Energia Potencial e Conservação de Energia

Energia Potencial e Trabalho

Energia

- Trabalho $\Longrightarrow$ processo através do qual a energia pode ser transformada
- Formas de ***energia mecânica***: ***cinética e potencial***.
- Energia se conserva em um sistema isolado.

$$\text{Energia Potencial} \overset{\text{Trabalho}}{\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow} \text{Energia Cinética}$$

Energia Potencial e Trabalho

Energia

- Energia cinética (do movimento): $K = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$

- Energia Potencial (da configuração/estado): $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$

- Energia Mecânica Total: $E = K + U$

- Sistemas conservativos: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$

$$\text{Energia Potencial} \overset{\text{Trabalho}}{\Longleftrightarrow} \text{Energia Cinética}$$

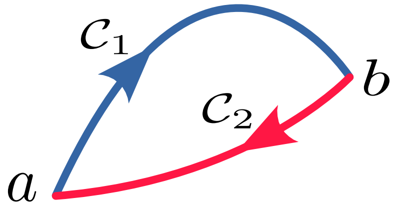
Força Conservativa

- Trabalho realizado não depende do caminho

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} = W_{ab}^{\mathcal{C}_2} \Longrightarrow W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Trabalho da força conservativa é reversível

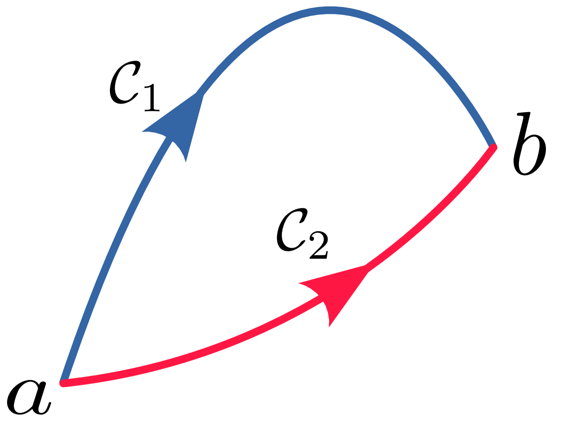
$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$



- Portanto, para a força conservativa

$$W_{\circ} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

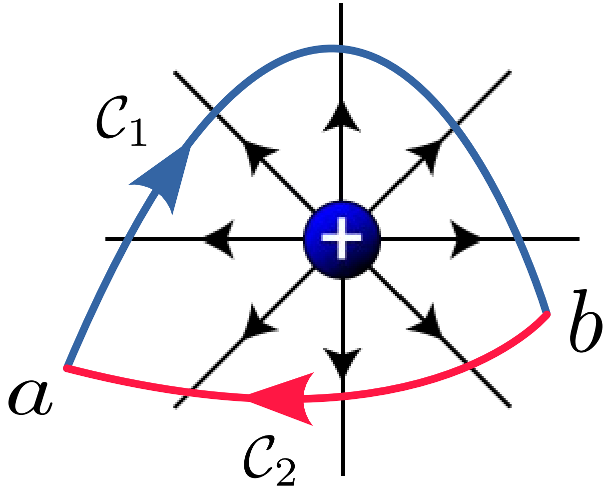
$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} = \int_{a,\mathcal{C}_1}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

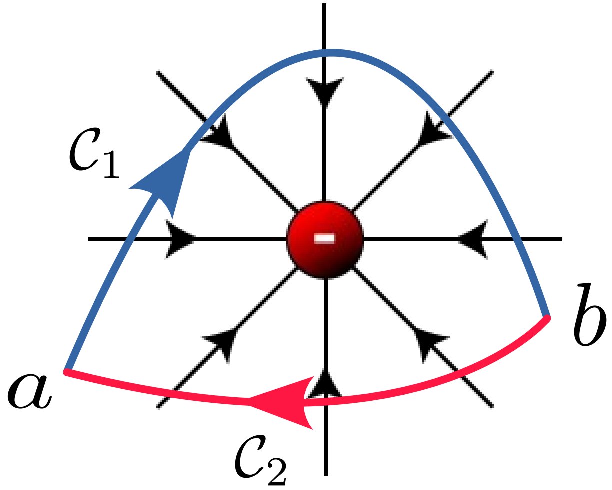


$$W_{ab}^{\mathcal{C}_2} = \int_{a,\mathcal{C}_2}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Força Conservativa, exemplos

- Força elétrica





$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

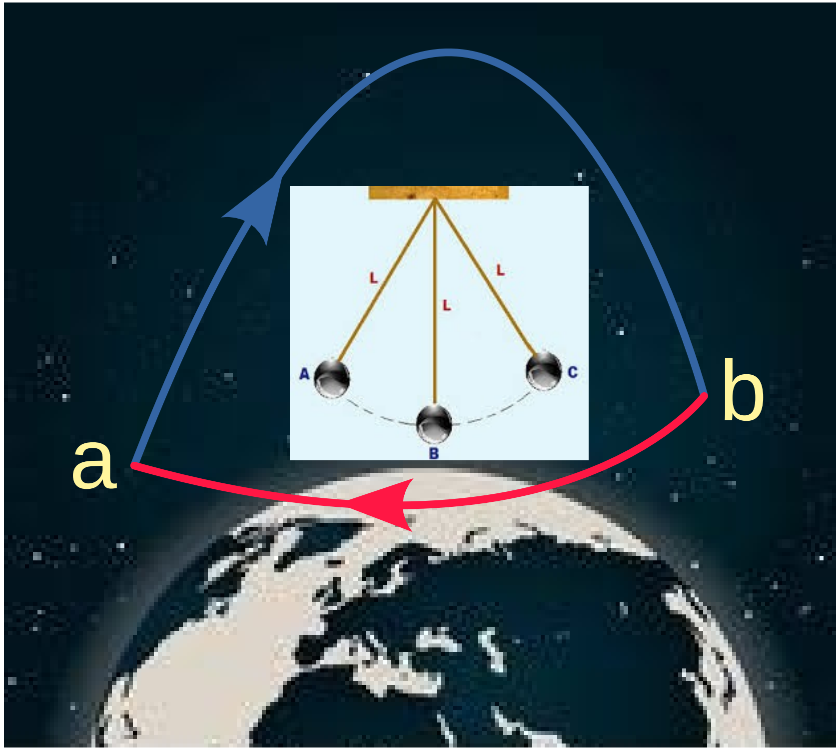
$$W_\circ = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

