

Energia Potencial e Conservação de Energia



Energia

- Trabalho \Rightarrow processo através do qual a energia pode ser transformada
- Formas de energia mecânica: **cinética e potencial**.
- Energia se conserva em um sistema isolado.

Energia Potencial $\xLeftrightarrow{\text{Trabalho}}$ Energia Cinética

Energia

- Energia cinética (do movimento): $K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$
- Energia Potencial (da configuração/estado): $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$
- Energia Mecânica Total: $E = K + U$
- Sistemas conservativos: $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$

Energia Potencial $\xLeftrightarrow{\text{Trabalho}}$ Energia Cinética

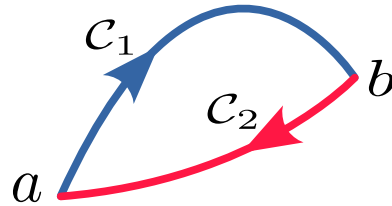
Força Conservativa

- Trabalho realizado não depende do caminho

$$W_{ab}^{c_1} = W_{ab}^{c_2} \implies W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Trabalho da força conservativa é reversível

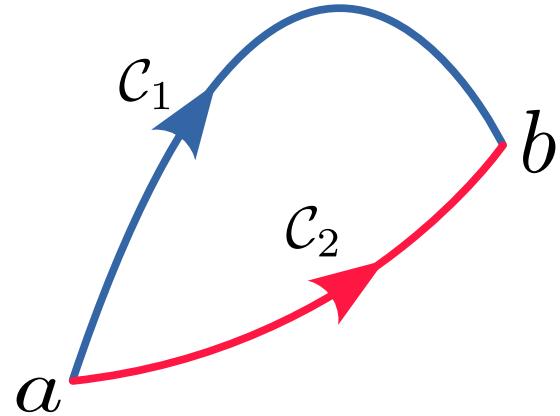
$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$



- Portanto, para a força conservativa

$$W_{\circ} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W_{ab}^{c_1} = \int_{a, c_1}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$W_{ab}^{c_2} = \int_{a, c_2}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Força Conservativa

- Transformação realizada por uma **força conservativa não muda a energia total do sistema**

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \implies \Delta U = -\Delta K$$

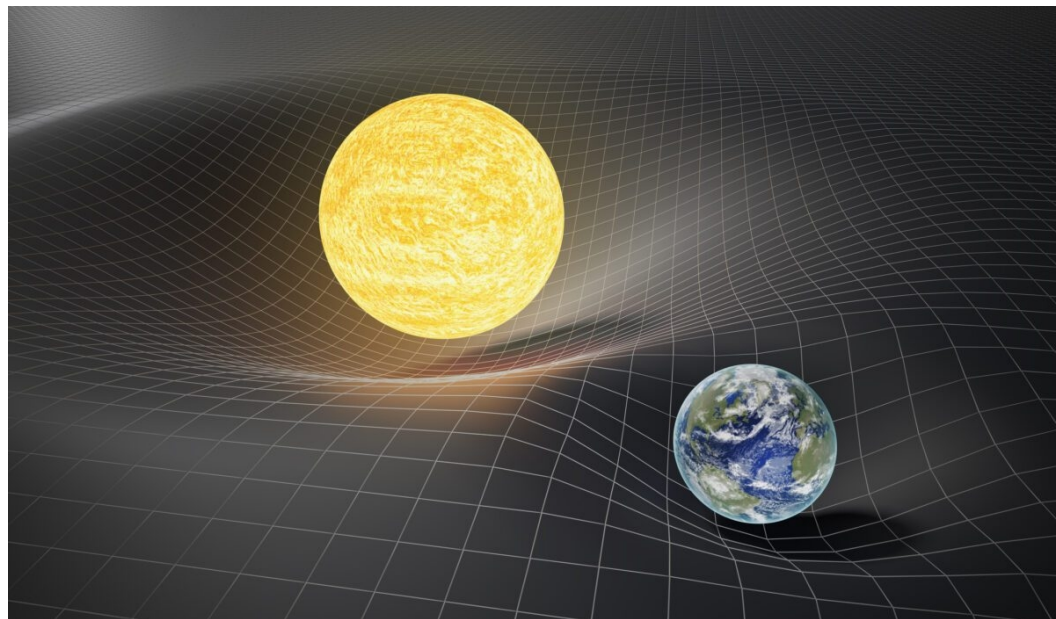
- Portanto $\Delta U = -\Delta K = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W$

$$\Delta U = U_b - U_a = -W = -\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Potenciais Conservativos

Força Conservativa \Longleftrightarrow Campo de Potencial

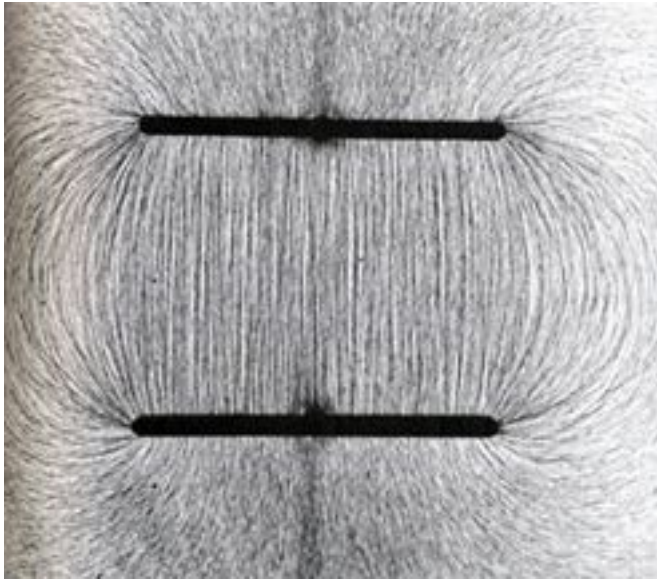
- Campo de Energia Gravitacional \Longleftrightarrow Força Gravitacional



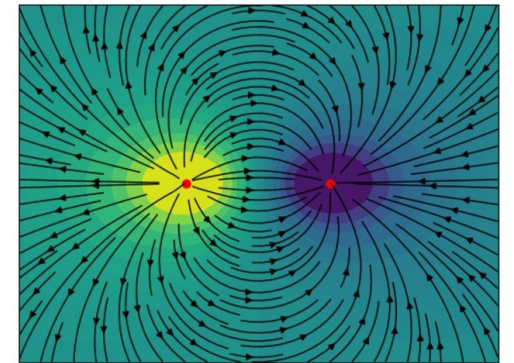
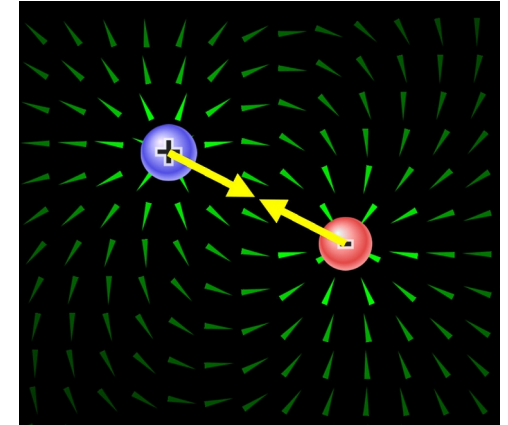
Efeito de Lente Gravitacional

