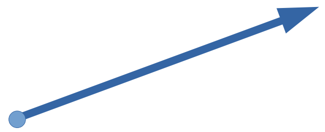
# VETORES

## Escalares na Física:

- Uma grandeza física escalar é descrita apenas por um número, que representa sua magnitude.
- Exemplos de grandezas escalares:     temperatura , energia , quantidade de matéria

## Vetores na Física:

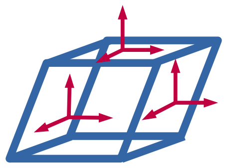


- Uma grandeza física vetorial é descrita por sua magnitude e por uma direção.
- Exemplos de grandezas vetorias:

  posição, velocidade e aceleração, no plano e no espaço tridimensional,

  força, impulso, quantidade de movimento, momento angular, etc.

## Tensores na Física:



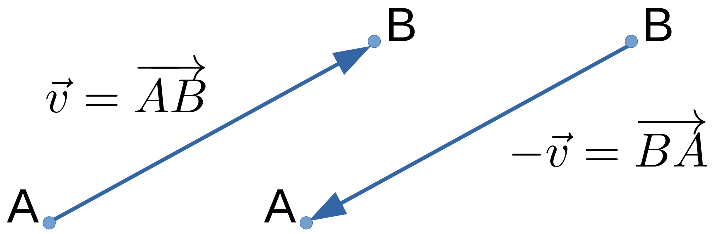
- Algumas grandezas físicas precisam de ainda mais informação para serem descritos, de maneira geral são tratados como tensores (vetores de vetores).
- Exemplos de tensores:

  deformações em meios elásticos, polarizabilidade elétrica, etc.

# VETORES

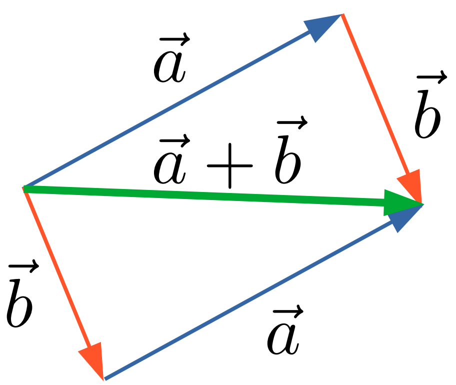
Definições e Propriedades Geométricas:

- Uma seta sobre o símbolo da grandeza indica que a grandeza é vetorial: $\vec{a}$
- Um vetor do ponto A ao ponto B é representado por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

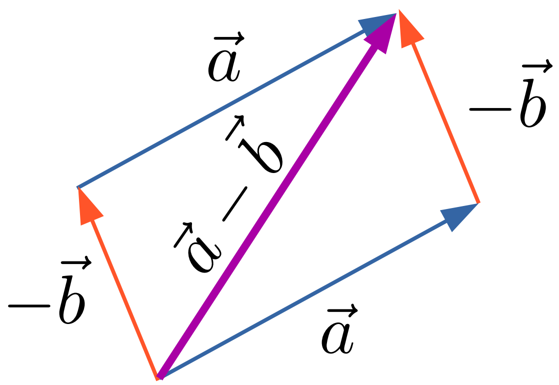



- Vetores podem ser somados e subtraídos, se tiverem o mesmo significado físico:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$
$$= \vec{b} + \vec{a}$$