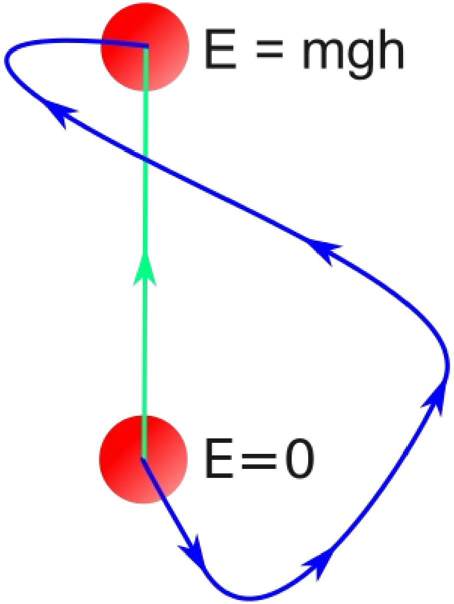
Força Conservativa, exemplos

- Força gravitacional

$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

$$W_\circ = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



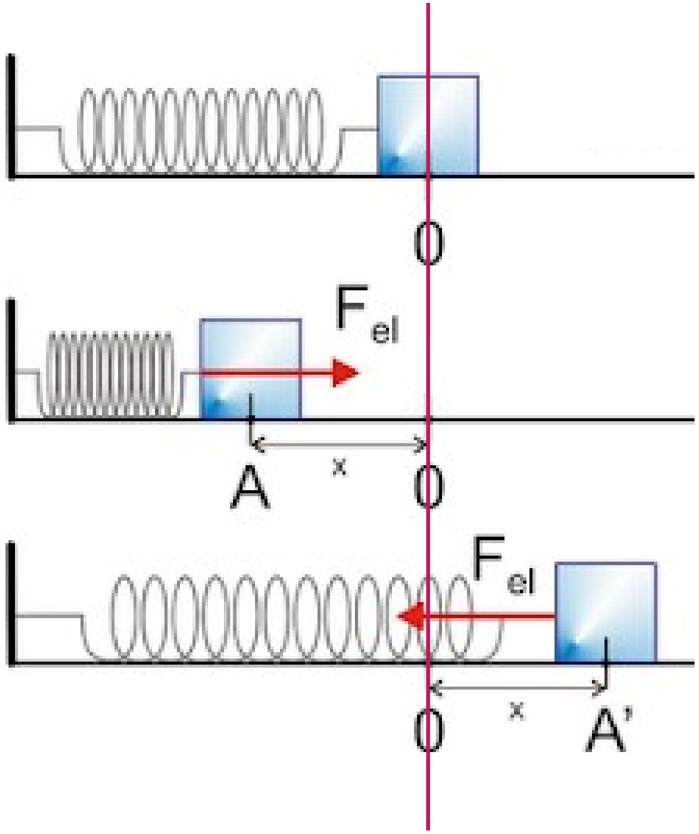


Força Conservativa, exemplos

- Força elástica

$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

$$W_\circ = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



Força Conservativa

- Transformação realizada por uma ***força conservativa não muda a energia total do sistema***

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$$

- Portanto $\Delta U = -\Delta K = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W$

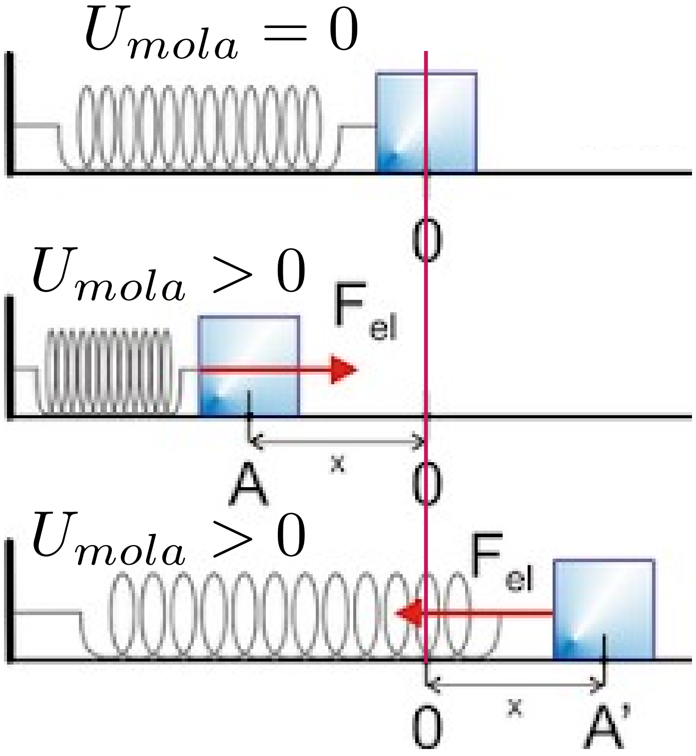
$$\Delta U = U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Força Conservativa

- Transformação realizada por uma ***força conservativa não muda a energia total do sistema***

- Portanto

$$\Delta U_{mola} = U_b - U_a$$
$$= -W_{mola}$$
$$= -\int_a^b \vec{F}_{mola}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

