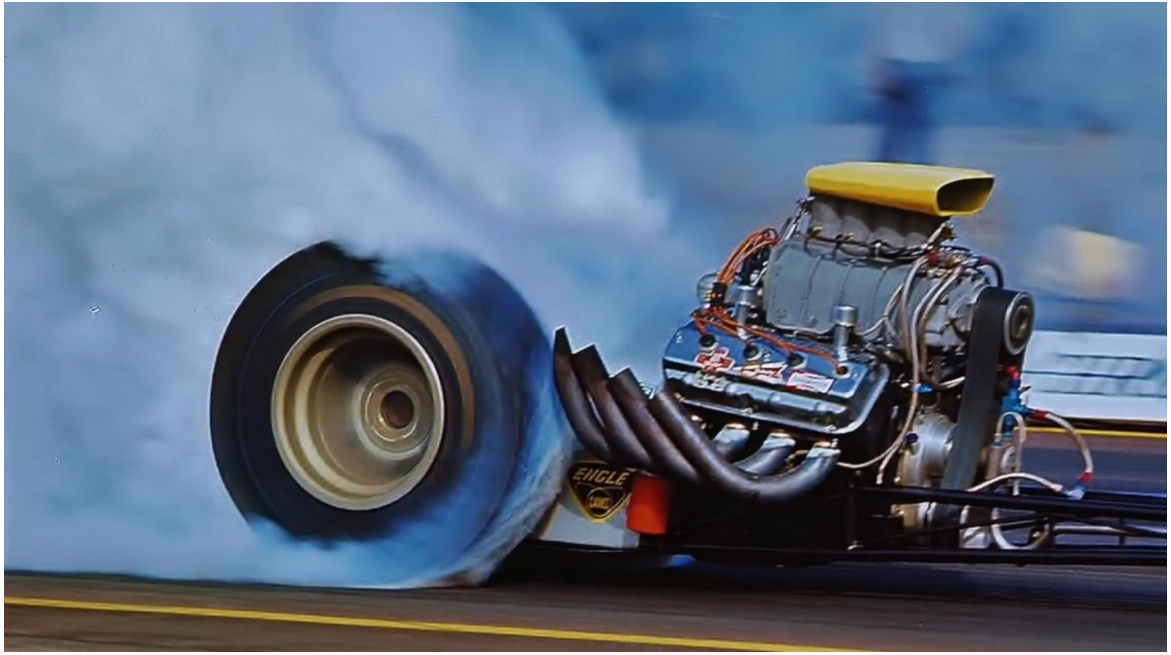
Conservação de Energia Mecânica



Energia

- Trabalho $\Longrightarrow$ processo através do qual a energia pode ser transformada
- Formas de ***energia mecânica***: ***cinética e potencial***.
- Energia cinética (do movimento): $K = \dfrac{1}{2} m |\vec{v}|^2$
- Energia Potencial (da configuração/estado): $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$
- Energia Mecânica Total: $E = K + U$

$$\text{Energia Potencial} \overset{\text{Trabalho}}{\Longleftarrow\!\Longrightarrow} \text{Energia Cinética}$$

Energia

- Energia Mecânica Total: $E = K + U$

- Sistemas conservativos: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$

$$\text{Energia Potencial} \xLeftrightarrow{\text{Trabalho}} \text{Energia Cinética}$$

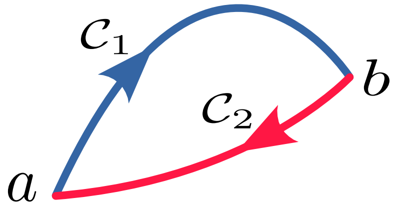
Força Conservativa

- Trabalho realizado não depende do caminho

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} = W_{ab}^{\mathcal{C}_2} \Longrightarrow W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Trabalho da força conservativa é reversível

