Conservação do Momento Linear

Movimento do Centro de Massa

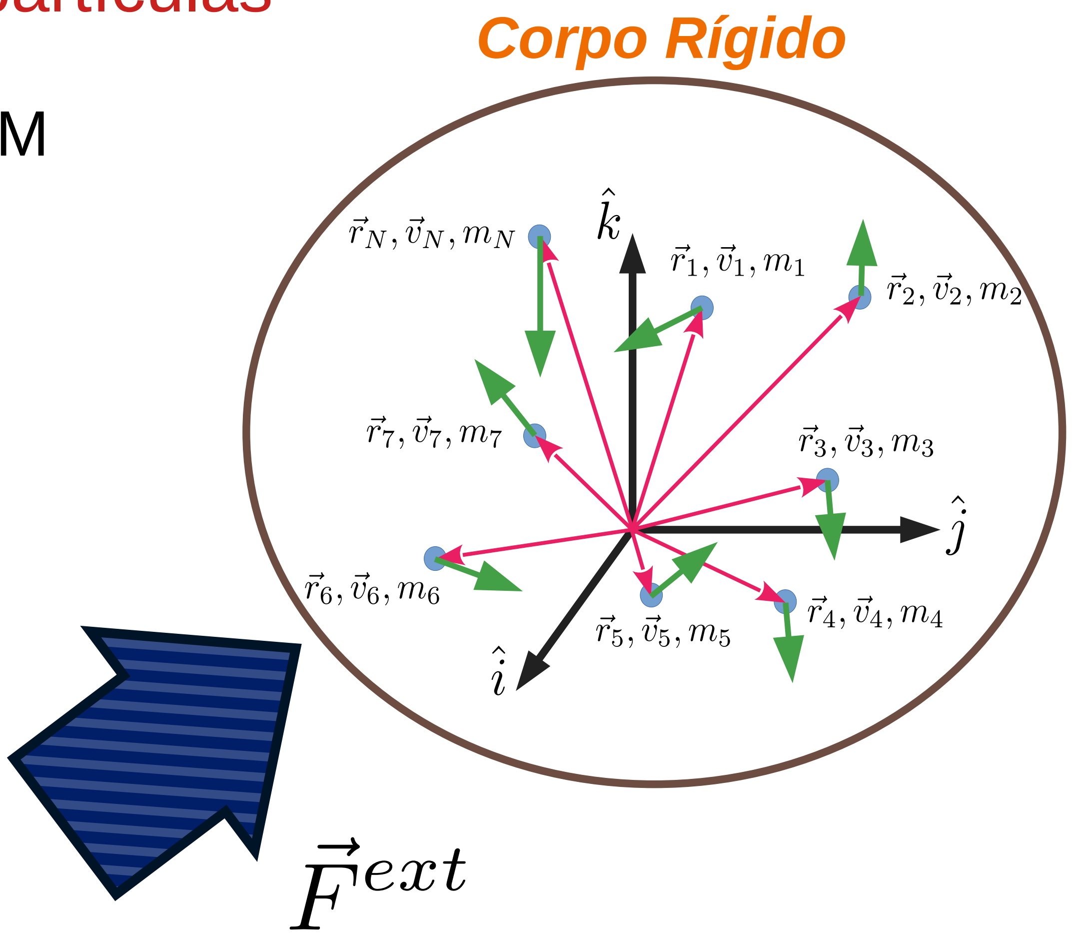
Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Equação de Moviemnto para o CM

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

- Momento do Centro de Massa

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$$



Movimento do Centro de Massa

Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Equação de Moviemnto para o CM

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{R}_{CM}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \vec{V}_{CM}(t_0)t + \frac{\vec{g}}{2}t^2$$

- Trajetória do CM é uma parábola.

Conservação do Momento Linear

- Momento do Centro de Massa

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$$

- No sistema isolado, $\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0$, temos

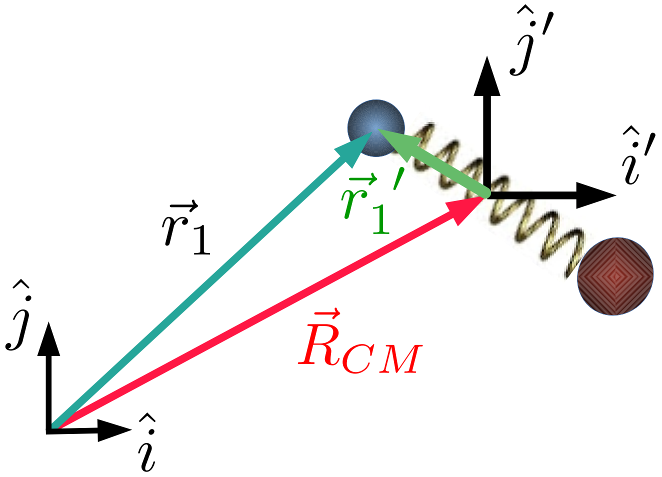
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i^{\,int} = 0$$

