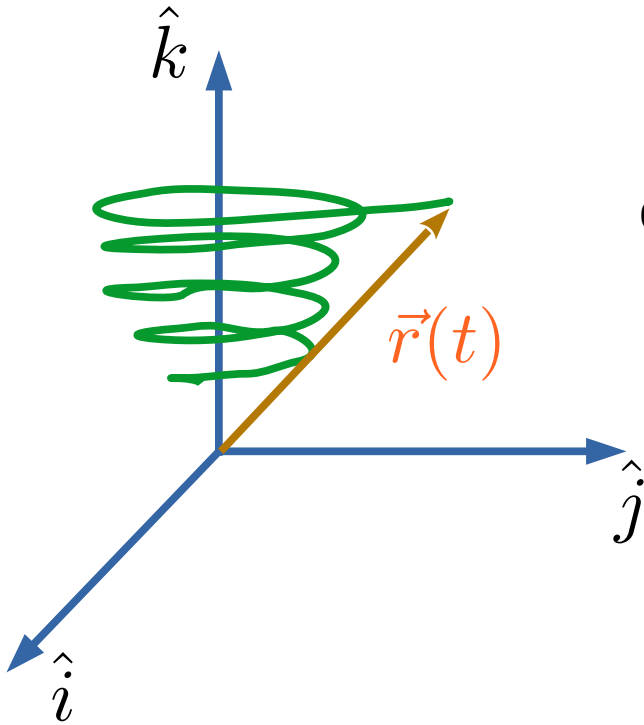


# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



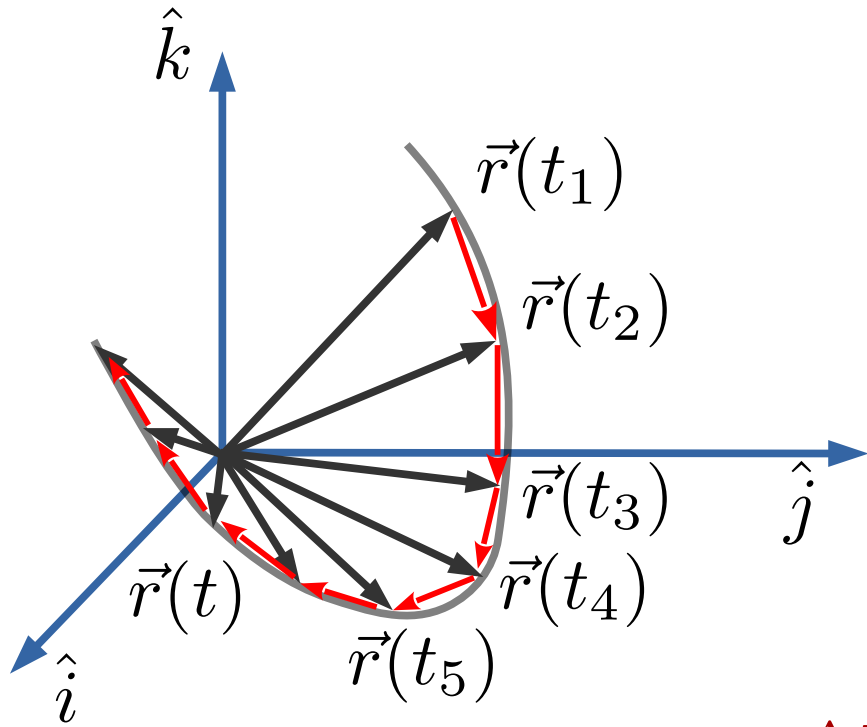
No espaço tridimensional (3 dimensões, 3D) o movimento é descrito por vetores (posição, velocidade e aceleração), que possuem componentes (projeções) em cada uma das direções independentes ( $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ )

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor posição

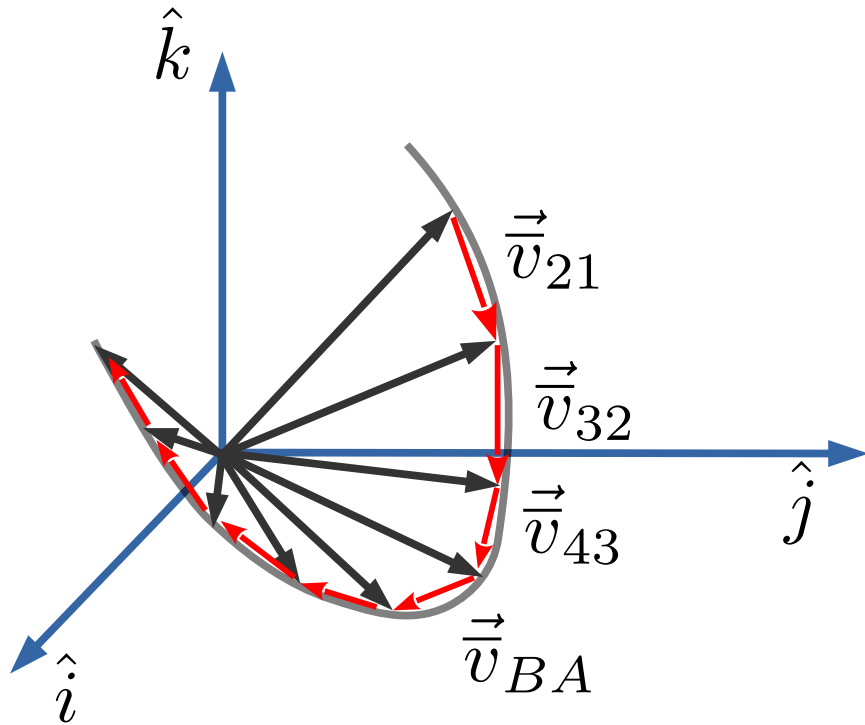
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Vetor deslocamento

$$\Delta \vec{r}_{BA} = \vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}_{BA} &= (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \\ &= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k} \end{aligned}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor velocidade média

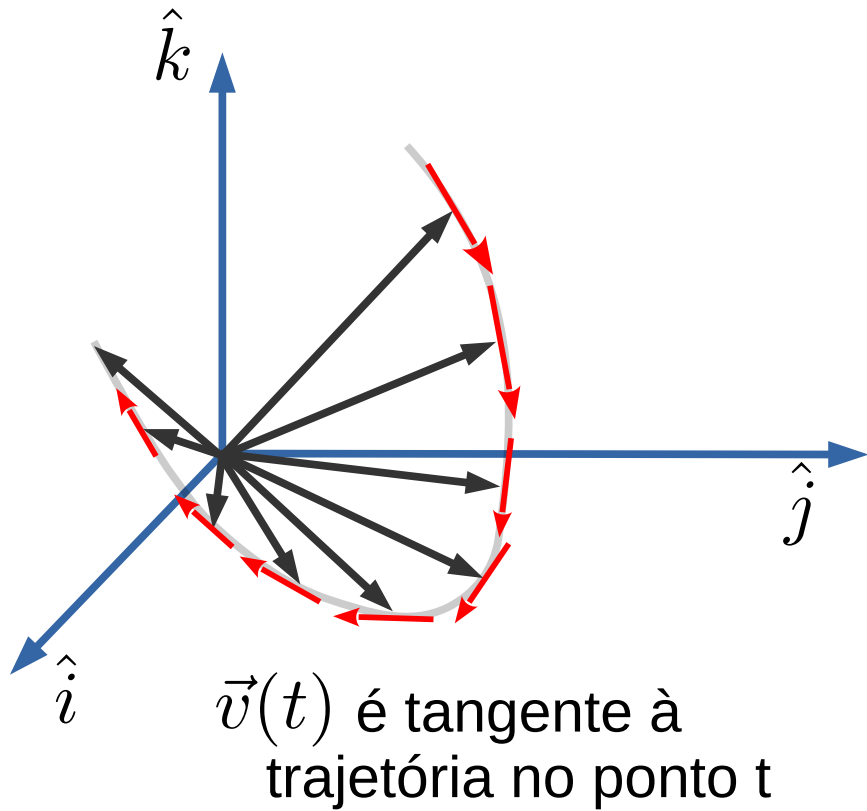
$$\vec{v} = \bar{v}_x \hat{i} + \bar{v}_y \hat{j} + \bar{v}_z \hat{k}$$