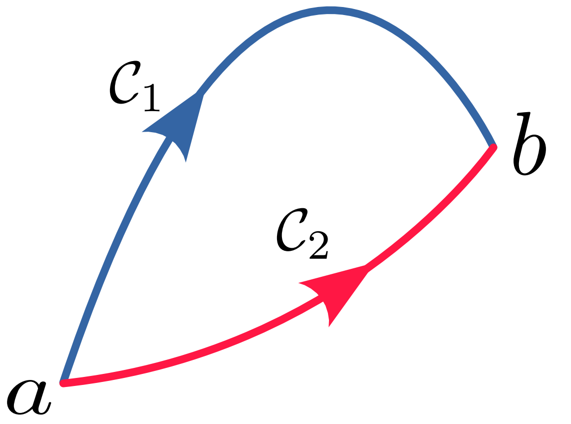
$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$



- Portanto, para a força conservativa

$$W_\circ = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} = \int_{a,\mathcal{C}_1}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



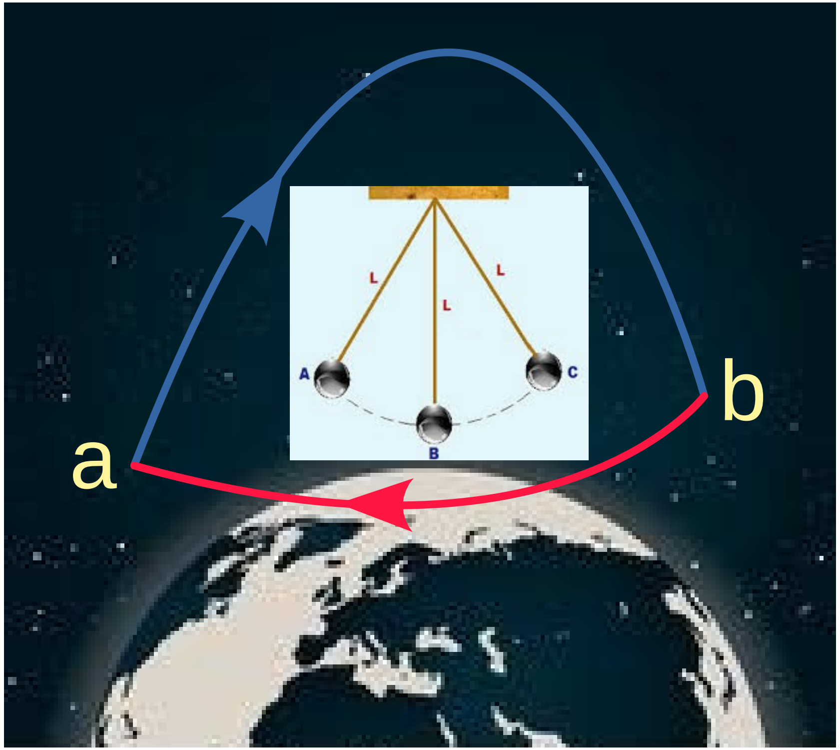
$$W_{ab}^{\mathcal{C}_2} = \int_{a,\mathcal{C}_2}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

