MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P3 – 23 de junho de 2016

Nome Legível : ____________________

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$2,0$		

T3 (2,0)	P3 Maple (3,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

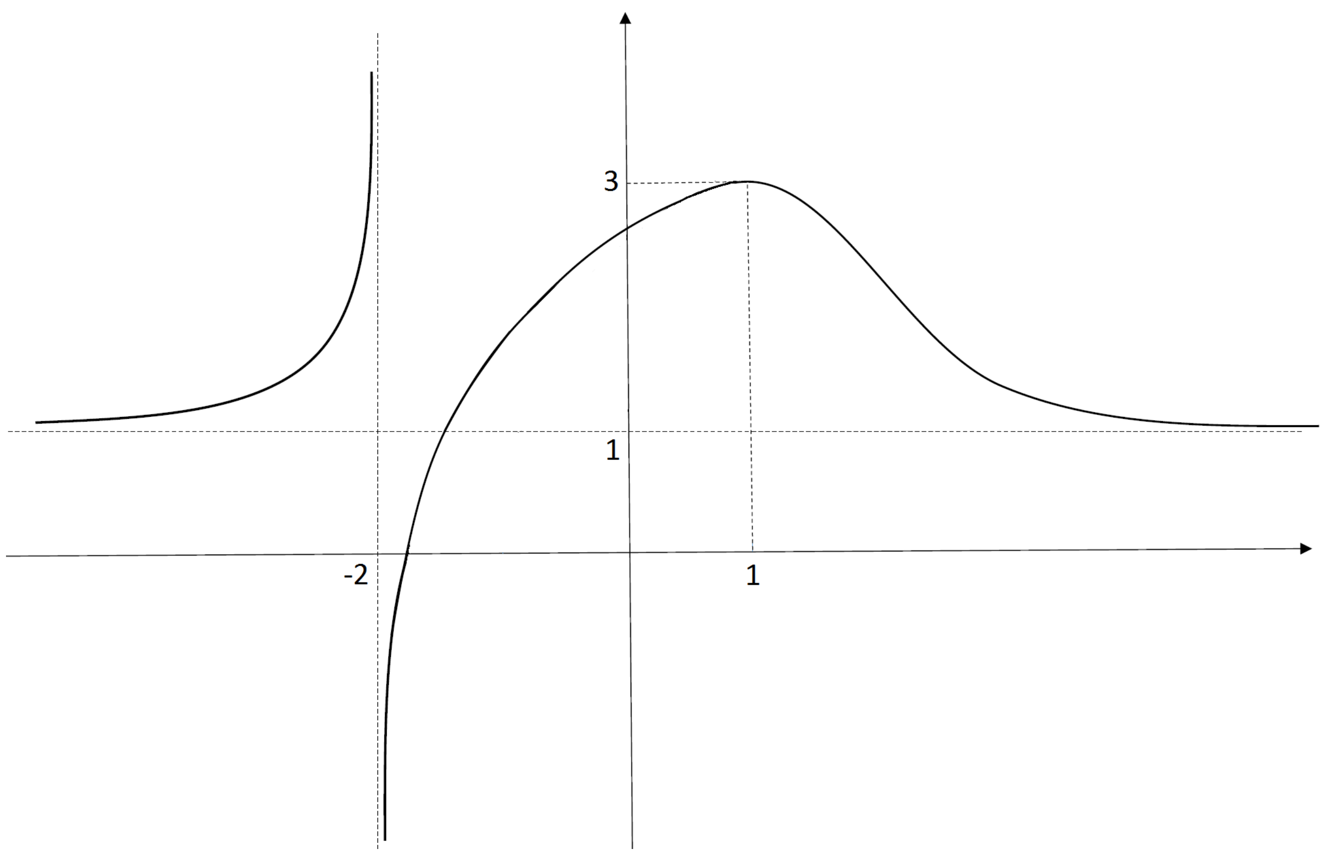
- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Esboce o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes condições:

- f é contínua em todo o seu domínio
- f é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(-2, 1)$
- f é decrescente no intervalo $(1, +\infty)$
- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Obs.: Não é preciso determinar uma expressão para a função f, apenas esboçar seu gráfico.
Solução:



Questão 2

Considere a função $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

(a) Determine, caso exista(m):

(a.1) As equações das retas assíntotas verticais e horizontais do gráfico de f.
Solução:

Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais.