Vetor **velocidade média**

$$\vec{v}_{BA} = \frac{\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\Delta \vec{r}_{BA}}{\Delta t_{BA}}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{BA} &= \frac{\Delta x_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{i} + \frac{\Delta y_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{j} + \frac{\Delta z_{BA}}{\Delta t_{BA}} \hat{k} \\ &= \bar{v}_x \hat{i} + \bar{v}_y \hat{j} + \bar{v}_z \hat{k} \end{aligned}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor velocidade instantânea

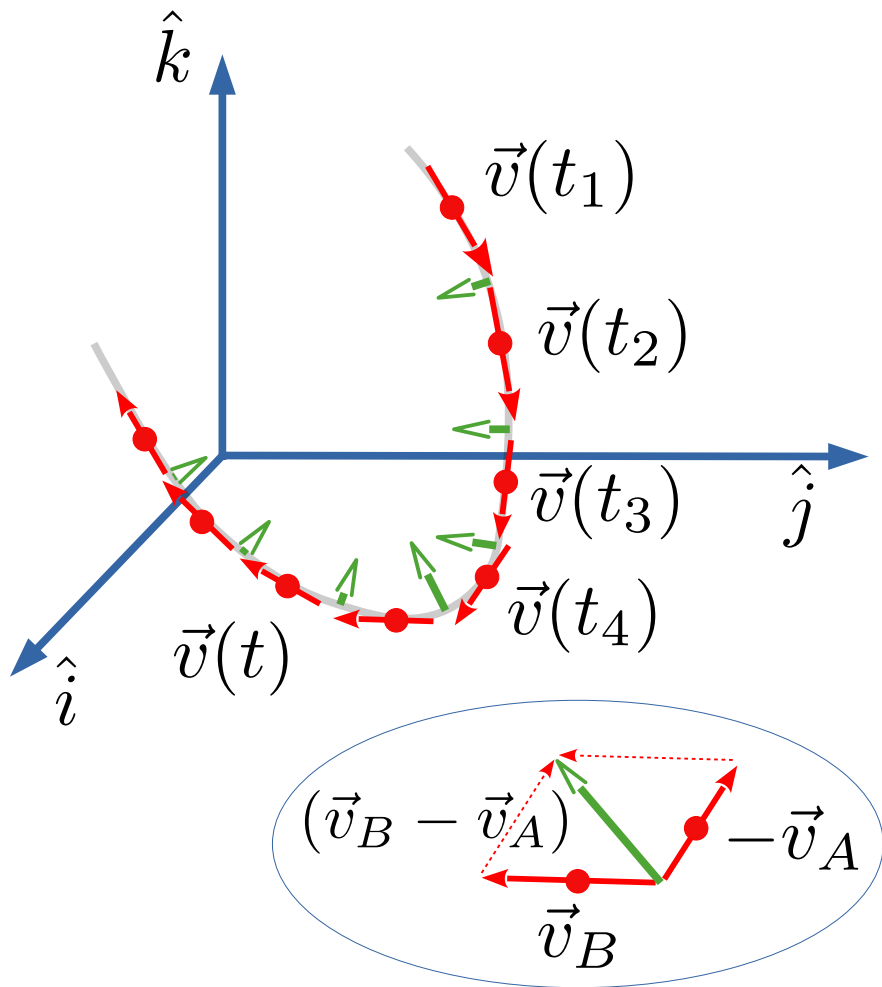
$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$$

Vetor **velocidade instantânea**

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \left[ \frac{d}{dt} x(t) \right] \hat{i} + \left[ \frac{d}{dt} y(t) \right] \hat{j} + \left[ \frac{d}{dt} z(t) \right] \hat{k} \\ &= v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j} + v_z(t) \hat{k} \end{aligned}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor aceleração média

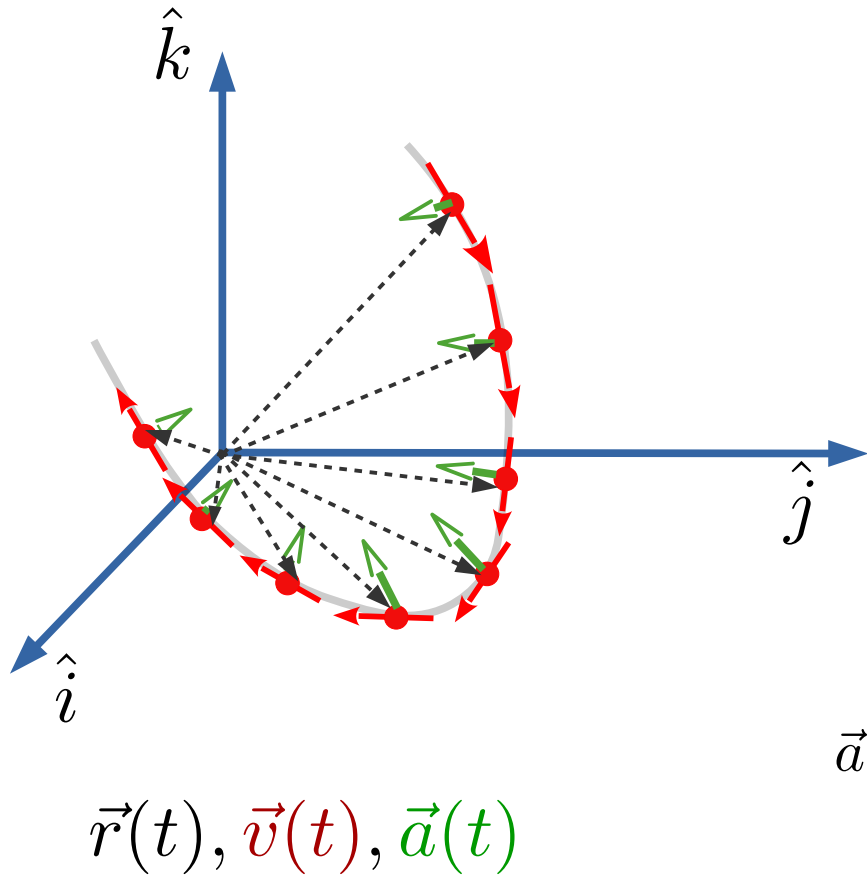
$$\vec{a} = \bar{a}_x \hat{i} + \bar{a}_y \hat{j} + \bar{a}_z \hat{k}$$

Vetor **aceleração média**

$$\vec{a}_{BA} = \frac{\vec{v}(t_B) - \vec{v}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\Delta \vec{v}_{BA}}{\Delta t_{BA}}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{BA} &= \frac{\Delta v_{BA}^x}{\Delta t_{BA}} \hat{i} + \frac{\Delta v_{BA}^y}{\Delta t_{BA}} \hat{j} + \frac{\Delta v_{BA}^z}{\Delta t_{BA}} \hat{k} \\ &= \bar{a}_x \hat{i} + \bar{a}_y \hat{j} + \bar{a}_z \hat{k} \end{aligned}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D



Vetor aceleração instantânea

$$\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Vetor **aceleração instantânea**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \left[ \frac{d}{dt} v_x(t) \right] \hat{i} + \left[ \frac{d}{dt} v_y(t) \right] \hat{j} + \left[ \frac{d}{dt} v_z(t) \right] \hat{k} \\ &= a_x(t) \hat{i} + a_y(t) \hat{j} + a_z(t) \hat{k} \end{aligned}$$

