MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P1 – 28 de setembro de 2016

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$1,5$		
3^a	$2,0$		
Total	$5,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Considere a região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq -(x+1)(x-5)\,,\ y \geq 2x-8\,,\ y \geq -2x-2\,,\ x \leq 4\}$.

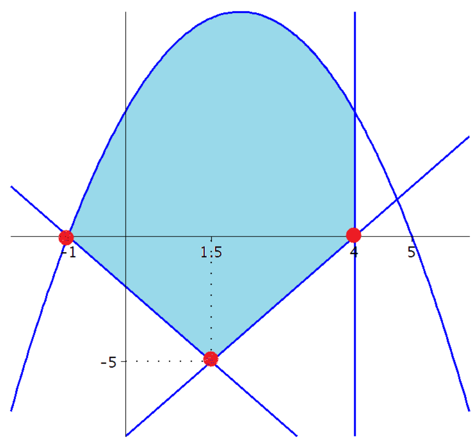
(a) Esboce abaixo a região $\mathcal{R}$. Marque em seu desenho as abscissas e ordenadas de pelo menos três pontos que pertençam à fronteira da região $\mathcal{R}$.

Solução:

Observe que:

- A parábola $y = -(x+1)(x-5)$ tem raízes -1 e 5 e concavidade para baixo
- A reta decrescente $y = -2x-2$ corta o eixo x em $x = -1$, uma das raízes da parábola
- A reta crescente $y = 2x-8$ corta o eixo x em $x = 4$
- As retas $y = -2x-2$ e $y = 2x-8$ interceptam-se em $x = \dfrac{3}{2}$
- A reta $x = 4$ é vertical

Com essas informações, esboçamos a região abaixo:



(b) Calcule a área da região $\mathcal{R}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{R}) &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (-(x+1)(x-5)) - (-2x-2)\,dx \; + \int_{\frac{3}{2}}^{4} (-(x+1)(x-5)) - (2x-8)\,dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} -x^2+6x+7\,dx \; + \; \int_{\frac{3}{2}}^{4} -x^2+2x+13\,dx \\
&= \left(-\frac{x^3}{3}+3x^2+7x\right)\Bigg|_{x=-1}^{\frac{3}{2}} \; + \; \left(-\frac{x^3}{3}+x^2+13x\right)\Bigg|_{x=\frac{3}{2}}^{4} \\
&= \left(\frac{129}{8}+\frac{11}{3}\right) \; + \; \left(\frac{140}{3}-\frac{165}{8}\right) \\
&= \frac{275}{6}\,.
\end{aligned}$$

Questão 2

Considere as funções

$$f(x) = \text{sen}(2x) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

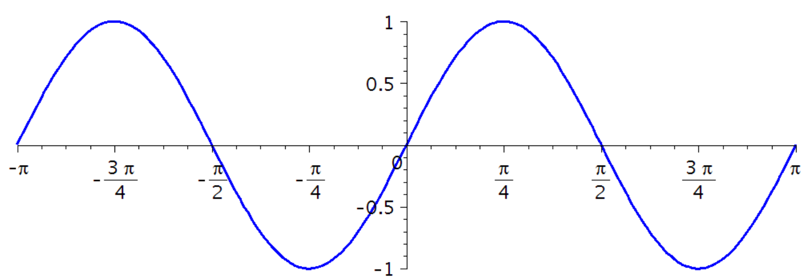
(a) Sejam T_f o período da função f e T_g o período da função g. Determine T_f e T_g.

<u>Solução:</u>

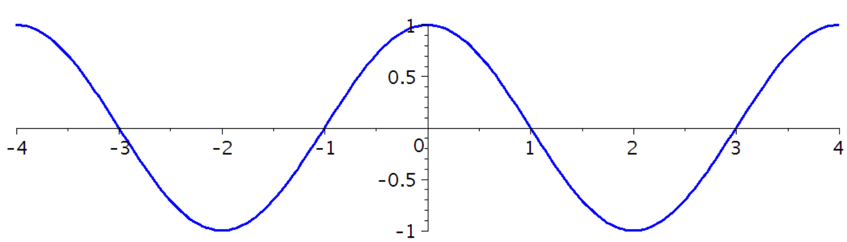
Sabe-se que o período das funções $\text{sen}(x)$ e $\cos(x)$ é 2π.