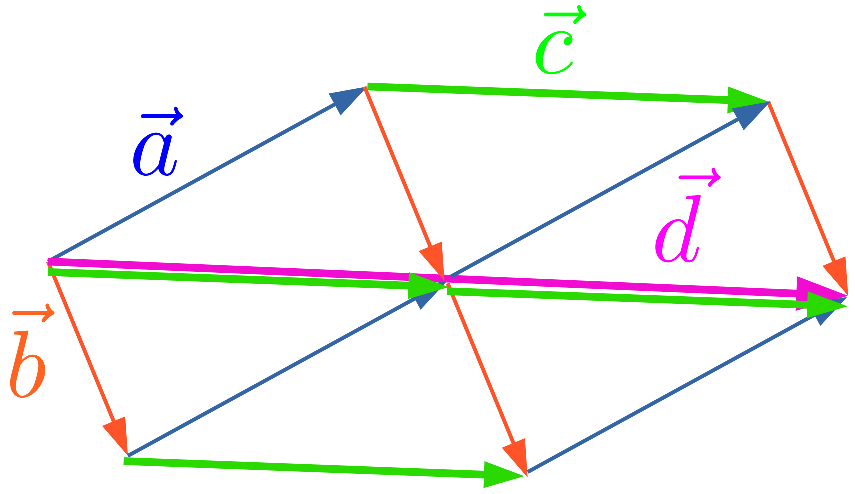

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$
$$= \vec{a} + (-\vec{b})$$
$$= (-\vec{b}) + \vec{a}$$



# VETORES

Definições e Propriedades Geométricas:

- elemento nulo: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
- propriedade comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- propriedade associativa: $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$



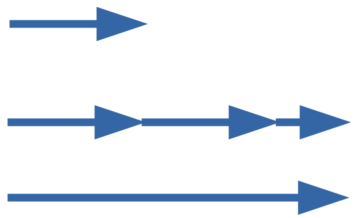

$$
\begin{aligned}
\vec{d} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\
&= \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} \\
&= \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} \\
&= \vec{c} + \vec{a} + \vec{b} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

# VETORES

Definições e Propriedades Geométricas:

- O tamanho de um vetor é denominado norma;

  o tamanho do vetor $\vec{a}$ é um escalar: $a = |\vec{a}| \geq 0$



- Multiplicação por um escalar: $2.25\ \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{a}$

  se m é um escalar, para $\vec{B} = m\vec{A}$ temos: $|\vec{B}| = B = |m|\,|\vec{A}|$

- Se m e n são escalares, temos

$$m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$$

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$$

$$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$$

# VETORES

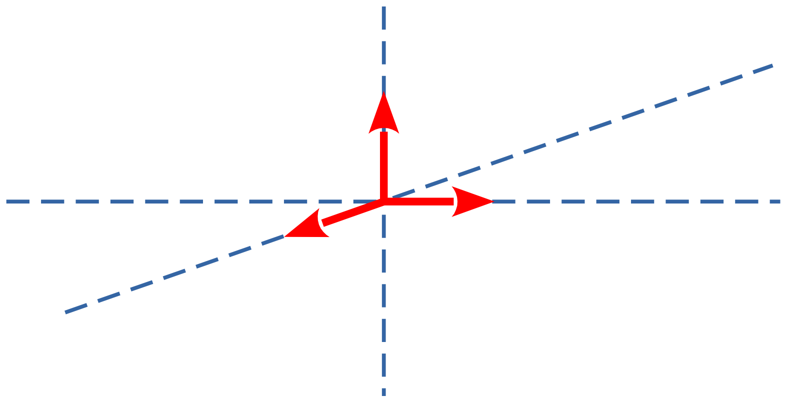
Definições e Propriedades Geométricas:

- Um vetor com norma (tamanho) igual a 1 é denominado versor;
- O versor é representado da seguinte maneira: $\hat{a}$

se $|\vec{a}| = 1 \Longrightarrow \vec{a} \equiv \hat{a}$ ,

tal que $|\hat{a}| = 1$ .

- Versores são utilizados para apontar direções.