Força Conservativa \Longleftrightarrow Campo de Potencial

- Campo de Energia Elétrica \Longleftrightarrow Força Elétrica



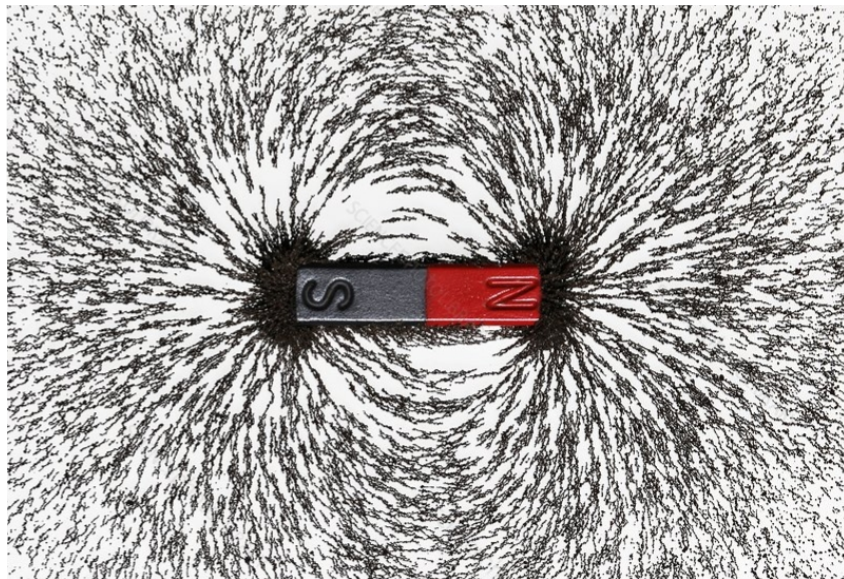
Linhas de Força Elétrica entre as Placas de um Capacitor



Potenciais Conservativos

Força Conservativa \longleftrightarrow Campo de Potencial

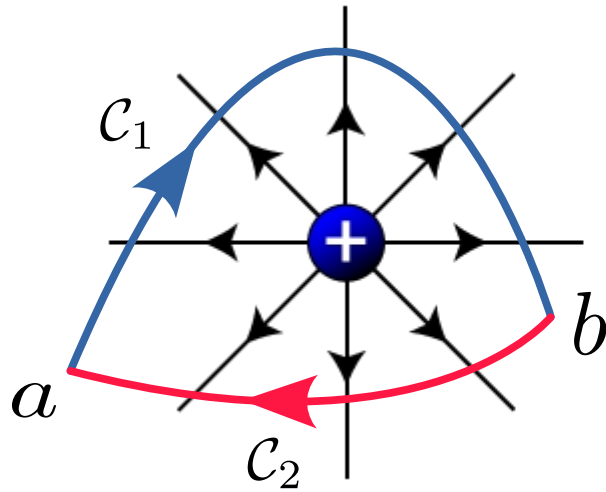
- Campo de Energia Magnética \longleftrightarrow Força Magnética



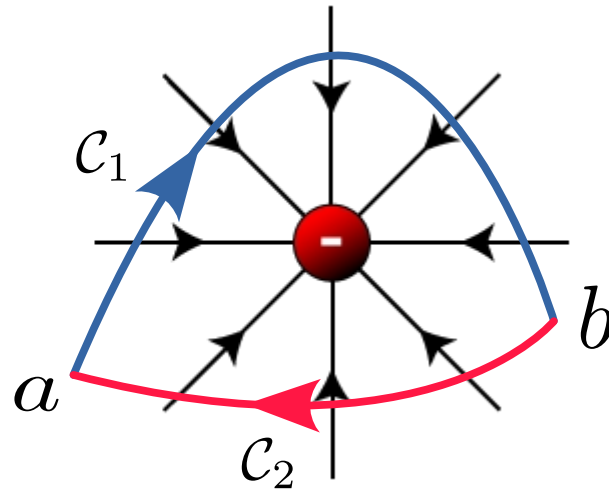
Limalhas de Ferro revelam as linhas de força do campo Magnético

Força Conservativa, exemplos

- Força elétrica



$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$



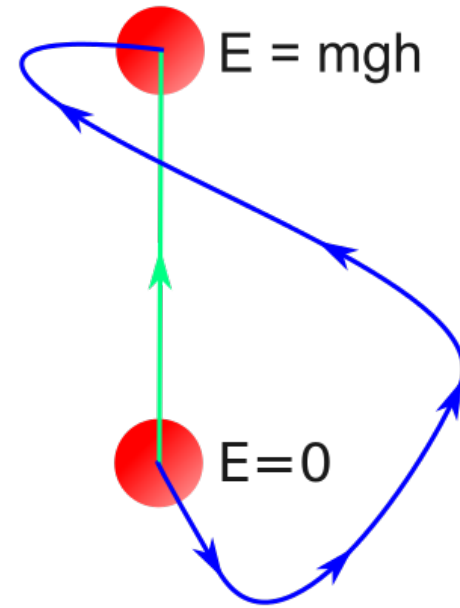
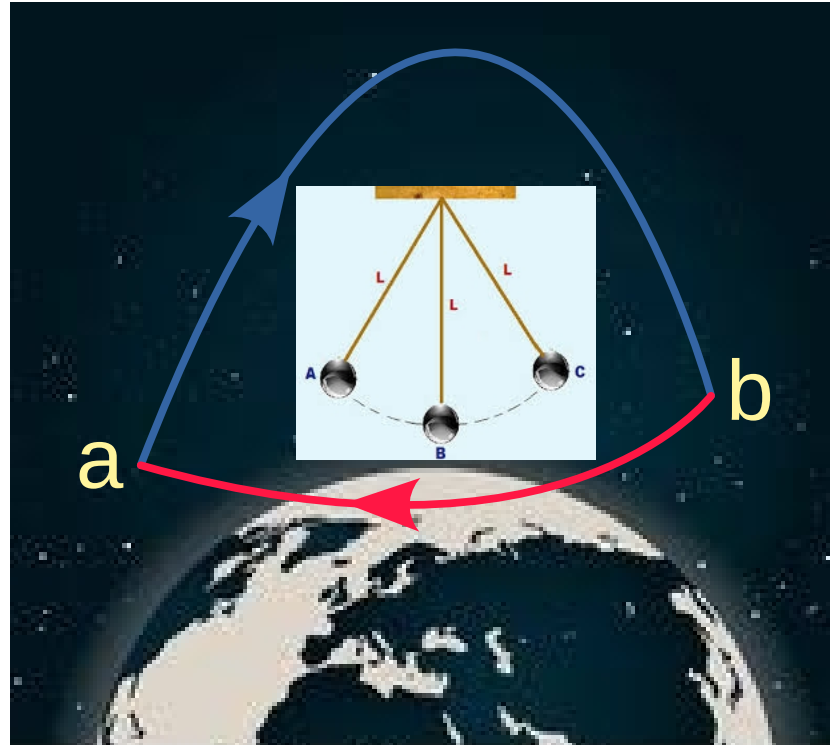
$$W_{\circ} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Força Conservativa, exemplos