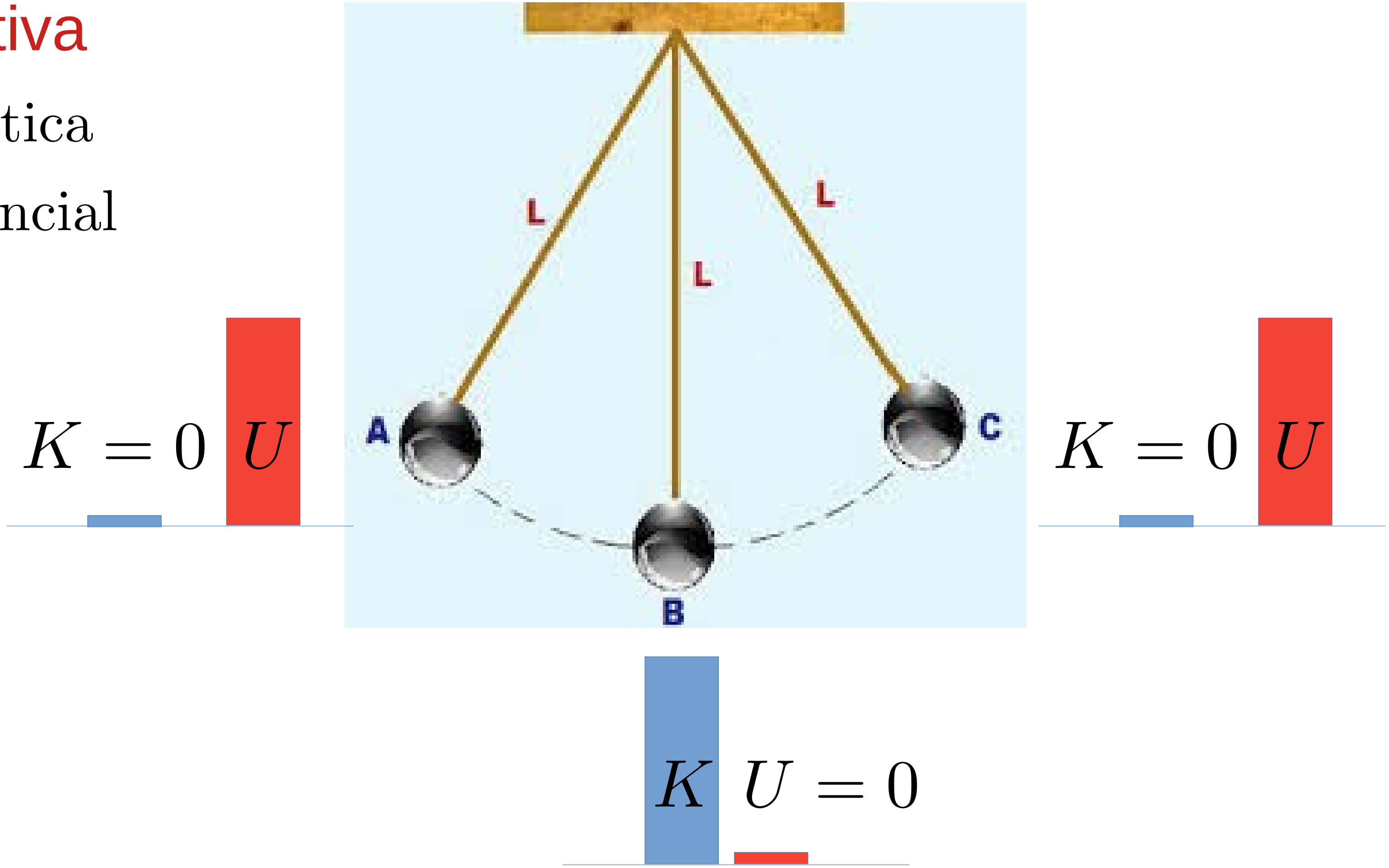


Energia Potencial e Trabalho

Força Conservativa

K = Energia Cinética

U = Energia Potencial



Força Conservativa

- Ponto de vista local, caso unidimensional

- Trabalho infinitesimal

$$dU = U_b - U_a = -dW = -F(x)dx$$

$$dU = -F(x)dx \Longrightarrow \boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$

- Portanto, ***a força conservativa é resultado do gradiente de energia potencial***

Força Conservativa

- Ponto de vista local, caso
- Portanto, ***a força conservativa é resultado do gradiente de energia potencial***
- Caso geral $$\vec{F}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\left(U(\vec{r})\right) = -\nabla U(\vec{r})$$

- Caso particular: forças constantes são conservativas.

Força Conservativa

- Transformação realizada por uma ***força conservativa não muda a energia total do sistema***

$$E = K + U$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int F dx\right) + \frac{dU}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int \left[-\frac{dU}{dx}\right] dx\right) + \frac{dU}{dt} \\
&= -\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{energia do sistema isolado é conservada}
\end{aligned}$$

Forças NÃO Conservativas

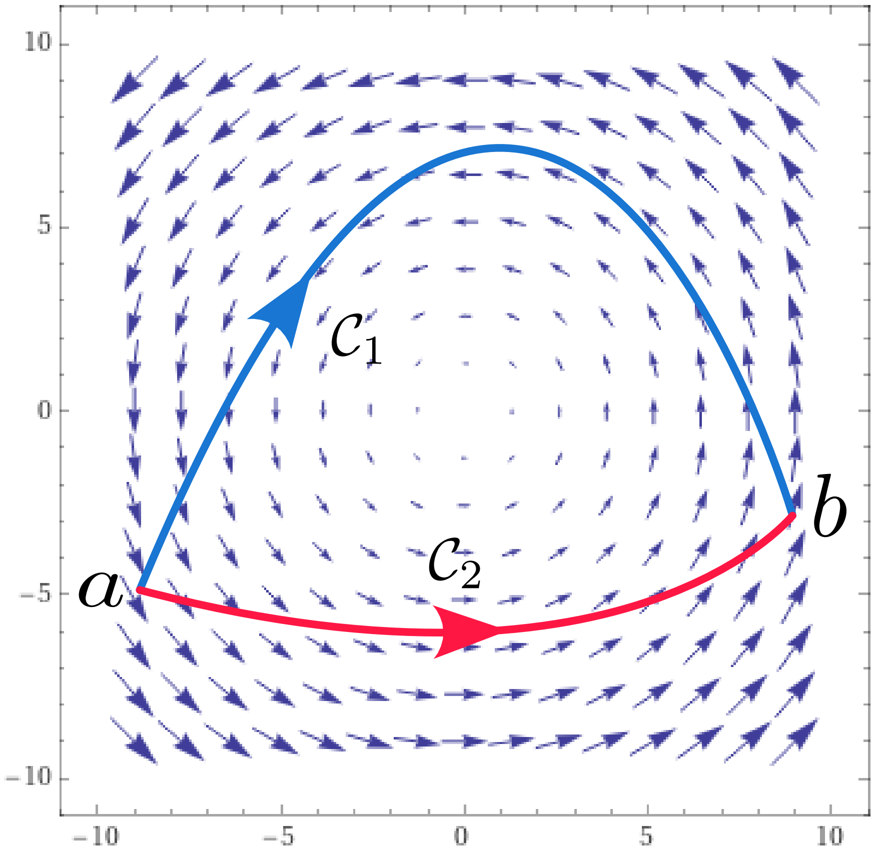
- Não conservam a **energia mecânica** (K+U)
- **Não** podem ser escritas como $F = -\dfrac{dU}{dx}$
- Portanto, não estão associadas a uma energia potencial mecânica U(r)
- Trabalho depende de C: $W_{ab}^{\mathcal{C}_1} \neq W_{ab}^{\mathcal{C}_2}$
- Dependem de outras variáveis além da posição, como velocidade
- Exemplos: força de atrito e forças de arrasto (resistência do ar).

