MAT1161/MAT1181
Cálculo de Uma Variável
P3 – 25 de junho de 2018

Nome Legível : Gabarito

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________________ Turma : ____________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$2,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,0$		

T3 (2,0)	P3 Maple (3,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Seja f a função dada por

$$f(x) = \arctan(x^2)\,.$$

(a) Determine as equações das retas assíntotas horizontais do gráfico de f, caso existam.

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$$

Logo, $y = \frac{\pi}{2}$ é assíntota horizontal.

(b) Determine as equações das retas assíntotas verticais do gráfico de f, caso existam.

como $Dom(f) = \mathbb{R}$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

(c) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f.

$$f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$$

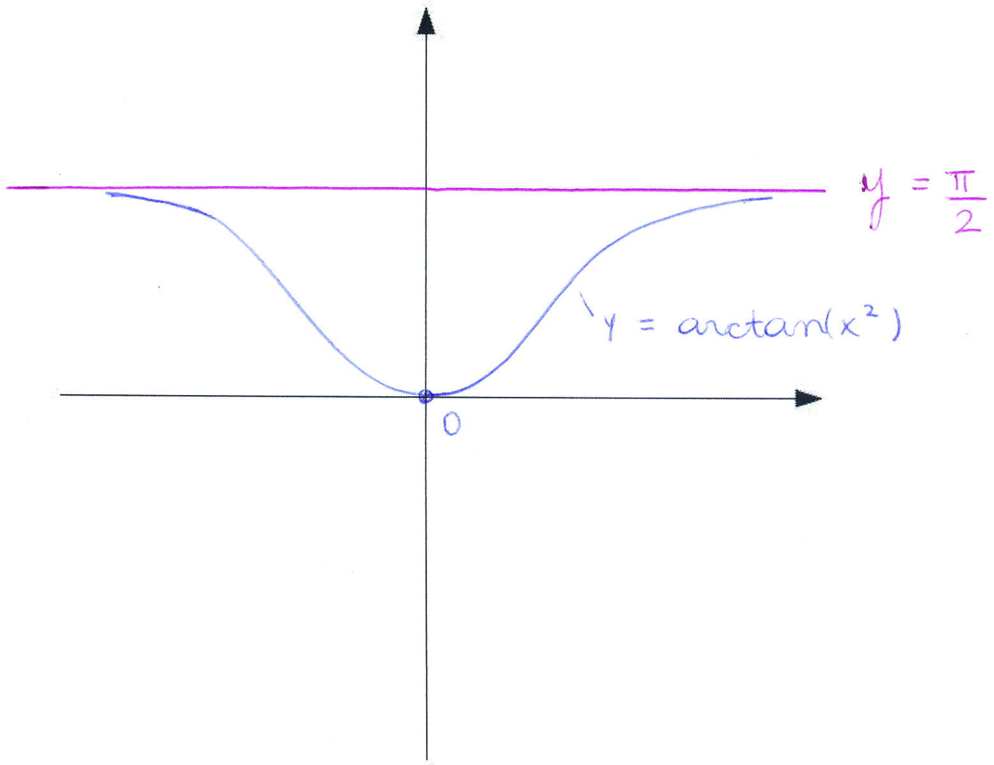
Estudo de sinal:

	$x < 0$	$x > 0$
$2x$	$-$	$+$
$1+x^4$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$

Logo, Int. crescimento de f : $[0, +\infty)$

Int. decrescimento de f : $(-\infty, 0]$

(d) Esboce o gráfico de f e suas retas assíntotas horizontais e verticais, caso existam. Marque em seu esboço as abscissas dos pontos de máximo e mínimo local de f, caso existam.



(e) Determine todos os valores $c \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $f(x) - c = 0$ possui ao menos uma solução real.

Há duas formas de resolver este item:

① $f(x) - c = 0 \iff$ a função $g(x) = f(x) - c$ possui raízes reais $\iff$ o gráfico de g corta o eixo x.

Observe que o gráfico de g é obtido através de deslocamento vertical de c unidades do gráfico de f.

