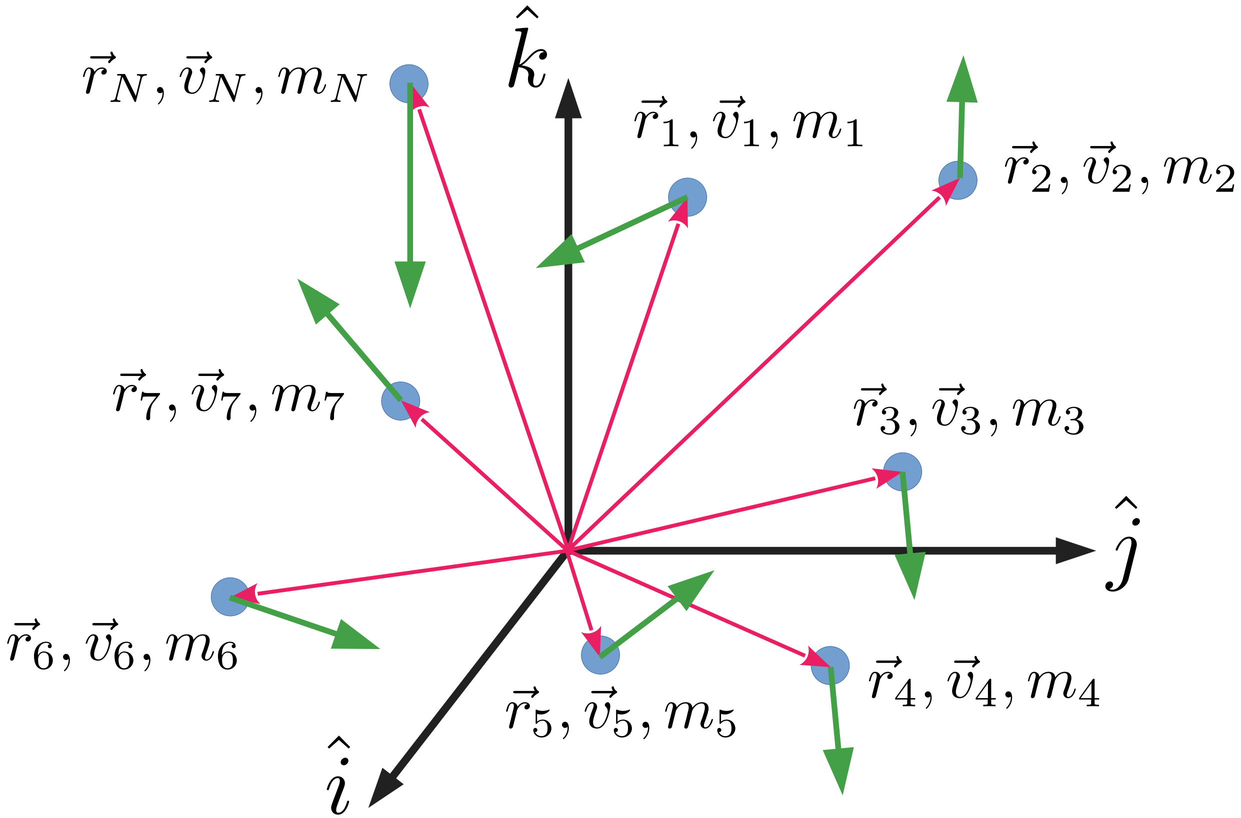
Movimento do Centro de Massa

Dinâmica de um Sistema de N partículas



Para cada partícula i = 1,…,N

m_i

$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$

$\vec{v}_i = (v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i})$

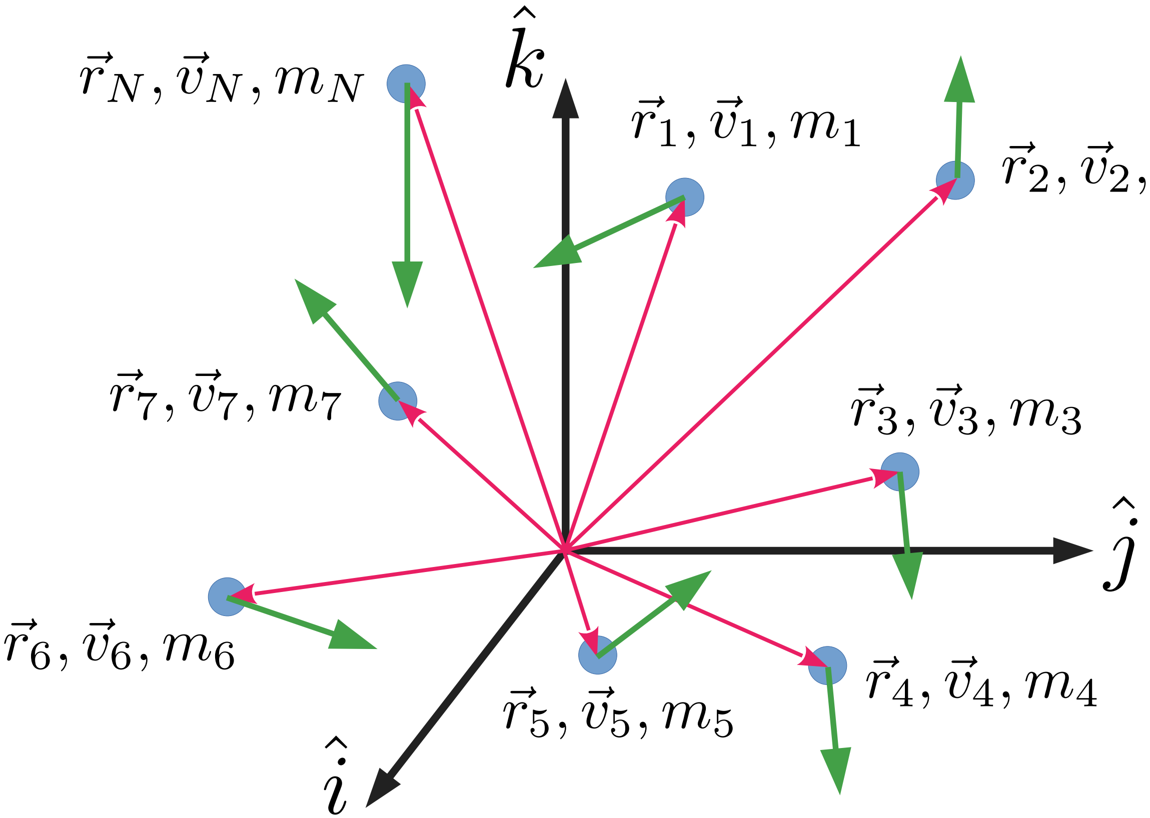
N equações de movimento

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$$

Centro de Massa

Dinâmica de um Sistema de N partículas



Propriedades do sistema

massa total (M) do sistema

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

quantidade de movimento total (P) do sistema

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

Energia cinética total (K) do sistema