- Para determinar T_f: a multiplicação de x por 2 indica uma contração horizontal por um fator de 2. Logo,
$$T_f = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$
- Para determinar T_g: a multiplicação de x por $\frac{\pi}{2}$ indica uma contração horizontal por um fator de $\frac{\pi}{2}$. Logo,
$$T_g = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

(b) Faça um esboço do gráfico de f no intervalo $[-T_f, T_f]$.



(c) Faça um esboço do gráfico de g no intervalo $[-T_g, T_g]$.



(d) Determine os valores de x no intervalo $[0, 4]$ que satisfazem a seguinte inequação:

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \geq 0$$

Solução:

Utilizando-se os itens anteriores, podemos fazer um estudo de sinal da função $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$:

	$0 < x < 1$	$1 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < 3$	$3 < x < \pi$	$\pi < x < 4$
$f(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Assim,

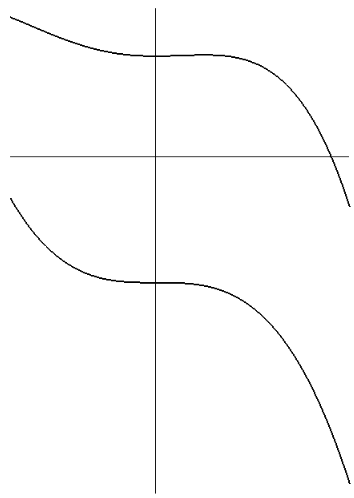
$$h(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \geq 0\,,\ \ x \in [0,4] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0,1) \cup \left[\frac{\pi}{2}, 3\right) \cup [\pi, 4]\,.$$

Questão 3

Considere as funções $f : \left[-\dfrac{3}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ e $g : \left[-\dfrac{3}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -2x^3 - 10 \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 + 8\,,$$

cujos gráficos estão esboçados abaixo.

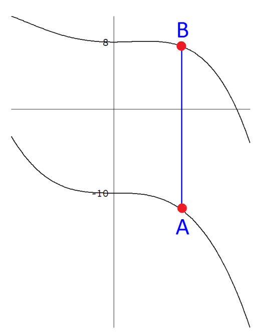


Para cada $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, 2\right]$, considere o segmento de reta vertical que possui extremos nos pontos $A = (x, f(x))$ e $B = (x, g(x))$.

(a) Determine o domínio e a expressão da função P que fornece o comprimento do segmento $\overline{AB}$ em termos de x.

Solução:

Observe que $f(0) = -10 < 8 = g(0)$:



Logo,

$$P(x) = g(x) - f(x) = \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + x^2 + 8\right) - \left(-2x^3 - 10\right) = -\frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + 18\,,$$

e $\mathrm{Dom}(P) = \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$.

(b) Determine o valor de x que maximiza o comprimento do segmento $\overline{AB}$. Justifique sua resposta.

Solução:

Os candidatos a extremo local da função P são os extremos do domínio, $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 2$, e os valores de x tais que $P'(x) = 0$:

$$P'(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2x = x(-2x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2},\ 0,\ 2\,.$$

Para classificar os candidatos devemos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função P:

	$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 0$	$0 < x < 2$
x	$-$	$-$	$+$
$-2x^2 + 3x + 2$	$-$	$+$	$+$
$P'(x)$	$+$	$-$	$+$

Logo, os intervalos de crescimento da função P são $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ e $[0, 2]$, e o intervalo de decrescimento é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Conclui-se então que $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$ são máximos locais, enquanto $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 0$ são mínimos locais da função P.

Para determinar o valor de x que maximiza $P(x)$, basta então verificar que

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{579}{32} < 22 = P(2) \quad \Rightarrow \quad x_{\text{max}} = 2\,.$$

(c) Determine o valor de x que minimiza o comprimento do segmento $\overline{AB}$. Justifique sua resposta.

Solução:

Utilizando o item (b), para determinar o valor de x que minimiza $P(x)$ basta verificar que

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{459}{32} < 18 = P(0) \quad \Rightarrow \quad x_{\text{min}} = -\frac{3}{2}\,.$$