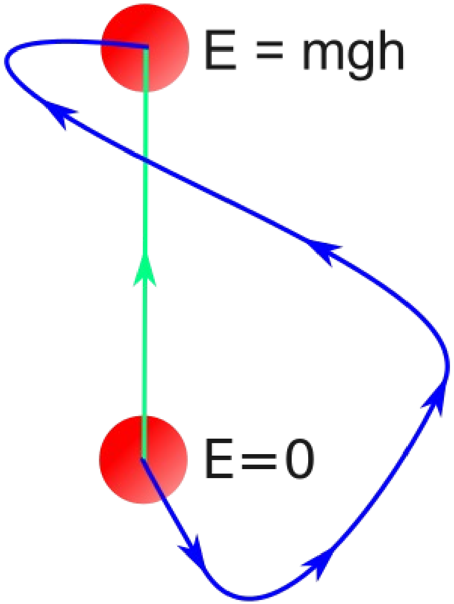
Força Conservativa, exemplos

- Força gravitacional

$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

$$W_\circ = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



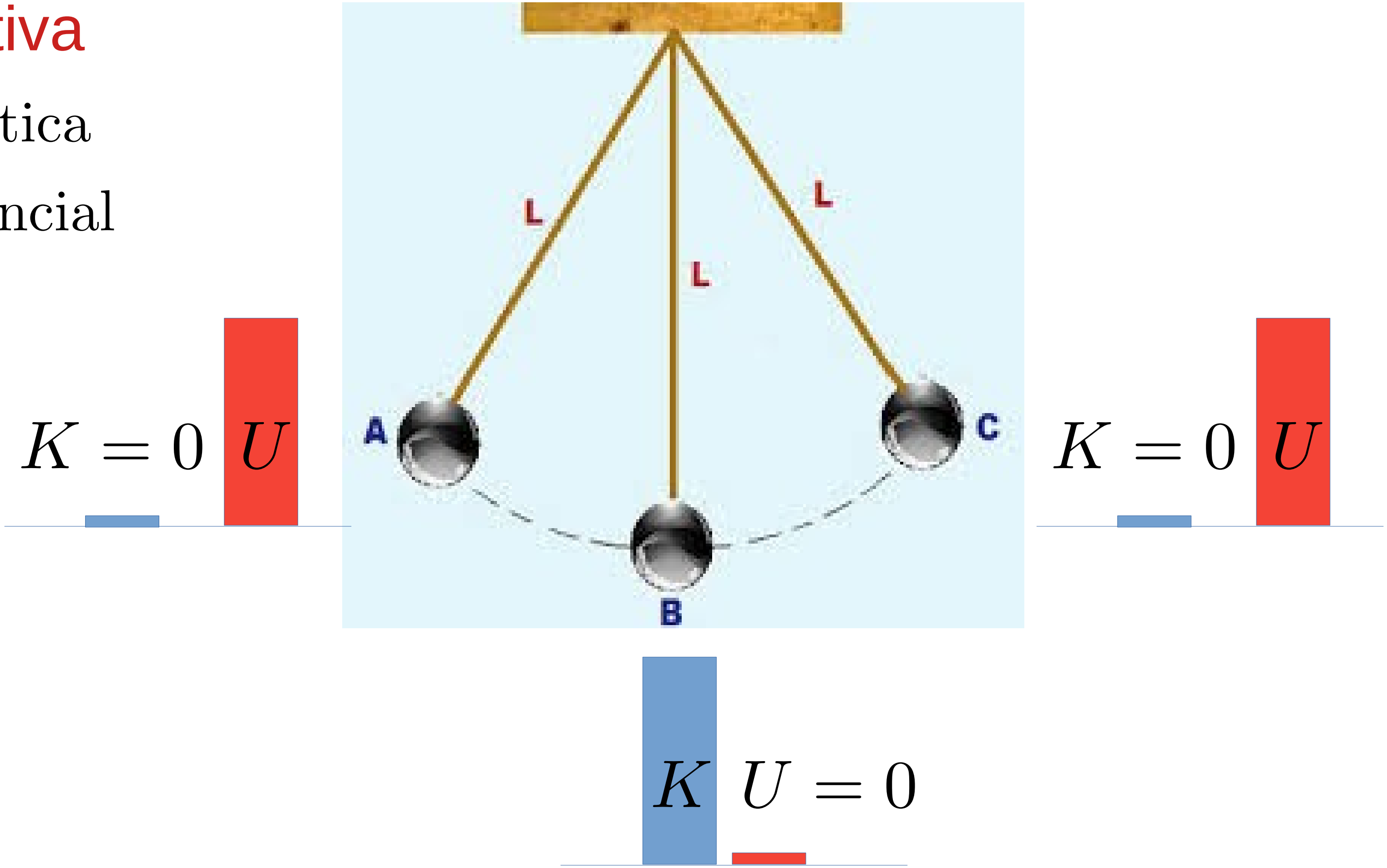


Energia Mecânica

Força Conservativa

K = Energia Cinética

U = Energia Potencial



Força Conservativa

- Transformação realizada por uma ***força conservativa não muda a energia total do sistema***

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$$

- Portanto $\Delta U = -\Delta K = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W$

$$\Delta U = U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Força Conservativa

- Ponto de vista local, caso unidimensional

- Trabalho infinitesimal

$$dU = U_b - U_a = -dW = -F(x)dx$$

$$dU = -F(x)dx \Longrightarrow \boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$

- Portanto, ***a força conservativa é resultado do gradiente de energia potencial***

Força Conservativa

- Transformação realizada por uma ***força conservativa não muda a energia total do sistema***

$$E = K + U$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int F dx\right) + \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\int \left[-\frac{dU}{dx}\right] dx\right) + \frac{dU}{dt} \\ &= -\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{energia do sistema isolado é conservada} \end{aligned}$$