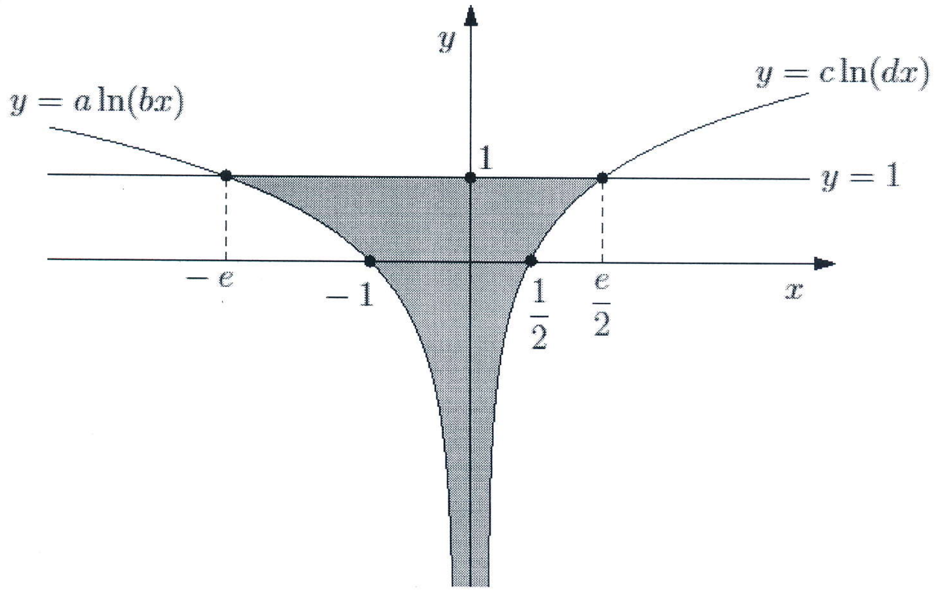
Logo $c \in [0, \pi/2)$.

② $f(x) - c = 0 \iff f(x) = c$. Esta equação possui solução $\iff$ o gráfico de f possui alguma interseção com a reta horizontal $y = c$.

Logo $c \in [0, \pi/2)$.

Questão 2

Considere a região plana $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas $y = a\ln(bx)$, $y = c\ln(dx)$ e $y = 1$:



(a) Utilizando as informações fornecidas no esboço acima, determine o valor das constantes a, b, c, d.

- $y = a\ln(bx)$

Substituindo o ponto $(-1, 0)$:

$0 = a\ln(-b) \underset{(a\neq 0)}{\iff} \ln(-b) = 0 \iff -b = 1 \iff \boxed{b = -1}$

Substituindo $b = -1$ e o ponto $(-e, 1)$:

$1 = a\ln(e) \iff \boxed{a = 1}$

- $y = c\ln(dx)$

Substituindo o ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

$0 = c\ln\left(\frac{d}{2}\right) \underset{(c\neq 0)}{\iff} \ln\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \iff \frac{d}{2} = 1 \iff \boxed{d = 2}$

Substituindo $d = 2$ e o ponto $\left(\frac{e}{2}, 1\right)$:

$1 = c\ln(e) \iff \boxed{c = 1}$

(b) Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma integral ou uma soma de integrais na variável x.
Obs.: Neste item não é necessário calcular a área.

$$A(R) = \int_{-e}^{0} 1 - a\ln(bx)\, dx + \int_{0}^{e/2} 1 - c\ln(dx)\, dx$$

$$= \int_{-e}^{0} 1 - \ln(-x)\, dx + \int_{0}^{e/2} 1 - \ln(2x)\, dx$$

(c) Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma integral ou uma soma de integrais na variável y.
Obs.: Neste item não é necessário calcular a área.

Observe que:

$$y = a\ln(bx) \iff \ln(bx) = y/a \iff bx = e^{y/a}$$
$$\iff x = \frac{e^{y/a}}{b}$$

Ou seja, $y = \ln(-x) \iff x = -e^{y}$.

Analogamente, $y = \ln(2x) \iff x = \frac{e^{y}}{2}$.

Logo,

$$A(R) = \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{y}}{2} - (-e^{y})\, dy = \int_{-\infty}^{1} \frac{3e^{y}}{2}\, dy$$

(d) Calcule a área de $\mathcal{R}$ pelo método que preferir.

