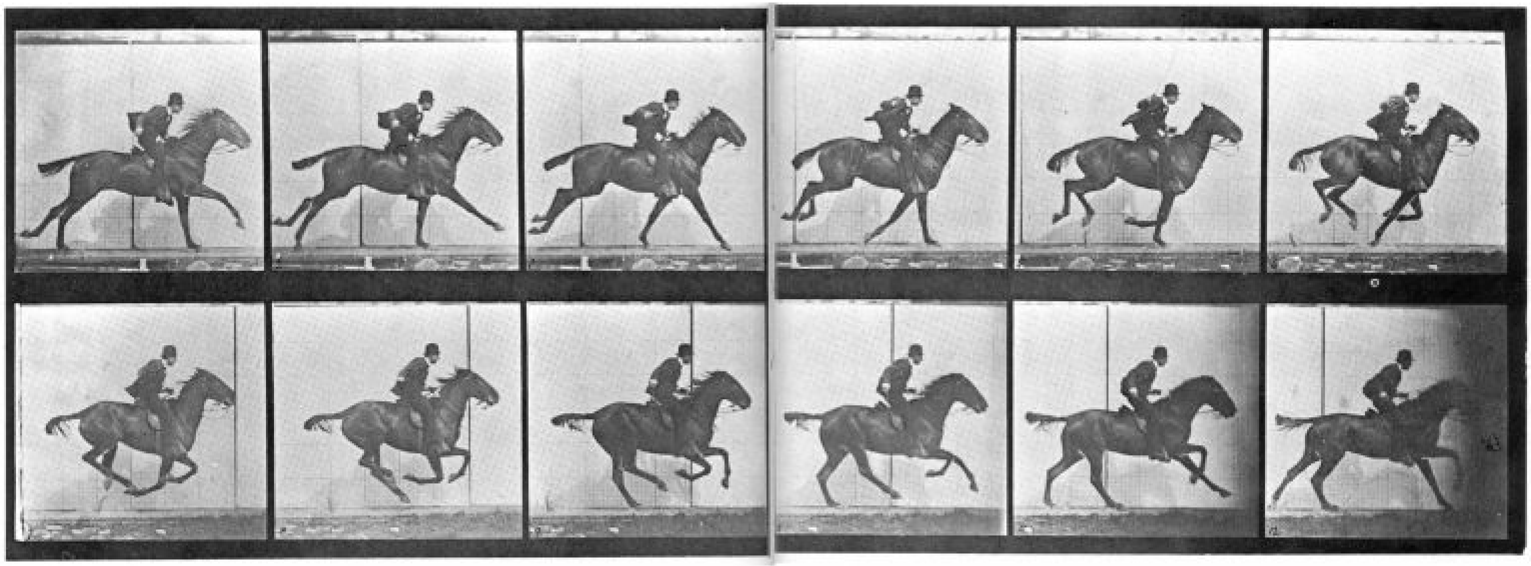
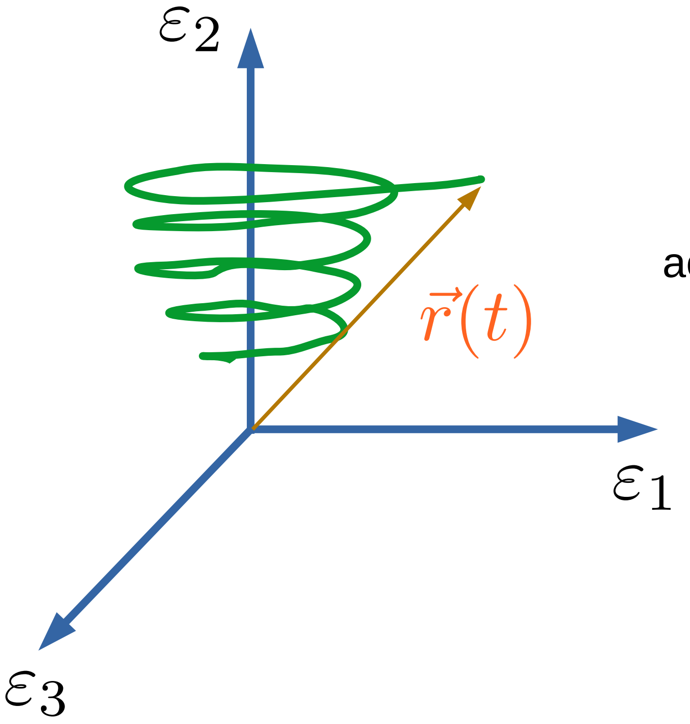
Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

Cinemática: campo da física que estuda o movimento dos objetos, sem se preocupar com as forças que provocam o movimento.



Cinemática: campo da física que estuda o movimento dos objetos, sem referência às forças que provocam o movimento.



No espaço tridimensional (3 dimensões) um movimento Geral é descrito por vetores (posição, velocidade e aceleração), que possuem componentes (projeções) em cada uma das direções independentes (ε_1, ε_2 e ε_3)

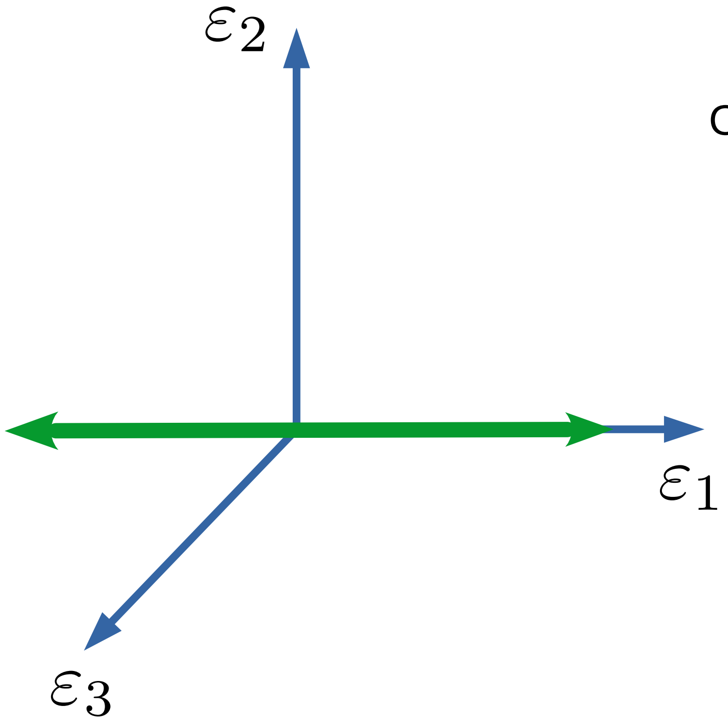
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\varepsilon}_1 + y(t)\hat{\varepsilon}_2 + z(t)\hat{\varepsilon}_3$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\varepsilon}_1 + v_y(t)\hat{\varepsilon}_2 + v_z(t)\hat{\varepsilon}_3$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\varepsilon}_1 + a_y(t)\hat{\varepsilon}_2 + a_z(t)\hat{\varepsilon}_3$$

Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

Cinemática: campo da física que estuda o movimento dos objetos, sem se preocupar com as forças que provocam o movimento.