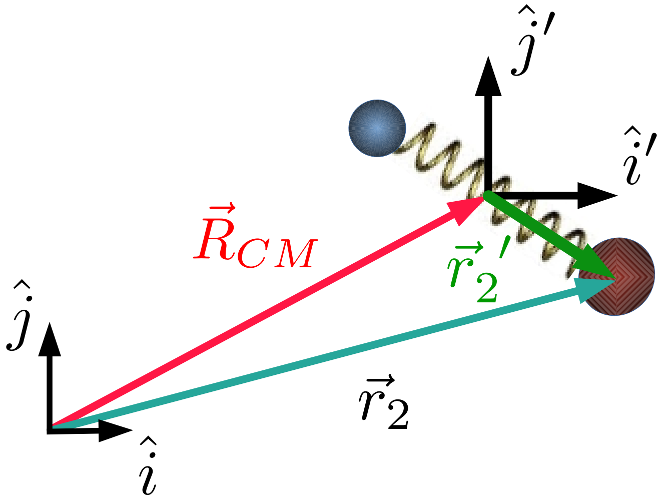
- $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \cdots + \vec{f}_N = 0$

- $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N = \text{Constante} = M\vec{V}_{CM}$

Conservação do Momento Linear

- Mudança para o **Referencial do Centro de Massa**





$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1{}' + \vec{R}_{CM}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2{}' + \vec{R}_{CM}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2{}' + \vec{V}_{CM}$$

Conservação do Momento Linear

- Mudança para o **Referencial do Centro de Massa**

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N = \text{Constante} = M\vec{V}_{CM}$$

$$m_1\left(\vec{v}_1{}' + \vec{V}_{CM}\right) + m_2\left(\vec{v}_2{}' + \vec{V}_{CM}\right) + \cdots + m_N\left(\vec{v}_N' + \vec{V}_{CM}\right) = M\vec{V}_{CM}$$

$$m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N' + (m_1 + m_2 + \cdots + m_N)\,\vec{V}_{CM} = M\vec{V}_{CM}$$

$$m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N' + \cancel{M\vec{V}_{CM}} = \cancel{M\vec{V}_{CM}}$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N' = 0}$$

Conservação do Momento Linear

- Mudança para o **Referencial do Centro de Massa**

$$\boxed{m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N' = 0}$$

- Caso particular, 2 partículas

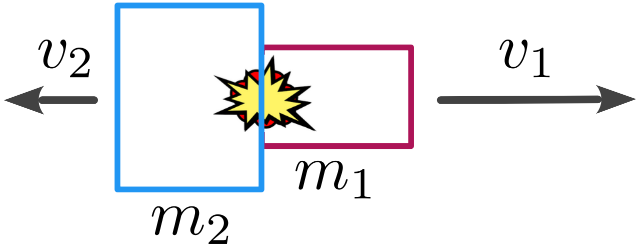
$$m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_1\vec{v}_1{}' = -m_2\vec{v}_2{}'$$

$$\text{se} \;\; m_1 = m_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_1{}' = -\vec{v}_2{}'$$

Conservação do Momento Linear

Exemplo:

Dois veículos espaciais em órbita estão acoplados. A massa de um deles é de 1000 kg e a do outro 2000 kg. Para separá-los, é dotonada entre os dois uma pequena carga explosiva, que comunica uma energia cinética total de 3000 J ao conjunto dos dois veículos, em relação ao centro de massa do sistema. A separação ocorre segundo a linha que une os centros de massa dos dois veículos. Com que velocidade relativa eles se separam um do outro?



Resposta:

Da conservação de momento no Ref. do Centro de Massa, obtemos

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2 \implies v_2 = -\frac{v_1}{2}$$

Da energia cinética do conjunto, considerando-se que $m_2 = 2m_1$, temos

$$K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{3}{4} m_1 v_1^2 = 3000 \ J$$

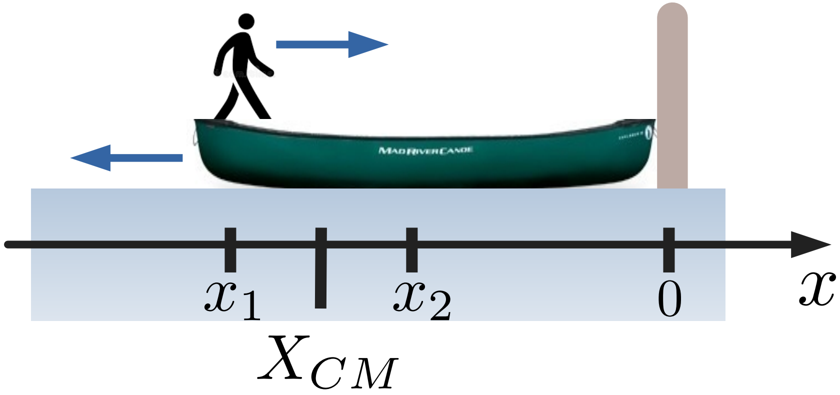
$$\therefore v_1 = 2\frac{m}{s} \implies v_2 = -1\frac{m}{s}$$

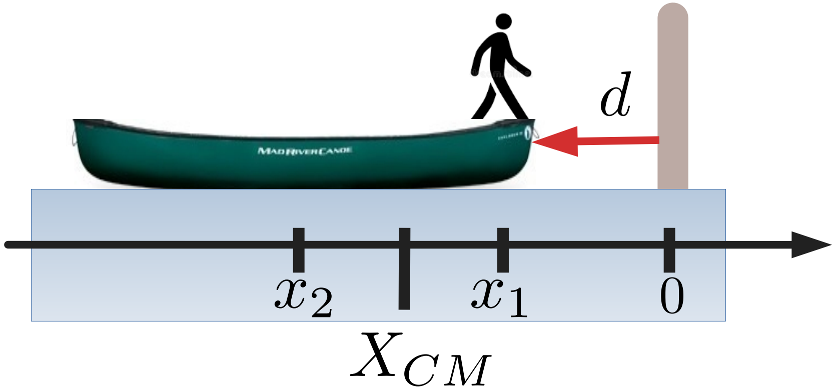
$$\boxed{v_{rel} = v_1 - v_2 = 3\frac{m}{s}}$$