Um vetor arbitrário pode ser escrito como

$$\vec{v} = \alpha \hat{a}$$

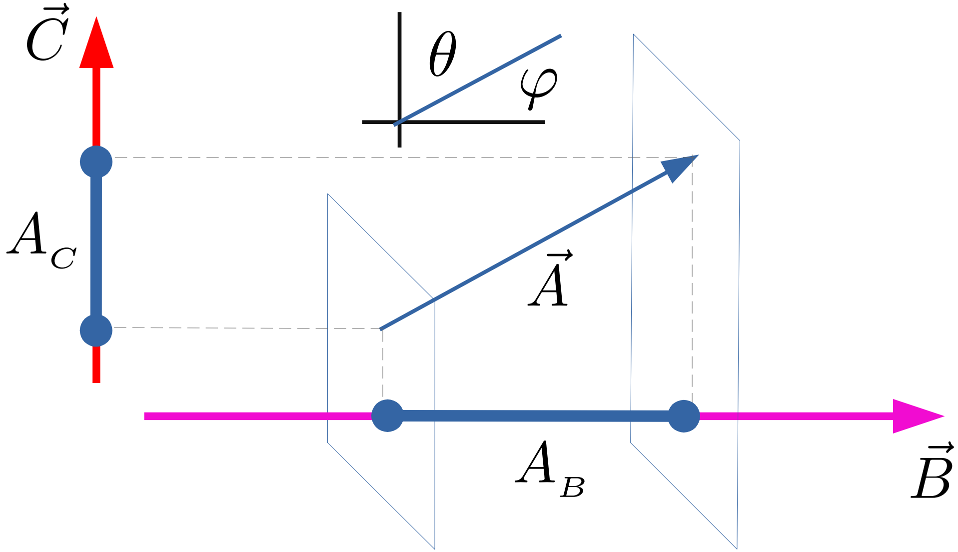
onde

$$|\vec{v}| = \alpha \in \mathbb{R}$$

# VETORES

## Definições e Propriedades Geométricas:

- Projeção de um vetor em outro vetor




$$A_B = |\vec{A}|\cos(\varphi)$$

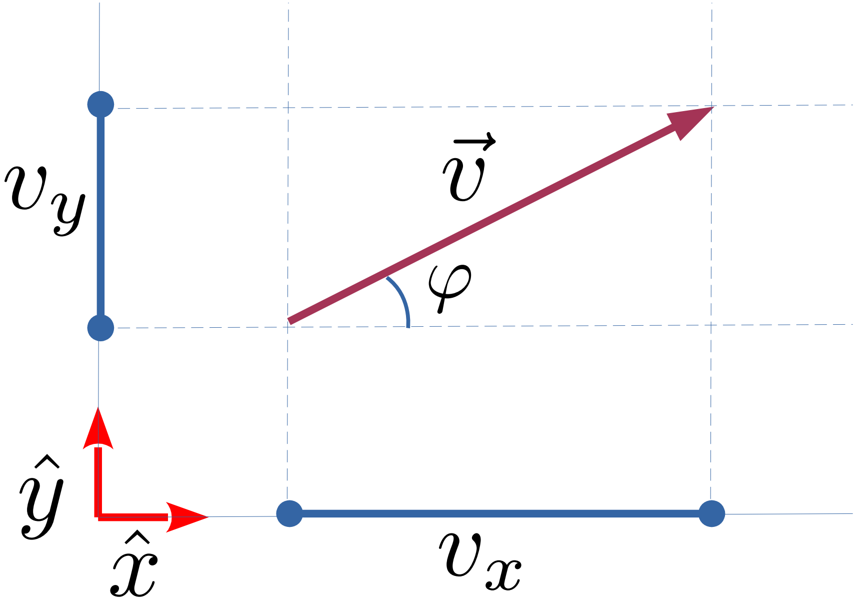
$$A_C = |\vec{A}|\cos(\theta)$$

## Álgebra Vetorial

- É possível trabalhar com vetores sem usar a geometria descritiva.
- Para isso usamos a álgebra vetorial (ou geometria analítica).
- Por meio da algebra vetorial podemos trabalhar com vetores em espaços com dimensão > 3.
- Na álgebra vetoria trocamos a régua e o compasso por equações algébricas lineares.
- Para isso os vetores tem que ser representados num sistema de coordenadas.

# Álgebra Vetorial

- Representação de vetores num sistema de coordenadas.
- Por exemplo: em 2 dimensões




$$v_x = |\vec{v}|cos(\varphi)$$

$$v_y = |\vec{v}|sen(\varphi)$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

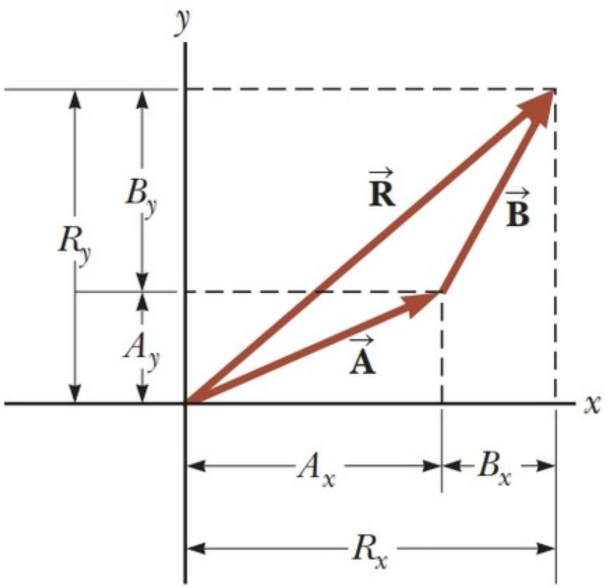
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