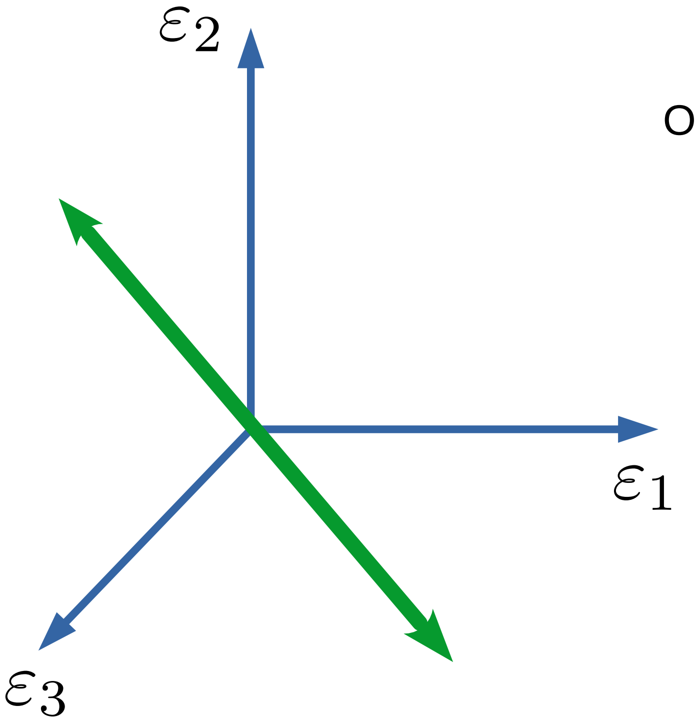


O movimento unidimensional ocorre ao longo de uma única direção. Por exemplo ao longo de ε_1 (em verde).

Nesse caso não precisamos de vetores para descrever o movimento

$$r(t) = x(t)$$
$$v(t) = v_x(t)$$
$$a(t) = a_x(t)$$

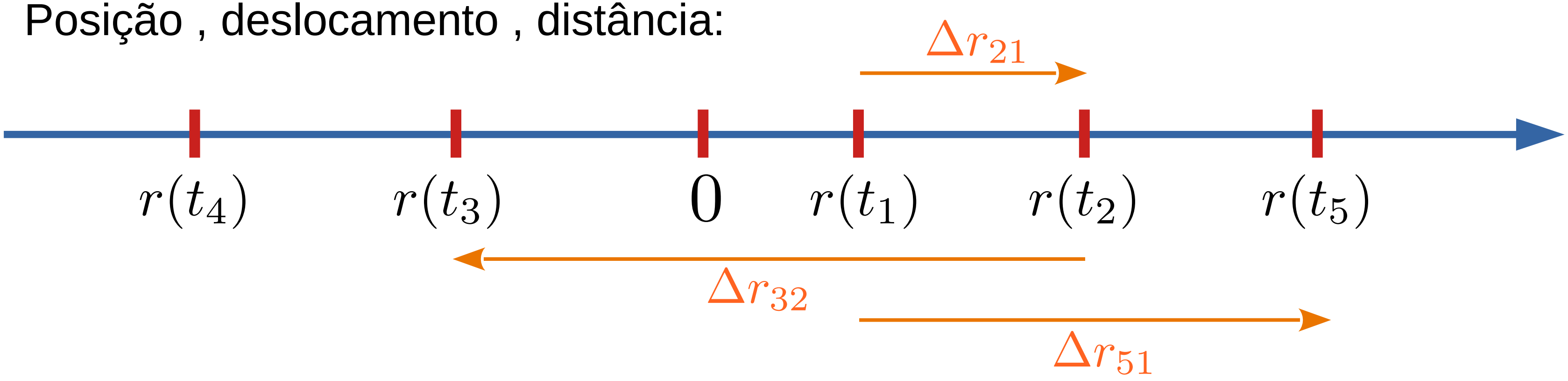
Cinemática: campo da física que estuda o movimento dos objetos, sem referência às forças que provocam o movimento.



O movimento unidimensional pode ocorrer ao longo de qualquer direção espacial.

$$r(t) \equiv x(t)$$
$$v(t) \equiv v(t)$$
$$a(t) \equiv a(t)$$

Posição , deslocamento , distância:



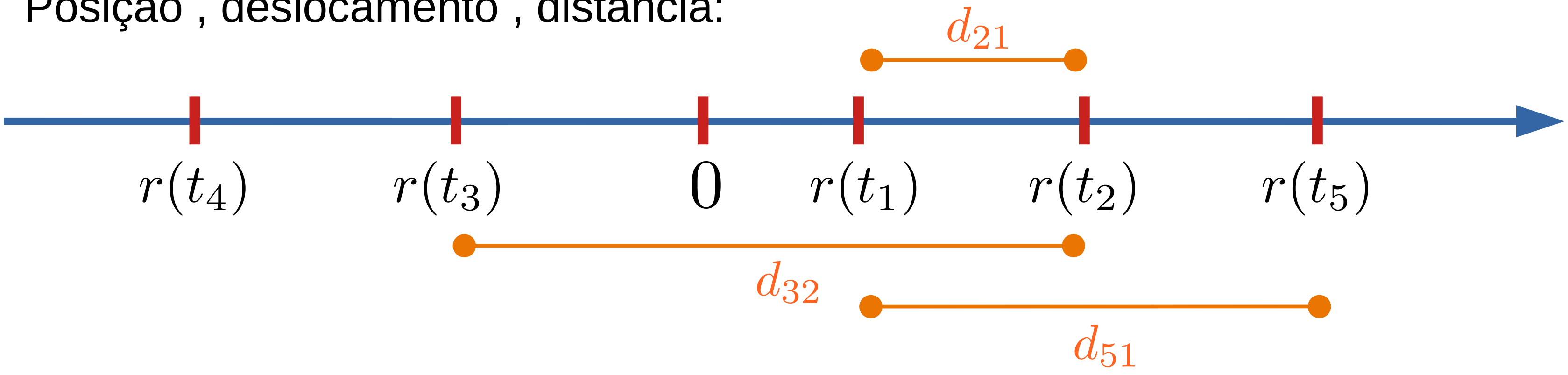
Posições: $r(t_n) \in \mathbb{R} \quad , \quad t_1 < t_2 < t_3 \ldots$

Deslocamentos: $\Delta r_{nm} = r(t_n) - r(t_m) \in \mathbb{R}$

Distâncias: $d = \sqrt{[r(t_n) - r(t_m)]^2} = |r(t_n) - r(t_m)| \in \mathbb{R} \geq 0$

Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

Posição , deslocamento , distância:



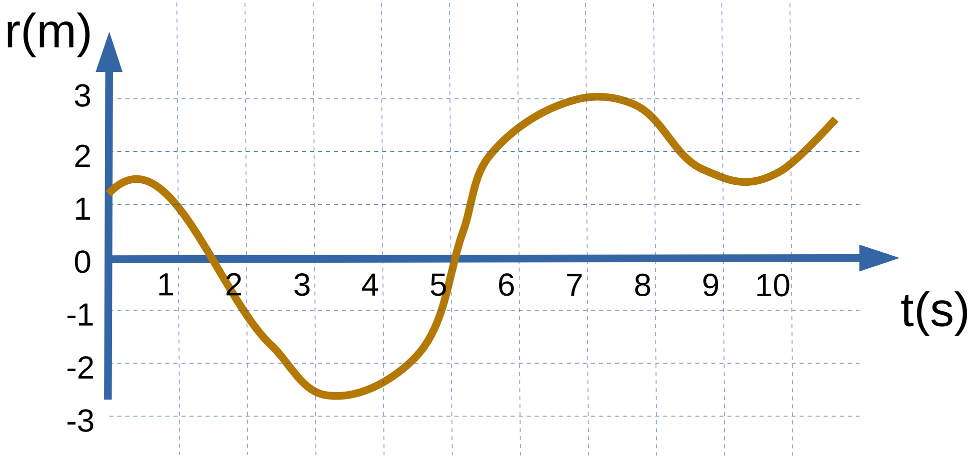
Posições: $r(t_n) \in \mathbb{R} \quad , \quad t_1 > t_2 > t_3 \ldots$