# Cinemática da Partícula no Espaço 2D e 3D

## Exemplo:

Uma partícula deixa a origem com uma velocidade  $\vec{v} = (3, 0 \text{ m/s}) \hat{i}$  e uma aceleração constante

$\vec{a} = (-1.0\hat{i} - 0.5\hat{j}) \text{ m/s}^2$ . Quando a partícula atinge o valor máximo da coordenada x, qual é (a) a velocidade e (b) qual é o vetor posição?

a) no ponto de retorno em  $\hat{x}$

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times t = 0$$

$$\implies t = 3 \text{ s}$$

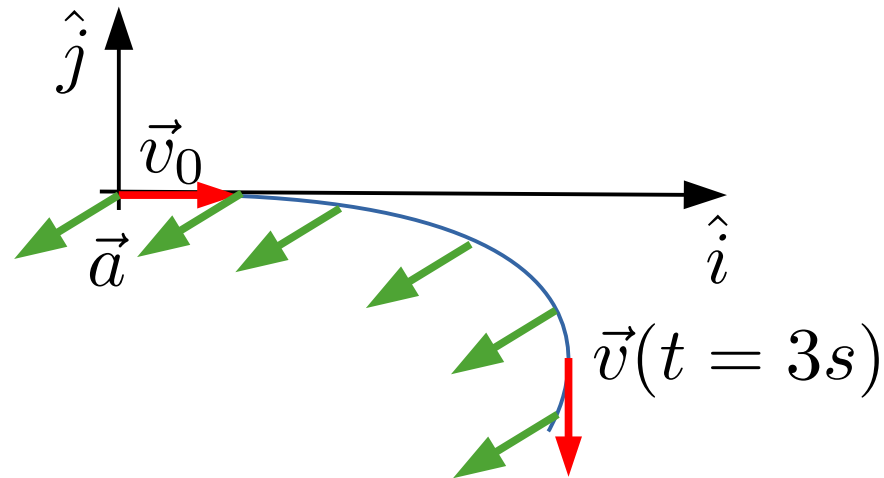
$$v_y(t = 3\text{s}) = v_{0y} + a_y t = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 3 \text{ s} = -1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{v}(t = 3\text{s}) = (0, -1.5) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) posição em  $t=3\text{s}$

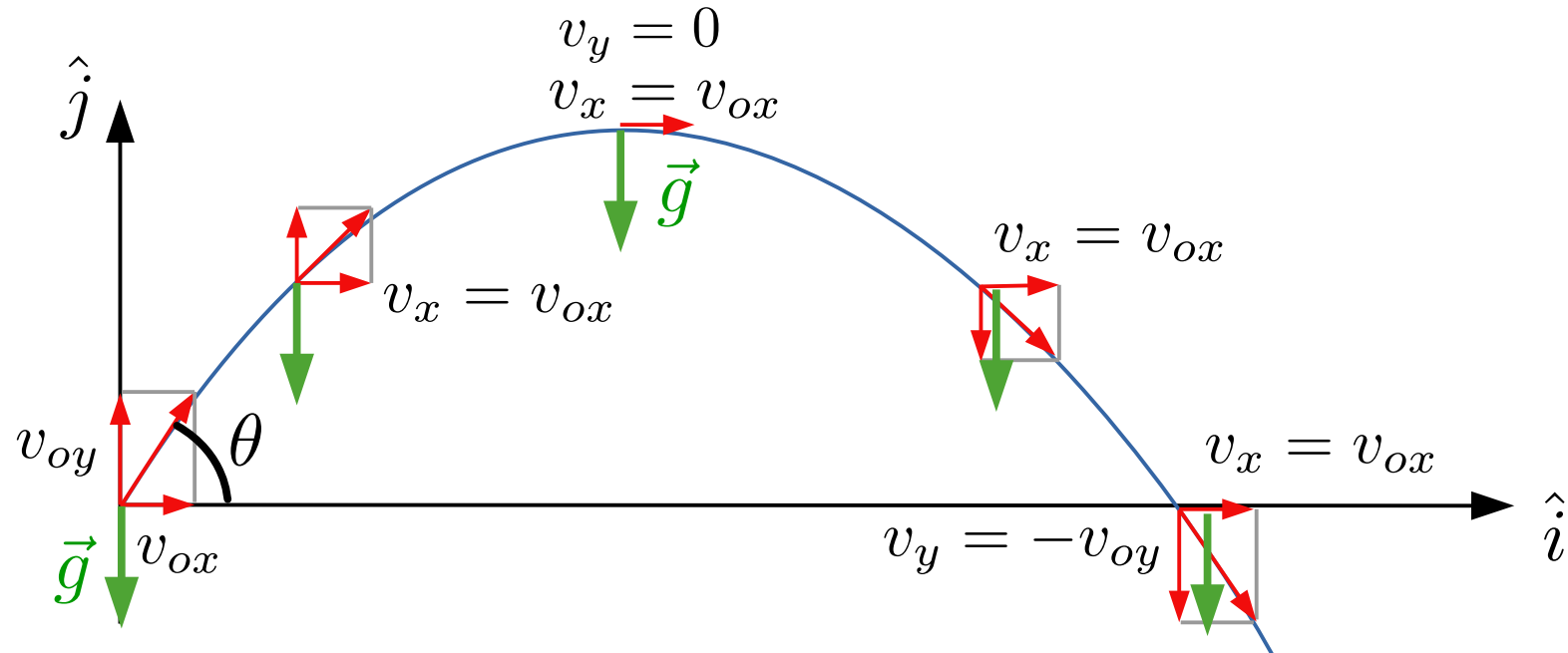
$$x(t = 3\text{s}) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} 3\text{s} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3\text{s})^2 / 2 = 4.5\text{m}$$

$$y(t = 3\text{s}) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (3\text{s})^2 / 2 = -2.25\text{m}$$



# Movimento Balístico

- Caso especial do movimento bidimensional
- Movimento no plano vertical, com velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  e aceleração **constante**
- Aceleração  $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$
- Partícula que executa movimento balístico é denominada projétil.



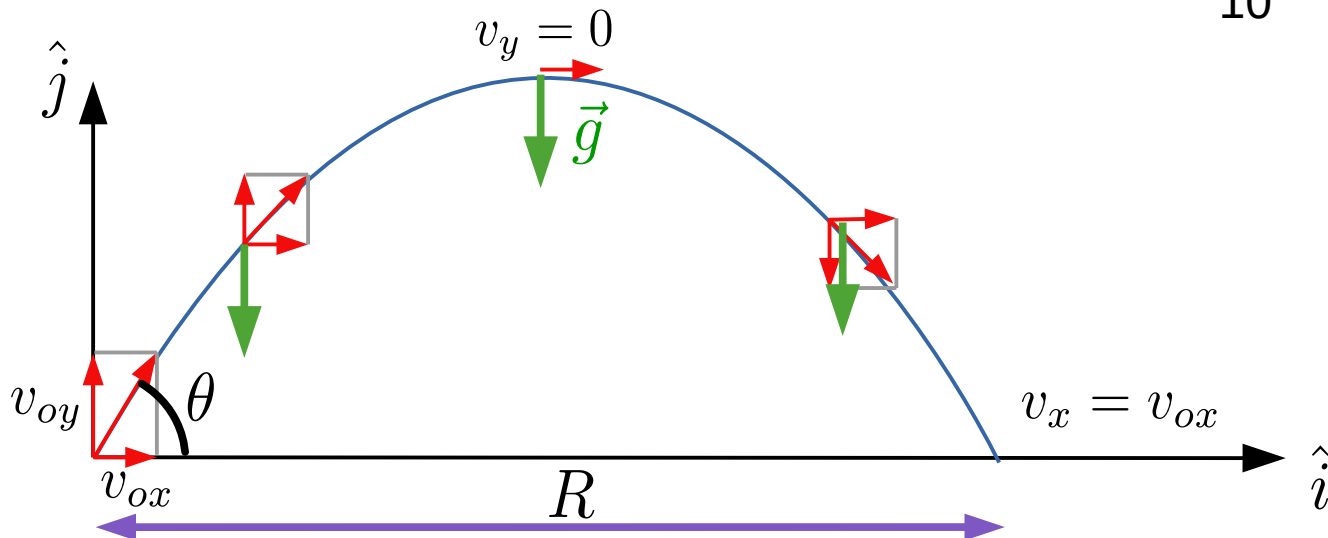
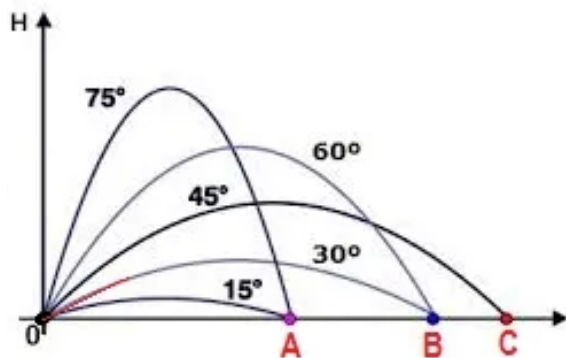


