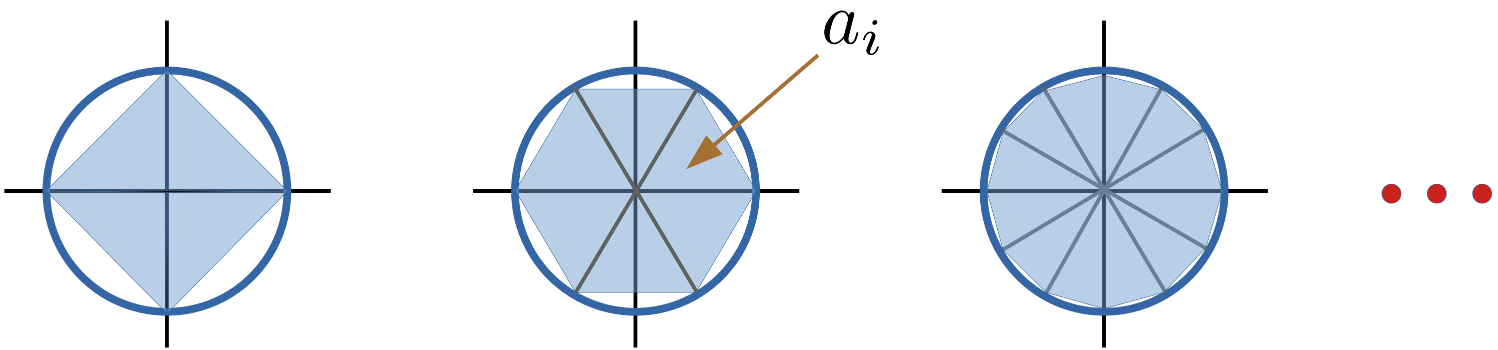
Integração em Cinemática

Cálculo Integral

- Usado desde a antiguidade: Archimedes, Kepler, …, Newton, Leibniz, Bernoulli, ...
- Motivação inicial: cálculo de áreas e volumes
- Exemplo: Área do círculo



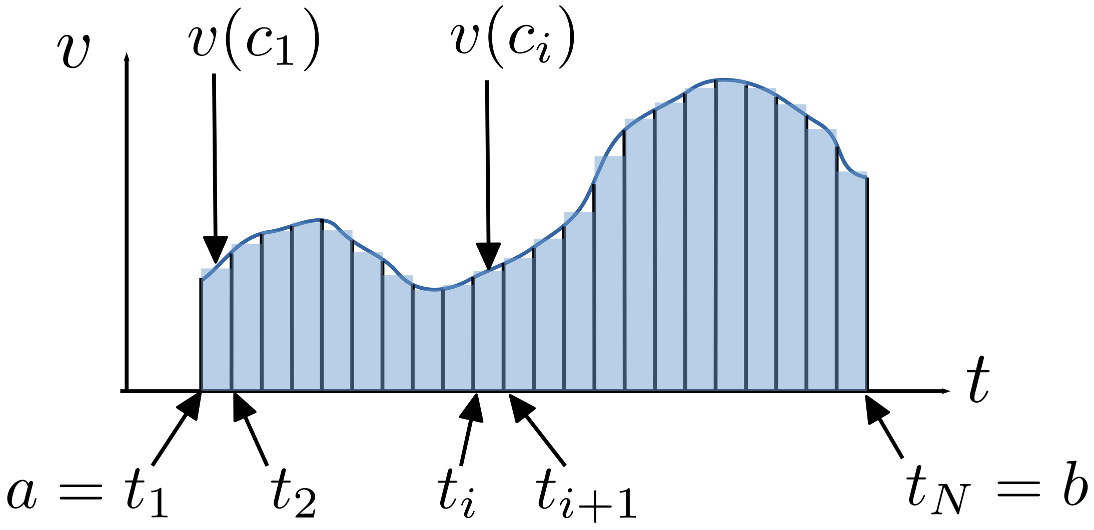
$$\text{Área} = \text{Soma}\{a_i\} = \sum_i^N a_i \quad \cdots \quad \text{Área} = \lim_{N\to\infty} \sum_i^N a_i = \pi R^2$$