Deslocamentos: $\Delta r_{nm} = r(t_n) - r(t_m) \in \mathbb{R}$

Distâncias: $d = \sqrt{[r(t_n) - r(t_m)]^2} = |r(t_n) - r(t_m)| \in \mathbb{R} \geq 0$

Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

- O movimento de uma partícula (objeto pontual) é descrito pela função ***r(t)***, onde a sua posição (***r***) é uma função bem definida do parâmetro tempo (***t***).
- O movimento unidimensional pode ser representado graficamente, em termos dos eixos ***r(t)*** e ***t***

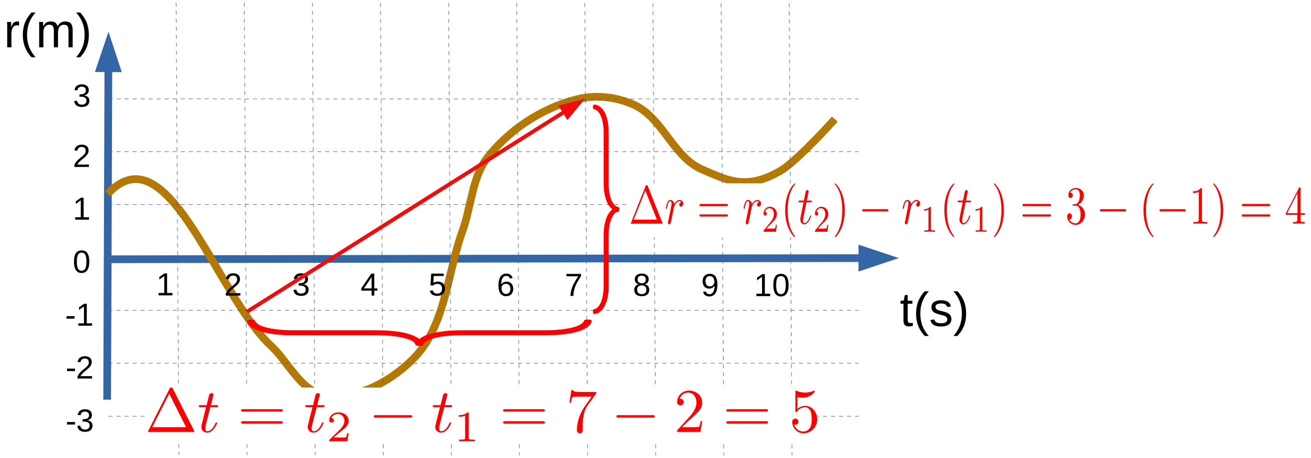


Velocidade média

- O movimento também pode ser caracterizado pela taxa de variação da posição, $\boldsymbol{\Delta r = r_2(t_2) - r_1(t_1)}$, no intervalo de tempo $\boldsymbol{\Delta t = t_2 - t_1}$. Nesse caso definimos a velocidade média entre o intervalo de tempo $\boldsymbol{\Delta t=[t_1,t_2]}$.

- $$\overline{v}_{2,1} = \frac{r_2(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- $$\overline{v}_{2,1} = \frac{4\ m}{5\ s} = \frac{4}{5}\frac{m}{s}$$



Velocidade média

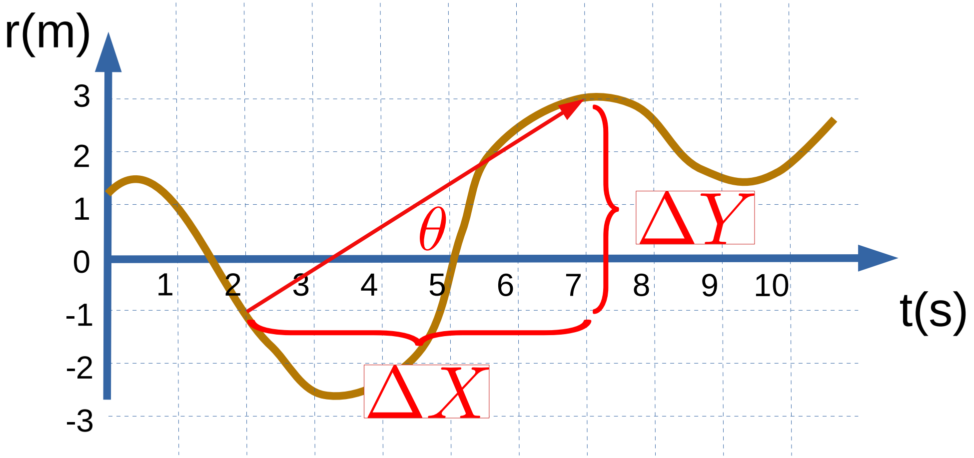
- O movimento também pode ser caracterizado pela taxa de variação da posição, $\Delta r = r_2(t_2) - r_1(t_1)$, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Nesse caso definimos a velocidade média entre o intervalo de tempo $\Delta t=[t_1,t_2]$.

$$\overline{v}_{2,1} = \frac{r_2(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- Do ponto de vista da matemática

$$\overline{v}_{2,1} \equiv tg(\theta) = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

- $\overline{V}_{12}$ não fornece informação instantânea sobre o movimento

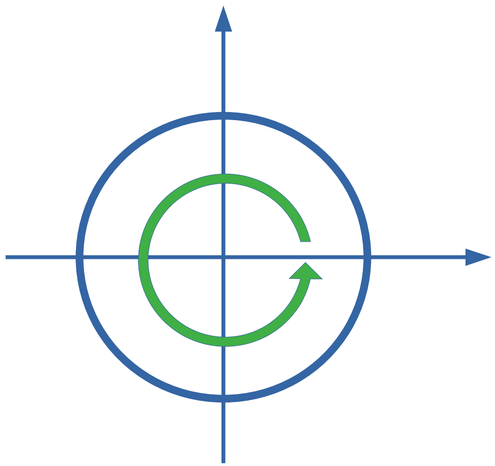


Velocidade **escalar** média

- Taxa de variação da **distância percorrida**, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\overline{v}_{escalar} = \frac{\text{distância total}}{\Delta t}$$

- Exemplo: movimento circular.



Uma volta completa no intervalo de tempo T:

- Velocidade média

$$\overline{v} = \frac{r_2(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{0}{T} = 0$$

- Velocidade escalar média

$$\overline{v}_{escalar} = \frac{\text{perímetro}}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi R}{T}$$

aceleração média

- Conhecendo-se as velocidades instantâneas, podemos calcular a variação média da velocidade,

  $\Delta v = v_2(t_2) - v_1(t_1)$, no intervalo de tempo ***$\Delta t = t_2 - t_1$***.

- Nesse caso definimos a aceleração média entre o intervalo de tempo ***$\Delta t = [t_1, t_2]$***.