Forças NÃO Conservativas

- Exemplo:

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

$$W_{ab}^{\mathcal{C}_1} \neq W_{ab}^{\mathcal{C}_2}$$



Energia Potencial Gravitacional

- Força gravitacional

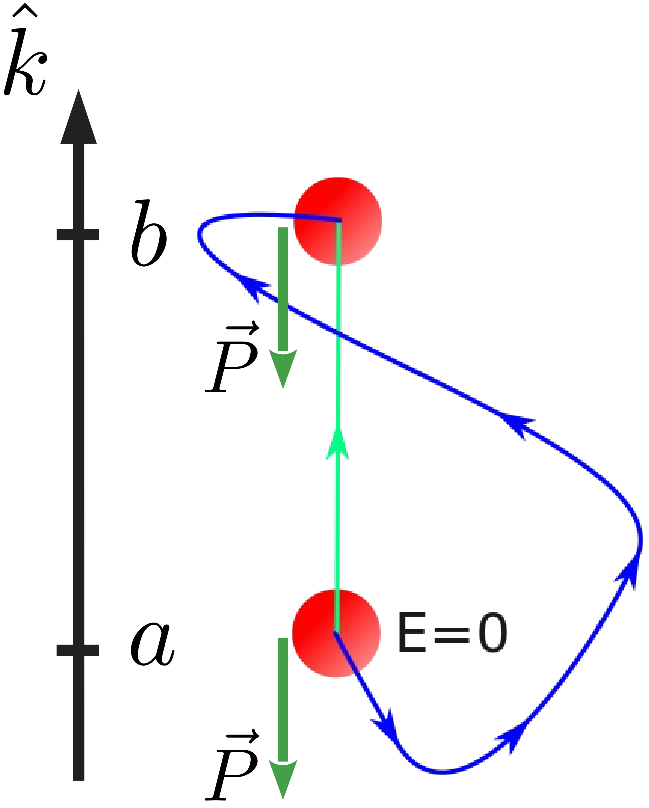
$$\Delta U = -\int_{a,\forall\mathcal{C}}^{b} \vec{P}\cdot d\vec{r} \implies \quad \text{para } \forall \text{ caminho}$$

$$= -\int_{a}^{b} (-P dz)$$

$$= \int_{a}^{b} mg dz$$

$$= \boxed{mg(z_b - z_a) = mg\Delta z} \qquad W_g = -mg\Delta z < 0$$

$$\Delta U = U_{ba} = U(z_b) - U(z_a) > 0$$

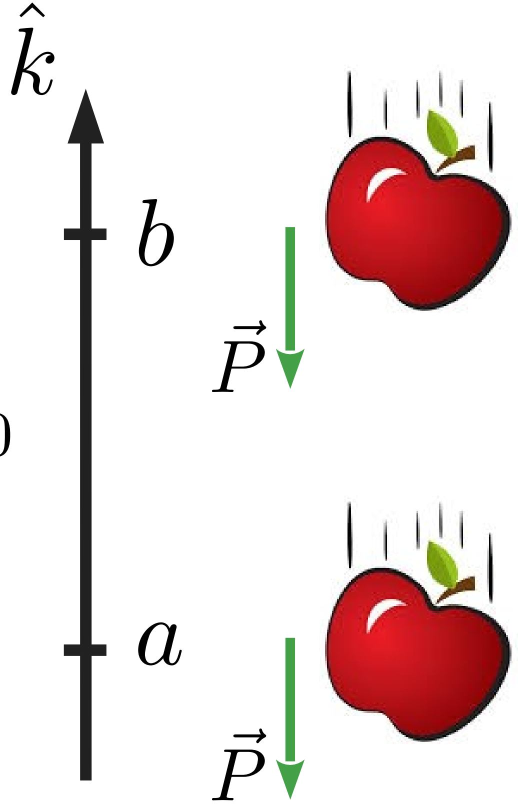


Energia Potencial Gravitacional

- Força gravitacional

$$\begin{aligned}\Delta U &= -\int_b^a \vec{P}\cdot d\vec{r} \\ &= -\int_b^a (P dz) \\ &= -\int_b^a mg dz \\ &= \boxed{-mg(z_a - z_b) = -mgh}\end{aligned}$$

$$W_g = +mgh > 0$$



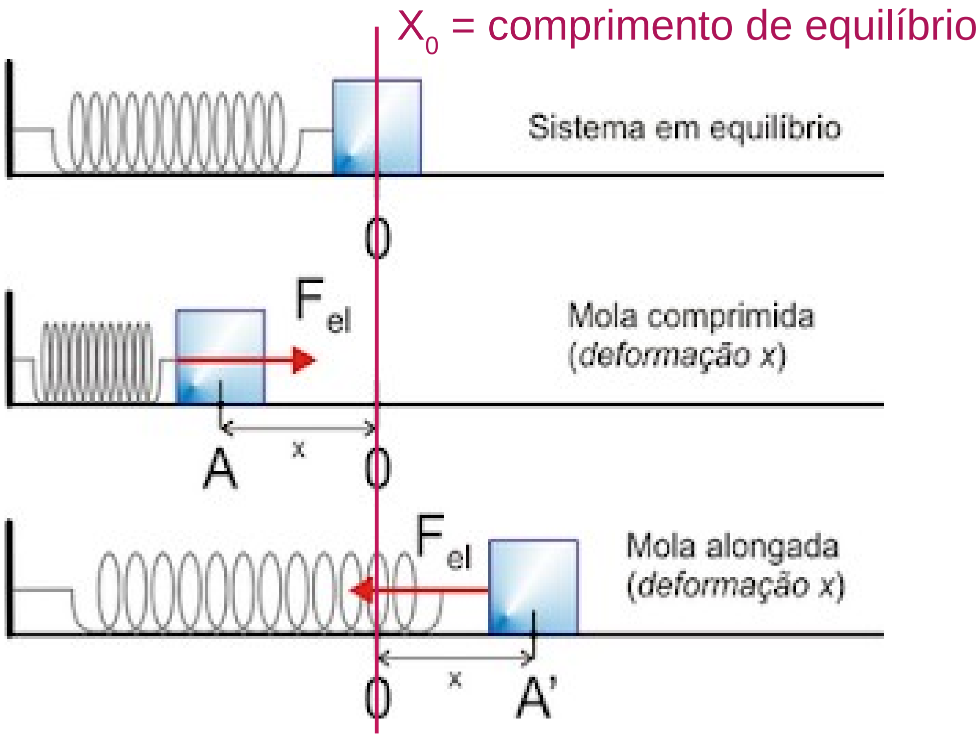
$$\Delta U = U_{ab} = U(z_a) - U(z_b) < 0$$

Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

- Força elástica restauradora: $F = -k * \Delta x$

$$\Delta U = -\int_i^f \vec{F}_{mola} \cdot d\vec{r}$$
$$= -\int_i^f (-kx)\, dx$$
$$= \int_i^f kx \; dx$$
$$= \frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$



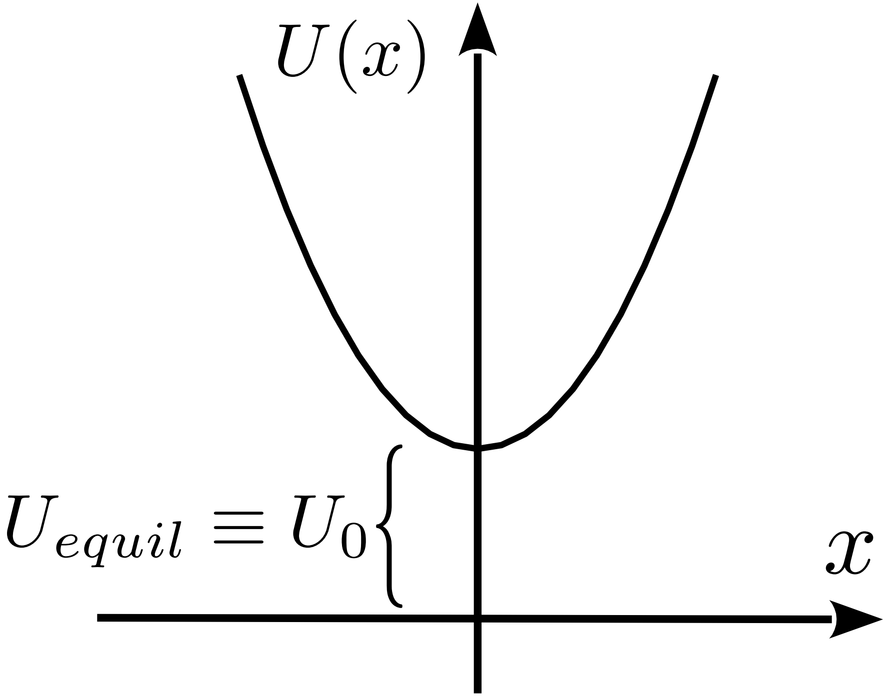
Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

- No ponto de equilíbrio, $x_0 = 0$, a força restauradora é zero
- Portanto, a energia potencial de um sistema fora do ponto de equilíbrio é

$$U - U_{equil} = -\int_0^x (-kx')\,dx'$$
$$= \int_0^x kx'\;dx'$$
$$= \frac{k}{2}x^2$$

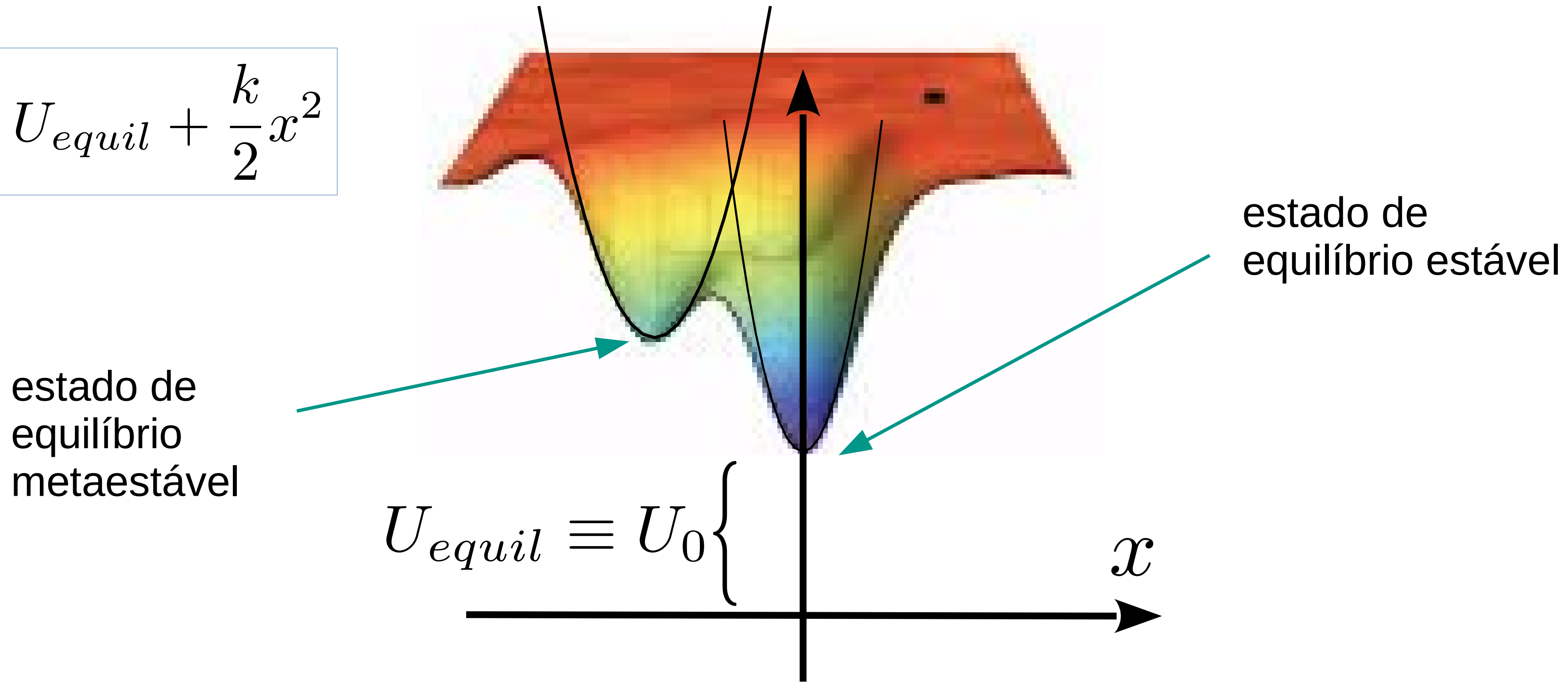
$$\boxed{U(x) = U_{equil} + \frac{k}{2}x^2}$$



Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_{equil} + \frac{k}{2}x^2$$



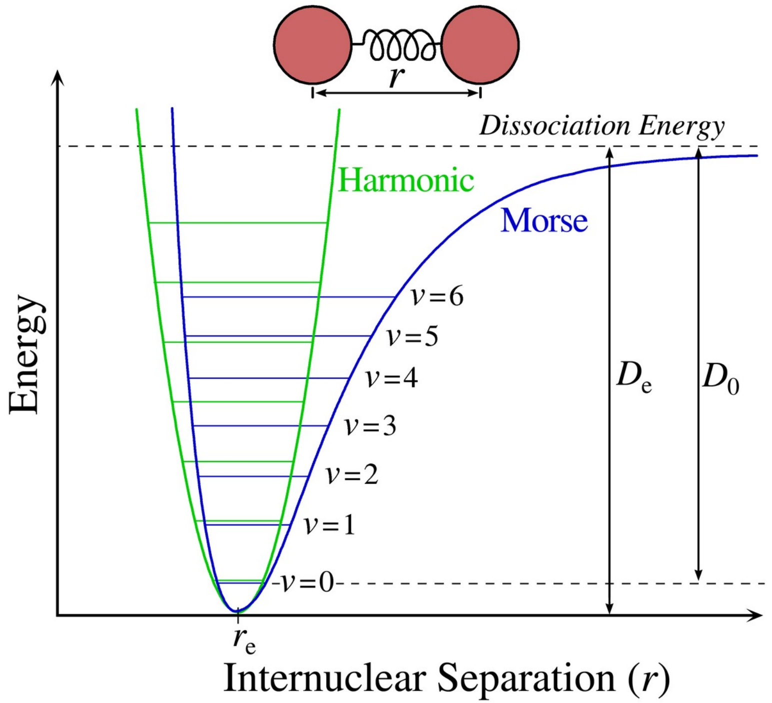
Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

Vibrações moleculares

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_potential

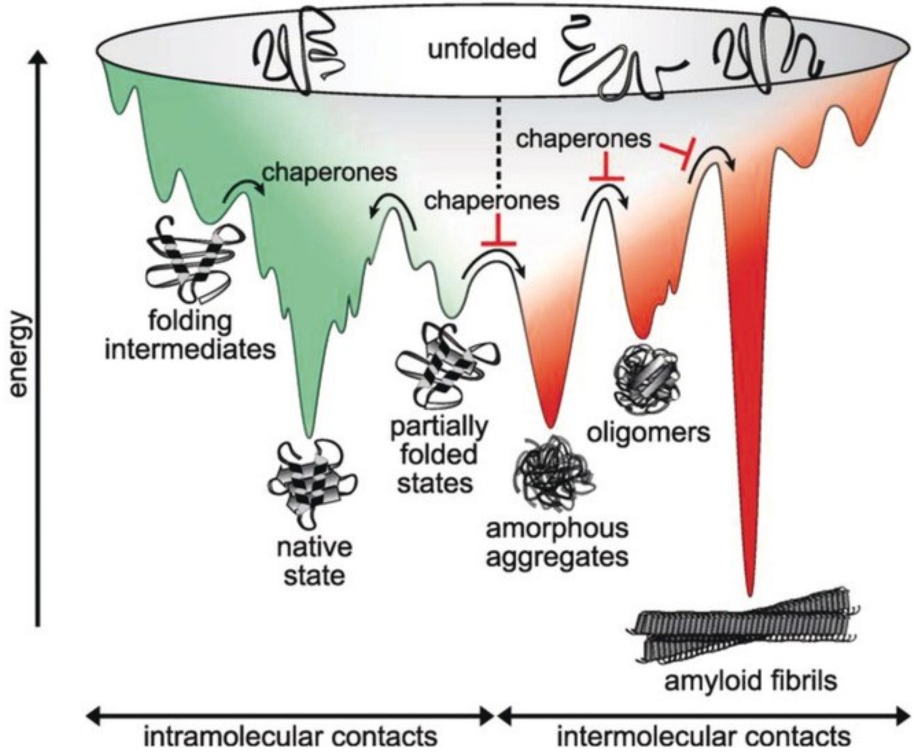
Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$

Conformação de proteínas



DOI: 10.1002/anie.201713416

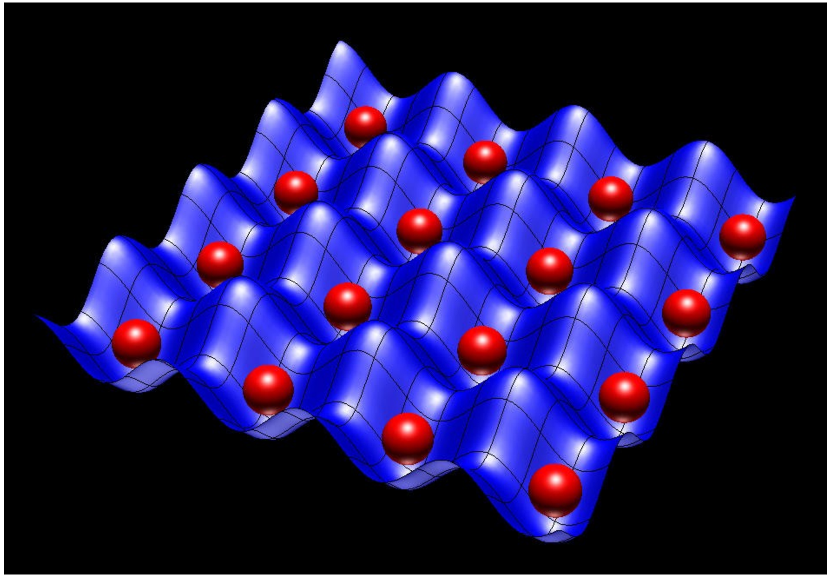
Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$

Potencial cristalino em sólidos

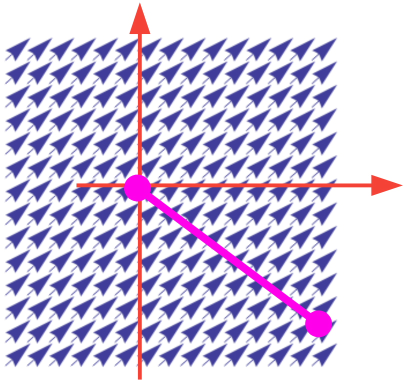


Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

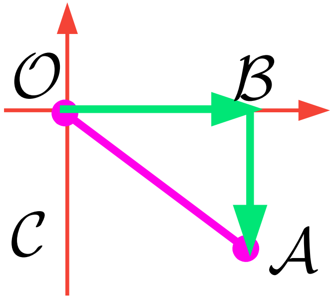
Uma única força constante ***F*** = (3***î*** + 5***ĵ***) N atuam sobre uma partícula de 4 kg.
(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição ***r*** = (2***î***-3***ĵ***) m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?