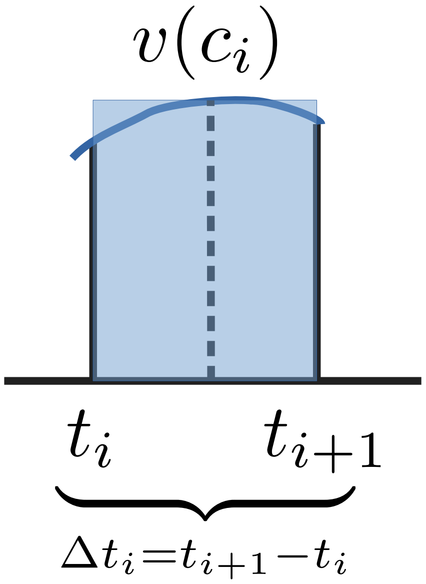
Integração em Cinemática

Cálculo Integral

- Motivação: somas parciais de funções

$$deslocamento \approx v(c_i)\Delta t_i$$

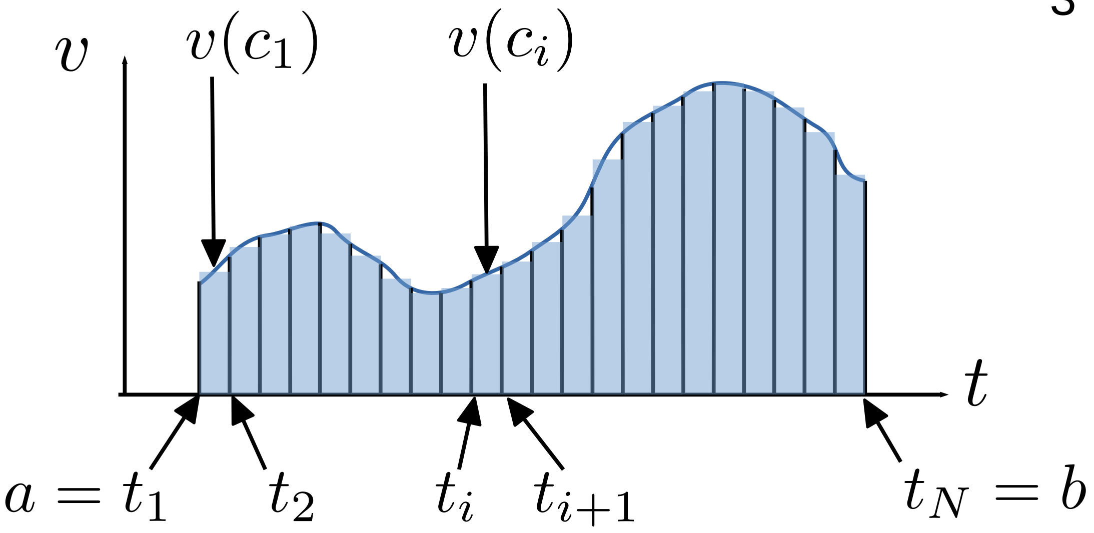




$c_i \equiv$ centro do intervalo Δt_i

Cálculo Integral

- somas parciais de funções

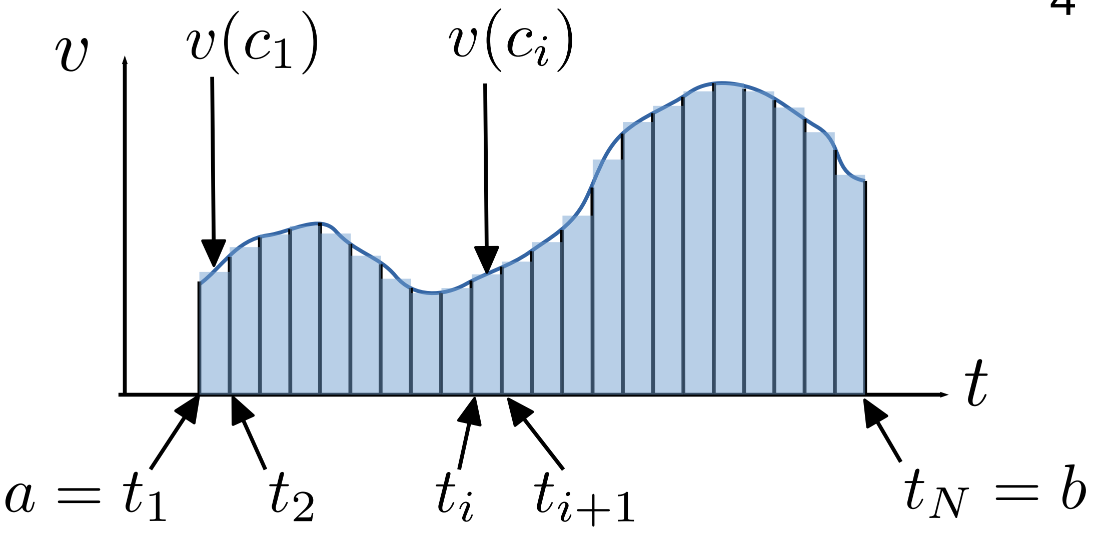


$$\textit{deslocamento}$$
$$\Delta x = x(b) - x(a)$$

$$\begin{aligned}\Delta x &\approx v(c_1)(t_2 - t_1) + v(c_2)(t_3 - t_2) + \cdots + v(c_{N-1})(t_N - t_{N-1}) \\ &\approx v(c_1)\Delta t_1 + v(c_2)\Delta t_2 + \cdots + v(c_{N-1})\Delta t_{N-1} \\ &\approx \sum_{i=1}^{N-1} v(c_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^{N-1} v(c_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i\end{aligned}$$

Cálculo Integral

- somas parciais de funções



$$\mathit{deslocamento}$$
$$\Delta x = x(b) - x(a)$$

$$\Delta x \approx \sum_{i=1}^{N-1} v(c_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta x_i$$

$$\boxed{\Delta x = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N-1} v(c_i)\Delta t_i = \int_{t_1=a}^{t_N=b} v(t)dt}$$

Cálculo Integral

- somas parciais de funções