# Álgebra Vetorial

- Soma e subtração algébrica de vetores

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$




$$\begin{aligned}\vec{R} &= R_x\hat{x} + R_y\hat{y}\\ &= (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y}\end{aligned}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

# Álgebra Vetorial

- Soma e subtração algébrica de vetores
- Por exemplo: em 2 dimensões

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$$

$$\vec{c} = c_x\hat{x} + c_y\hat{y}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\\ &= (a_x + b_x + c_x)\hat{x} + (a_y + b_y + c_y)\hat{y}\\ &= d_x\hat{x} + d_y\hat{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\\ &= (a_x - b_x - c_x)\hat{x} + (a_y - b_y - c_y)\hat{y}\\ &= e_x\hat{x} + e_y\hat{y}\end{aligned}$$

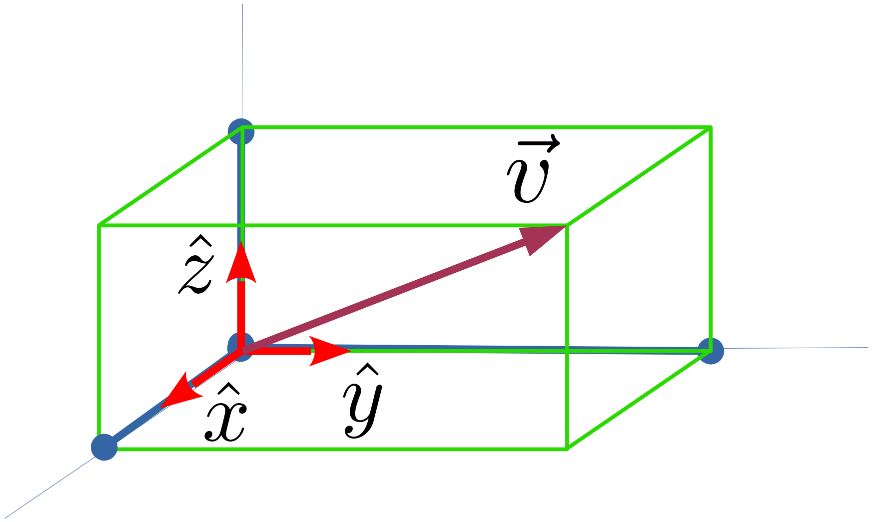
# Álgebra Vetorial

- Representação de vetores num sistema de coordenadas.
- Por exemplo: em 3 dimensões

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



# Álgebra Vetorial

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}$$

$$\vec{c} = c_x\hat{x} + c_y\hat{y} + c_z\hat{z}$$

- Soma e subtração algébrica de vetores
- Por exemplo: em 3 dimensões

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ &= (a_x - b_x + c_x)\hat{x} + (a_y - b_y + c_y)\hat{y} + (a_z - b_z + c_z)\hat{z} \\ &= d_x\hat{x} + d_y\hat{y} + d_z\hat{z}\end{aligned}$$