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Quantidade de movimento total do sistema (momento do sistema)

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$= \frac{M}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} = M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$= M \vec{V}_{CM}$$

- *Velocidade do centro de massa*: $\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Quantidade de movimento total do sistema (momento do sistema)

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_{CM}$$

- *Centro de massa*:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

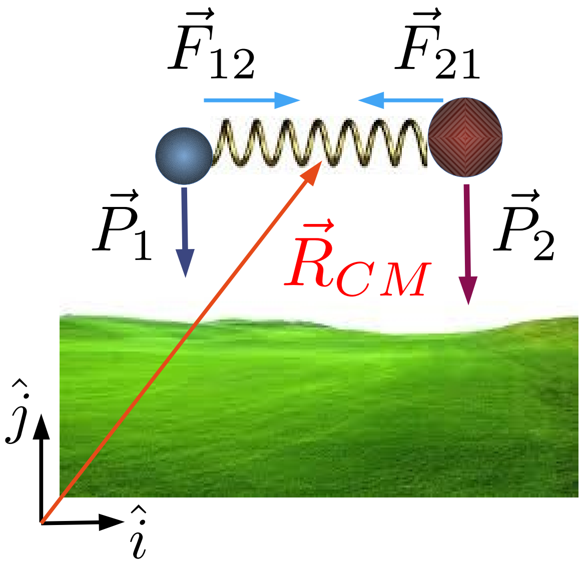
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right) = \frac{d}{dt}\vec{R}_{CM}$$