# Movimento Balístico: Características

- Aceleração constante:  $\vec{a} = (0, -g)$
- Movimento na direção horizontal é:  
$$x(t) = x_0 + v_x t$$
$$v_x(t) = v_{ox} = |\vec{v}_0| \cos \theta = \text{constante}$$
- Movimento na direção vertical é:  
$$y(t) = y_0 + v_{oy} t - gt^2/2$$
$$v_y(t) = v_{oy} - gt \quad , \quad v_{oy} = |\vec{v}_0| \sin \theta$$
$$a_y(t) = -g$$

# Movimento Balístico

10



- Alcance do lançamento:

No eixo horizontal,  $\Delta x = R$ :

$$R = v_0 \cos \theta \, t \implies t = v_0 \cos \theta / R$$

No eixo vertical,  $\Delta y = 0$ :

$$0 = v_0 \sin \theta \, t - gt^2/2$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

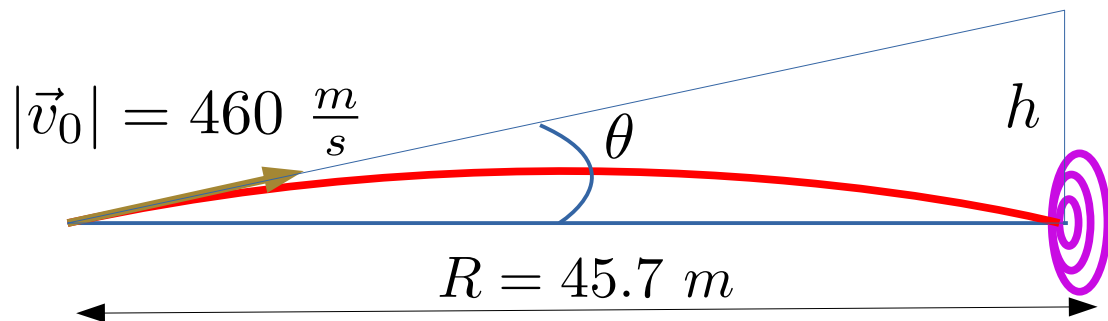
$$\theta = 45^\circ \implies R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$\theta = 0^\circ, 90^\circ \implies R = 0$$

# Movimento Balístico

## Exemplo:

Um rifle que atira balas a 460 m/s é apontado para um alvo situado a 45.7 m de distância. Se o centro do alvo está na mesma altura do rifle, para que altura acima do alvo o cano do rifle deve ser apontado para que a bala atinja o centro do alvo?



- Se  $R \gg h$ , e  $\theta \rightarrow 0$ , podemos aproximar  

$$h \approx \theta(\text{rad}) \times R \implies h \approx 4.84 \text{ cm}$$

$$R = v_0 \cos \theta \ t \implies t = R / v_0 \cos \theta$$

$$0 = v_0 \sin \theta \ t - gt^2 / 2$$

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsen \left( \frac{Rg}{v_0^2} \right) = 0.0606345^\circ = 1.06 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

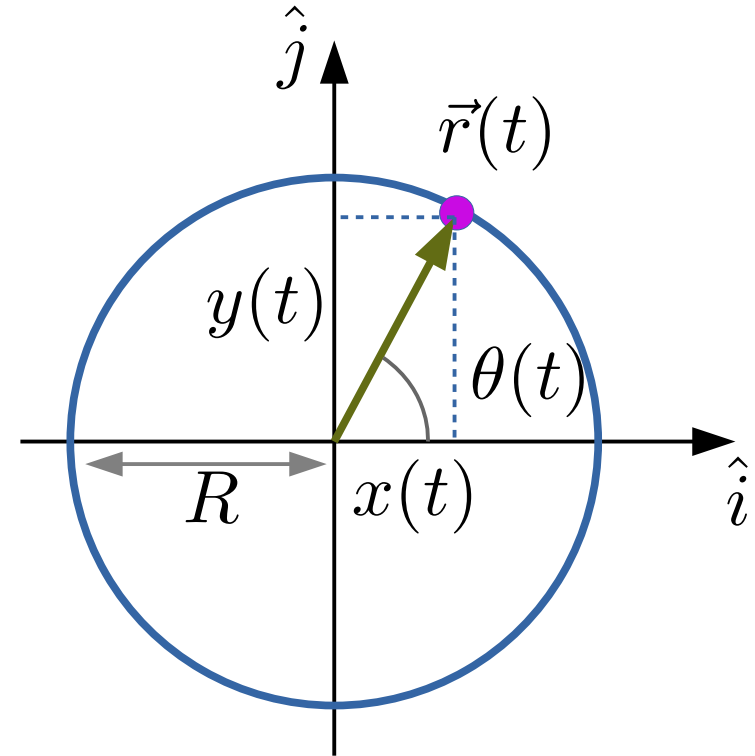
# Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Partícula move-se sobre o círculo de raio  $R$
- Posição da partícula é dada pelo vetor  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \\ &= R \cos(\theta(t))\hat{i} + R \sin(\theta(t))\hat{j}\end{aligned}$$

- Tamanho (norma) do vetor  $\mathbf{r}(t)$  é constante =  $R$ :

$$\begin{aligned}|\vec{r}(t)| &= [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} \\ &= [R^2 (\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t)))]^{1/2} \\ &= R\end{aligned}$$



# Movimento Circular Uniforme

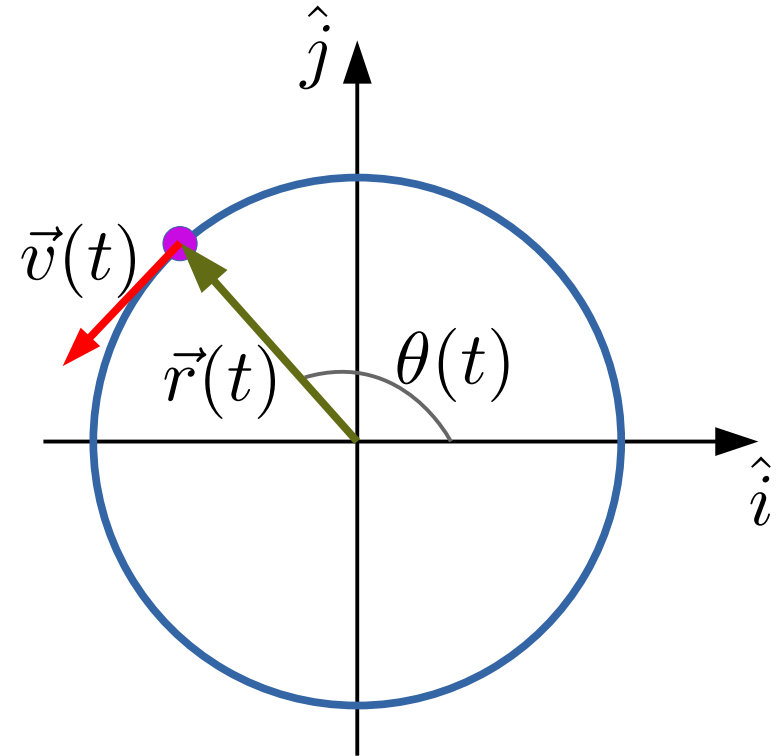
- Definições básicas:
- A velocidade (frequência) angular do movimento MCU é constante

$$\omega = \frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\theta}$$

- O período do movimento MCU é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = 2\pi \times f \quad , \quad f = \frac{1}{T}$$