Conservação do Momento Linear

Exemplo:

Uma pessoa de 75 kg está sentada na popa (parte traseira) de uma canoa de 150 kg e 3 m de comprimento. A canoa está parada perpendicularmente à margem de um lago, com a proa (parte dianteira) encostada numa estaca onde o remador quer amarrar a canoa. Ele se levanta e caminha até a proa, o que leva a canoa a afastar-se da margem. Chegando à proa, ele conseque esticando o braço, alcançar até uma distância de 80 cm da proa. Conseguirá agarrar a estaca? Caso contrário, quanto falta? Considere o CM da canoa como localizado em seu ponto médio e despreze a resistência da água.



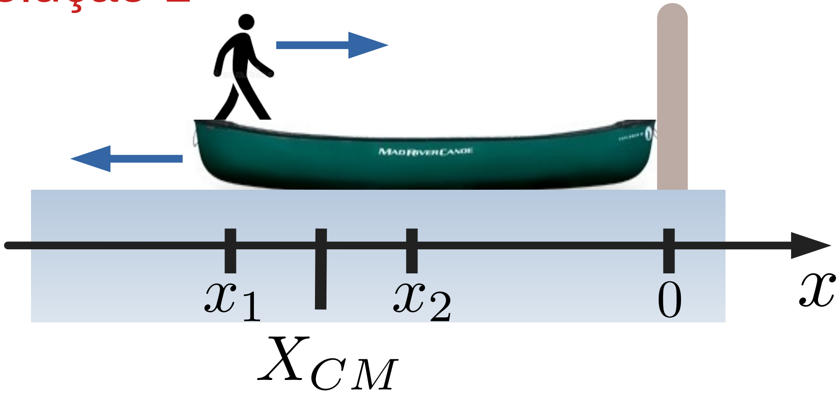


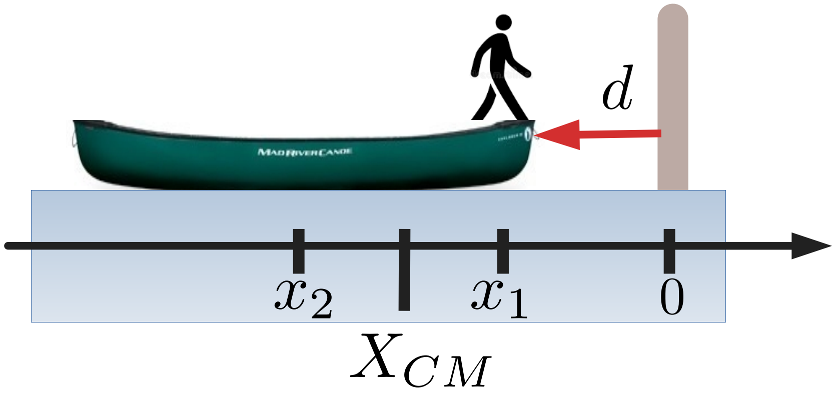
O centro de massa, X_{CM}, permance fixo.

Conservação do Momento Linear

Exemplo:

Solução 1





Antes do movimento, temos para o centro de massa

$$X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{75(-3) + 150(-1.5)}{225} m = -2\ m$$

O centro de massa permanece parado, portanto, depois do movimento

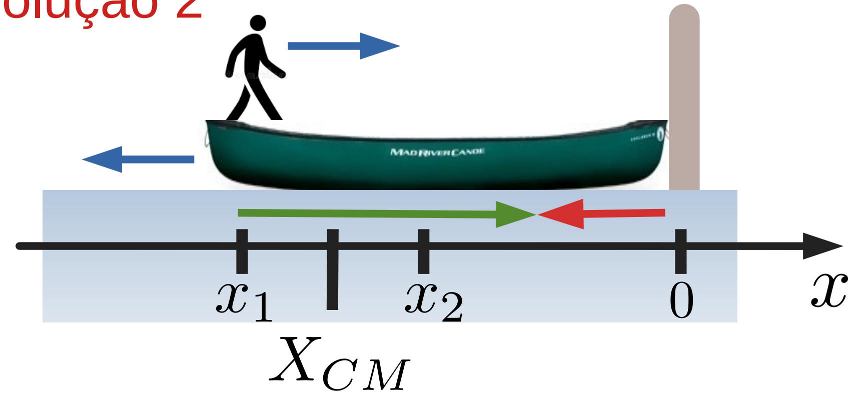
$$X_{CM} = -2\ m = \frac{75(-d) + 150(-1.5 - d)}{225} m = -1m - d$$

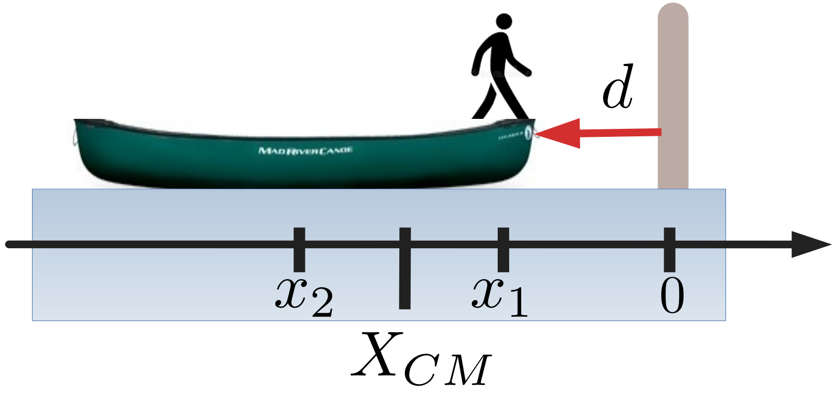
$$-2m = -1m - d \implies \boxed{d = -1m}$$