Coordenada do Centro de Massa

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{R}_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\ &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\end{aligned}}$$

Dinâmica de um Sistema de N partículas

$$\sum \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{P}_2 + \vec{F}_{21} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2$$



- ***Forças internas*** obedecem a 3ª Lei de Newton

  $$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- Portanto,

  $$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{F}^{ext}_{\text{total}}$$

  $$M\left(\frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{M}\right) = \vec{F}^{ext}_{\text{total}}$$

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ext}_{\text{total}} \Longleftarrow \text{Equação de Movimento para o CM}$$

Centro de Massa

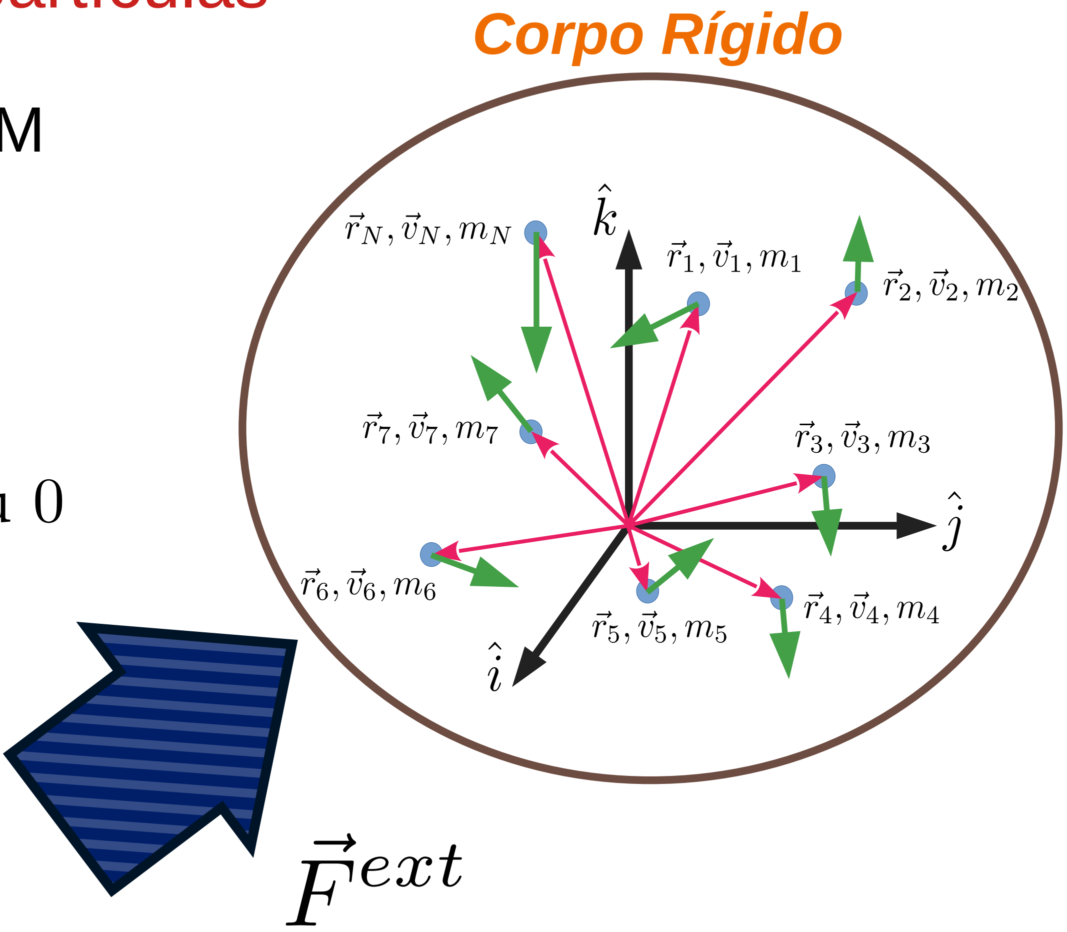
Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Equação de Moviemnto para o CM