Observe que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$$

Logo, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal.

(a.2) O(s) intervalo(s) de crescimento e decrescimento de f.
Solução:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} = 0 \iff x = 0\,.$$

Estudo de sinal de $f'(x)$:

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$-4x$	$+$	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$

Logo, o intervalo de crescimento de f é $(-\infty, 0]$ e o de decrescimento é $[0, +\infty)$.

(a.3) O(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo.

Solução:

$$f''(x) = \frac{-4(x^2+1)^2 + 16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{12x^4 + 8x^2 - 4}{(x^2+1)^4}\,.$$

Observe que

$$f''(x) = 0 \iff 12x^4 + 8x^2 - 4 = 0\,.$$

Para resolver a equação $12x^4 + 8x^2 - 4 = 0$, considere $y = x^2$:

$$12x^4 + 8x^2 - 4 = 0 \iff 12y^2 + 8y - 4 = 0 \iff y = \frac{1}{3}\,,\ -1$$

Como $y = x^2 \geq 0$, descartaremos a solução negativa $y = -1$.
Logo,

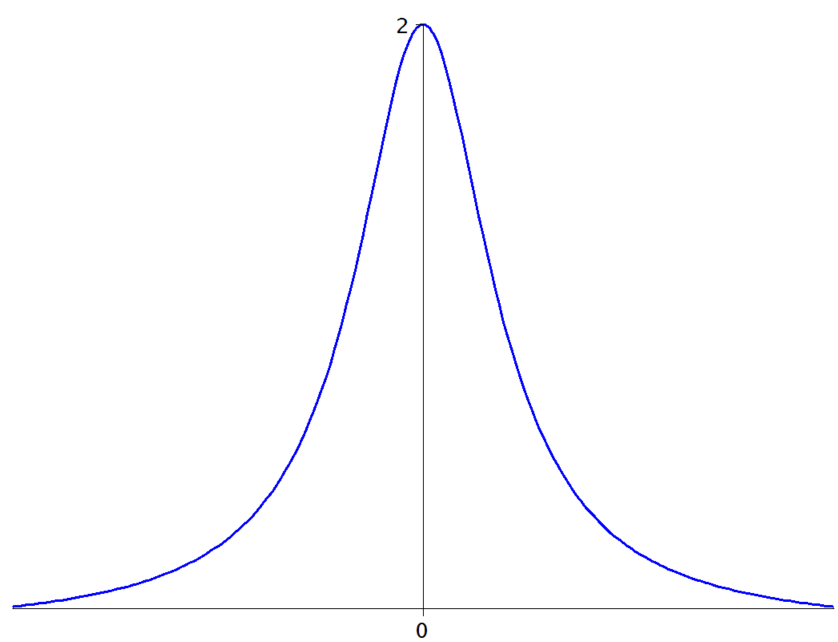
$$12x^4 + 8x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Estudo de sinal de $f''(x)$:

	$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \infty$
$12x^4 + 8x^2 - 4$	$+$	$-$	$+$
$(x^2+1)^4$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Conclui-se que os intervalos de concavidade para cima do gráfico de f são $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ e o intervalo de concavidade para baixo é $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

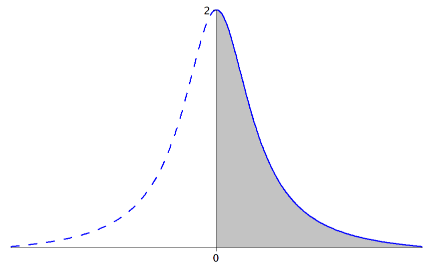
(b) Esboce o gráfico da função f.