- Analisando ***localmente***

$$\Delta x_i \approx x(t_{i+1}) - x(t_i) = v(c_i)(t_{i+1} - t_i) = v(c_i)\Delta t_i$$

$$v(c_i) \approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t_i} = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{no caso geral} \implies f = \frac{dF}{dx}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ é a primitiva de } f \\ f \text{ é a derivada de } F \end{array}}$$

Cálculo Integral

- somas parciais de funções: ***Newton, Leibniz, Bernoulli***
- Analisando ***localmente***, em resumo

$$\text{no caso geral} \implies f = \frac{dF}{dx}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ é a primitiva de } f \\ f \text{ é a derivada de } F \end{array}}$$

- Função inversa:

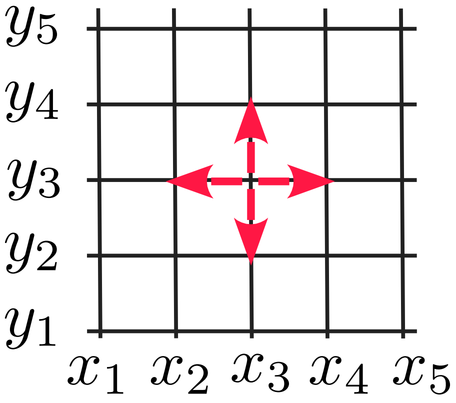
$$\text{integral} \rightleftharpoons (\text{derivada})^{-1}$$

Cálculo Integral

- somas parciais de funções: ***Newton, Leibniz, Bernoulli***
- Analisando localmente
- *Integrais podem ser usadas para resolver equações diferenciais* (ex. Cinemática)

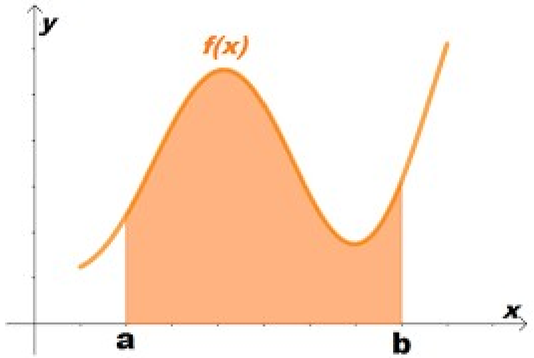
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt$$