Conservação do Momento Linear

Exemplo:

Solução 2





Movimento em relação ao referencial do CM:

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$m_1 \int v_1 dt = -m_2 \int v_2 dt$$

$$m_1 \Delta x_1 = -m_2 \Delta x_2 \qquad (I)$$

Movimento em relação ao referencial do barco:

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 3m \Longrightarrow \Delta x_2 = \Delta x_1 - 3 \qquad (II)$$

De volta para (I), com (II),

$$m_1 \Delta x_1 = -m_2 \left(\Delta x_1 - 3\right)$$

$$\left(m_1 + m_2\right) \Delta x_1 = 3\ m_2$$

$$\Delta x_1 = \frac{m_2}{m_1+m+1} 3m = \boxed{+2m}$$

Colisões

Colisões

Impulso

- Definição, a partir das Leis de Newton

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

- Impulso devido a uma força F

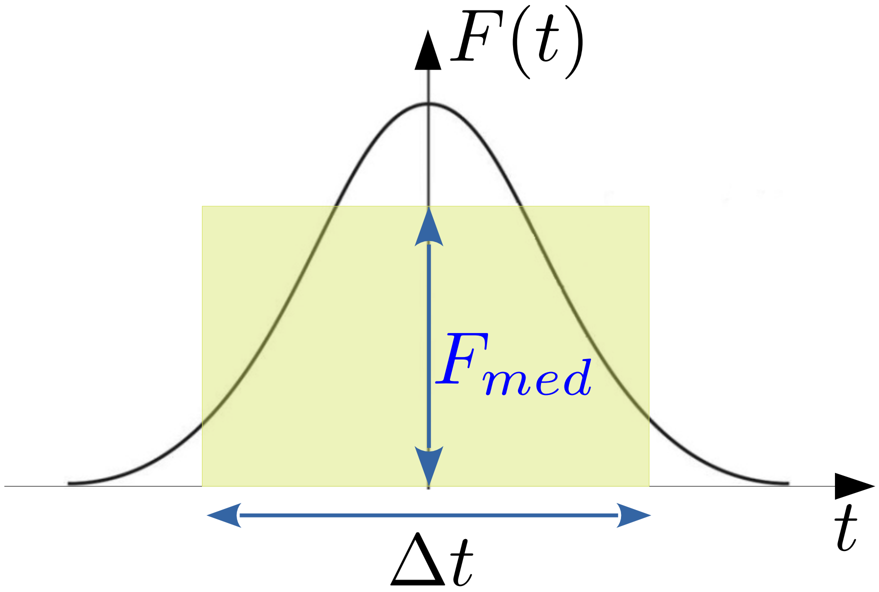
$$\vec{I} = \int d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

- Impulso devido a uma força média

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{med}(t)dt = \vec{F}_{med}\Delta t$$

The kicking action (Lees & Nolan, 1998)



Colisões

Impulso

- Definição, a partir das Leis de Newton

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{p} = \vec{F}(t)dt$$

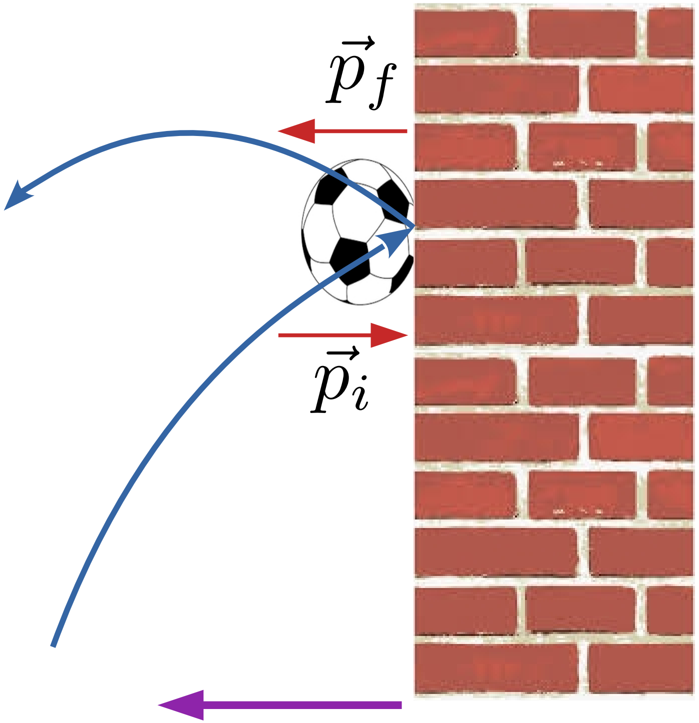
- Impulso devido a uma força F

$$\vec{I} = \int d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

- Impulso devido a uma força média

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{med}(t)dt = \vec{F}_{med}\Delta t$$



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisões:

