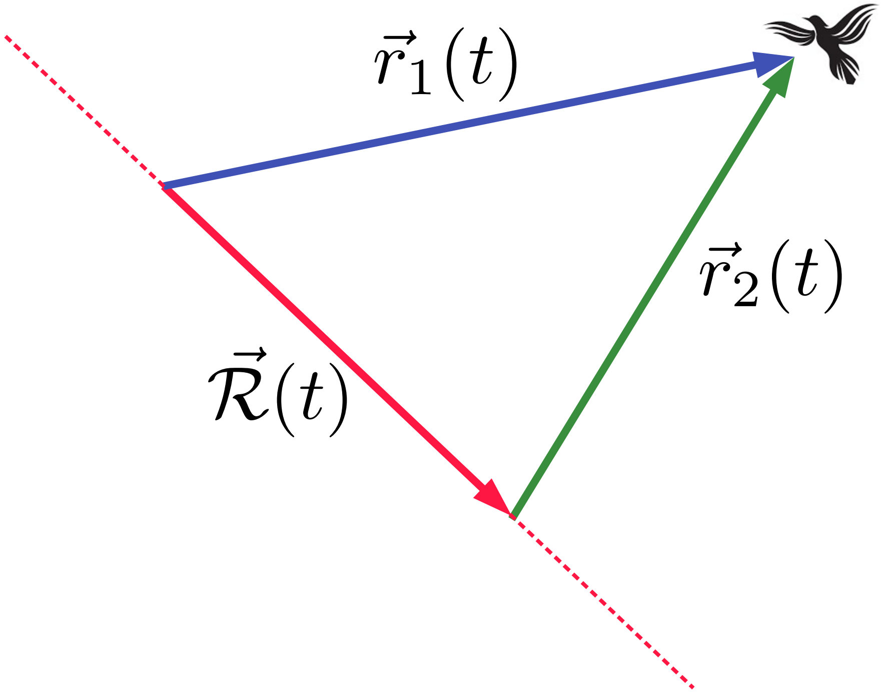
$$\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t) = \frac{d}{dt}\left\{\vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)\right\}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_2(t) + \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{R}}(t)$$

$$\boxed{\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)}$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em ***referenciais inerciais***;



- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:

$$\boxed{\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)}$$

$$\boxed{\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)}$$

- Aceleração do objeto:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_1(t) = \frac{d}{dt}\left\{\vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)\right\}$$

$$\vec{a}_1(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_2(t) + \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{V}}(t)$$

$$\boxed{\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t)} \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{V}}(t) = 0}$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em ***referenciais inerciais***;

- Transformações de Galileu entre $\mathcal{O}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{O}_2$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

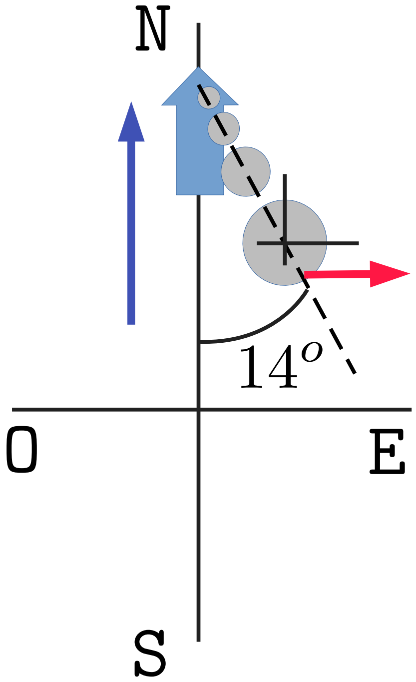
$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)$$

$$\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t)$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

Exemplo:

Um trem viaja para o norte a 120 km/h. A fumaça da locomotiva forma uma trilha que se estende numa direção 14º ao E da direção Sul, com o vento soprando do Oeste. Qual a velocidade do vento?