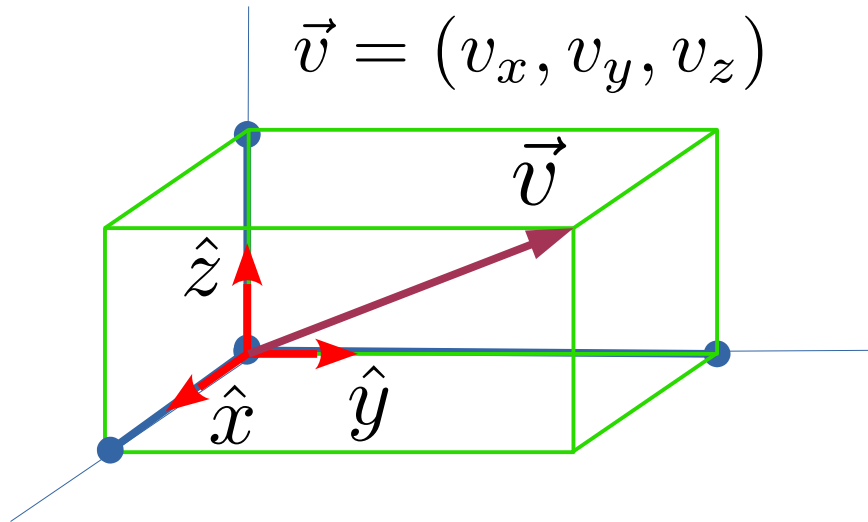
- com  $\omega$  em rad/s.
- O vetor velocidade  $\mathbf{v}(t)$  é tangente à trajetória



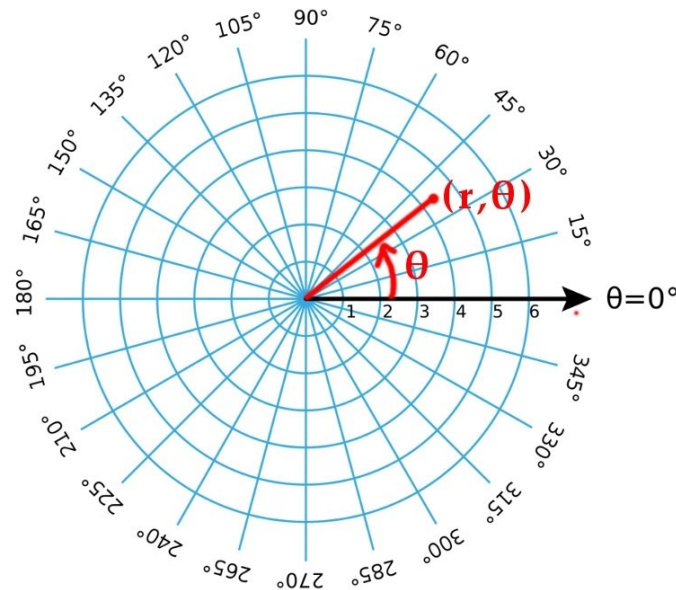
## Diferentes sistemas de coordenadas.

- Existem diversos sistemas de coordenadas. Dois exemplos:

### Sistema retangular cartesiano (3D)



### Sistema curvilíneo polar (2D)



$$\vec{r} = (r, \theta)$$

O sistema polar é muito útil para descrever movimentos circulares

# Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Sistema de coordenadas curvilíneas polares.
- No sistema polar de coordenadas, temos:

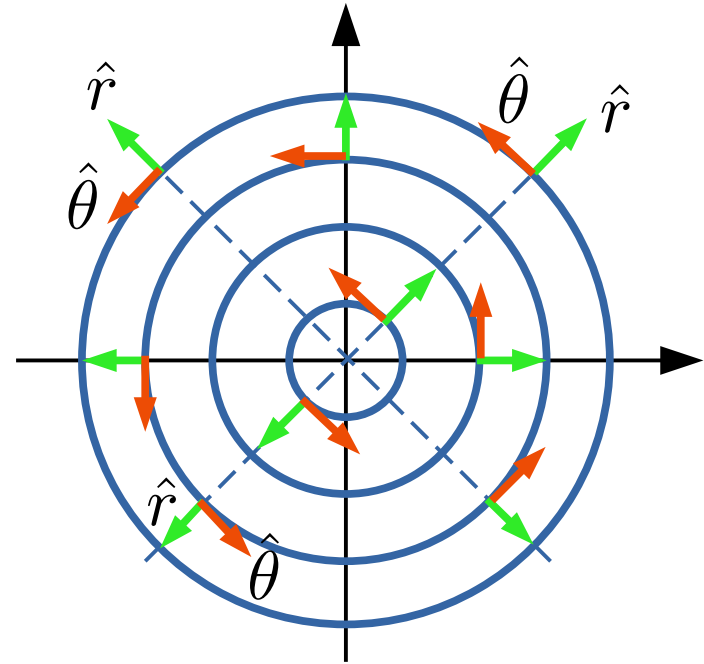
$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}$$

$$|\hat{r}| = [\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{1/2} = 1$$

$$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$$

$$|\hat{\theta}| = [\sin^2\theta + \cos^2\theta]^{1/2} = 1$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0 \implies \hat{r} \perp \hat{\theta} \text{ em qualquer ponto.}$$

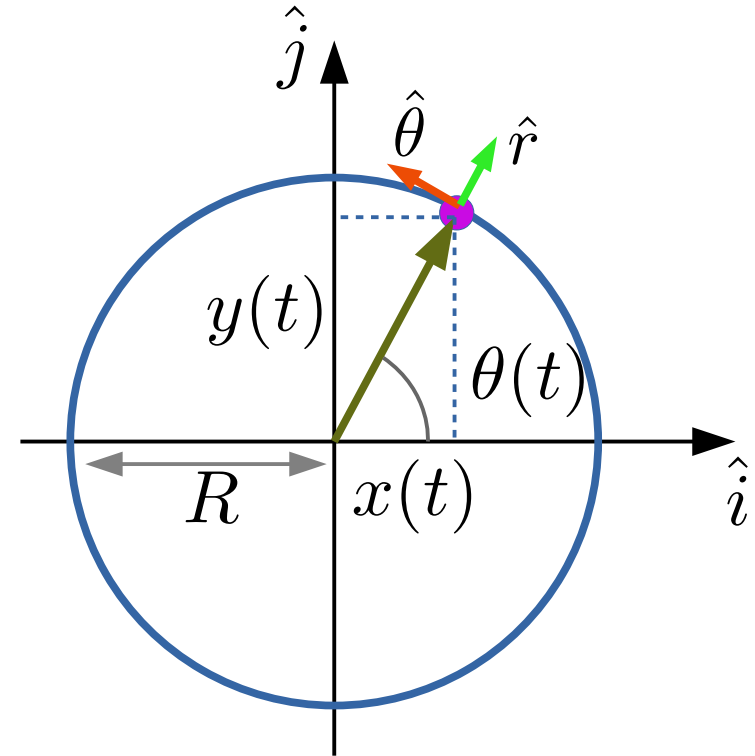
# Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Vetor posição:
- Coordenadas retangulares CARTESIANAS:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \\ &= R \cos(\theta(t))\hat{i} + R \sin(\theta(t))\hat{j}\end{aligned}$$