- Força gravitacional

$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

$$W_{\circ} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

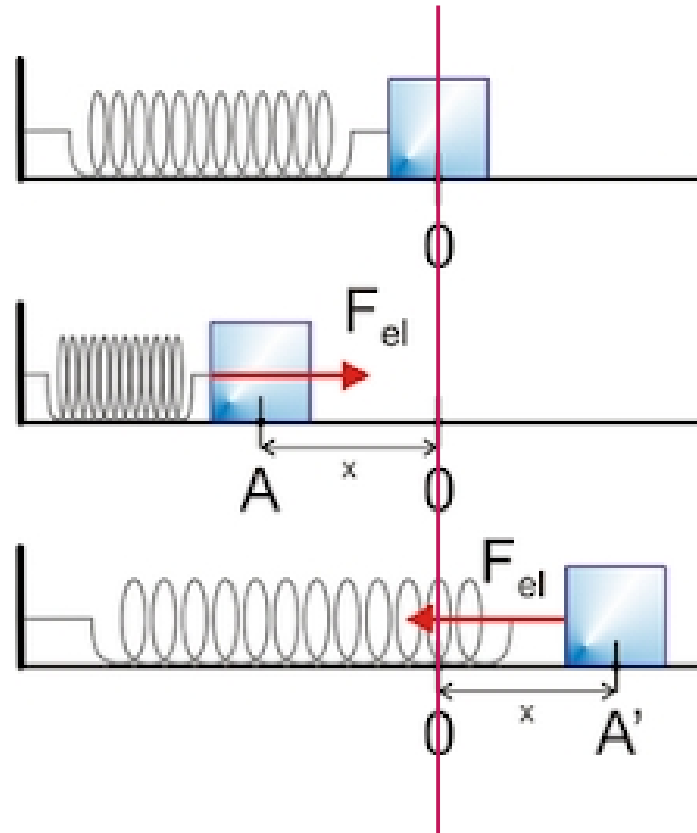


Força Conservativa, exemplos

- Força elástica

$$W_{ba} = \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ab}$$

$$W_o = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

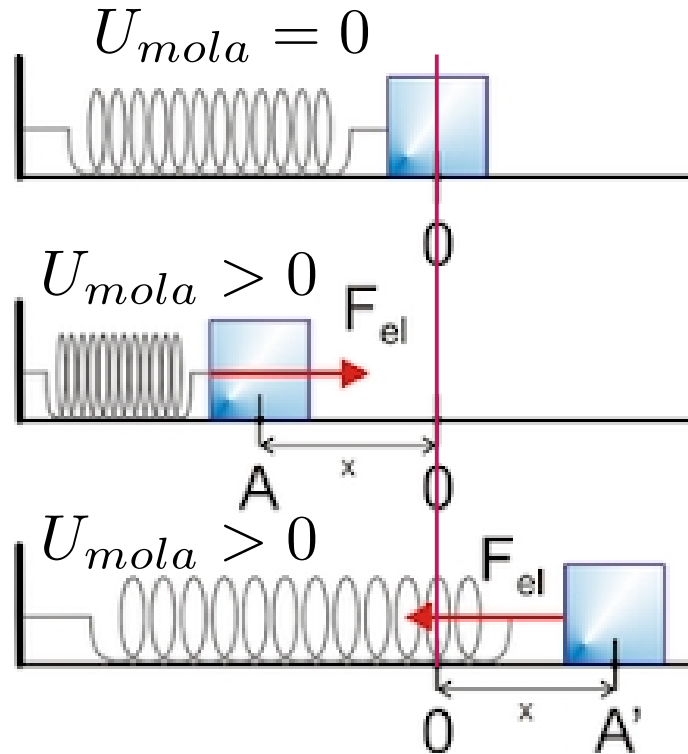


Força Conservativa

- Transformação realizada por uma **força conservativa não muda a energia total do sistema**

- Portanto

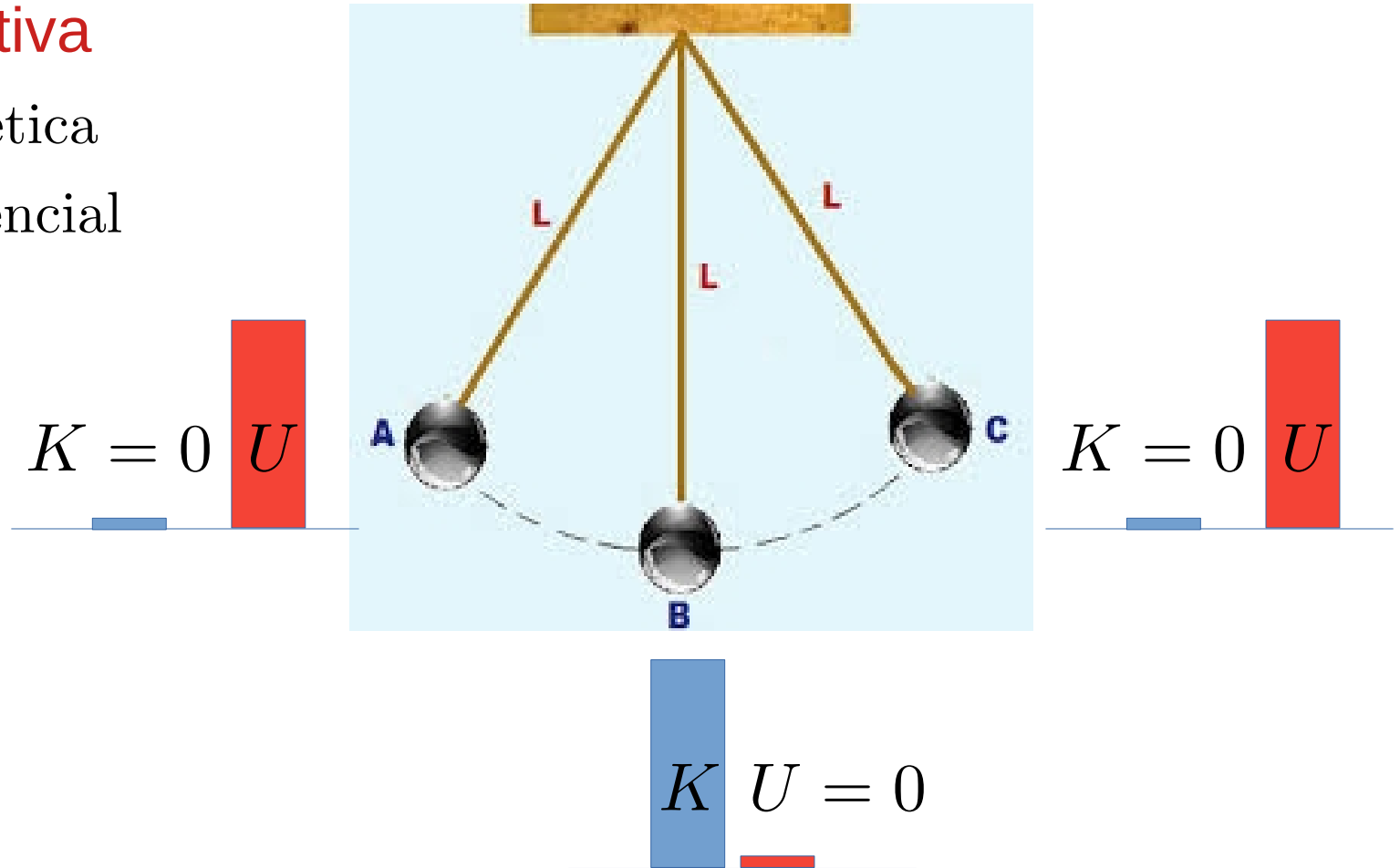
$$\begin{aligned}\Delta U_{mola} &= U_b - U_a \\ &= -W_{mola} \\ &= -\int_a^b \vec{F}_{mola}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$