Deslocamento do trem no referencial fixo: $\Delta r_{trem}(t) = v_{trem}\Delta t$

A fumaça é levada pelo vento, portanto:

$$\Delta r_{fum}(t) = \Delta r_{vento} = v_{vento}\Delta t$$

Pelo esquema, temos:

$$\tan 14^o = \frac{\Delta r_{vento}}{\Delta r_{trem}} = \frac{v_{vento}}{v_{trem}}$$

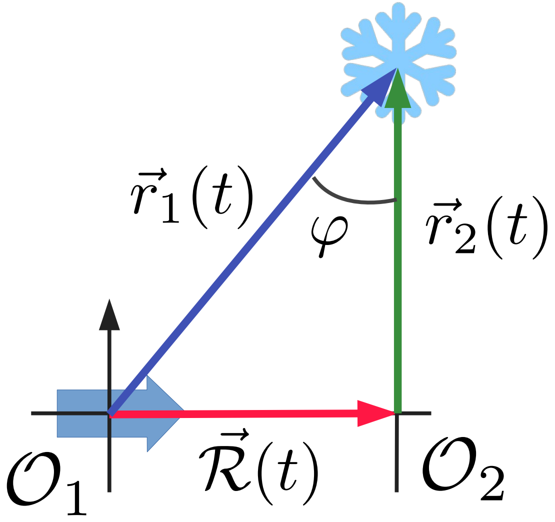
$$\implies v_{vento} = \tan 14^o \times v_{trem} = 29.92\frac{km}{h}$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

Exemplo:

A neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 8,0 m/s. Com que ângulo, em relação à vertical, os flocos de neve parecem estar caindo do ponto de vista do motorista de um carro que viaja em uma estrada plana e retilínea a uma velocidade de 50 km/h?

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$
$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)$$



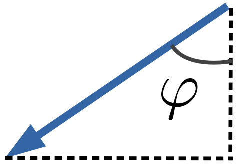
$$\vec{v}_2 = -8,0\frac{m}{s}\hat{j}$$

$$\vec{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{R}} = -50\frac{km}{h}\hat{i}$$, pois $\vec{\mathcal{R}}(t)$ diminui.

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t) \Longrightarrow \vec{v}_1 = (-50, -8 \times 3.6)\frac{km}{h}$$

$\mathcal{O}_1$ = referencial no carro

$\mathcal{O}_2$ = referencial na estrada

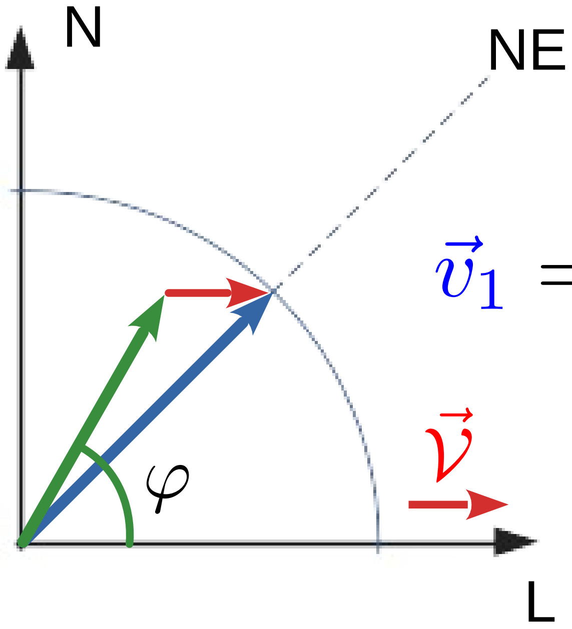


$$tan(\varphi) = \frac{50}{8 \times 3.6} \Longrightarrow \varphi = 60.06^o$$

Movimento Relativo: Transformação de Galileu

Exemplo:

O piloto de uma aeronave planeja voar a uma velocidade de 250 m/s (em relação ao solo) ao longo de uma direção que faz ângulo de 45º com a direção N (sentido nordeste, NE). O serviço de meteorologia informa que o vento está soprando para L (leste) com uma velocidade de 35 m/s. Em qual direção o piloto deve apontar o avião para que sua trajetória em relação ao solo siga a rota planejada na direção NE?



$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{V}$$

$$\vec{v}_1 = 250\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{m}{s}$$

$$\vec{V} = (35, 0)\,\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \vec{V}$$

$$= \left(\frac{250\sqrt{2}}{2} - 35, \frac{250\sqrt{2}}{2}\right)\frac{m}{s}$$

$$tan(\varphi) = \frac{\frac{250\sqrt{2}}{2}}{\frac{250\sqrt{2}}{2} - 35} \implies \varphi = 51.27^o$$