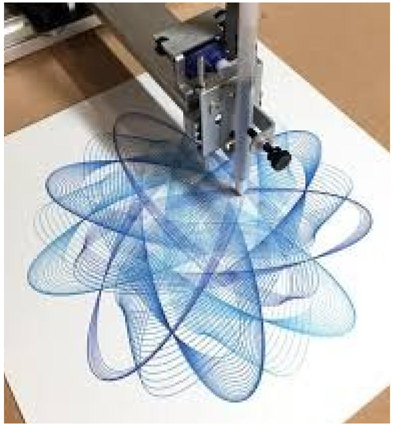
$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow v(t_f) - v(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} a(t)dt$$



Cálculo Integral

Como calcular a integral:





analog plotter

- Método gráfico: área sob a curva (método de Archimedes)

- Métodos Numéricos: $F = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta x_i$

- Métodos analíticos:

  inverter a equação $f = \dfrac{dF}{dx}$

Cálculo Integral

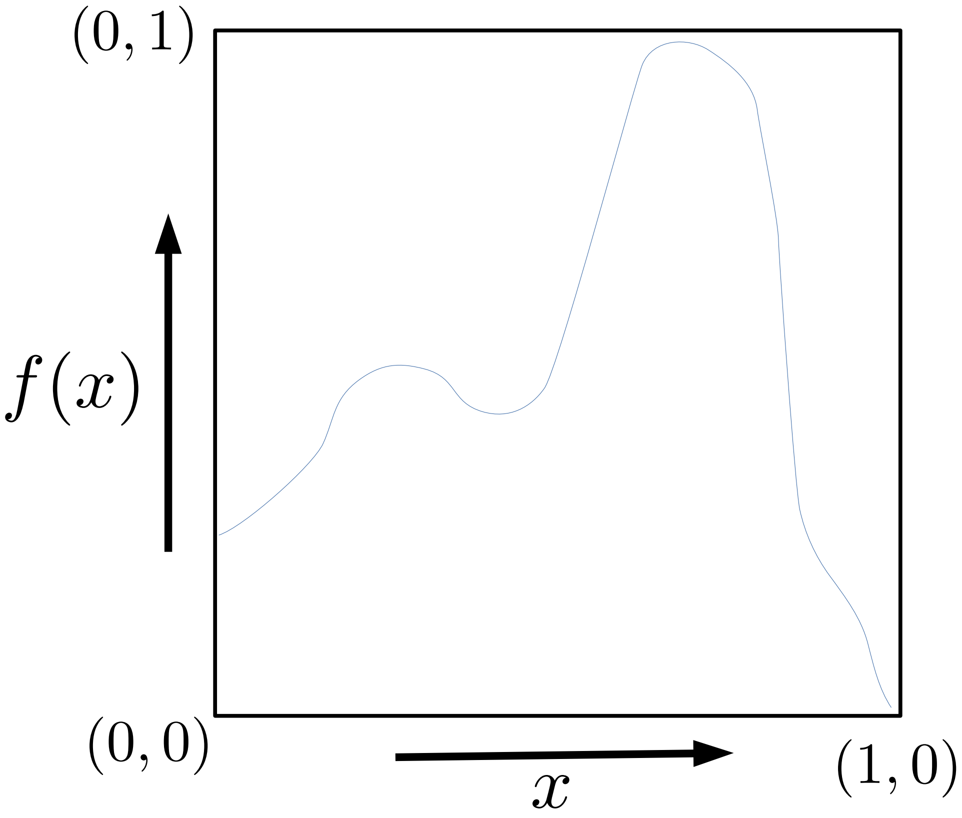
Como calcular a integral:

- Método gráfico: área sob a curva (método de Archimedes)

analog plotter

DESAFIO: Cálcular a integral da curva abaixo

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$



Cálculo Integral

Como calcular a integral:

- Integral de polinômios: $y(x) = \int x^n dx = \ldots$

- Sabemos que a derivada do polinômio é dada por

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left[x^{n+1}\right] = (n+1)x^n \quad , \quad \ldots\ldots$$

- Invertendo a equação acima, temos para $n \neq -1$

$$d\left[x^{n+1}\right] = (n+1)x^n dx \Longrightarrow d\underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]}_{y(x)} = x^n dx \Longrightarrow \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \mathrm{x}^n d\mathrm{x}}$$

Cálculo Integral

Como calcular a integral:

- Integral de funções trigonométricas: seno e cosseno

- Sabemos que as derivadas dessas funções são

$$\frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}sen(x) = cos(x)$$

- Invertendo as equações acima, temos

$$\int_a^b sen(x)dx = -cos(x)\Big|_a^b = -cos(b) - (-cos(a))$$

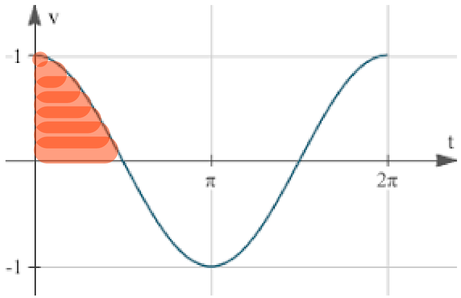
$$\int_a^b cos(x)dx = sen(x)\Big|_a^b = sen(b) - sen(a)$$

Cálculo Integral

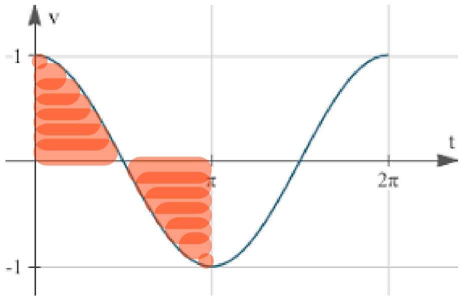
Como calcular a integral:

- Integral de funções trigonométricas: seno e cosseno

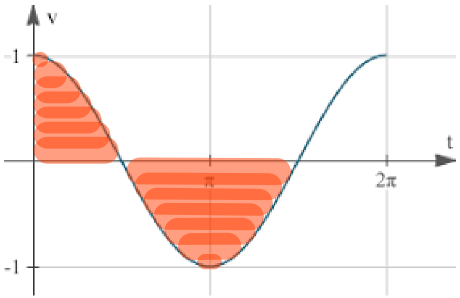
$$I = \int_a^b cos(x)dx = sen(x)\Big|_a^b = sen(b) - sen(a)$$



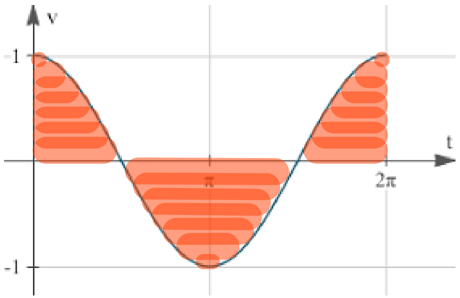
$$I = sen(\frac{\pi}{2}) - sen(0)$$
$$= 1$$



$$I = sen(\pi) - sen(0)$$
$$= 0$$



$$I = sen(\frac{3}{2}\pi) - sen(0)$$
$$= -1$$



$$I = sen(2\pi) - sen(0)$$
$$= 0$$

Integração em Cinemática

Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

Movimento retilíneo com **aceleração constante** (MUV, movimento uniformemente variado)

- $a = \dfrac{dv}{dt} = \text{constante}$

- $dv = a\ dt \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_0^t a\ dt' \quad \Longrightarrow \quad v\Big|_{v(t_0)}^{v(t)} = a\ t'\Big|_0^t$

$$\Longrightarrow \quad v(t) - v_0 = a(t - 0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(t) = \boldsymbol{v_0} - a\ t}$$

Integração em Cinemática

Cinemática Unidimensional da Partícula: movimento em uma dimensão

Movimento retilíneo com **aceleração constante** (MUV, movimento uniformemente variado)

- $v = \dfrac{dx}{dt}$

- $dx = v(t)\ dt \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t')\ dt'$

$$\Longrightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_0^t [v_0 + a\ t']\ dt'$$