Pelo item (c):

$$A(R) = \int_{-\infty}^{1} \frac{3e^{y}}{2}\, dy$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{1} \frac{3e^{y}}{2}\, dy$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left. \frac{3e^{y}}{2} \right|_{y=t}^{1}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{3e}{2} - \frac{3e^{t}}{2}$$

$$= \frac{3e}{2} - 0$$

$$= \frac{3e}{2} \quad //$$

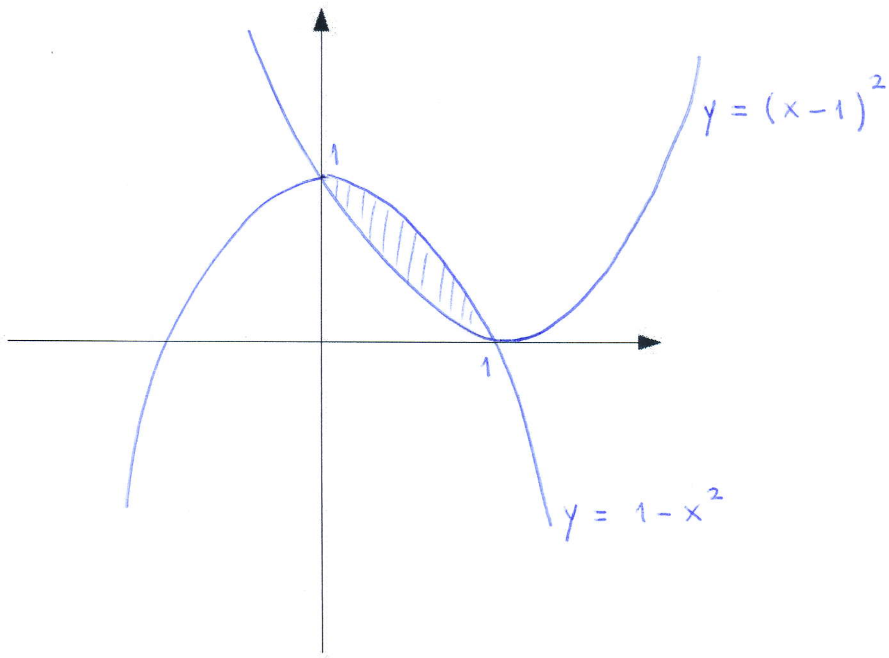
Questão 3

Considere a região plana $\mathcal{R}$ definida por:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 \leq y \leq 1 - x^2\right\},$$

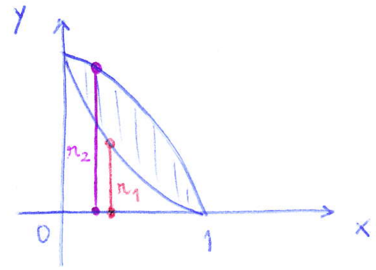
Seja $\mathcal{S}$ o sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

(a) Esboce abaixo a região plana $\mathcal{R}$.



(b) Utilizando o método que preferir, escreva o volume de $\mathcal{S}$ como uma integral.
Obs.: Neste item não é necessário calcular o volume.

Pelo Método de Discos:



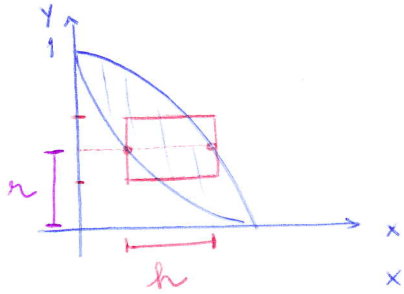
Raio interno: $r_1 = (x-1)^2$

Raio externo: $r_2 = 1 - x^2$

Logo

$$\text{Vol}(S) = \int_0^1 \pi \left(r_2^2 - r_1^2\right) dx = \int_0^1 \pi \left((1-x^2)^2 - (x-1)^4\right) dx$$

Pelo Método de Cascas,



Raio médio : $r = y$

Altura: $h = f(y) - g(y)$, onde

$x = f(y)$ é o ramo direito da parábola de concavidade para baixo

e $x = g(y)$ é o ramo esquerdo da parábola de concavidade para cima.

- $y = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - y \iff x = \pm\sqrt{1-y}$

  Logo $f(y) = \sqrt{1-y}$.

- $y = (x-1)^2 \iff x - 1 = \pm\sqrt{y} \iff x = 1 \pm \sqrt{y}$

  Logo $g(y) = 1 - \sqrt{y}$

Assim, $h = \sqrt{1-y} - (1 - \sqrt{y})$.

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_0^1 2\pi \cdot y \cdot \left(\sqrt{1-y} - 1 + \sqrt{y}\right) dy$$

(c) Calcule o volume de $\mathcal{S}$.

Pelo Método de Discos,

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_0^1 \pi \left((1 - 2x^2 + x^4) - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \right) dx$$

$$= \pi \int_0^1 4x^3 - 8x^2 + 4x \, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \, dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_{x=0}^{1}$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= 4\pi \left[\frac{3}{12} - \frac{8}{12} + \frac{6}{12} \right]$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{3} \; //$$