- $$\overline{a}_{2,1} = \frac{v_2(t_2) - v_1(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Movimento retilíneo com **aceleração constante** (MUV, movimento uniformemente variado)

- Se a partícula tem aceleração constante.

$$a = \overline{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \Longrightarrow v(t) = \underbrace{v(t_0) + a(t - t_0)} \quad \text{(I)}$$

- Para a velocidade média temos duas equações:

$$\left.\begin{aligned} \overline{v} &= \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \quad \text{(II)} \\ \overline{v} &= \frac{v(t) + v(t_0)}{2} \quad \text{(III)} \end{aligned}\right\} \text{igualando (II) e (III) obtemos: } \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(t) + v(t_0)}{2}$$

- O deslocamento fica como

- $$r(t) - r(t_0) = v(t_0) \cdot [t - t_0] + \frac{a \cdot [t - t_0]^2}{2} \quad \overset{t_0 = 0}{\Longrightarrow} \quad r(t) = r_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Movimento retilíneo com **aceleração constante** (MUV, movimento uniformemente variado)

- Em resumo, podemos utilizar as seguintes equações para o MUV

- $a = \text{constante}$

- $v(t) = v_0 + at$

- $r(t) = r_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

Fórmula de Torricelli

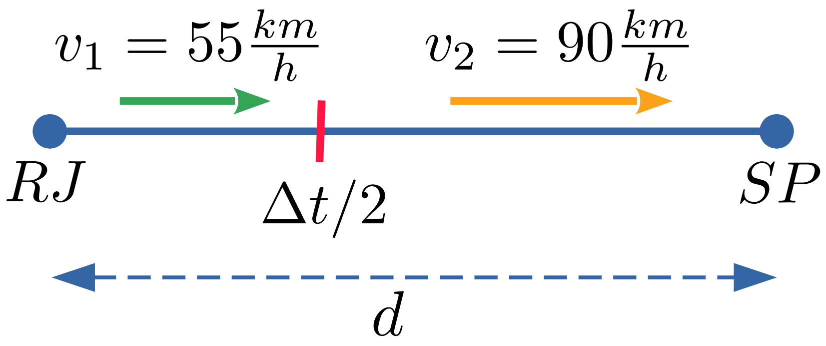
$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta r$$

- Onde ***v(t$_0$) = v$_0$*** e ***r(t$_0$) = r$_0$*** são denominadas condições iniciais do movimento.

Exercício: Velocidade Média.

Uma pessoa dirige do RJ a SP metade do tempo a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Na volta viaja metade da distância a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Qual é a ***<u>velocidade escalar</u>*** média na viagem (a) do RJ a SP, (b) de SP a RJ e (c) na viagem inteira? (d) Qual é a ***<u>velocidade média</u>*** na viagem inteira? (e) Trace o gráfico de ***x*** em funcção de ***t*** para o item (a).

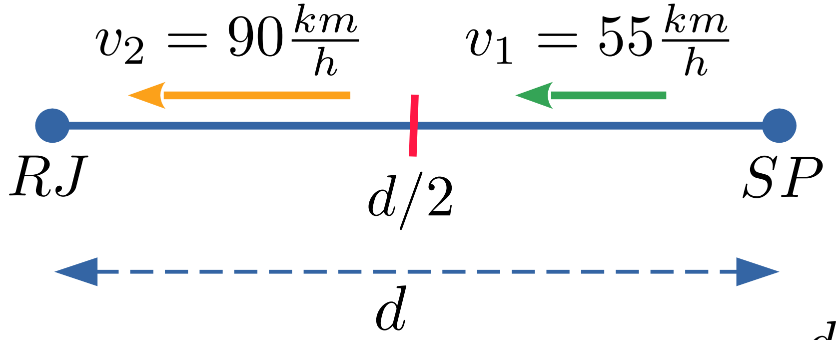
a)



$$\overline{v}_{RJ\to SP} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d_1+d_2}{\Delta t} = \frac{v_1\frac{\Delta t}{2}+v_2\frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}$$

$$\overline{v}_{RJ\to SP} = \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2\right) = 72.5\,\frac{km}{h}$$

b)



$$\overline{v}_{SP\to RJ} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{d}{\Delta t_1+\Delta t_2} \qquad \begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{d}{2}\dfrac{1}{v_1} \\ \Delta t_2 = \dfrac{d}{2}\dfrac{1}{v_2} \end{cases}$$

$$\overline{v}_{SP\to RJ} = 2\,\frac{v_1 v_2}{v_1+v_2} = 68.28\,\frac{km}{h}$$

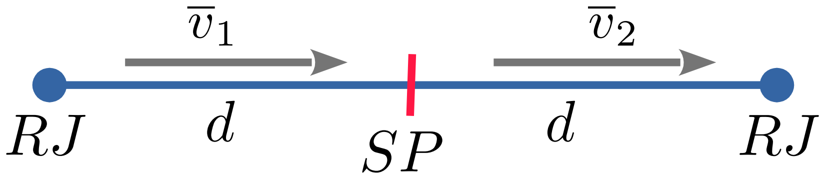
Exercício: Velocidade Média.

Uma pessoa dirige do RJ a SP metade do tempo a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Na volta viaja metade da distância a 55 km/h e a outra metade a 90 km/h. Qual é a ***velocidade escalar*** média na viagem (a) do RJ a SP, (b) de SP a RJ e (c) na viagem inteira? (d) Qual é a ***velocidade média*** na viagem inteira? (e) Trace o gráfico de ***x*** em funcção de ***t*** para o item (a).

c) o cálculo da ***velocidade escalar média*** da viagem inteira é análogo ao cálculo feito no item (b)

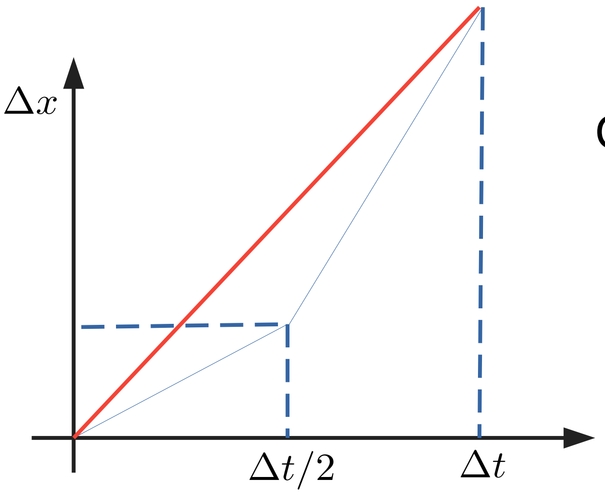
$$\bar{v}_{total} = \frac{2d}{\Delta t} = \frac{2d}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \qquad \begin{cases} \Delta t_1 = \dfrac{d}{\bar{v}_1} \\ \Delta t_2 = \dfrac{d}{\bar{v}_2} \end{cases}$$

$$\bar{v}_{total} = 2\frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 + \bar{v}_2} = 70.3\,\frac{km}{h}$$



d) a ***velocidade média*** da viagem inteira é zero, pois o viajante retorna ao ponto de partida, ou seja, o deslocamento final é zero.

e)



Caso a)

Exercício: Velocidade Média.

Para estabelecer um recorde de velocidade em uma distância d, um carro percorre a distância, primeiro em um sentido (em um tempo t1) e depois no sentido oposto (em um tempo t2). Perguntas: a) Para eliminar o efeito do vento e obter a velocidade V_c que o carro atingiria na ausência de vento, devemos calcular a média aritmética de d/t1 e d/t2 (método 1) ou devemos dividir d pela média aritmética de t1 e t2 (método 2)? b) Qual é a diferença percentual dos dois métodos se existe um vento constante na pista, e a razão entre a velocidade V_v do vento e a velocidade V_c do carro é 0.0240?