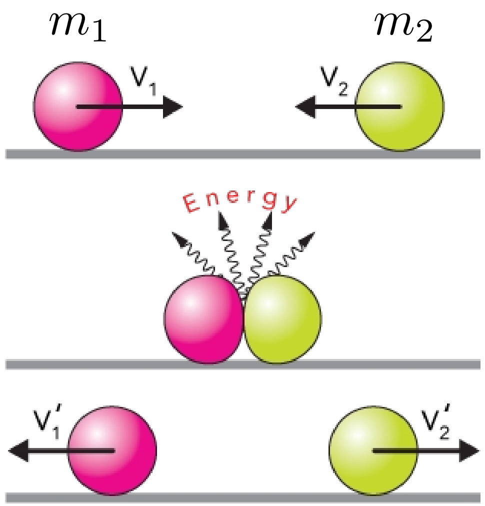
- Processo através do qual 2 ou mais corpos interagem por um breve intervalo de tempo, em que ocorre troca de momento e energia;
- Vamos nos concentrar no caso de colisões entre 2 corpos;
- Para duas partículas as colisões podem ser unidimensionais ou bidimensionais;
- Colisões ***sempre conservam a quantidade de movimento*** (momento) do sistema, ou do centro de massa;
- Colisões ***nem sempre conservam a energia mecânica*** do sistema.

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisões:

- Colisões ***sempre conservam a quantidade de movimento*** (momento), ***nem sempre conservam a energia mecânica*** do sistema.
- Momento e energia cinética do sistema de 2 partículas:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad , \quad K = K_{rel} + K_{CM}$$



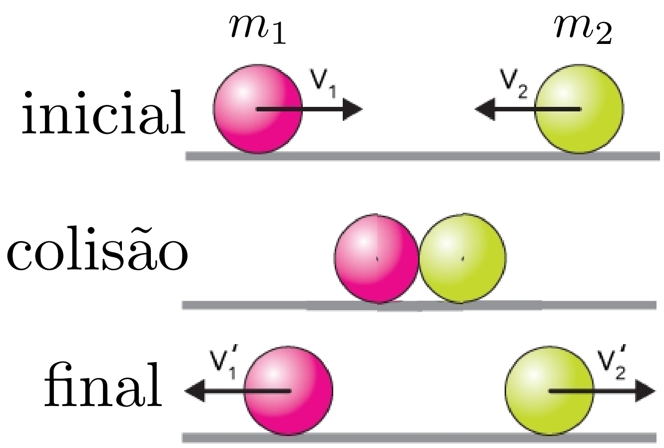
- Colisão elástica: $\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad K_f = K_i$
- Colisão inelástica: $\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad K_f < K_i$
- Colisão perfeitamente inelástica: $\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad K_f = K_{CM}$

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisões:

- Momento e energia cinética do sistema de 2 partículas:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad , \quad K = K_{rel} + K_{CM}$$



- Colisão **elástica** em 1 dimensão:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad K_f = K_i$$

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão elástica em 1 dimensão:

- Casos particulares:
- **Alvo parado**: $v_2 = 0$

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + \cancel{m_2 v_2} \quad \Longrightarrow \quad m_1 \left(v_1 - v_1'\right) = m_2 v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \quad \Longrightarrow \quad m_1 \left(v_1 + v_1'\right)\left(v_1 - v_1'\right) = m_2 {v_2'}^2$$

- Resolvendo o sistema de equações

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad\qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1}$$

- Se m_1=m_2=m: $v_1' = 0 \quad v_2' = v_1$

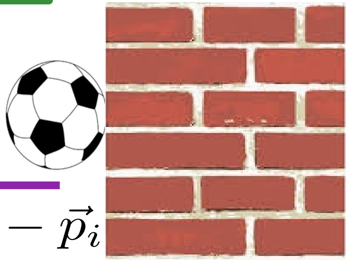
Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão elástica em 1 dimensão:

- Casos particulares:
- **Alvo parado**: $v_2 = 0$

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1}$$

- Se $m_1 = m_2 = m$: $v_1' = 0 \quad v_2' = v_1$
- Alvo pesado, $m_1 \ll m_2$: $v_1' \approx -v_1 \quad v_2' \approx 0$



$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

- Projétil pesado, $m_1 \gg m_2$: $v_1' \approx v_1 \quad v_2' \approx 2v_1$

veja o vídeo https://www.youtube.com/watch?v=2UHS883_P60

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão elástica em 1 dimensão:

- **Alvo em movimento**:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2 \implies m_1 \left(v_1 - v_1'\right) = m_2 \left(v_2' - v_2\right) \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 \\ = \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{matrix}\right\} \implies \left\{\begin{matrix} m_1 \left(v_1 + v_1'\right)\left(v_1 - v_1'\right) \\ = \\ -m_2 \left(v_2' + v_2\right)\left(v_2' - v_2\right) \end{matrix}\right. \qquad \text{(II)}$$

- Dividindo (II) por (I), obtemos

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

Video: Pêndulo de Newton

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão perfeitamente Inelástica:

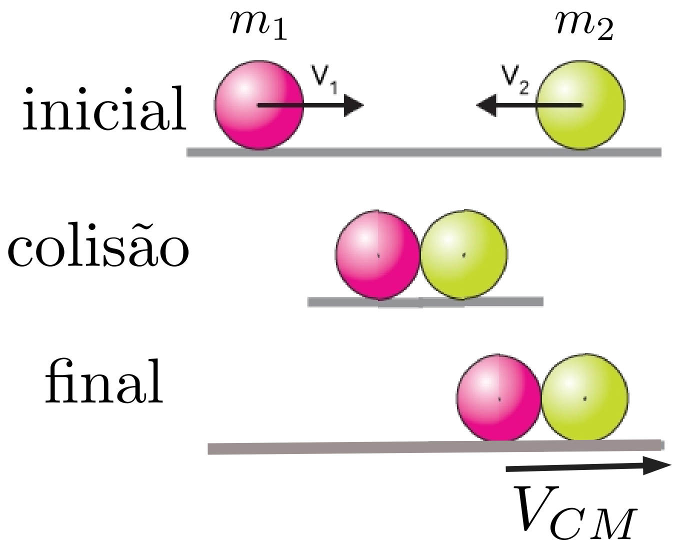
- Momento e energia das 2 partículas:

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad K_f = K_{CM}$$

- Velocidades depois da colisão:

$$v_1' = v_2' = V_{CM}$$

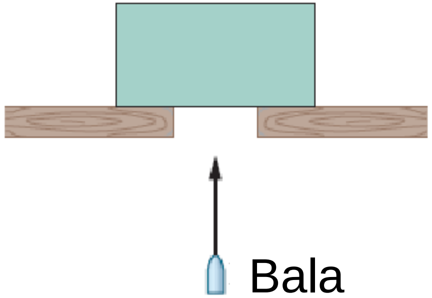
$$V_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Uma bala de 10 g que se move verticalmente para cima a 1000 m/s se choca com um bloco de 5,0 kg inicialmente em repouso, passa pelo centro de massa do bloco e sai do outro lado com uma velocidade de 400 m/s. Qual é a altura máxima atingida pelo bloco em relação à posição inicial?



Reposta:

Colisão inelástica, não ocorre conservação de energia cinética, apenas conservação de momento.

$$P_f = P_i$$

$$mv' + MV' = mv + \cancel{MV} \Longrightarrow V' = \frac{mv - mv'}{M} = 1.2\frac{m}{s}$$

Altura máxima atingida pelo bloco:

$$Mgh = \frac{1}{2}MV'^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{V'^2}{2g} = 73\ cm$$

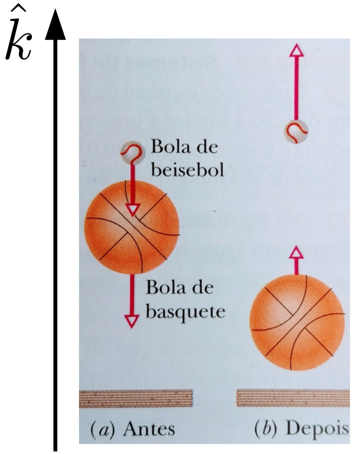
Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Uma pequena esfera de massa m está verticalmente acima de uma bola maior, de massa M = 0.63 kg, e as duas são deixadas cair simultaneamente de uma altura h = 1.8 m. (Suponha que os raios das bolas são desprezíveis em comparação com h). (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de m faz com que a bola maior pare momentaneamente no instante em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge menor?

Resposta:

(a)



- Antes: as duas bolas caem juntas com a ***mesma velocidade v***, pois são ambas aceleradas por g.
- A bola grande choca-se com o chão primeiro e inverte sua velocidade (-v →+v) numa colisão elástica com alvo de massa infinita.
- A bola pequena, em movimento para baixo, choca-se com a grande, em movimento para cima.
- Equações para esta colisão, na próxima página.

Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Uma pequena esfera de massa m está verticalmente acima de uma bola maior, de massa M = 0.63 kg, e as duas são deixadas cair simultaneamente de uma altura h = 1.8 m. (Suponha que os raios das bolas são desprezíveis em comparação com h). (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de m faz com que a bola maior pare momentaneamente no instante em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge menor?

Resposta:

(a) conservação de momento (I):

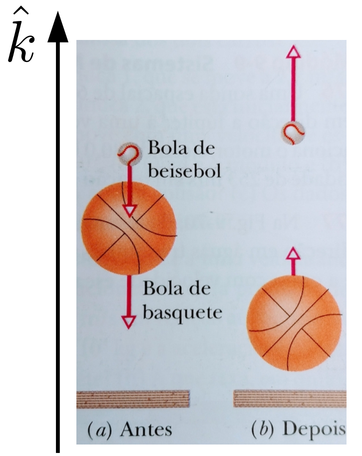
$$P_i = P_f \Longrightarrow -mv + Mv = mv' \Longrightarrow Mv = m\left(v' + v\right)$$

Conservação de energia cinética (II):

$$K_i = K_f \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \Longrightarrow Mv^2 = m(v' - v)(v' + v)$$

Dividindo (II) por (I), obtemos (III):

$$v = v' - v \Longrightarrow v' = 2v$$



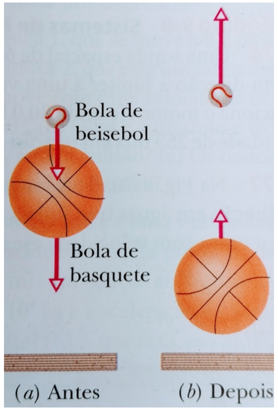
Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Uma pequena esfera de massa m está verticalmente acima de uma bola maior, de massa M = 0.63 kg, e as duas são deixadas cair simultaneamente de uma altura h = 1.8 m. (Suponha que os raios das bolas são desprezíveis em comparação com h). (a) Se a bola maior ricocheteia elasticamente no chão e depois a bola menor ricocheteia elasticamente na maior, que valor de m faz com que a bola maior pare momentaneamente no instante em que colide com a menor? (b) Nesse caso, que altura atinge menor?