Força Conservativa

K = Energia Cinética

U = Energia Potencial



Força Conservativa

- Ponto de vista local, caso unidimensional
- Trabalho infinitesimal

$$dU = U_b - U_a = -dW = -F(x)dx$$

$$dU = -F(x)dx \implies F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

- Portanto, *a força conservativa é resultado do gradiente de energia potencial*

Força Conservativa

- Ponto de vista local, caso
- Portanto, ***a força conservativa é resultado do gradiente de energia potencial***

- Caso geral
$$\vec{F}(\vec{r}) = - \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad(U(\vec{r})) = -\nabla U(\vec{r})$$

- Caso particular: forças constantes são conservativas.

Força Conservativa

- Transformação realizada por uma **força conservativa não muda a energia total do sistema**

$$E = K + U$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int F dx \right) + \frac{dU}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\int \left[-\frac{dU}{dx} \right] dx \right) + \frac{dU}{dt}$$

$$= -\frac{dU}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \implies \text{energia do sistema isolado é conservada}$$

Forças NÃO Conservativas

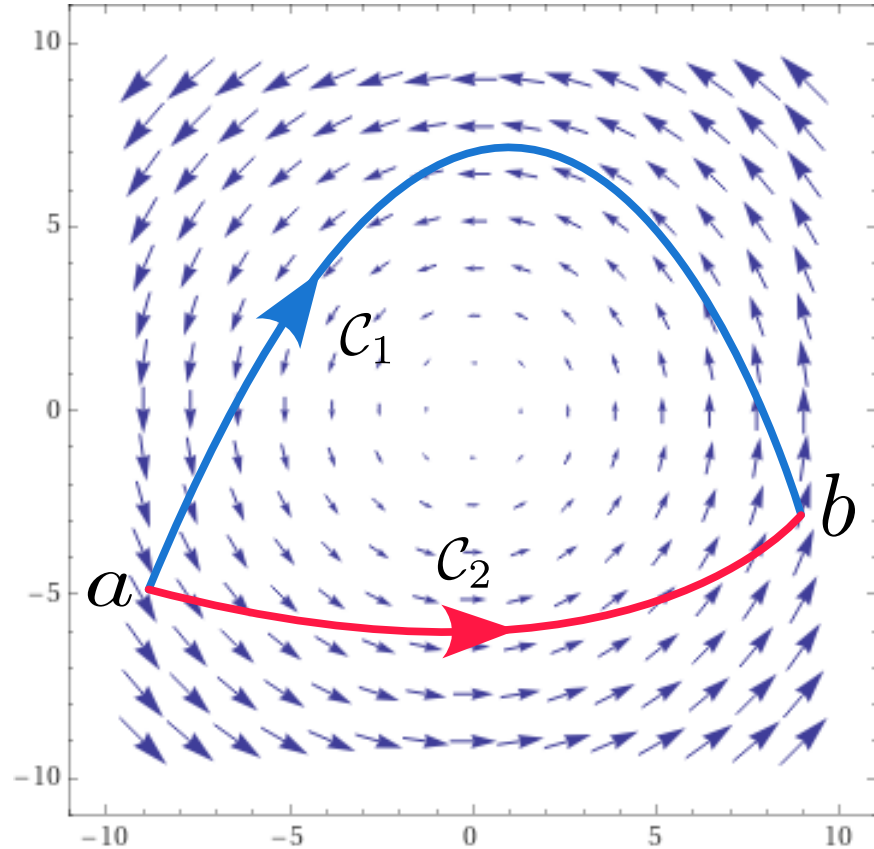
- Não conservam a **energia mecânica** (K+U)
- **Não** podem ser escritas como $F = -\frac{dU}{dx}$
- Portanto, não estão associadas a uma energia potencial mecânica $U(r)$
- Trabalho depende de C : $W_{ab}^{c_1} \neq W_{ab}^{c_2}$
- Dependem de outras variáveis além da posição, como velocidade
- Exemplos: **força de atrito** e **forças de arrasto** (resistência do ar).

Forças NÃO Conservativas

- Exemplo:

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

$$W_{ab}^{c_1} \neq W_{ab}^{c_2}$$



Energia Potencial Gravitacional

- Força gravitacional

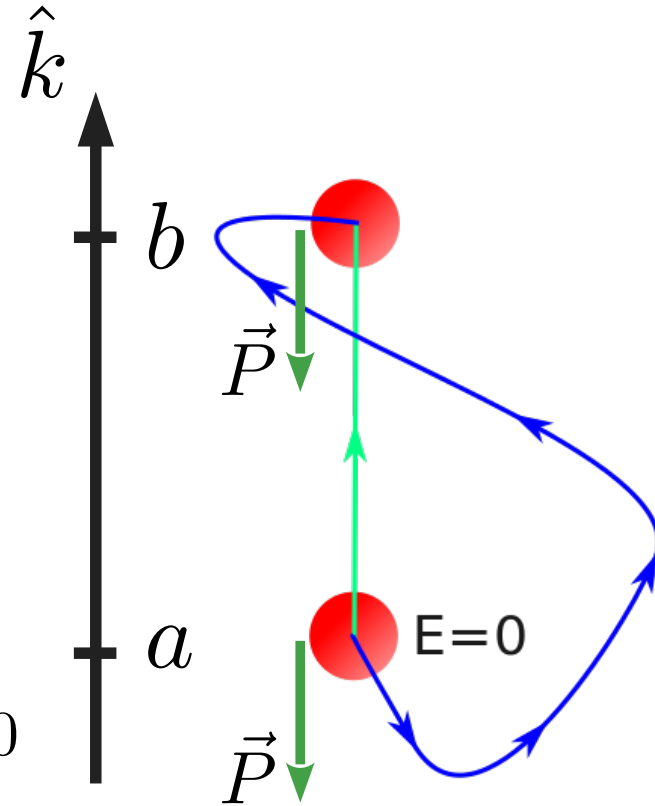
$$\Delta U = - \int_{a, \forall \mathcal{C}}^b \vec{P} \cdot d\vec{r} \implies \text{para } \forall \text{ caminho}$$