Método 1: $\overline{v}_I = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{t_1} + \frac{d}{t_2}\right)$

Método 2: $\overline{v}_{II} = \frac{d}{\frac{t_1+t_2}{2}}$

Na ida, temos $$V_c + V_v = \frac{d}{t_1}$$

Na volta, temos $$V_c - V_v = \frac{d}{t_2}$$

$\oplus$

Na média, temos $$2V_c = \frac{d}{t_1} + \frac{d}{t_2}$$

$$\boxed{V_c = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{t_1} + \frac{d}{t_2}\right) \equiv \overline{v}_I}$$

a) o método 1 é o correto para eliminar o efeito do vento

Exercício: Velocidade Média.

Para estabelecer um recorde de velocidade em uma distância d, um carro percorre a distância, primeiro em um sentido (em um tempo t1) e depois no sentido oposto (em um tempo t2). Perguntas: a) Para eliminar o efeito do vento e obter a velocidade V_c que o carro atingiria na ausência de vento, devemos calcular a média aritmética de d/t1 e d/t2 (método 1) ou devemos dividir d pela média aritmética de t1 e t2 (método 2)? b) Qual é a diferença percentual dos dois métodos se existe um vento constante na pista, e a razão entre a velocidade V_v do vento e a velocidade V_c do carro é 0.0240?

Para o método 2 temos, levando em conta V_v

$$t_1 = d/(V_c + V_v)$$
$$t_2 = d/(V_c - V_v)$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2dV_c}{V_c^2 - V_v^2}$$

$$\overline{v}_{II} = \frac{d}{\frac{t_1+t_2}{2}} = V_c - \frac{V_v^2}{V_c}$$

$$\therefore \overline{v}_{II} < V_c$$

b) a diferença percentual entre os dois métodos é

$$\frac{V_c - \overline{v}_{II}}{V_c} = \frac{V_c - \left(V_c - \frac{V_v^2}{V_c}\right)}{V_c} = \left(\frac{V_v}{V_c}\right)^2$$

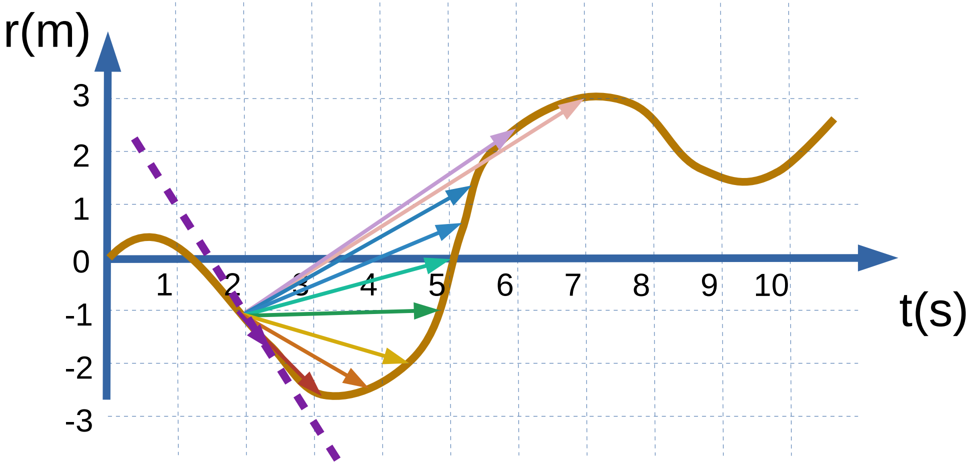
$$\frac{V_c - \overline{v}_{II}}{V_c} = (0.0240)^2 = 0.000576 = 0.0576\%$$

Movimento instantâneo

- Tanto a velocidade média ($\bar{v}_{12}$) como a aceleração média ($\bar{a}_{12}$) não descrevem o movimento instantâneo
- Ambos descrevem a média do movimento no intervalo de tempo $\Delta t=[t_1,t_2]$.
- Para descrever o movimento instantâneo precisamos definir variações instantâneas:
- $$\bar{v}_{2,1} = \frac{r_2(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$
- Note que v(t) está associado ao instante t, não ao intervalo finito $\Delta t=[t_1,t_2]$ como no case de $\bar{v}_{12}$
- Exatamente o mesmo **<u>princípio matemático</u>** aplica-se ao cálculo da aceleração instantânea:
- $$\bar{a}_{2,1} = \frac{v_2(t_2) - v_1(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Longrightarrow \qquad a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

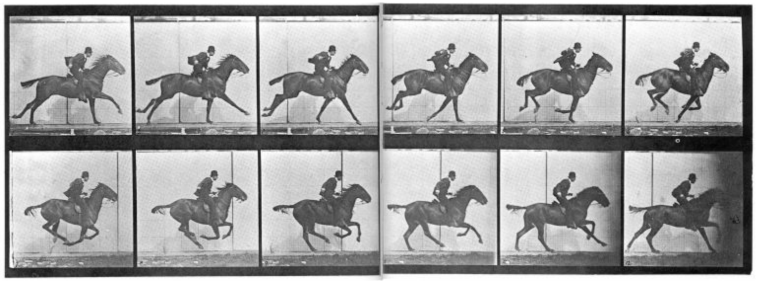
Movimento instantâneo

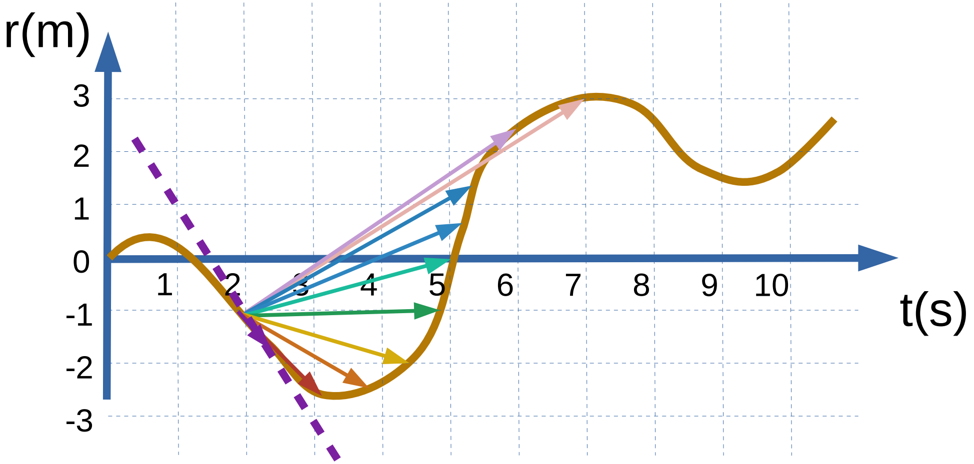
- Para descrever o movimento instantâneo precisamos definir variações instantâneas, utilizando o princípio matemático da diferenciação:
- $$\overline{v}_{2,1} = \frac{r_2(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$
- No gráfico ***r x t*** temos:
- No gráfico, ***v(t)*** corresponde ao ângulo da reta tangente à curva rxt no ponto calculado



Movimento instantâneo

- Para descrever o movimento instantâneo precisamos definir variações instantâneas, utilizando o princípio matemático da diferenciação:
- Numericamente (ou seja, para fazer contas) podemos usar diretamente a fórmula abaixo, se temos fotografias do movimento tiradas em intervalos muito curtos, $\Delta t \rightarrow 0$.
- $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$





Noções de derivada

- Considere uma função analítica ***f(x)***.
- Definimos a taxa de variação de *f(x)* em relação à variável independente *x* como *g(x)*
- $\bar{g}_{2,1} = \dfrac{f_2(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- Para simplificar a notação escrevemos:
- $g(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \dfrac{d}{dx} f(x)$
- Onde $\dfrac{d}{dx}$ é o operador matemático que calcula a derivada na função *f(x)*.
- Note que $\dfrac{d}{dx}$ e *f(x)* tem existência própria, o primeiro é um operador matemático e o segundo uma função qualquer.