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

- Conservação do momento ***P***

$$\vec{F}^{ext} = 0 \implies \vec{V}_{CM} = \text{constante ou } 0$$



Centro de Massa

Dinâmica de um Sistema de N partículas

- Equação de Moviemnto para o CM

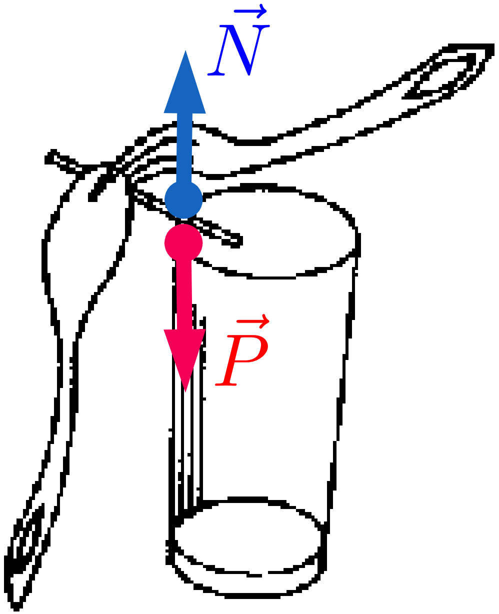
$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{R}_{CM}(t) = \vec{R}_{CM}(t_0) + \vec{V}_{CM}(t_0)t + \frac{\vec{g}}{2}t^2$$

- Trajetória do CM é uma parábola.

Equilíbrio do Centro de Massa

- $\vec{F}^{ext} = 0 \implies \vec{V}_{CM} = \text{constante ou } 0$
- Se a força resultante no CM for ***nula*** o corpo rígido fica em equilíbrio.

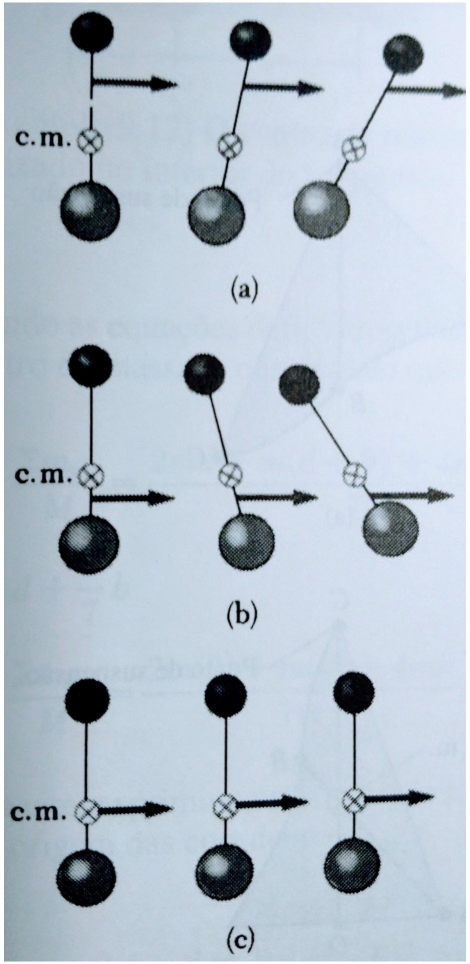


https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/balancing-forks

Equilíbrio do Centro de Massa

- $\vec{F}^{ext} = 0 \implies \vec{V}_{CM} = \text{constante ou } 0$

- Se a força resultante é aplicada no CM não há torque



Física 1 para Cientista e Engenheiros, R. A. Serway

Cálculo do Centro de Massa

- Sistema de massas discretas: $m_i, \vec{r}_i$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Longrightarrow \begin{cases} X_{CM} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ Y_{CM} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ Z_{CM} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{cases}$$