(a) Caminho OBA: $W_{total} = W_{OB} + W_{BA} = -9\ J$

$$W_{OB} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 F_x dx = 3 * 2\ J = 6J$$

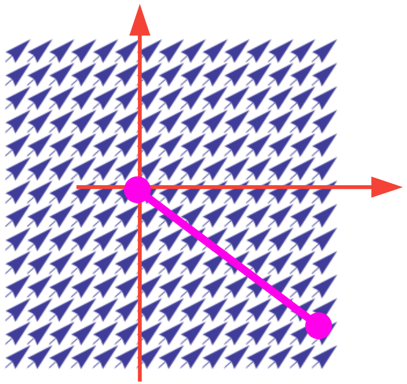
$$W_{BA} = \int_{(2,0)}^{(2,-3)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{-3} F_y dy = 5 * (-3)\ J = -15J$$

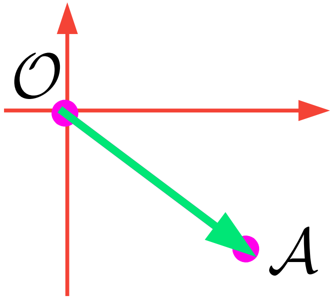


Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante ***F*** = (3***î*** + 5***ĵ***) N atuam sobre uma partícula de 4 kg.
(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição ***r*** = (2***î***-3***ĵ***) m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?





(a) Caminho OA:

$$d\vec{r} = (2, -3)d\alpha \ , \ \ \alpha = [0, 1]$$

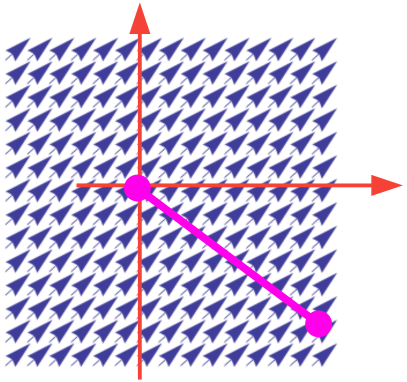
$$W_{OA} = \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (F_x, F_y) \cdot (2, -3) d\alpha$$

$$W_{OA} = \int_0^1 (2F_x - 3F_y)\, d\alpha = (2 * 3 - 3 * 5)J = -9J$$

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante ***F*** = (3***î*** + 5***ĵ***) N atuam sobre uma partícula de 4 kg.
(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição ***r*** = (2***î***-3***ĵ***) m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?

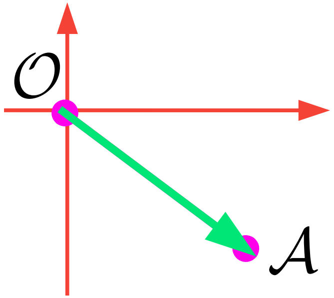


(a) a força F pode ser obtida da seguinte função de energia potencial

$$U(x,y) = -3x - 5y$$

$$\vec{F}(x,y) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}\right) = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

Portanto deve ser uma força conservativa.



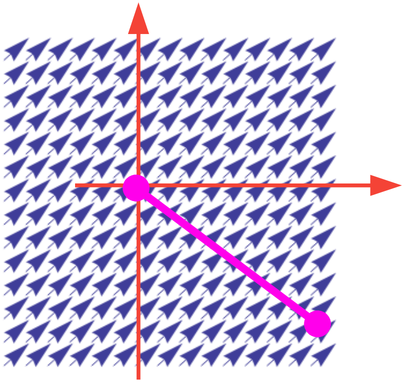
(c) Variação de energia Potencial da partícula:

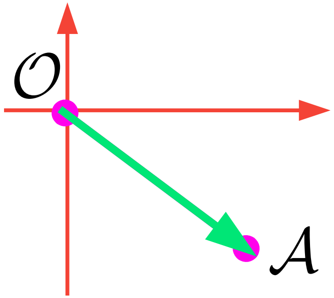
$$\Delta U = U(2,-3) - U(0,0)$$
$$= +9\ J$$

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante ***F*** = (3***î*** + 5***ĵ***) N atuam sobre uma partícula de 4 kg.
(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição ***r*** = (2***î***-3***ĵ***) m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?





(b) módulo da velocidade na origem é 4 m/s, portanto

$$K_i = \frac{m}{2}|\vec{v}_i|^2 = 32\ J$$

Pelo Teorema da Energia Cinética: W = ΔK

$$K_f = \frac{m}{2}|\vec{v}_i|^2 + W = 32J - 9J = 23J$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}_f| = 3.39\frac{m}{s}$$

velocidade diminui no processo.

Trabalho de uma Força Elástica

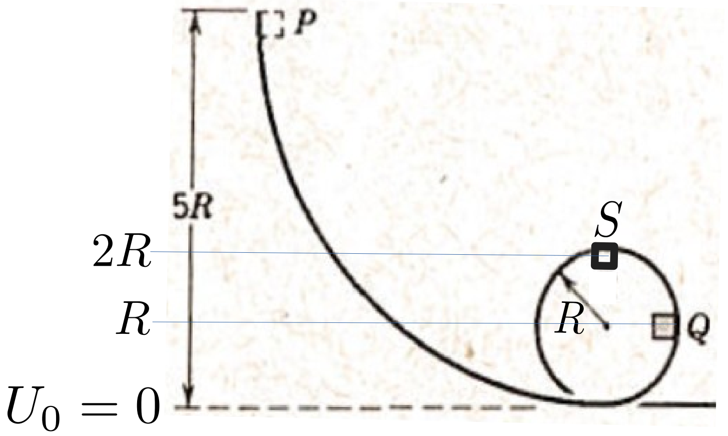
Exemplos:

Um bloco de massa m = 0.032 kg desliza em uma pista sem atrito que forma um loop de raio R = 12 cm. O bloco é liberado a partir do repouso no ponto P, a uma altura h = 5R acima do ponto mais baixo do loop. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco pela força gravitacional quando o bloco se desloca (a) de P para o ponto Q e para o ponto S? (b) Qual a energia potencial do bloco em P, em Q e em S? (c) Se o bloco recebe uma velocidade inicial para baixo, como ficam as respostas dos itens (a) e (b)?