Resposta:

$\hat{k}$



Substituindo (III) em (I)

$$\left.\begin{aligned} Mv &= m\left(v' + v\right) \\ v' &= 2v \end{aligned}\right\} \quad m(2v+v) = Mv \Longrightarrow m = \frac{M}{3} = 0.21kg$$

(b) Como as colisões são elásticas, a energia mecânica se conserva.

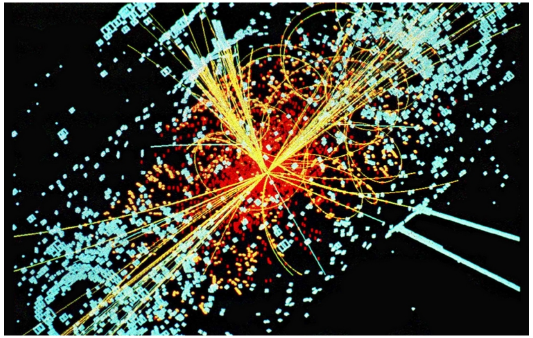
- Antes: $mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2$
- Depois: $mgh_2 = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(2v)^2$

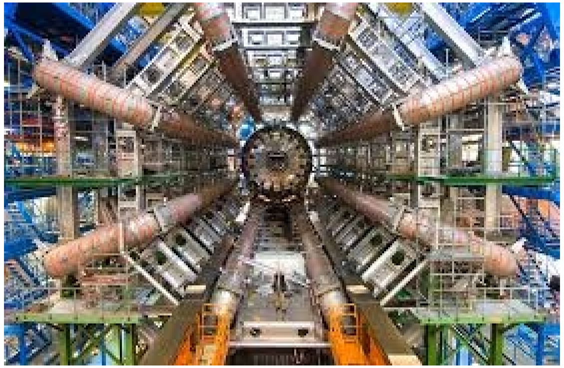
$$\left.\begin{aligned} mgh_1 &= \tfrac{1}{2}mv^2 \\ mgh_2 &= \tfrac{1}{2}mv'^2 = \tfrac{1}{2}m(2v)^2 \end{aligned}\right\} E_{\text{depois}} \Longrightarrow h_2 = 4h_1 = 7.2m$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