Cálculo do Centro de Massa

- Distribuição contínua de massa
- Densidade (volumétrica) de massa: $\rho(\vec{r}) \implies dm = \rho(\vec{r})dV$
- Massa do objeto: $M = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})dV$
- Se a densidade de massa do objeto é uniforme:

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r})dV = \rho \int_{\mathcal{V}} dV = \rho V$$

- Ex.:, massa de uma esfera homogênea de raio R: $M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

Cálculo do Centro de Massa

- Distribuição contínua de massa

$$X_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

- da mesma forma para y e z:

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm \qquad Z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm$$

- de maneira geral $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int \vec{r} \, dm$

Cálculo do Centro de Massa

- Distribuição contínua de massa

- para uma distribuição de massa 3D

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad , \quad dm = \rho\, dV \quad , \quad \rho = \text{dens. volumétrica}$$

- para uma distribuição de massa 2D

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad , \quad dm = \sigma\ dA \quad , \quad \sigma = \text{dens. superficial}$$

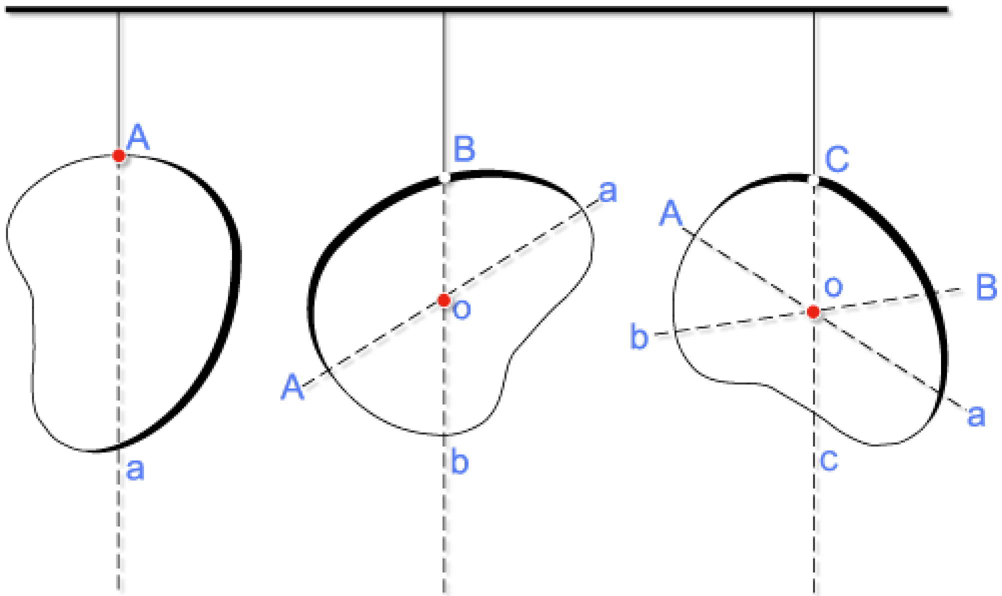
- Para uma distribuição linear de massa

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\int x\ dm \quad , \quad dm = \lambda\ dL \quad , \quad \lambda = \text{dens. linear}$$

Centro de Massa

- Distribuição contínua de massa

- Determinação pelo método experimental usando o centro de gravidade



- Centro de gravidade (CG): ponto em que o torque devido à força de gravidade se anula

- Se o campo gravitacional é uniforme, CG=CM

http://efisica.if.usp.br/mecanica/basico/centro_gravidade/intro/

Centro de Massa

Exemplos:

Quais são as coordenadas do centro de massa da placa homogênea, se L = 5,0 cm?