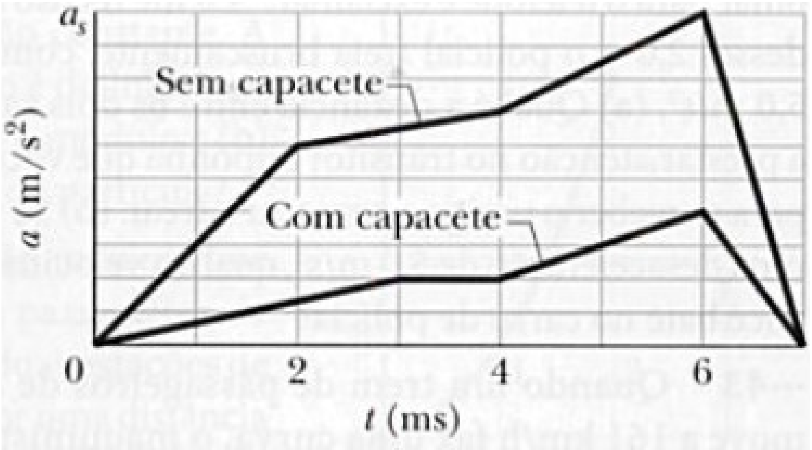
$$\Longrightarrow \quad x\Big|_{x_0}^{x(t)} = v_0\ t'\Big|_0^t + a\frac{t'^2}{2}\Big|_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) - x_0 = v_0 t + a\frac{t^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x(t) = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{v_0} t + a\frac{t^2}{2}}$$

Integração em Cinemática

Exemplo:

Num experimento, um jogador de futebol desvia de cabeça uma bola que é chutada em sua direção. A figura abaixo mostra a acelaração *a(t)* da cabeça de um jogador de futebol sem e com capacete, a partir do repouso. A escala vertical é definida a_s = 200 m/s^2. Qual é a diferença entre a velocidade da cabeça sem e com capacete no instante t = 7 ms?



Método gráfico

- Área sob a curva **sem** capacete:
  soma da área de polígonos
  A1 = 0.12 m/s , A2 = 0.26 m/s , A3 = 0.34 m/s , A4 = 0.1 m/s

  v1(t=7ms) = (0.12+0.26+0.34+0.1) m/s = 0.82 m/s

- Área sob a curva **com** capacete:
  soma da área de polígonos
  A1 = 0.06 m/s , A2 = 0.04 m/s , A3 = 0.12 m/s , A4 = 0.04 m/s

  v2(t=7ms) = (0.06+0.04+0.12+0.04) m/s = 0.26 m/s

V1 - V2 = 0.56 m/s

Integração em Cinemática

Exemplo:

A velocidade de uma bala enquanto percorre o cano é dada por v = (-5,00x10^7)t^2 + (3,00x10^5)t, onde v é dado em metros por segundo e t em segundos. A aceleração da bala assim que sai do cano é zero. (a) Determine o intervalo de tempo durante o qual a bala é acelerada. (b) Encontre a velocidade com a qual a bala sai do cano. (c) Qual o comprimento do cano?

$$v(t) = -\alpha t^2 + \beta t \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 5,00 \times 10^7 m/s^3 \\ \beta = 3,00 \times 10^5 m/s^2 \end{cases}$$

a) tempo de saída, t_s

A aceleração da bala assim que sai do cano é zero.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -2\alpha t + \beta \Longrightarrow t_s = \frac{\beta}{2\alpha} = 3ms$$

b) velocidade da bala na saída do cano:

$$v(t_s) = -\alpha t_s^2 + \beta t_s \Longrightarrow v(t_s = 3\ ms) = 450\frac{m}{s}$$

c)

Integração em Cinemática

Exemplo:

A velocidade de uma bala enquanto percorre o cano é dada por v = $(-5{,}00\times10^{7})t^{2} + (3{,}00\times10^{5})t$, onde v é dado em metros por segundo e t em segundos. A aceleração da bala assim que sai do cano é zero. (a) Determine o intervalo de tempo durante o qual a bala é acelerada. (b) Encontre a velocidade com a qual a bala sai do cano. (c) Qual o comprimento do cano?

c) comprimento do cano:

Para isso integramos a velocidade desde $t_0=0$ até t_s = 3 ms.

Integração de polinômios:

$$\frac{z^{n+1}}{n+1} = \int_0^{z} z^n dz \Longrightarrow \begin{cases} \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} \\ \int z dz = \frac{z^2}{2} \end{cases}$$

$$x(t_s) = \int_0^{t_s} v(t)dt$$

$$= \int_0^{t_s} \{-\alpha t^2 + \beta t\}\, dt$$

$$= -\alpha \frac{t_s^3}{3} + \beta \frac{t_s^2}{2}$$

$$x(t_s) = 0,9m$$