$$= - \int_a^b (-P dz)$$

$$= \int_a^b mg dz$$

$$= mg(z_b - z_a) = mg\Delta z \quad W_g = -mg\Delta z < 0$$

$$\Delta U = U_{ba} = U(z_b) - U(z_a) > 0$$



Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Gravitacional

- Força gravitacional

$$\Delta U = - \int_b^a \vec{P} \cdot d\vec{r}$$

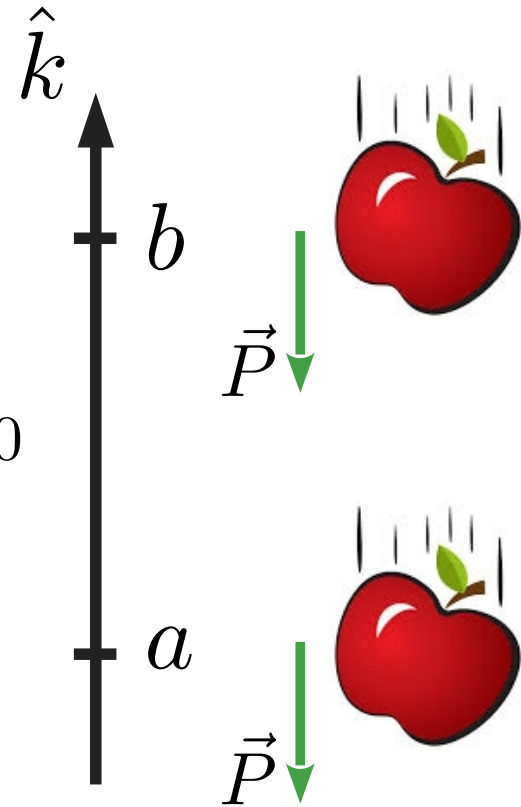
$$= - \int_b^a (P dz)$$

$$= - \int_b^a mg dz$$

$$= -mg(z_a - z_b) = -mgh$$

$$\Delta U = U_{ab} = U(z_a) - U(z_b) < 0$$

$$W_g = +mgh > 0$$

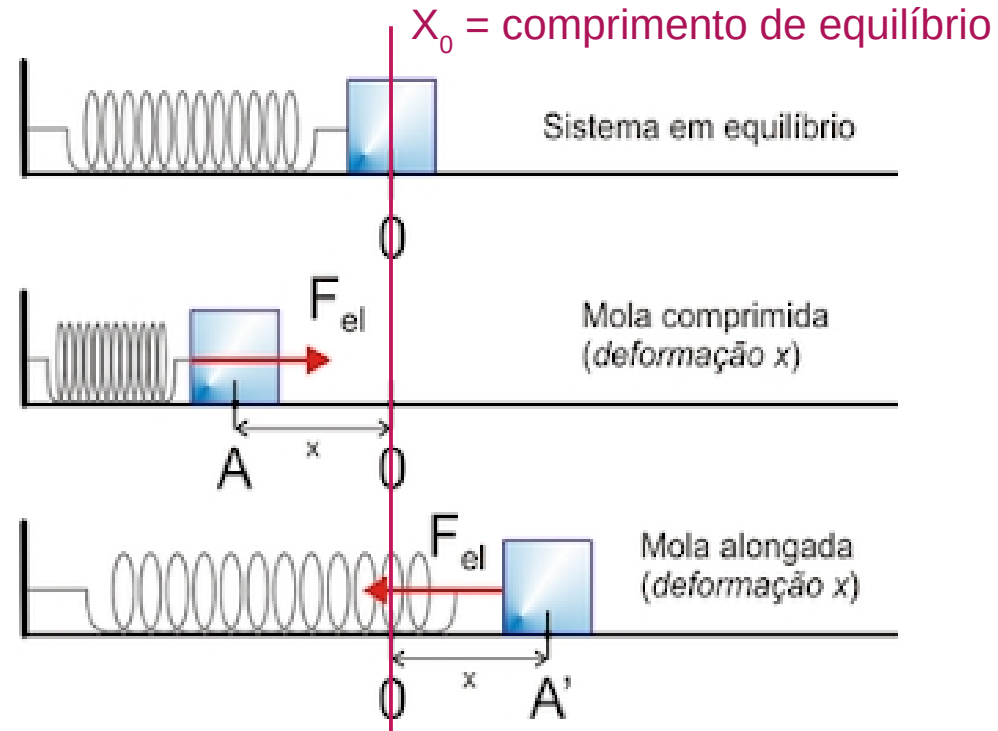


Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

- Força elástica restauradora: $F = -k * \Delta x$

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= - \int_i^f \vec{F}_{mola} \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_i^f (-kx) dx \\
 &= \int_i^f kx dx \\
 &= \frac{k}{2} (x_f^2 - x_i^2)
 \end{aligned}$$



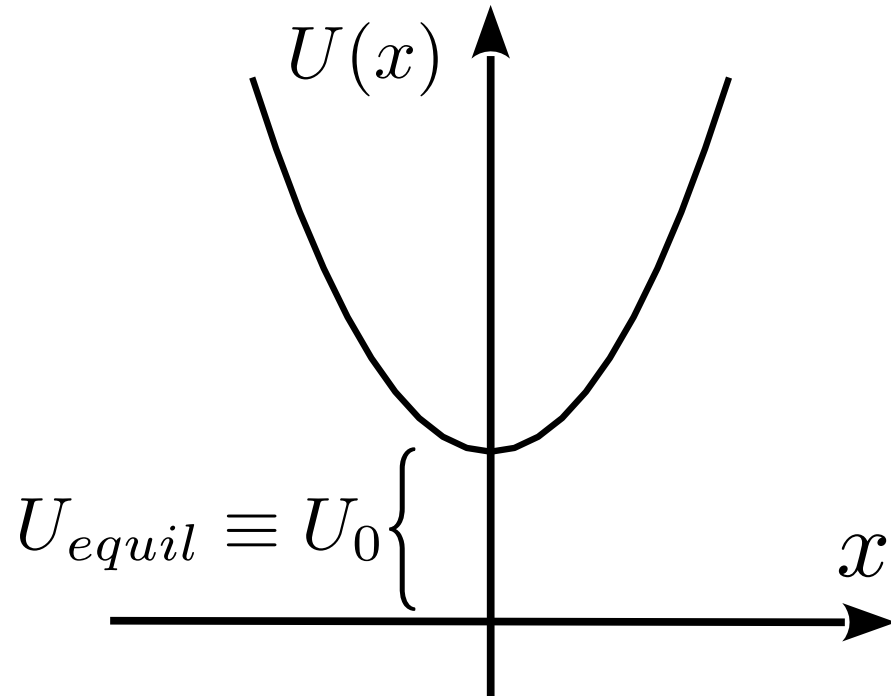
Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