- Coordenadas curvilíneas POLARES:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R \left\{ \cos(\theta(t))\hat{i} + \sin(\theta(t))\hat{j} \right\} \\ &= R \hat{r}(\theta(t))\end{aligned}$$





# Movimento Circular Uniforme

- Definições básicas:
- Derivadas de funções trigonométricas

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\operatorname{sen} \theta \quad , \quad \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta$$

- No movimento circular uniforme  $\theta = \omega t$  ,  
portanto

$$\frac{d}{dt} \cos (\theta(t)) = \frac{d}{d\theta} \cos \theta \times \frac{d}{dt} \theta(t) = -\operatorname{sen} (\theta(t)) \omega$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen} (\theta(t)) = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta \times \frac{d}{dt} \theta(t) = \cos (\theta(t)) \omega$$

# Movimento Circular Uniforme

## Cinemática

- Posição:  $\vec{r}(t) = R \hat{r}(\theta)$

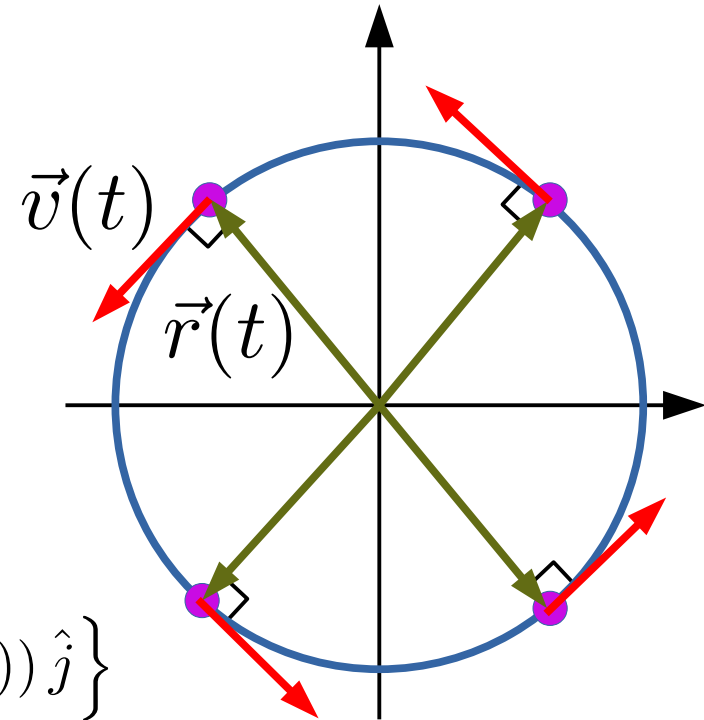
- Velocidade:  $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$   
 $= R \frac{d}{dt} \hat{r}(\theta)$

$$= R \frac{d}{dt} \left\{ \cos(\theta(t)) \hat{i} + \sin(\theta(t)) \hat{j} \right\}$$

$$= R \left\{ -\omega \sin(\theta(t)) \hat{i} + \omega \cos(\theta(t)) \hat{j} \right\}$$

$$= R \omega \hat{\theta} = v \hat{\theta}$$

$$\therefore v = \omega R, \text{ na direção de } \hat{\theta}(t)$$



# Movimento Circular Uniforme

## Cinemática

- Velocidade:  $\vec{v}(t) = \omega R \hat{\theta}(t)$

- aceleração:  $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$

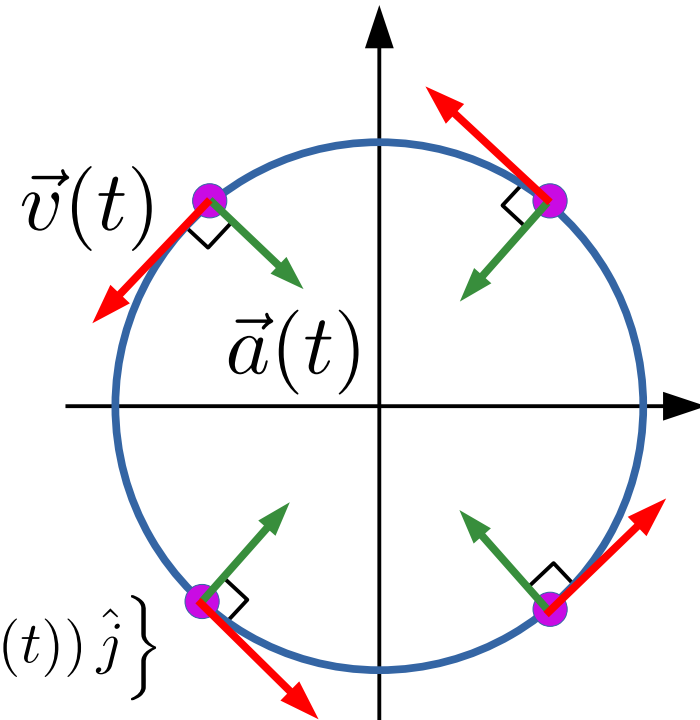
$$= \omega R \frac{d}{dt} \hat{\theta}$$

$$= \omega R \frac{d}{dt} \left\{ -\sin(\theta(t)) \hat{i} + \cos(\theta(t)) \hat{j} \right\}$$

$$= \omega R \left\{ -\omega \cos(\theta(t)) \hat{i} - \omega \sin(\theta(t)) \hat{j} \right\}$$

$$= \omega^2 R (-\hat{r}) = a (-\hat{r})$$

$\therefore a = \omega^2 R = v^2 / R$ , na direção do centro do círculo.



# Movimento Circular Uniforme

## Cinemática

- Posição:  $\vec{r}(t) = R \hat{r}(t)$
- Velocidade:  $\vec{v}(t) = \omega R \hat{\theta}(t)$
- Aceleração:  $\vec{a}(t) = \omega^2 R (-\hat{r}(t)) = \frac{v^2}{R} (-\hat{r}(t))$

# Movimento Circular Uniforme

## Exemplo:

Em  $t_1 = 2,0$  s, a aceleração de uma partícula em movimento circular no sentido anti-horário é  $(6,0 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (4,0 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ . A partícula se move com velocidade escalar constante. Em  $t_2 = 5,0$  s, a aceleração é  $(4,0 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-6,0 \text{ m/s}^2)\hat{j}$ . Qual é o raio da trajetória da partícula se a diferença  $t_2 - t_1$  é menor que um período de rotação?

- No instante  $t_1 = 2,0$  s:

$$\vec{a}_1 = (6,0, 4,0) \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_1 = -\hat{r}_1 = \left( \frac{6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}} \right)$$

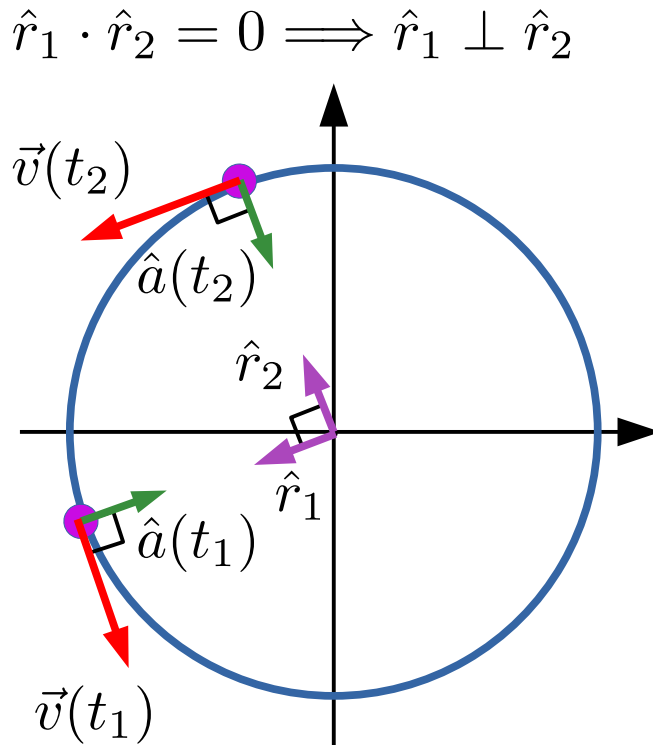
$$\therefore \hat{r}_1 = \left( \frac{-6}{\sqrt{52}}, \frac{-4}{\sqrt{52}} \right)$$