Noções de derivada

- Sendo assim definimos:
- Velocidade instantânea $$v(t) = \frac{d}{dt}r(t)$$
- Aceleração instantânea $$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}r(t)\right) \equiv \frac{d^2}{dt^2}r(t)$$
- A aceleração é dada pela primeira derivada da velocidade, ou pela segunda derivada da posição.
- Em termos das dimensões físicas, temos $\left[\frac{d}{dt}\right] = \frac{1}{T}$ e $\left[\frac{d^2}{dt^2}\right] = \frac{1}{T^2}$, que combinados com a

  dimensão de *[r]=L* resultam nas dimensões de *[v]=L/T* e *[a]=L/T²*.

Noções de derivada

- Diferenciação de algumas funções simples, as quais usaremos nesse curso

- Polinômios $f(x) = x^n$, com n = constante (positiva ou negativa)

$$\frac{d}{dx}x^n = n\ x^{n-1}$$

- Exemplos:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x^1 = 2x \quad , \quad \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4 \quad , \quad \frac{d}{dx}x^{-3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right) = (-3)x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

- Utilizando a relação acima, podemos mostrar que a derivada de uma constante é zero:

$$\frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}x^0 = 0x^{-1} = 0$$

Derivada de Polinômios: $\dfrac{d}{dx}x^n = n\ x^{n-1}$

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad f(x) = x^n \\ \bullet \quad f(x+h) = (x+h)^n \\ \bullet \quad \Delta x \equiv h \end{array} \right.$$

- $(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k \ = \ x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$
- binômio de Newton: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n\right)-x^n}{h} = nx^{n-1}$$

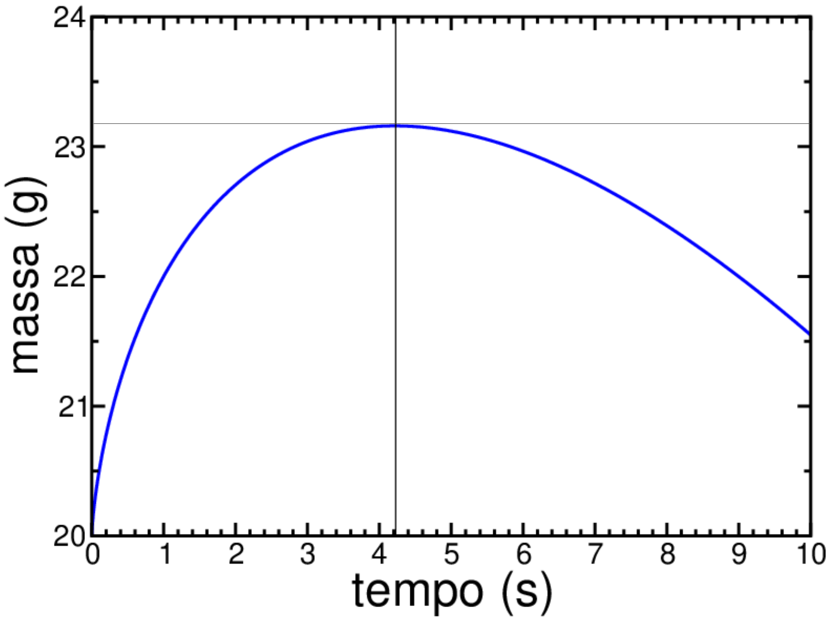
Exemplo de Cálculo Diferencial em Problemas de Otimização

Exemplo: Despeja-se água em um recipicente que apresenta um vazamento. A massa m de água no recipiente em função do tempo t é dada por m = $5{,}00t^{0.8} - 3{,}00t + 20$, para t>0, em que a massa está em gramas e o tempo em segundos. (a) Em que instante a massa de água é máxima? (b) Qual é o valor da massa nesse instante? (c) Qual a taxa de variação de massa no tempo?

Resposta:

Pelo método gráfico:

$$m(t) = 5,00t^{0.8} - 3,00t + 20$$



Exemplo de Cálculo Diferencial em Problemas de Otimização

Exemplo: Despeja-se água em um recipicente que apresenta um vazamento. A massa m de água no recipiente em função do tempo t é dada por m = 5,00t$^{0.8}$ – 3,00t + 20, para t>0, em que a massa está em gramas e o tempo em segundos. (a) Em que instante a massa de água é máxima? (b) Qual é o valor da massa nesse instante? (c) Qual a taxa de variação de massa no tempo?

Resposta:

Pelo cálculo diferencial:

$$m(t) = 5t^{0.8} - 3t + 20$$

A taxa de variação de massa no tempo é dada pela derivada temporal de m(t),

$$\frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt}\left(5t^{0.8} - 3t + 20\right) = 4t^{-0.2} - 3$$

No instante em que a massa de água é máxima devemos ter

$$\frac{d}{dt}m(t) = 0 \Longrightarrow 4t^{-0.2} - 3 = 0$$

Exemplo de Cálculo Diferencial em Problemas de Otimização

Exemplo: Despeja-se água em um recipicente que apresenta um vazamento. A massa m de água no recipiente em função do tempo t é dada por m = $5{,}00t^{0.8} - 3{,}00t + 20$, para t>0, em que a massa está em gramas e o tempo em segundos. (a) Em que instante a massa de água é máxima? (b) Qual é o valor da massa nesse instante? (c) Qual a taxa de variação de massa no tempo?

Resposta:

Resolvendo está equação para t: $4t^{-0.2} - 3 = 0$

$$t^{-0.2} = \tfrac{3}{4}$$

$$-0.2\ln(t) = \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) = 0.2877$$