- No ponto de equilíbrio, $x_0 = 0$, a força restauradora é zero
- Portanto, a energia potencial de um sistema fora do ponto de equilíbrio é

$$\begin{aligned} U - U_{equil} &= - \int_0^x (-kx') dx' \\ &= \int_0^x kx' dx' \\ &= \frac{k}{2} x^2 \end{aligned}$$

$$U(x) = U_{equil} + \frac{k}{2} x^2$$



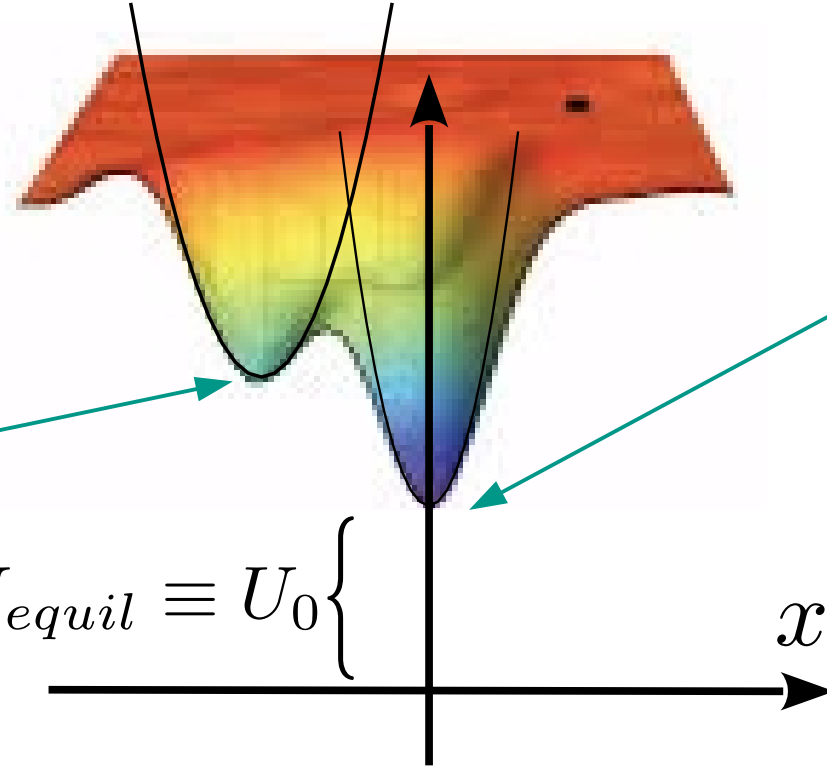
Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_{equil} + \frac{k}{2}x^2$$

estado de
equilíbrio
metaestável

$$U_{equil} \equiv U_0 \left\{ \right.$$

estado de
equilíbrio
estável



Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

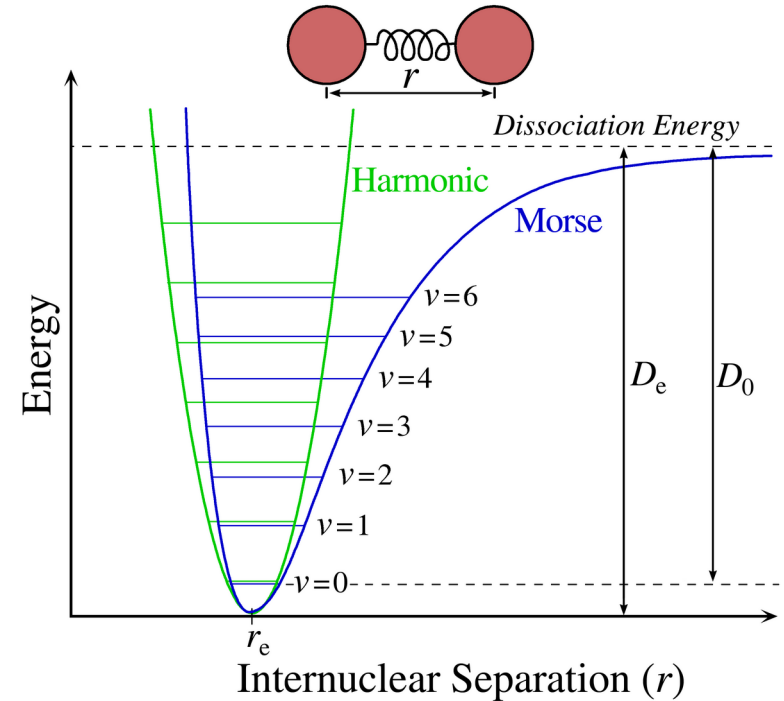
Energia Potencial e Trabalho

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_potential

Vibrações moleculares



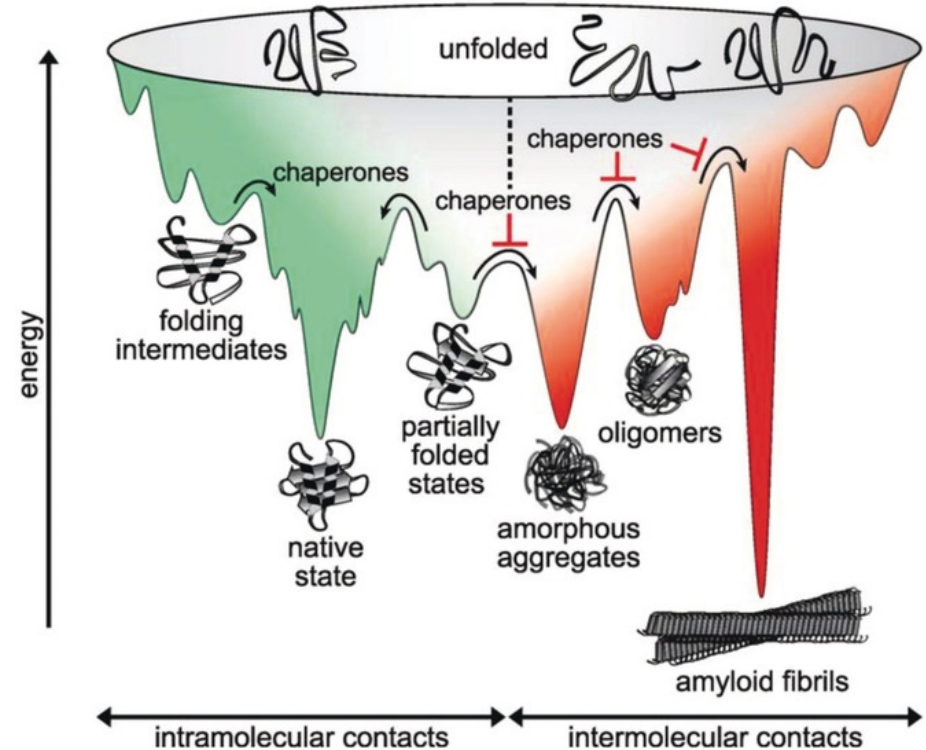
Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$