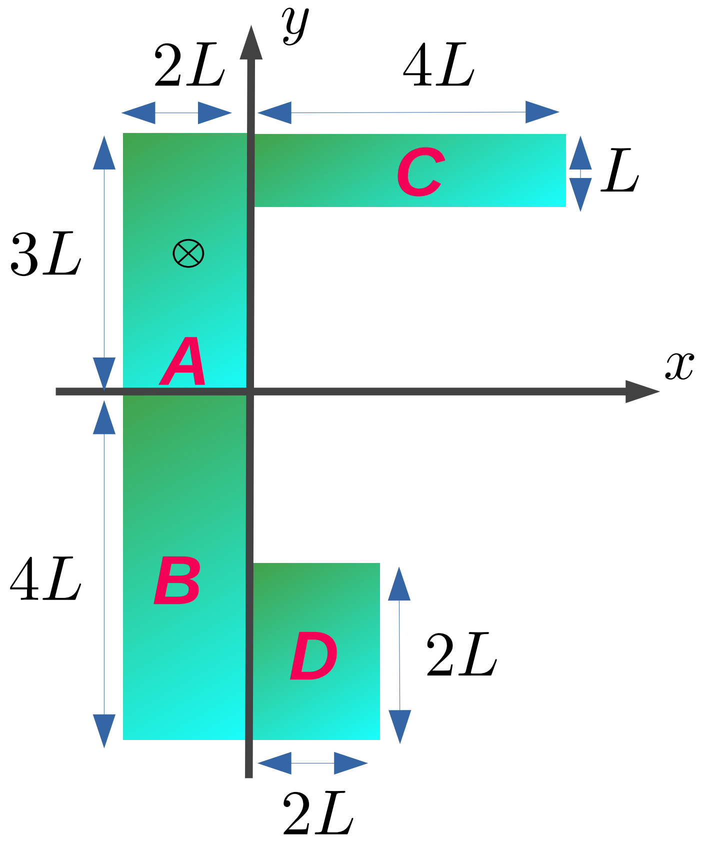
Resposta:

Primeiro, determinar a massa das placas A, B, C e D.

Vamos considerar a densidade superficial de massa σ.

$$m_A = \sigma 6L^2 \quad , \quad m_B = \sigma 8L^2$$

$$m_C = \sigma 4L^2 \quad , \quad m_D = \sigma 4L^2$$



Os centros de massas das placas:

$$X_A = \frac{1}{m_A}\int x dm = \frac{\sigma}{m_A}\int_0^{2L}(-|x|)dx\int_0^{3L}dy = -L$$

$$Y_A = \frac{1}{m_A}\int y dm = \frac{\sigma}{m_A}\int_0^{2L}dx\int_0^{3L}y dy = \frac{3}{2}L$$

Centro de Massa

Exemplos:

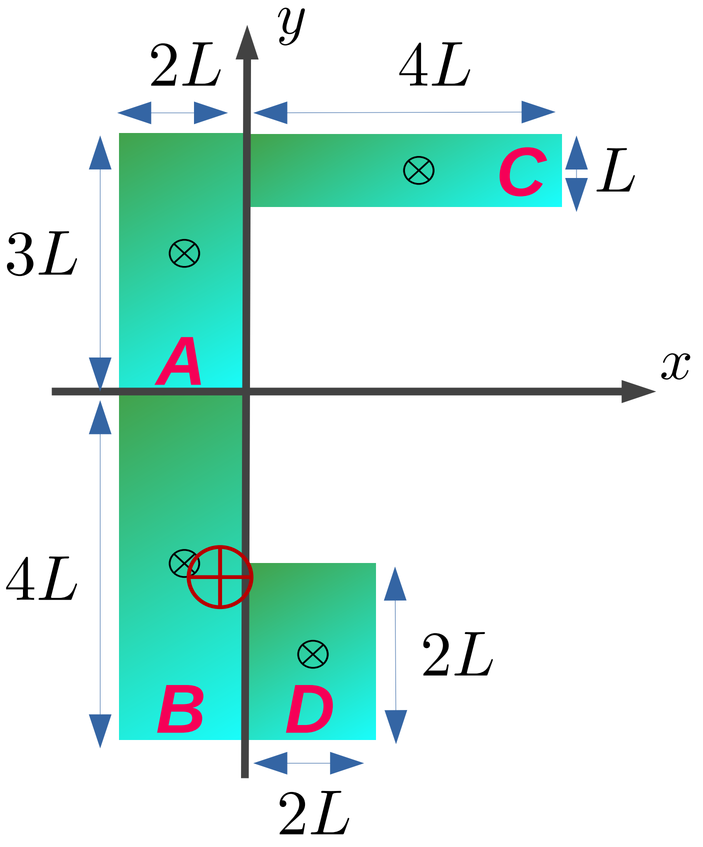
Quais são as coordenadas do centro de massa da placa homogênea, se L = 5,0 cm?