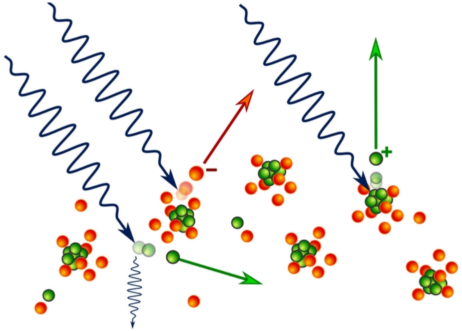
Colisões: problema onipresente

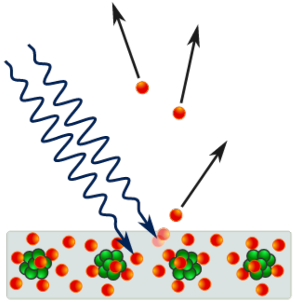
Interação entre partículas elementares



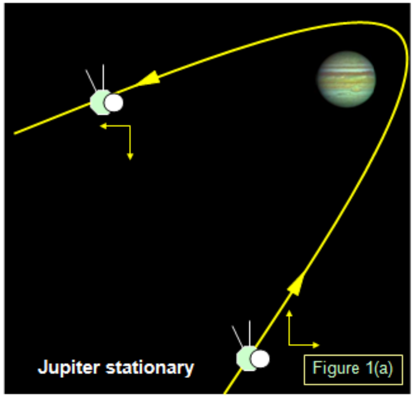


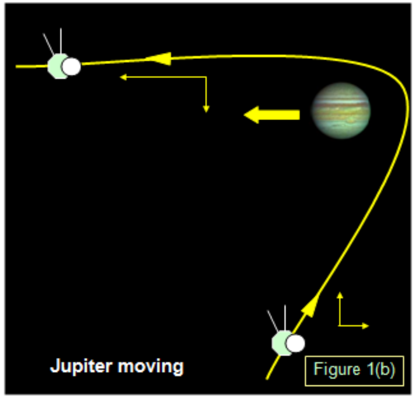
Interação da radiação com a matéria

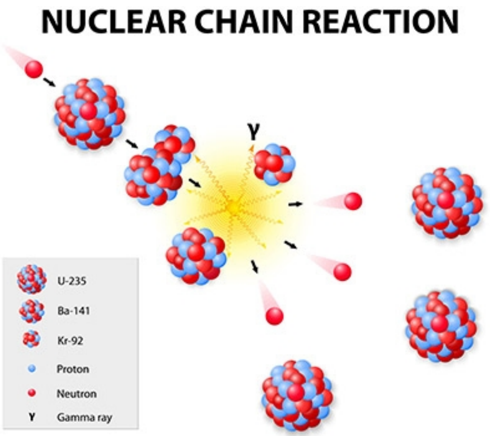




Assistência gravitacional



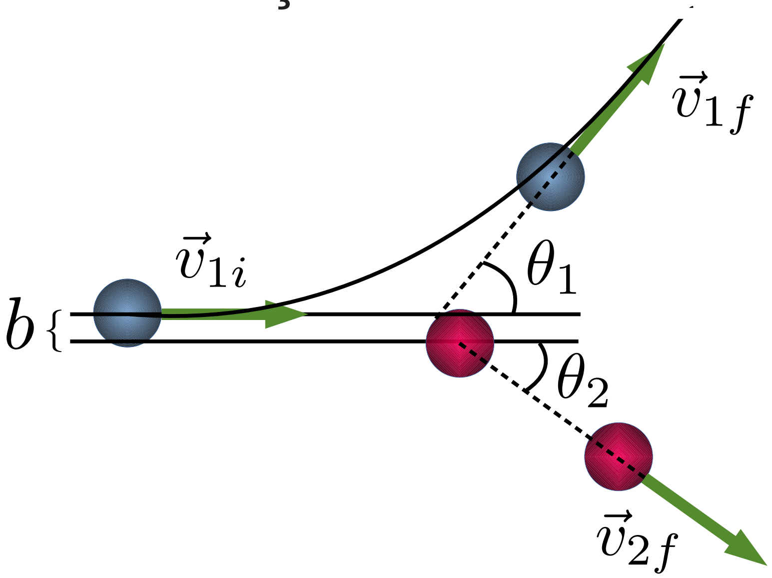




Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão em 2 dimensões:

- **Alvo parado**: $\vec{v}_{2i} = 0$
- Construção do modelo



$b \equiv$ parâmetro de impacto

$b = 0$, colisão frontal

Conservação de Momento

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i$$

$$\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{p}_{1i} \Longrightarrow \text{plano de colisão}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_{1i}$$

Colisão Elástica $\Rightarrow$ Conservação de Energia

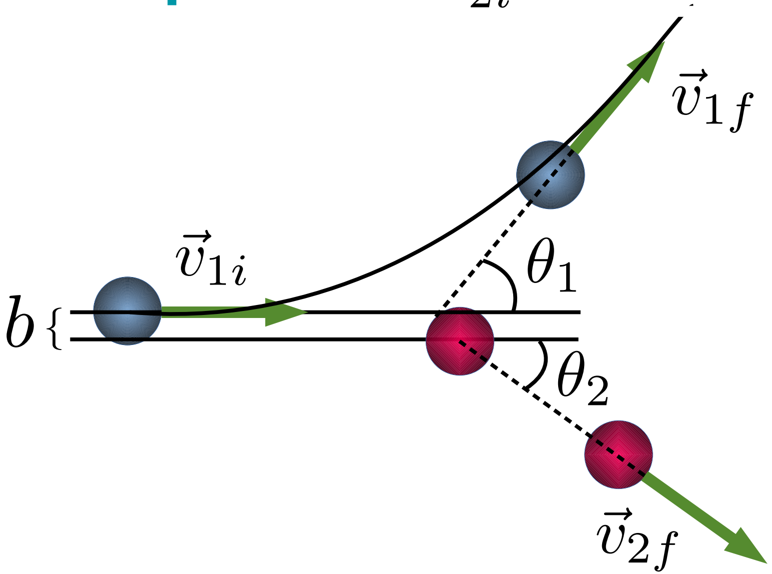
$$K_f = K_i$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$$

Momento e Energia Cinética em Colisões

Colisão em 2 dimensões:

- **Alvo parado**: $\vec{v}_{2i} = 0$



$$\hat{x}: \ m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2 = m_1 v_{1i}$$

$$\hat{y}: \ m_1 v_{1f}\text{sen}\theta_1 + m_2 v_{2f}\text{sen}\theta_2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$$

- 3 equações, 4 incógnitas: $\theta_1, \ \theta_2, \ v_{1f}, \ v_{2f}$

Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Um átomo de hidrogênio, movendo-se com velocidade v, colide elasticamente com uma molécula de hidrogênio em repouso, sofrendo uma deflexão de 45º. Calcule: (a) a magnitude da velocidade do átomo após a colisão; (b) a direção do movimento da molécula.

Resposta: (a) Conservação do momento,

Na direção x: $$mv = mv_1'\cos(45) + 2mv_2'\cos\theta_2 \Longrightarrow v - v_1'\frac{\sqrt{2}}{2} = 2v_2'\cos\theta_2 \qquad \text{(I)}$$

Na direção y: $$0 = mv_1'\sin(45) - 2mv_2'\sin\theta_2 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}v_1' = 2v_2'\sin\theta_2 \qquad \text{(II)}$$

Da conservação de energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}2mv_2'^2 \Longrightarrow v^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \qquad \text{(III)}$$

Fazendo (I)² + (II)², e utilizando o resultado (III) obtemos

$$\left(v - v_1'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{v_1'^2}{2} = 4v_2'^2 \overset{(III)}{\Longrightarrow} \left(v - v_1'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{v_1'^2}{2} = 2\left(v^2 - v_1'^2\right)$$

Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Um átomo de hidrogênio, movendo-se com velocidade v, colide elasticamente com uma molécula de hidrogênio em repouso, sofrendo uma deflexão de 45o. Calcule: (a) a magnitude da velocidade do átomo após a colisão; (b) a direção do movimento da molécula.

Resposta: (a)

Fazendo (I)2 + (II)2, e utilizando o resultado (III) obtemos

$$\left(v - v_1' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{v_1'^2}{2} = 4v_2'^2 \stackrel{(III)}{\Longrightarrow} \left(v - v_1' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{v_1'^2}{2} = 2\left(v^2 - v_1'^2\right)$$

Um equação do 2o grau em v'₁: $3v_1'^2 - \sqrt{2}vv_1' - v^2 = 0$

A única raiz positiva nos dá a magnitude da velocidade do átomo após a colisão: $v_1' = 0.8589v$

Da equação (III) obtemos $v_2' = 0.362v$

(b) Da equação (II) obtemos $\theta_2 = -57.1^o$