Forças Externas

- $E = K + U$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int F_R dx\right) + \frac{dU}{dt}$$

- $F_R = F_{int} + F_{ext} = -\frac{dU}{dx} + F_{ext}$

- $$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int F_R dx\right) + \frac{dU}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\int \left[-\frac{dU}{dx}\right] dx\right) + \frac{d}{dt}\left(\int F_{ext} dx\right) + \frac{dU}{dt}$$

$$= -\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dt} + \frac{dW_{ext}}{dt} = \boxed{\frac{dW_{ext}}{dt}}$$

Forças NÃO Conservativas

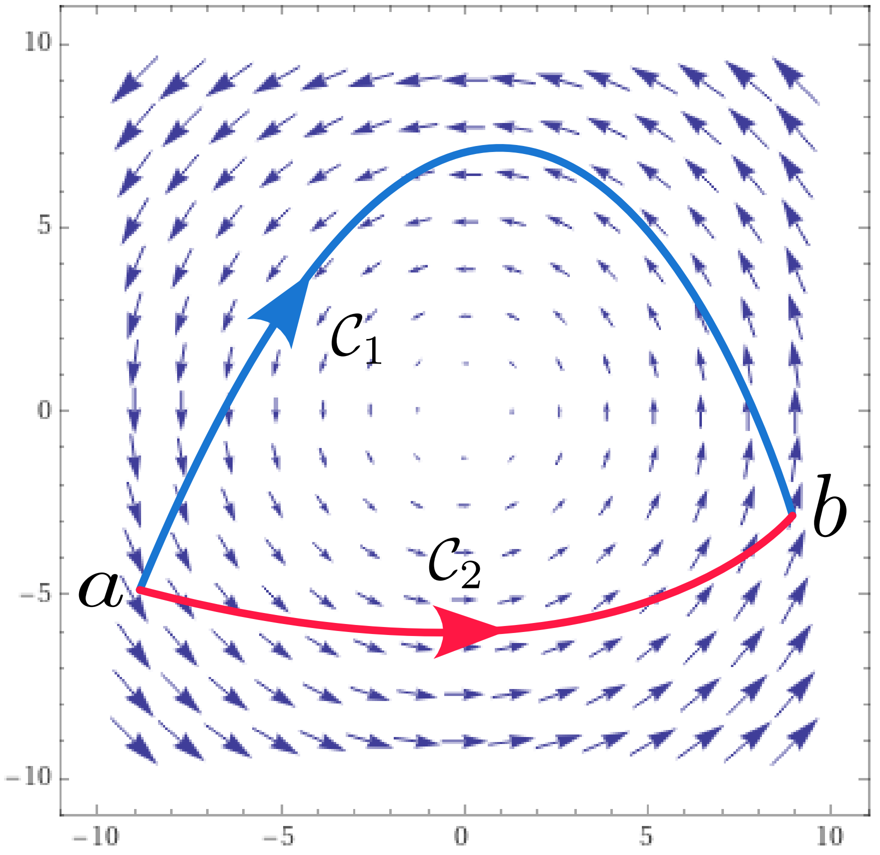
- Não conservam a **energia mecânica** (K+U)
- **Não** podem ser escritas como $F = -\dfrac{dU}{dx}$
- Portanto, não estão associadas a uma energia potencial mecânica U(r)
- Trabalho depende de C: $W_{ab}^{\mathcal{C}_1} \neq W_{ab}^{\mathcal{C}_2}$
- Dependem de outras variáveis além da posição, como velocidade
- Exemplos: força de atrito e forças de arrasto (resistência do ar).
- Forças dissipativas transformam energia mecânica em energia térmica

Forças NÃO Conservativas

- Exemplo:

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} \neq W_{ab}^{\mathcal{C}_2}$$



Forças NÃO Conservativas Dissipativas

Exemplo:

- $$\Delta E = \Delta K + \Delta U + \int F_{diss} dx$$
  $$= \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{térmica}}$$

- $$E_{\text{total}} = \underbrace{K + U} + E_{\text{térmica}}$$
  $$E_{\text{total}} = E_{Mec} + E_{\text{térmica}}$$