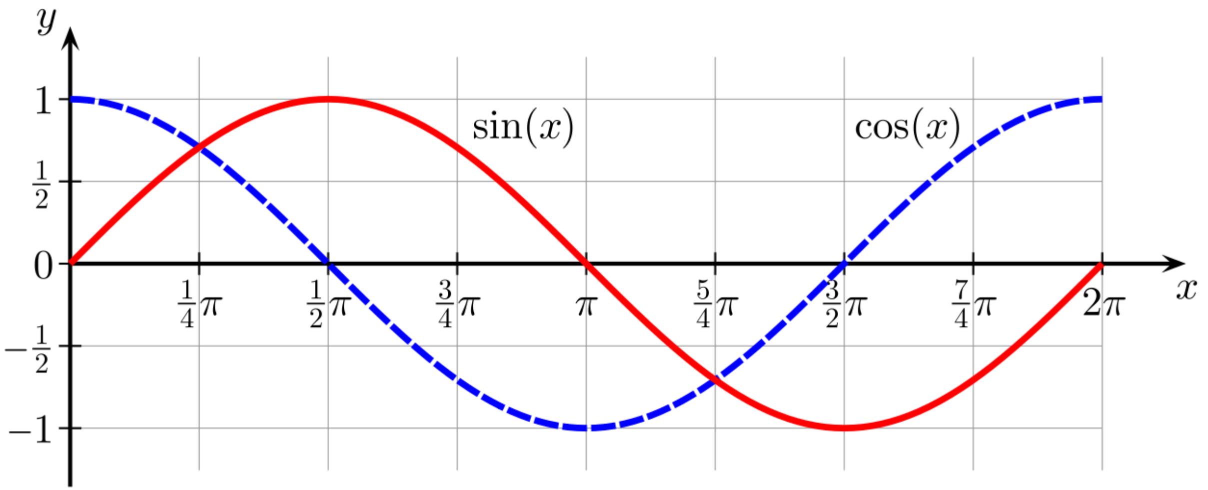
$$\ln t = 1.43841$$

$$t = e^{1.43841} = 4.214s$$

$$m(t = 4.214s) = 5 * (4.214)^{0.8} - 3 * (4.214) + 20$$
$$\approx 23.16g$$

Noções de derivada

- Diferenciação de algumas funções simples, as quais usaremos nesse curso
- Funções trigonométricas,
- Derivadas das funcões seno e cosseno:
- $$\frac{d}{dx} sen(x) = cos(x)$$
- $$\frac{d}{dx} cos(x) = -sen(x)$$



Noções de derivada

- O operador derivada é linear, portanto tem as seguintes propriedades:

- Seja α uma constante e *f(x)* uma função da variável *x*

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha \times f(x)\right) = \alpha \times \frac{d}{dx} f(x) \qquad \text{(I)}$$

- Sejam duas funções *f(x)* e *g(x)* da variável *x*

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) \qquad \text{(II)}$$

- De (I) e (II) temos

$$\frac{d}{dx}\left\{\alpha \times f(x) + \beta \times g(x)\right\} = \alpha \times \frac{d}{dx} f(x) + \beta \times \frac{d}{dx} g(x)$$

Noções de derivada

- Regra da cadeia. Se f(y) é uma função da função y=g(x), ou seja f(y)=f(g(x))

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f(\underbrace{g(x)}_{y}) = \frac{d}{dy}f(y)\frac{d}{dx}g(x)$$

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+3} &= \frac{d}{dy}\sqrt{y}\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)\\ &= \frac{d}{dy}y^{1/2}\times 4x\\ &= \frac{1}{2}y^{-1/2}\times 4x = \frac{1}{2}(2x^2+3)^{-1/2}\times 4x\\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}\end{aligned}$$

Noções de derivada

- Regra da cadeia. Se f(y) é uma função da função y=g(x), ou seja f(x)=f(g(x))

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f(\underbrace{g(x)}_{y}) = \frac{d}{dy}f(y)\frac{d}{dx}g(x)$$

- Exemplo 2:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}cos(ax) &= \frac{d}{dy}cos(y)\frac{d}{dx}ax \\ &= -sen(y) \times a \\ &= -a \times sen(ax)\end{aligned}$$

Movimento retilíneo com **aceleração constante** (MUV, movimento uniformemente variado)

- Utilizando o cálculo diferencial para obter as equações do MUV.

$$r(t) = r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

- onde $v(t_0) = v_0$ e $r(t_0) = r_0$ são constantes iniciais do movimento.

- Aplicando as regras para derivadas de polinônios, obtemos:

$$v(t) = \frac{d}{dt}r(t) = \frac{d}{dt}r_0 + \frac{d}{dt}\left[v_0(t - t_0)\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{a(t - t_0)^2}{2}\right] = v_0 + at$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}v_0 + \frac{d}{dt}\left[at\right] = a = \text{constante}$$

Cinemática Unidimensional da Partícula

Movimento retilíneo **arbitrário**.

$$x(t) \Longrightarrow$$

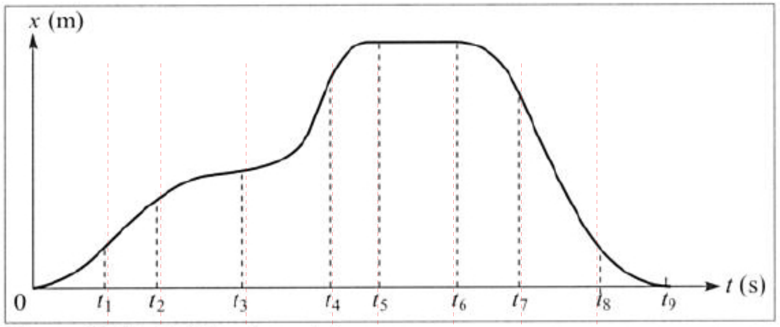


Figura 2.13 Gráfico da posição.

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Longrightarrow$$

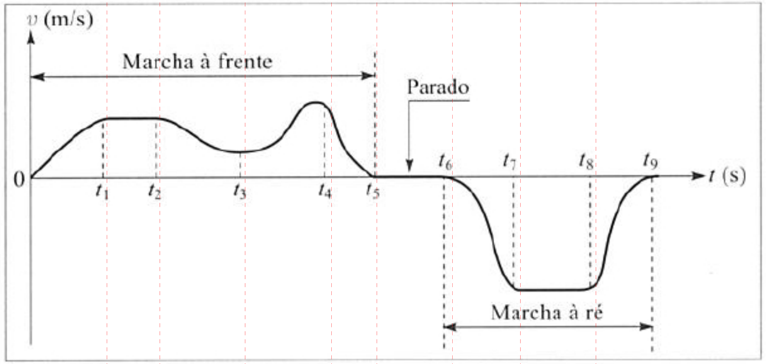


Figura 2.14 Gráfico da velocidade.

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \Longrightarrow$$

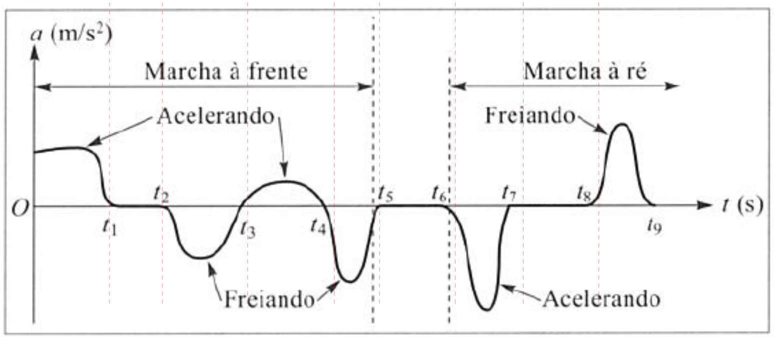


Figura 2.15 Gráfico da aceleração.

Curso de Física Básica: Mecânica; Capt. 2
H. Moysés Nessenzveig, Ed. Blucher, 5º Ed.

Exemplo: Movimento retilíneo arbitrário.