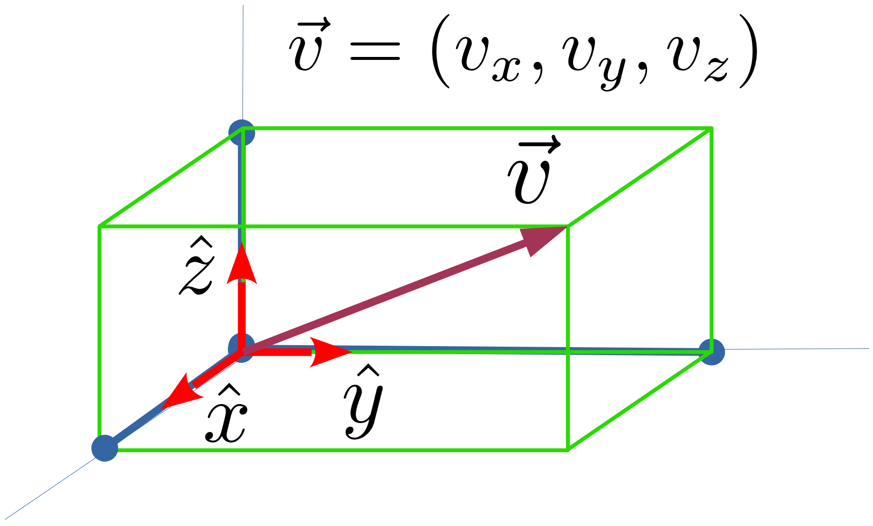
$$d = |\vec{d}| = \sqrt{(a_x - b_x + c_x)^2 + (a_y - b_y + c_y)^2 + (a_z - b_z + c_z)^2}$$

# Álgebra Vetorial

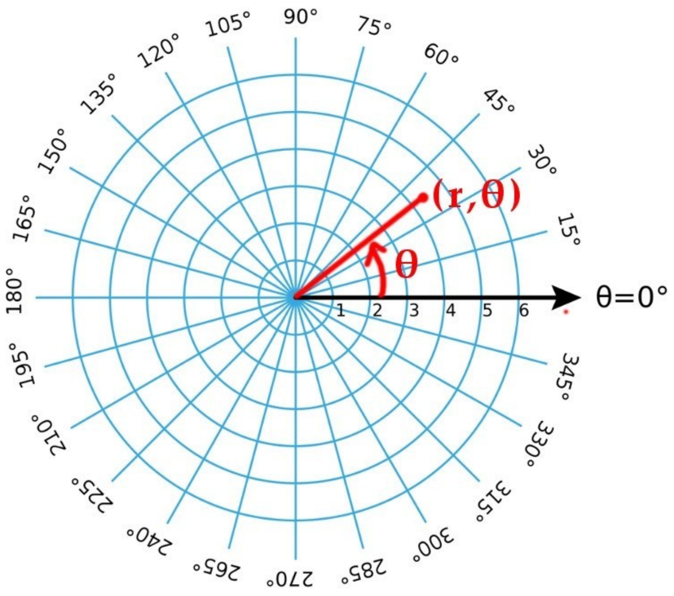
- Existem diversos sistemas de coordenadas. Dois exemplos:

Sistema retangular cartesiano (3D)

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$




Sistema curvilíneo polar (2D)




$$\vec{r} = (r, \theta)$$

O sistema polar é muito útil para descrever movimentos circulares

# Álgebra Vetorial

- Produtos de 2 vetores: ***Produto Escalar***

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

onde $\theta = \widehat{\vec{a},\vec{b}}$ representa o ângulo entre os dois vetores.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\ &= a_b\ b \\ &= a\ b_a\end{aligned}$$

$$a_b = |\vec{a}|cos\theta \quad \text{é a projeção de } \vec{a} \text{ em } \vec{b}$$

$$b_a = |\vec{b}|cos\theta \quad \text{é a projeção de } \vec{b} \text{ em } \vec{a}$$

# Álgebra Vetorial

- Produtos de 2 vetores: ***Produto Escalar***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

- Casos particulares:

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ paralelos: $\theta = 0 \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ anti-paralelos: $\theta = \pi \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ perpendiculares (ortogonais): $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

# Álgebra Vetorial

- Produtos de 2 vetores: ***Produto Escalar***

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z}$$

- Usando a algebra vetorial;

se $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ são mutuamente ortogonais, temos pela propriedade distributiva:

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = 0$$

$$\hat{y}\cdot\hat{z} = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z})\cdot(b_x\hat{x} + b_y\hat{y} + b_z\hat{z})$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = 1$$

$$\hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

## Álgebra Vetorial

- Produtos de 2 vetores: ***<u>Produto Escalar</u>***

- Para obter as componentes de um vetor $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$

$$a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \hat{y}$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \hat{z}$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = 0$$

$$\hat{y} \cdot \hat{z} = 0$$

# Álgebra Vetorial

- Produtos de 2 vetores: ***Produto Vetorial***

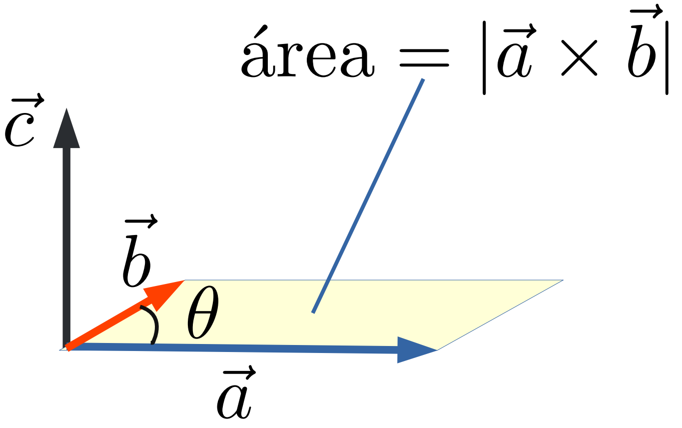
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|sen\theta$$

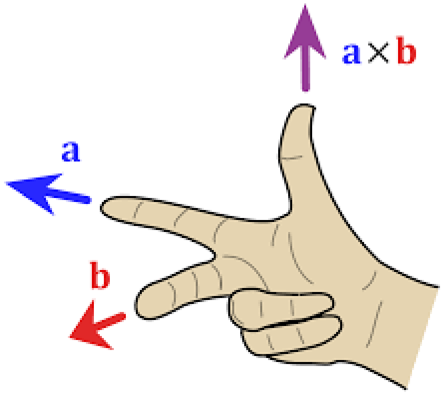
onde $\theta = \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ representa o menor ângulo entre os dois vetores.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

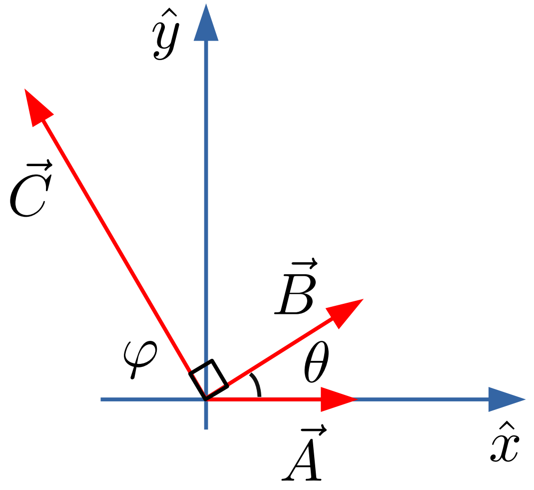


# Exemplo:

Os três vetores da figura têm módulos A = 3,0 m, B = 4,0 m e C = 10,0 m; Θ = 30.0º. Determine: a) as componentes x e y de A; b) as componentes x e y de B; c) as componentes x e y de C.

d) Se $\vec{C} = p\vec{A} + q\vec{B}$ , quais os valores de p e q?




a) $\vec{A} = 3,0\ m\hat{x} \Longrightarrow A_x = 3,0m \text{ e } A_y = 0$

b) $cos\theta = \dfrac{B_x}{B} \Longrightarrow B_x = Bcos(30^o) = 4,0\ m\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ m$

$sen\theta = \dfrac{B_y}{B} \Longrightarrow B_y = Bsen(30^o) = 4,0\ m\ \dfrac{1}{2} = 2\ m$

c) $\varphi = 180^o - (90^o + 30^o) = 60^o$

$cos\varphi = \dfrac{C_x}{C} \Longrightarrow C_x = C\left[-cos(60^o)\right] = 10,0\ m\left[-\dfrac{1}{2}\right] = -5\ m$

$sen\varphi = \dfrac{C_y}{C} \Longrightarrow C_y = Csen(60^o) = 10,0\ m\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ m$

d) $C_x = pA_x + qB_x = -5\ m$

$C_y = pA_y + qB_y = 5\sqrt{3}\ m$

$\therefore \quad q = \dfrac{C_y}{B_y} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad p = \dfrac{-20}{3}$