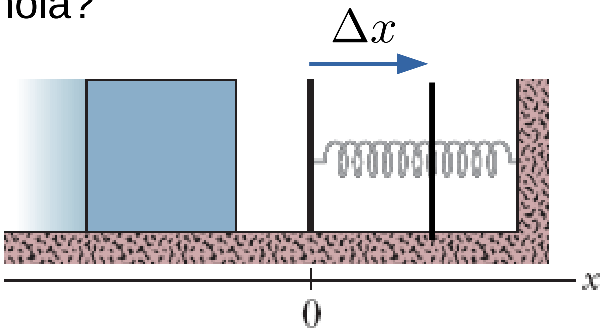
Energia Mecânica

Exemplos:

Um bloco de massa m = 2.5 kg desliza de encontro a uma mola de constante elástica k = 320 N/m. O bloco para após comprimir a mola 7,5 cm. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é 0.25. Para o intervalo em que o bloco está em contato com a mola e sendo levdo ao repouso, determine

(a) o trabalho total realizado pela mola e (b) o aumento da energia térmica do sistema bloco-piso.

(c) Qual é a velocidade do bloco imediatamente antes de se chocar com a mola?



Resposta: (a)

$$W_{mola} = \int_i^f F_{mola} dx = \int_0^{\Delta x} (-kx) dx$$
$$= -\frac{k}{2}\Delta x^2 = -0.9J$$

(b) $$E_{\text{térmica}} = \int_i^f |F_{at}| dx = mg\mu_k \Delta x = +0.459J$$

(c) $$\frac{1}{2}mv^2 = \Delta U_{mola} + \Delta E_{\text{térmica}}$$
$$= 0.9J + 0.459J \Longrightarrow v = 1.04\frac{m}{s}$$

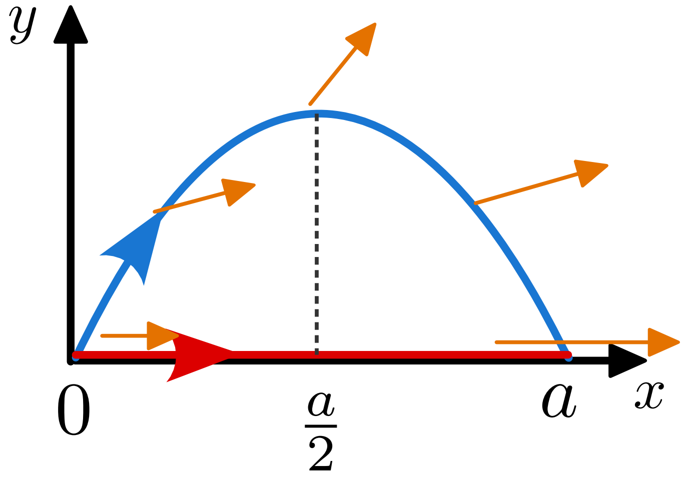
Energia Mecânica

Exemplos:

Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ao longo dos caminhos C_1 e C_2.

$$C_1 : y(x) = x(a-x) \quad , \qquad x = [0,a]$$

$$C_2 : y(x) = 0 \qquad\qquad , \qquad x = [0,a]$$



Energia Mecânica

Exemplos:

Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ao longo dos caminhos C_1 e C_2.

$$C_1 : y(x) = x(a-x) \quad , \qquad x = [0,a]$$

Para o caminho C_1 temos:

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} = \int_{a,\mathcal{C}_1}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

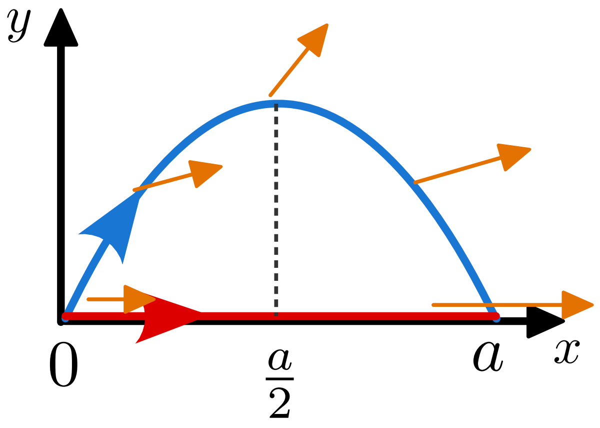
$$W^{\mathcal{C}_1} = \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} F_x(\vec{r})dx + \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} F_y(\vec{r})dy$$

$$= \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} xdx + \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} ydy$$