A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo *x* é dada por $x(t) = Ct^2 - Bt^3$, em que x está em metros e *t* em segundos. Perguntas: a) quais as unidades das constantes B e C; b) determine as expressões para velocidade e aceleração da partícula como função do tempo; c) Suponha que os valores numéricos de C e B sejam 3,0 e 2,0, respectivamente, e determine a posição, velocidade e aceleração da partícula em t=4,0s.

a)
$[C] = L/T^2$, portanto C é uma aceleração.
$[B] = L/T^3$, portanto B corresponde à variação temporal da aceleração.

b)
- $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left[Ct^2 - Bt^3\right] = 2Ct - 3Bt^2$
- $a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left[2Ct - 3Bt^2\right] = 2C - 6Bt$

c)

$$x(t = 4s) = \left(3\frac{m}{s^2}\right)(4s)^2 - \left(2\frac{m}{s^3}\right)(4s)^3 = -86m$$

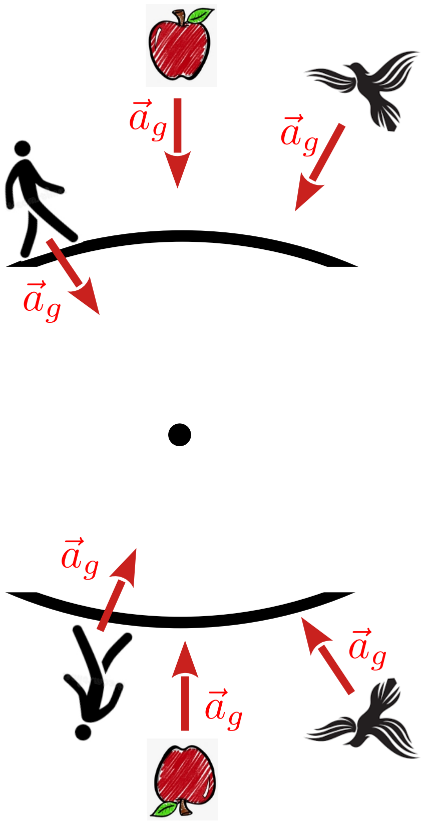
$$v(t = 4s) = 2\left(3\frac{m}{s^2}\right)(4s) - 3\left(2\frac{m}{s^3}\right)(4s)^2 = -72\frac{m}{s}$$

$$a(t = 4s) = 2\left(3\frac{m}{s^2}\right) - 6\left(2\frac{m}{s^3}\right)(4s) = -42\frac{m}{s^2}$$

Movimento em queda livre (movimento com aceleração vertical constante).

- A Terra exerce uma força de atração em todos os corpos
- Essa força de atração foi calculada por Newton e se deve à interação gravitacional
- A força de atração da Terra sobre um corpo de massa m_c (próximo a sua superfície) é:

$$F_g = G\frac{m_c M_T}{R_T^2} = m_c \cdot \left(G\frac{M_T}{R_T^2}\right) = m_c \cdot a_g$$

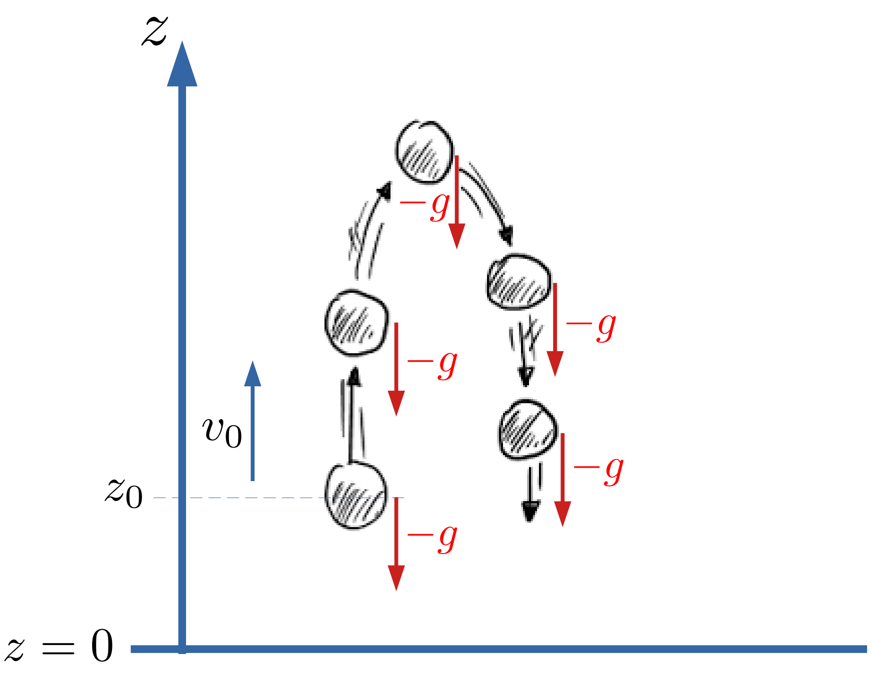


- F_g está orientada para o centro da Terra.
- G é a constante gravitacional que vale no SI: $G = 6.67498 \times 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
- M_T é a massa da Terra: $M_T = 5.972 \times 10^{24} kg$
- R_T é o raio da Terra: $R_T = 6.371 \times 10^{6} m$

- Aceleração gravitacional resultante é $a_g \approx 9.82\,\frac{m}{s^2}$ para ***qualquer corpo*** na superfície da Terra.

Movimento em queda livre (movimento com aceleração vertical constante).

- As equações de movimento para o movimento vertical são:
- $$a_g = -g \approx -9.8\ \frac{m}{s^2}$$
- $$v(t) = v_0 - g \cdot t$$
- $$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

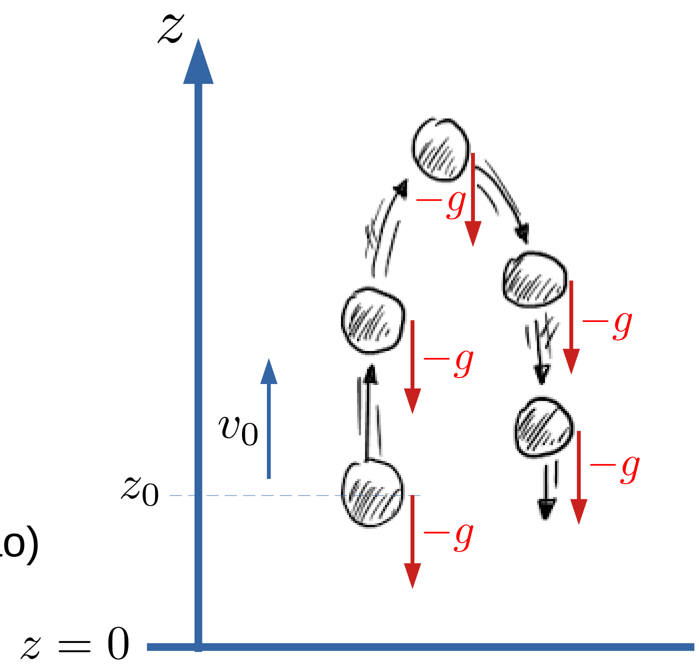


Movimento em queda livre (movimento com aceleração vertical constante).

- Exemplo: Um balão de ar quente está subindo, com uma velocidade de 12 m/s, e se encontra 80 m acima do solo quando um tripulante deixa cair um pacote (supor que g = 10 m/s²). Perguntas:

  a) Quanto tempo o pacote leva para atingir o solo?

  b) Com que velocidade o pacote atinge o solo?



a) $z(t) = z_0 + v_0 \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2}$

$$0 = 80\ m + 12\ \frac{m}{s} \cdot t - \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot t^2}{2}$$

$$5t^2 - 12 - 80 = 0 \Longrightarrow t = (1.2 \pm 4.18)s$$

Ficamos apenas com a raiz positiva (tempo após o pacote cair do balão)

$$t \approx 5.38\ s$$

b)

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \Longrightarrow v = 12 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s^2} 5.38\ s = -41.8 \frac{m}{s}$$