DOI: 10.1002/anie.201713416

Conformação de proteínas

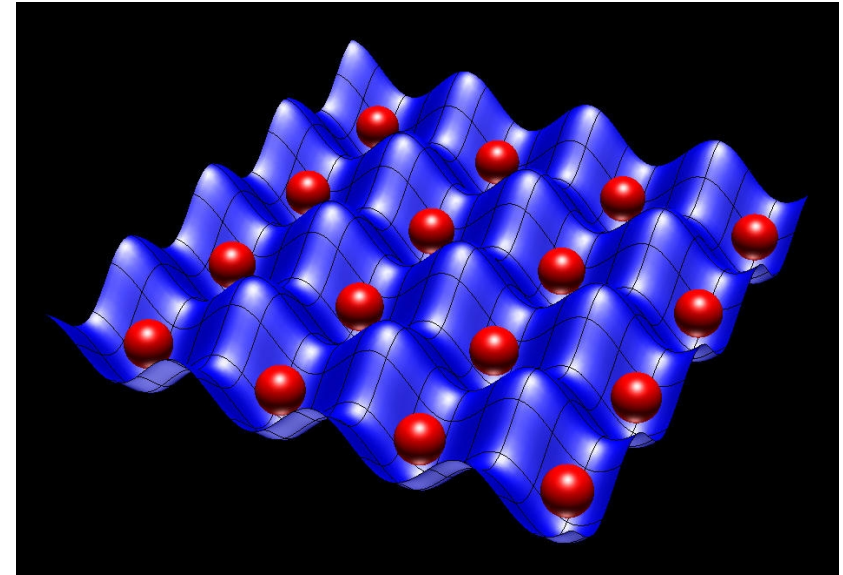


Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Energia Potencial Elástica

$$U(x) = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_{eq})^2$$

Potencial cristalino em sólidos



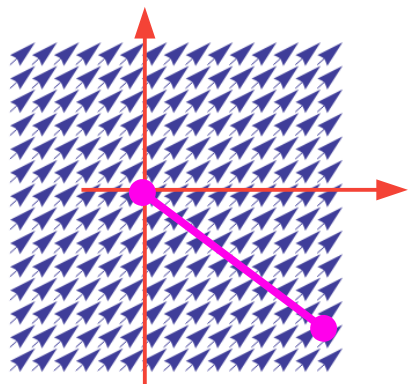
Próximo ao ponto de equilíbrio, todo sistema se comporta como um oscilador harmônico !!

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante $\mathbf{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j})$ N atuam sobre uma partícula de 4 kg.

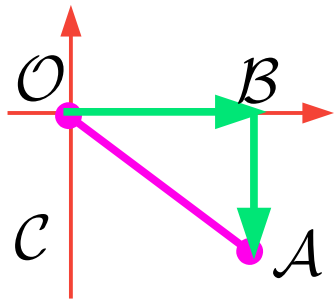
(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição $\mathbf{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?



(a) Caminho OBA: $W_{total} = W_{OB} + W_{BA} = -9 \text{ J}$

$$W_{OB} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 F_x dx = 3 * 2 \text{ J} = 6 \text{ J}$$

$$W_{BA} = \int_{(2,0)}^{(2,-3)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{-3} F_y dy = 5 * (-3) \text{ J} = -15 \text{ J}$$

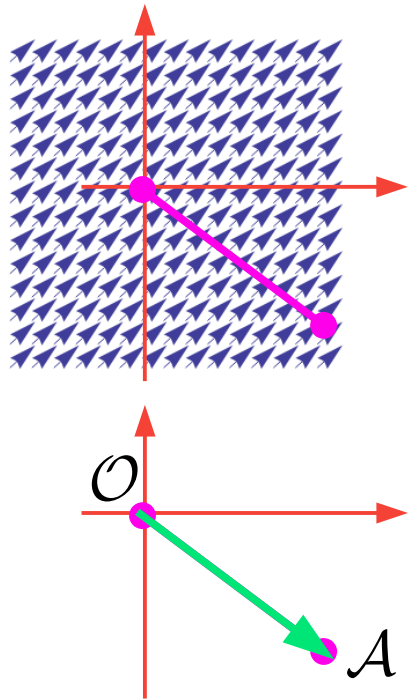


Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante $\mathbf{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j})$ N atuam sobre uma partícula de 4 kg.

(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição $\mathbf{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?



(a) Caminho OA:

$$d\vec{r} = (2, -3)d\alpha, \quad \alpha = [0, 1]$$

$$W_{OA} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (F_x, F_y) \cdot (2, -3)d\alpha$$

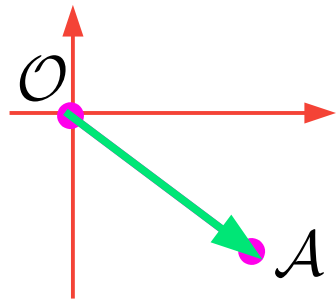
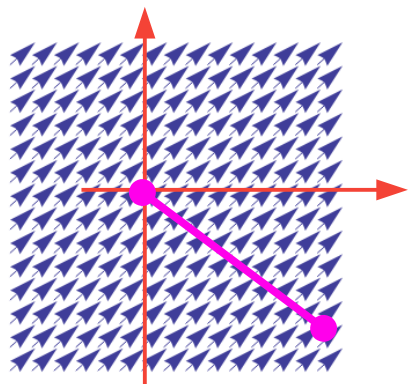
$$W_{OA} = \int_0^1 (2F_x - 3F_y) d\alpha = (2 * 3 - 3 * 5)J = -9J$$

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante $\mathbf{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j})$ N atuam sobre uma partícula de 4 kg.

(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição $\mathbf{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?



(a) a força F pode ser obtida da seguinte função de energia potencial

$$U(x, y) = -3x - 5y$$

$$\vec{F}(x, y) = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} \right) = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

Portanto deve ser uma força conservativa.

(c) Variação de energia Potencial da partícula:

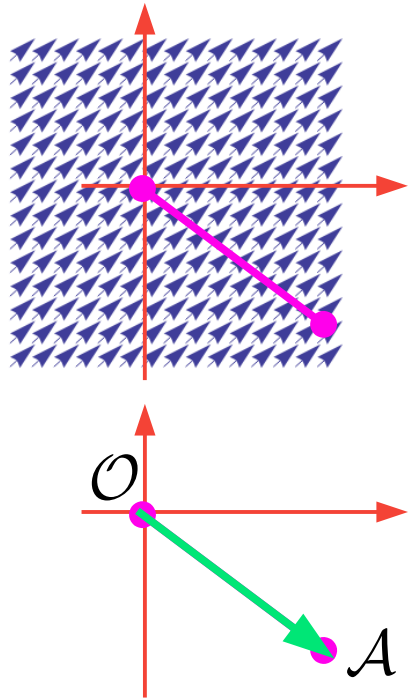
$$\begin{aligned} \Delta U &= U(2, -3) - U(0, 0) \\ &= +9 \text{ J} \end{aligned}$$

Trabalho de uma Força Variável

Exemplos:

Uma única força constante $\mathbf{F} = (3\hat{i} + 5\hat{j})$ N atuam sobre uma partícula de 4 kg.

(a) Calcular o trabalho feito por essa força quando a partícula se desloca da origem até o ponto definido pelo vetor posição $\mathbf{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m. Esse resultado depende da trajetória? (b) Qual a velocidade da partícula em r, se sua velocidade na origem for 4 m/s? (c) Qual a variação de energia potencial da partícula?



(b) módulo da velocidade na origem é 4 m/s, portanto

$$K_i = \frac{m}{2} |\vec{v}_i|^2 = 32 \text{ J}$$

Pelo Teorema da Energia Cinética: $W = \Delta K$

$$K_f = \frac{m}{2} |\vec{v}_f|^2 + W = 32 \text{ J} - 9 \text{ J} = 23 \text{ J}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_f| = 3.39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidade diminui no processo.

Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Um bloco de massa $m = 0.032 \text{ kg}$ desliza em uma pista sem atrito que forma um loop de raio $R = 12 \text{ cm}$. O bloco é liberado a partir do repouso no ponto P, a uma altura $h = 5R$ acima do ponto mais baixo do loop. Qual é o trabalho realizado sobre o bloco pela força gravitacional quando o bloco se desloca (a) de P para o ponto Q e para o ponto S? (b) Qual a energia potencial do bloco em P, em Q e em S? (c) Se o bloco recebe uma velocidade inicial para baixo, como ficam as respostas dos itens (a) e (b)?

Resposta (a):

$$W_g^{Q \leftarrow P} = -\Delta U_g = -[U_g(R) - U_g(5R)] = 4mgR$$

$$W_g^{S \leftarrow P} = -\Delta U_g = -[U_g(2R) - U_g(5R)] = 3mgR$$

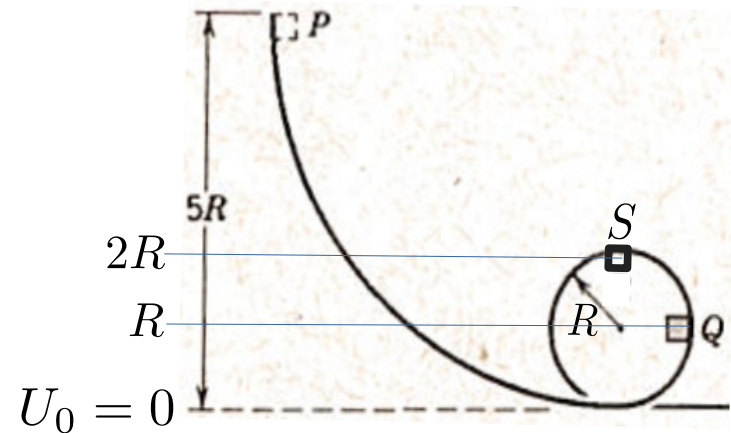
(b) energia potencial: $U = mgh$

$$U_g(P) = 5mgR$$

$$U_g(Q) = mgR$$

$$U_g(S) = 2mgR$$

(c) a velocidade inicial não altera a energia potencial do bloco.



Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Uma haste fina de comprimento $L = 2,0 \text{ m}$ e massa desprezível pode girar em torno de uma das extremidades. Uma bola de massa $m = 5.0 \text{ kg}$ está presa na outra extremidade. A haste é puxada lateralmente até fazer um ângulo $\Theta_0 = 30^\circ$ com a vertical e é liberada com velocidade inicial v_0 .

(a) Qual é o trabalho realizado sobre a bola pela força gravitacional? (b) Qual é a variação de energia potencial do sistema Terra-bola? (c) Qual a velocidade máxima que a bola atinge?

Resposta: (a)

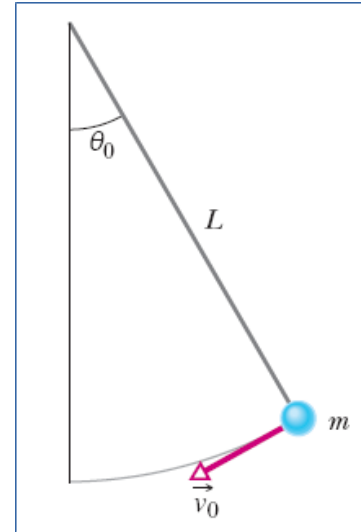
$$W_g = -\Delta U_g = mgh = mgL(1 - \cos\theta_0) \approx 13.1 J$$

(b) Variação de energia potencial do sistema Terra-bola:

$$\Delta U_g = -13.1 J$$

(c) velocidade máxima da bola:

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = mgL(1 - \cos\theta_0) = 13.1 J \implies v_{max} = 2.29 \frac{m}{s}$$



Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

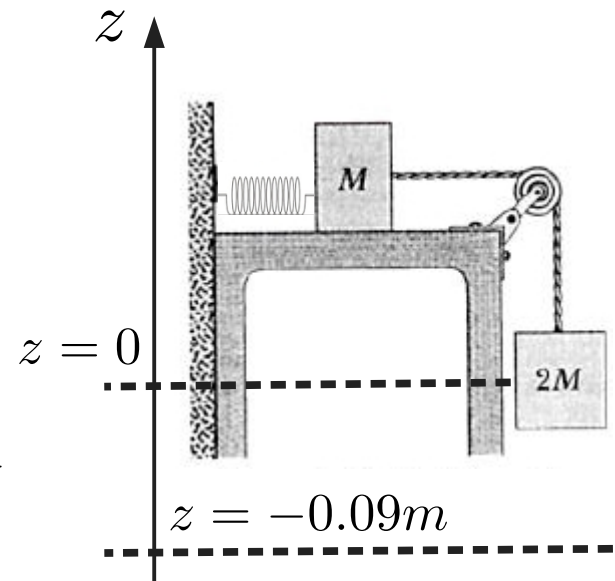
Dois blocos, de massas $M = 2 \text{ kg}$ e $2M$ estão presos a uma mola de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$, que tem uma das extremidades fixa, como mostra a figura. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito. Os blocos são liberados, a partir do repouso, com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0.09m ? Qual é a energia cinética do bloco que está pendurado depois de descer 0.09m ? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?

Resposta: (a)

$$\begin{aligned}\Delta K &= -\Delta U_g - \Delta U_{mola} = -mg\Delta z - \frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) \\ &= -2Mg * (-0.09\text{m} - 0) - \frac{k}{2}(0.09\text{m})^2 \\ &= 3.53\text{J} - 0.81\text{J} = 2.72\text{J}\end{aligned}$$

(b) Os blocos tem a mesma velocidade.

$$\begin{aligned}K_{total} &= K_{2M} + K_M = \frac{2M}{2}v^2 + \frac{M}{2}v^2 = \frac{3}{2}Mv^2 = 2.72\text{J} \\ \therefore K_{2M} &= \frac{2}{3}2.72\text{J} \approx 1.8\text{J}\end{aligned}$$



Trabalho de uma Força Elástica

Exemplos:

Dois blocos, de massas $M = 2 \text{ kg}$ e $2M$ estão presos a uma mola de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$, que tem uma das extremidades fixa, como mostra a figura. A superfície horizontal e a polia não possuem atrito. Os blocos são liberados, a partir do repouso, com a mola na posição relaxada. (a) Qual é a energia cinética total dos dois blocos após o bloco que está pendurado ter descido 0.09m ? Qual é a energia cinética do bloco que está pendurado depois de descer 0.09m ? (c) Qual é a distância que o bloco pendurado percorre antes de parar momentaneamente pela primeira vez?

Resposta: (c)

$$\Delta K = -\Delta U_g - \Delta U_{mola} = -mg\Delta z - \frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Quando os blocos param momentaneamente $\Delta K = 0$, portanto

$$\Delta U_g = -\Delta U_{mola}$$

$$mg\Delta z = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

$$2Mg(-d) = -\frac{k}{2}d^2 \implies d = \frac{4Mg}{k} = 0.39\text{m}$$