- No instante  $t_2 = 5,0$  s:

$$\vec{a}_2 = (4,0, -6,0) \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_2 = -\hat{r}_2 = \left( \frac{4}{\sqrt{52}}, \frac{-6}{\sqrt{52}} \right)$$

$$\therefore \hat{r}_2 = \left( \frac{-4}{\sqrt{52}}, \frac{6}{\sqrt{52}} \right)$$



$$a = \omega^2 R$$

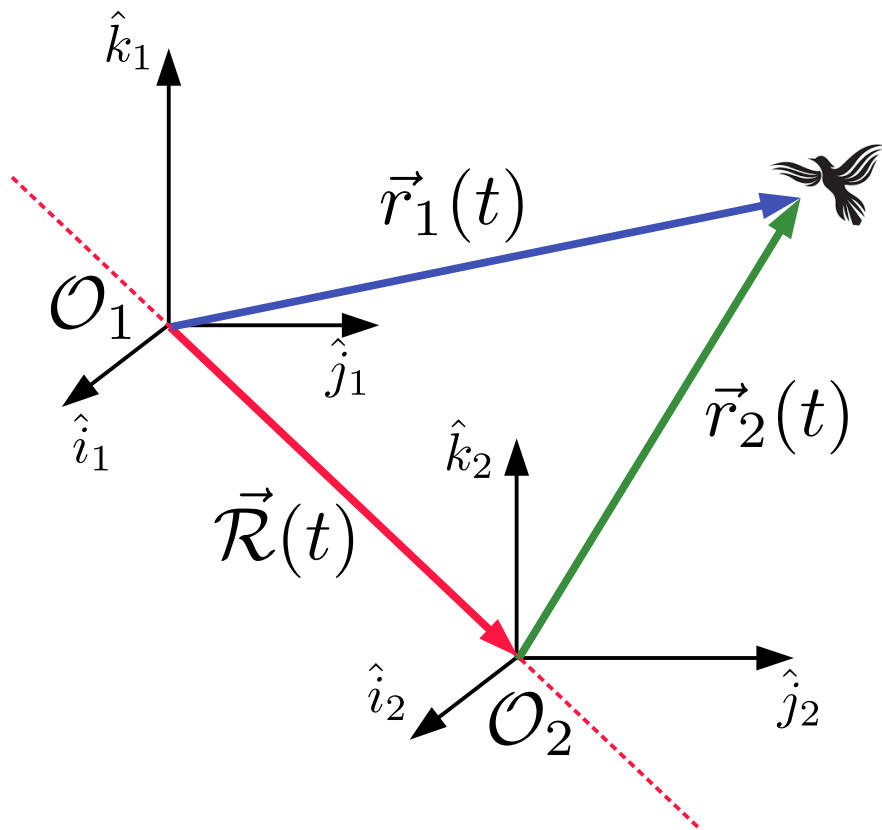
$$a = \sqrt{52} \frac{m}{s^2}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{3/2\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}}$$

$$R = \frac{a}{\omega^2} = 2.923 \text{ m}$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em referenciais inerciais diferentes:

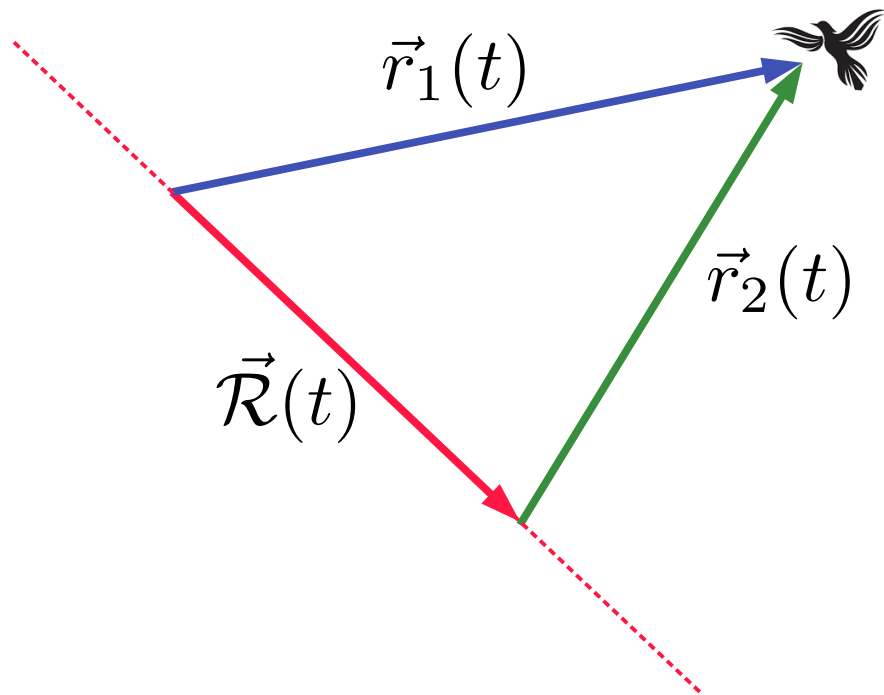


- Referenciais  $O_1$  e  $O_2$  movem-se entre si com movimento retilíneo e uniforme (MRU)
- Objeto visto pelo observador em  $O_1$ :  $\vec{r}_1(t)$
- Objeto visto pelo observador em  $O_2$ :  $\vec{r}_2(t)$
- Posição relativa entre  $O_1$  e  $O_2$ :  $\vec{\mathcal{R}}(t)$
- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em referenciais inerciais;



- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

ou

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{\mathcal{R}}(t)$$

- Velocidade do objeto:

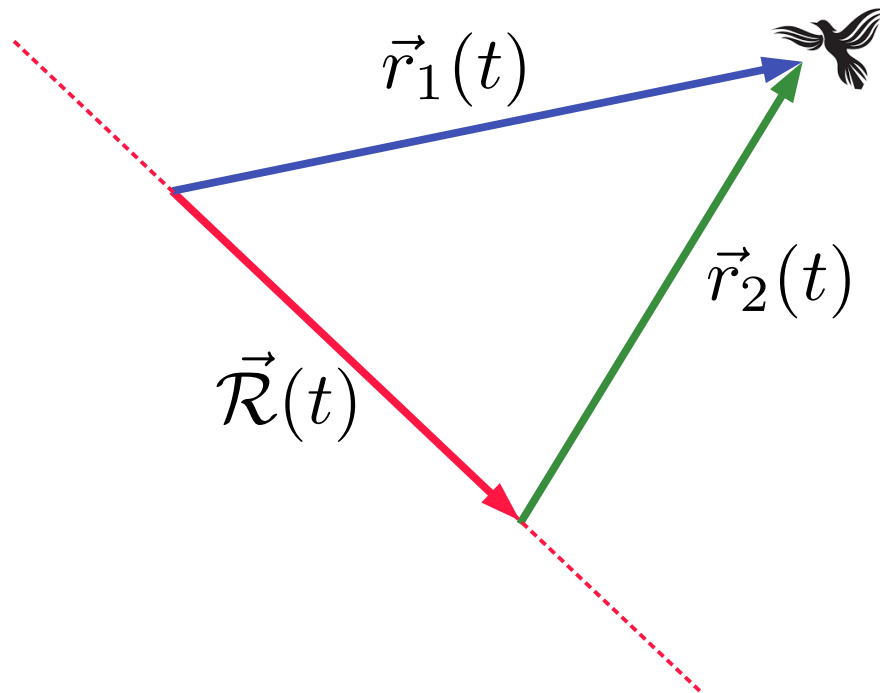
$$\frac{d}{dt}\vec{r}_1(t) = \frac{d}{dt}\left\{\vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)\right\}$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_2(t) + \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{R}}(t)$$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em **referenciais inerciais**;
- Relação entre observações feitas nos diferentes referenciais:



$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)$$

- Aceleração do objeto:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_1(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t) \right\}$$

$$\vec{a}_1(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}_2(t) + \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{V}}(t)$$

$$\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t) \implies \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{V}}(t) = 0$$



# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

- Cinemática de um objeto visto por observadores em referenciais inerciais;
- Transformações de Galileu entre  $\mathcal{O}_1 \iff \mathcal{O}_2$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t)$$

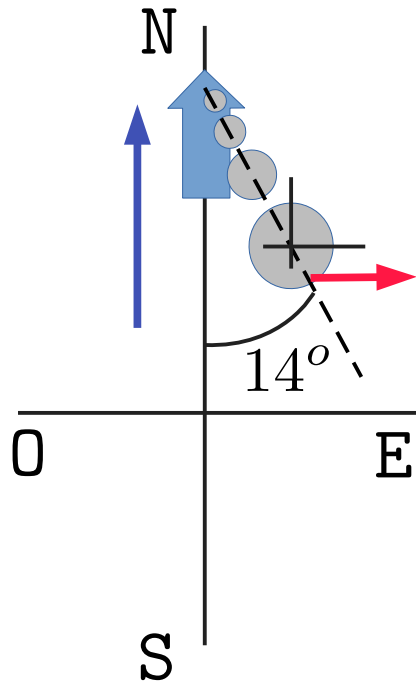
$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)$$

$$\vec{a}_1(t) = \vec{a}_2(t)$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

## Exemplo:

Um trem viaja para o norte a 120 km/h. A fumaça da locomotiva forma uma trilha que se estende numa direção  $14^\circ$  ao E da direção Sul, com o vento soprando do Oeste. Qual a velocidade do vento?



Deslocamento do trem no referencial fixo:  $\Delta r_{trem}(t) = v_{trem} \Delta t$

A fumaça é levada pelo vento, portanto:

$$\Delta r_{fum}(t) = \Delta r_{vento} = v_{vento} \Delta t$$

Pelo esquema, temos:

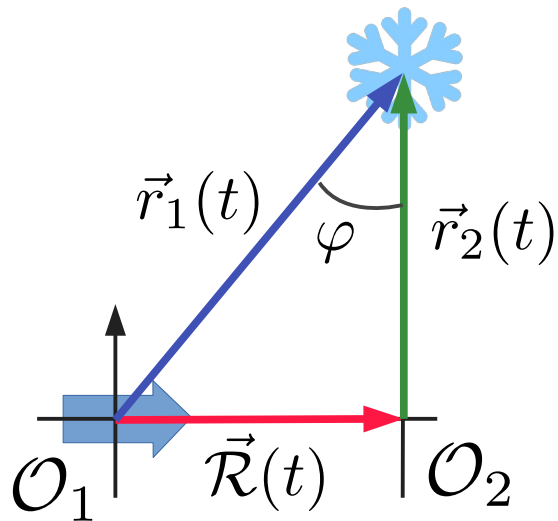
$$\tan 14^\circ = \frac{\Delta r_{vento}}{\Delta r_{trem}} = \frac{v_{vento}}{v_{trem}}$$

$$\Rightarrow v_{vento} = \tan 14^\circ \times v_{trem} = 29.92 \frac{km}{h}$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

## Exemplo:

A neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 8,0 m/s. Com que ângulo, em relação à vertical, os flocos de neve parecem estar caindo do ponto de vista do motorista de um carro que viaja em uma estrada plana e retilínea a uma velocidade de 50 km/h?



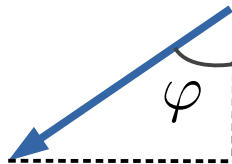
$O_1$  = referencial no carro  
 $O_2$  = referencial na estrada

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= \vec{r}_2(t) + \vec{\mathcal{R}}(t) \\ \vec{v}_1(t) &= \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t)\end{aligned}$$

$$\vec{v}_2 = -8,0 \frac{m}{s} \hat{j}$$

$$\vec{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{R}} = -50 \frac{km}{h} \hat{i}, \text{ pois } \vec{\mathcal{R}}(t) \text{ diminui.}$$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_2(t) + \vec{\mathcal{V}}(t) \implies \vec{v}_1 = (-50, -8 \times 3.6) \frac{km}{h}$$

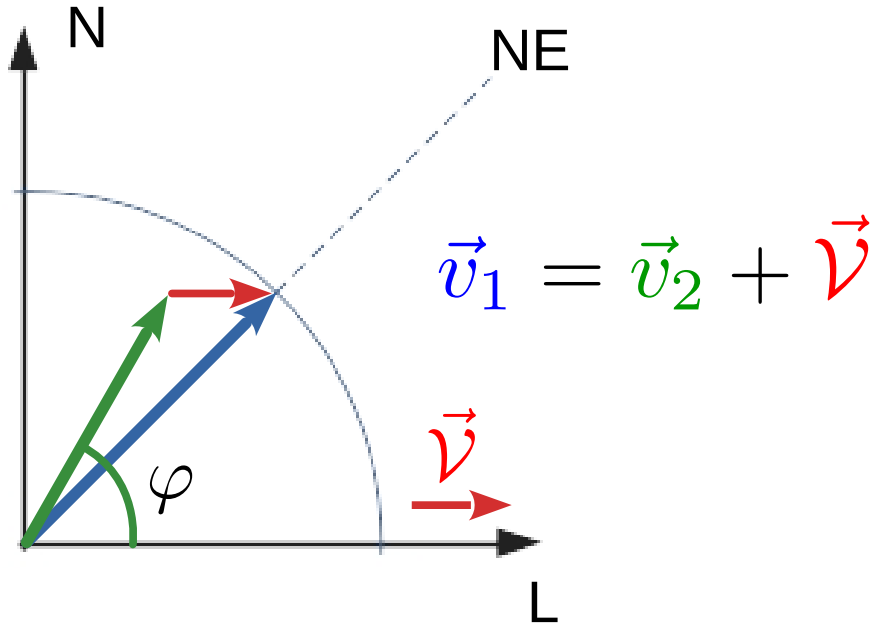


$$\tan(\varphi) = \frac{50}{8 \times 3.6} \implies \varphi = 60.06^\circ$$

# Movimento Relativo: Transformação de Galileu

## Exemplo:

O piloto de uma aeronave planeja voar a uma velocidade de 250 m/s (em relação ao solo) ao longo de uma direção que faz ângulo de  $45^\circ$  com a direção N (sentido nordeste, NE). O serviço de meteorologia informa que o vento está soprando para L (leste) com uma velocidade de 35 m/s. Em qual direção o piloto deve apontar o avião para que sua trajetória em relação ao solo siga a rota planejada na direção NE?



$$\vec{v}_1 = 250 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{m}{s}$$

$$\vec{v} = (35, 0) \frac{m}{s}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 - \vec{v} \\ &= \left( \frac{250\sqrt{2}}{2} - 35, \frac{250\sqrt{2}}{2} \right) \frac{m}{s} \end{aligned}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{250\sqrt{2}}{2}}{\frac{250\sqrt{2}}{2} - 35} \implies \varphi = 51.27^\circ$$