Resposta (a):

$$W_g^{Q\leftarrow P} = -\Delta U_g = -\left[U_g(R) - U_g(5R)\right] = 4mgR$$

$$W_g^{S\leftarrow P} = -\Delta U_g = -\left[U_g(2R) - U_g(5R)\right] = 3mgR$$



(b) energia potencial: $U = mgh$

$$U_g(P) = 5mgh$$

$$U_g(Q) = mgh$$

$$U_g(S) = 2mgh$$

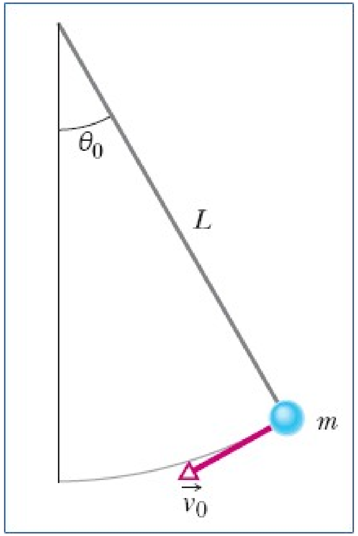
(c) a velocidade inicial não altera a energia potencial do bloco.

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Uma haste fina de comprimento L = 2,0 m e massa desprezível pode girar em torno de uma das extremidades. Uma bola de massa m = 5.0 kg está presa na outra extremidade. A haste é puxada lateralmente até fazer um ângulo Θ_0 = 30º com a vertical e é liberada com velocidade inicial v_0.

(a) Qual é o trabalho realizado sobre a bola pela força gravitacional? (b) Qual é a variação de energia potencial do sistema Terra-bola? (c) Qual a velocidade máxima que a bola atinge?



Resposta: (a)

$$W_g = -\Delta U_g = mgh = mgL(1 - cos\theta_0) \approx 13.1J$$

(b) Variação de energia potencial do sistema Terra-bola:

$$\Delta U_g = -13.1J$$

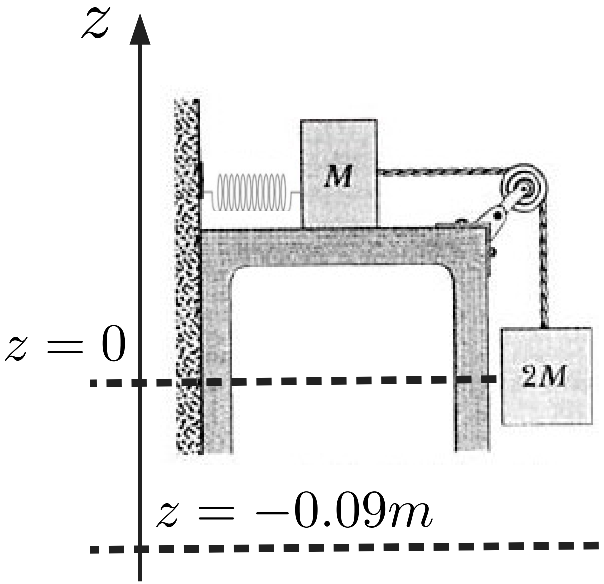
(c) velocidade máxima da bola:

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = mgL(1 - cos\theta_0) = 13.1J \Longrightarrow v_{max} = 2.29\frac{m}{s}$$

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Dois blocos, de massas M = 2 kg e 2M estão presos a uma mola de constante elástica k = 200 N/m, que tem uma das extremidades fixa, como mostra a figura. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito. Os blocos são liberados, a partir do repouso, com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0.09m? Qual é a energia cinética do bloco que está pendurado depois de descer 0.09m? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?



Resposta: (a)

$$\Delta K = -\Delta U_g - \Delta U_{mola} = -mg\Delta z - \frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$
$$= -2Mg * (-0.09m - 0) - \frac{k}{2}(0.09m)^2$$
$$= 3.53J - 0.81J = 2.72J$$

(b) Os blocos tem a mesma velocidade.

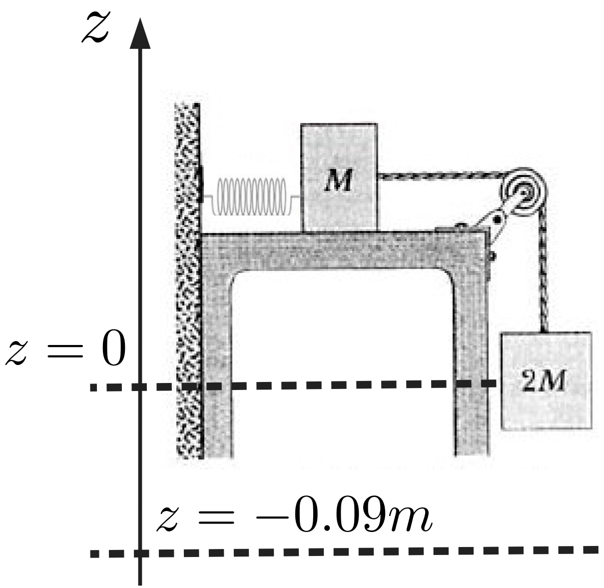
$$K_{total} = K_{2M} + K_M = \frac{2M}{2}v^2 + \frac{M}{2}v^2 = \frac{3}{2}Mv^2 = 2.72J$$

$$\therefore K_{2M} = \frac{2}{3}2.72J \approx 1.8J$$

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Dois blocos, de massas M = 2 kg e 2M estão presos a uma mola de constante elástica k = 200 N/m, que tem uma das extremidades fixa, como mostra a figura. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito. Os blocos são liberados, a partir do repouso, com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0.09m? Qual é a energia cinética do bloco que está pendurado depois de descer 0.09m? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?



Resposta: (c)

$$\Delta K = -\Delta U_g - \Delta U_{mola} = -mg\Delta z - \frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Quando os blocos param momentaneamente ΔK = 0, portanto

$$\Delta U_g = -\Delta U_{mola}$$

$$mg\Delta z = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

$$2Mg(-d) = -\frac{k}{2}d^2 \Longrightarrow d = \frac{4Mg}{k} = 0.39m$$