Resposta:

Os centros de massas das placas, coincide com os centros geométricos:

$$\vec{R}_{CM,A} = (-L, \tfrac{3}{2}L) \quad , \quad \vec{R}_{CM,B} = (-L, -2L)$$

$$\vec{R}_{CM,C} = (2L, 2.5L) \quad , \quad \vec{R}_{CM,D} = (L, -3L)$$



O centro de massa da peça completa é composto pelos centros de massas das partes.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{R}_{CM,i}}{\sum_i m_i} = (-2, -9)\frac{L}{22} = (-0.45, -2.04)cm$$

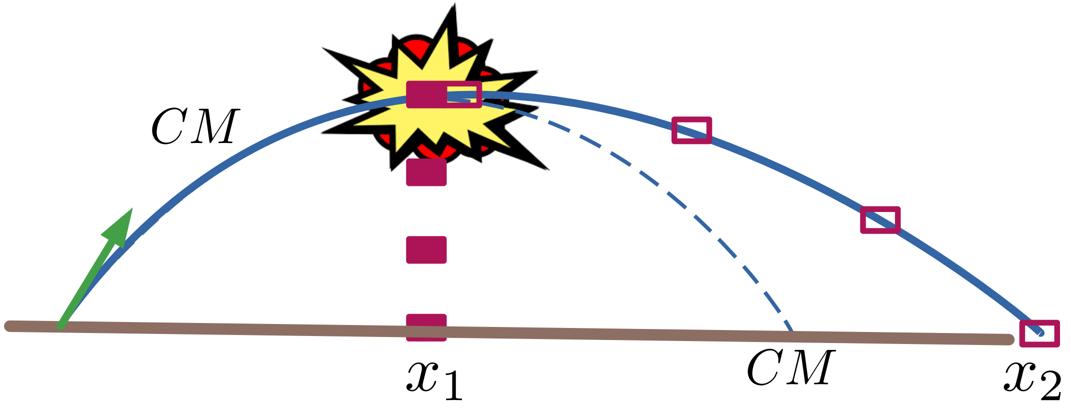
Movimento do Centro de Massa

Exemplos:

Um canhão dispara um projétil com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$=20 m/s e um ângulo Θ_o=60º com a horizontal. No ponto mais alto da trajetória, o projétil explode em dois fragmentos de massas iguais. Um fragmento, cuja velocidade imediatamente após a colisão é zero, cai verticalmente. A que distância do ganhão cai o outro fragmento, supondo que o terreno é plano e que a resistência do ar pode ser desprezada?

Resposta:

O ponto mais alto da trajetória:



$$v_y(t_m) = v_0 * sen(60) - gt_m = 0$$

$$0 \implies t_m = \frac{v_0 * sen60}{g} = 1.76s$$

$$x_1 = v_0 cos(60) t_m = 17.67m$$

$$x_{CM} = 2 \times x1 = 35.34m$$

$$x_{CM} = \frac{(m/2)x_1 + (m/2)x_2}{m} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \implies x_2 = 53.02m$$