Note que

$$y(x) = x(a-x)$$

$$dy = (-2x+a)dx$$



Portanto,

$$W^{\mathcal{C}_1} = \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} xdx + \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} x(x-a)(-2x+a)dx$$

$$W^{\mathcal{C}_1} = \frac{a^2}{2}$$

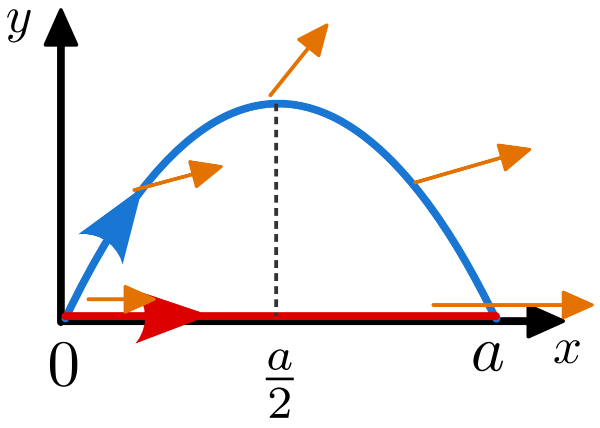
Energia Mecânica

Exemplos:

Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ ao longo dos caminhos C_1 e C_2.

$$C_2 : y(x) = 0 \quad , \qquad x = [0, a]$$

Para o caminho C_2 temos:



$$W_{ab}^{\mathcal{C}_2} = \int_{a,\mathcal{C}_2}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W^{\mathcal{C}_2} = \int_{0,\mathcal{C}_2}^{a} F_x(\vec{r})dx + \int_{0,\mathcal{C}_2}^{a} F_y(\vec{r})dy$$

$$= \int_{0,\mathcal{C}_2}^{a} xdx + \int_{0,\mathcal{C}_2}^{0} ydy$$

$$W^{\mathcal{C}_2} = \int_{0,\mathcal{C}_1}^{a} xdx = \frac{a^2}{2}$$

$$W^{\mathcal{C}_1} = W^{\mathcal{C}_2}$$

Podemos verificar que $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$

Portanto, $\vec{F}$ é uma força conservativa.

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Uma pedra que pesa 5.29 N é lançada verticalmente, a partir do nível do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s e o arrasto do ar sobre ela é de 0.265 N durante todo o percurso. Determine (a) a altura máxima alcançada pela pedra e (b) a velocidade da pedra imediatamente antes de se chocar com o solo.

Resposta: (a)

Usando a fórmula de Torricelli

$$v_f^2 - v_i^2 = 2ah = 2\left(\frac{P + F_{arrasto}}{m}\right)h \Longrightarrow h = \frac{v_f^2}{2\left(\frac{P+F_{arrasto}}{m}\right)} = 19.4m$$

(b) na descida,

$$v_f^2 - v_i^2 = 2ah = 2\left(\frac{P - F_{arrasto}}{m}\right)h \Longrightarrow v_f = \sqrt{2\left(\frac{P - F_{arrasto}}{m}\right)h} = 19.02\frac{m}{s}$$

* Note que na realidade a força de arrasto depende da velocidade do corpo.

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Um bloco pode deslizar uma pista com extremidades elevadas e uma parte central plana. A parte plana tem comprimento L. Os trechos curvos da pista não produzem atrito, mas na parte plana o coeficiente de atrito cinético é μ_k=0.2. A partícula é liberada a partir do repouso no ponto A, que está a uma altura L/2. A que distância do ponto B a partícula finalmente para.

Resposta:

- Energia total inicial em A = Energia potencial gravitacional = mgL/2
- No ponto B a energia é K = mgL/2
- A energia dissipada na parte plana será

$$E_{diss} = \mu_k mgL = 0.2mgL = \frac{2}{10}mgL$$

- $$\frac{E_{\mathcal{A}}}{E_{diss}} = \frac{mgL/2}{2mgL/10} = \frac{10}{4} = 2.5$$