(c) Calcule a área da região plana $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Solução:

A região $\mathcal{R}$ está esboçada abaixo:



$$\begin{aligned}
A(\mathcal{R}) &= \int_0^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{2}{x^2+1}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(2\arctan(x)\Big|_{x=0}^{t} \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} 2\arctan(t) \\
&= 2\,.\,\frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Questão 3

Considere a região plana $\mathcal{R}$ delimitada pela parábola $y = x^2 - 4x + 6$ e pela reta $y = 2x - 2$.

(a) Esboce abaixo a região $\mathcal{R}$, explicitando as abscissas e ordenadas do vértice da parábola e dos pontos de interseção entre as duas curvas.

Solução:

Equação da parábola:

$$y = x^2 - 4x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = (x-2)^2 + 2\,.$$

Logo, as coordenadas do vértice da parábola são $(2, 2)$.

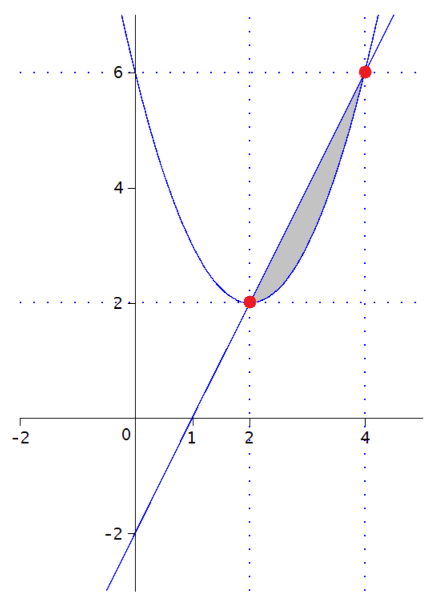
As interseções entre as duas curvas se dão em:

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 6 = 2x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 6x + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2,\ 4\,. \end{aligned}$$

Ordenadas correspondentes:

$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = 2 \\ x = 4 \quad &\Rightarrow \quad y = 6 \end{aligned}$$

Esboço da região $\mathcal{R}$:



(b) Calcule, pelo método que preferir, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta de equação $x = -1$.

Solução:

Pelo Método de Discos:

Observe primeiramente que a equação da reta pode ser reescrita como $x = \dfrac{y}{2} + 1$ e que a equação do ramo direito da parábola é $x = 2 + \sqrt{y-2}$.

Consideraremos aneis perpendiculares ao eixo de rotação com raio interno r_1 e raio externo r_2:

$$r_1 = 1 + \left(\frac{y}{2} + 1\right) = \frac{y}{2} + 2$$
$$r_2 = 1 + \left(2 + \sqrt{y-2}\right) = 3 + \sqrt{y-2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= \int_2^6 \pi \left(\left(3 + \sqrt{y-2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + 2\right)^2 \right) dy \\
&= \int_2^6 \pi \left(3 + 6\sqrt{y-2} - y - \frac{y^2}{4}\right) dy \\
&= \pi \left(3y + 4\sqrt{(y-2)^3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right) \Big|_{y=2}^{6} \\
&= \frac{32\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Pelo Método de Cascas Cilíndricas:

Cada casca cilíndrica possui raio médio $1 + x$ e altura $(2x-2) - ((x-2)^2 + 2) = -x^2 + 6x - 8$. Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Vol} &= \int_2^4 2\pi(1+x)(-x^2 + 6x - 8)\, dx \\
&= 2\pi \int_2^4 (-x^3 + 5x^2 - 2x - 8)\, dx \\
&= 2\pi \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - x^2 - 8x\right) \Big|_{x=2}^{4} \\
&= \frac{32\pi}{3}.
\end{aligned}$$