PUC RIO

MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P3 – 06 de dezembro de 2018

Nome Legível : Gabarito

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,2$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,8$		

T3 (2,0)	P3 Maple (3,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

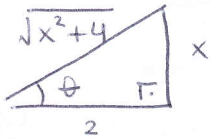
Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$



$x = 2\tan(\theta) \Rightarrow dx = 2\sec^2(\theta)\,d\theta$

logo $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{2\sec^2(\theta)}{4\tan^2(\theta)\cdot 2\sec(\theta)}\,d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\int \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos(\theta)}\cdot\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}\,d\theta}_{u=\sin(\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{4u} + c$

$\displaystyle = -\frac{1}{4\sin(\theta)} + c = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + c$ //

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

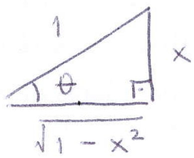
$x = \sin(\theta) \Rightarrow dx = \cos(\theta)\,d\theta$

logo $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sin^3(\theta)}{\cos(\theta)}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int \sin^3(\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \int \sin^2(\theta)\cdot\sin(\theta)\,d\theta = \underbrace{\int (1-\cos^2(\theta))\cdot\sin(\theta)\,d\theta}_{u=\cos(\theta)}$

$\displaystyle = -\int 1-u^2\,du = -u + \frac{u^3}{3} + c$

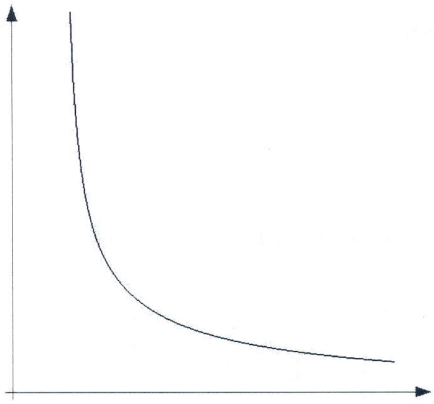
$\displaystyle = -\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3} + c$



$\displaystyle = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + c$

Questão 2

Seja $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-1}$, cujo gráfico está esboçado abaixo:



Considere a seguinte região plana:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 1\,,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}\,.$$

(a) Determine a equação da reta assíntota horizontal do gráfico de f.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x^2-1} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Logo $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

(b) Determine a equação da reta assíntota vertical do gráfico de f.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-1}{x^2-1} = +\infty\,,$$ pois $2x - 1 > 0$ e $x^2 - 1 \geqslant 0$ se $x \geqslant 1$.

Logo $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico de f.

(c) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ como uma integral ou uma soma de integrais na variável x.

Obs.: Neste item não é necessário calcular as integrais.

$$A(R) = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

(d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ e conclua que ela é infinita.

$$A(R) = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to 1^+} \int_t^2 \frac{2x-1}{x^2-1}\,dx + \lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{2x-1}{x^2-1}\,dx$$

Observe que

$$\frac{2x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad 2A = 1 \Rightarrow A = 1/2$$

$$B = 2 - A \Rightarrow B = 3/2$$

Logo
$$\int \frac{2x-1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{3}{2}\ln(|x+1|) + c$$

Então,
$$A(R) = \lim_{t \to 1^+} \left(\frac{3}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(|t-1|) - \frac{3}{2}\ln(|t+1|) \right)$$

$$+ \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(|t-1|) + \frac{3}{2}\ln(|t+1|) - \frac{3}{2}\ln(3) \right)$$

$$= -(-\infty) + \infty \qquad = +\infty \;//$$

Questão 3

Considere o seguinte PVI (problema de valor inicial):

$$\begin{cases} y' = e^y \ln(x) \\ y(e) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que a função $y(x) = \ln\left(\dfrac{x}{e}\right)$ **não** é a solução do PVI.

Dica: Neste item não é necessário resolver o PVI.

Observe que: $y'(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{e}} \cdot \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{x}$

Além disso,

$$e^{y(x)} \cdot \ln(x) = \exp\left(\ln\left(\frac{x}{e}\right)\right) \cdot \ln(x) = \frac{x}{e} \cdot \ln(x)$$

Logo, $y'(x) \neq e^{y(x)} \cdot \ln(x)$, ou seja, a EDO não é satisfeita. Então $y(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ não é solução do PVI.

(b) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da solução do PVI em $x = e$.

Dica: Neste item não é necessário resolver o PVI.

O coeficiente angular é dado por $y'(e)$. Utilizando a EDO e a condição inicial, temos que:

$$y'(e) = e^{y(e)} \cdot \ln(e) = e^0 \cdot \ln(e) = 1 \cdot 1 = 1$$

(c) Resolva o PVI.

EDO: $\frac{dy}{dx} = e^{y} \cdot \ln(x) \Rightarrow \int e^{-y}\, dy = \int \ln(x)\, dx$

$\Rightarrow -e^{-y} = x\ln(x) - x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{-y} = -x\ln(x) + x - c$

$\Rightarrow -y = \ln(-x\ln(x) + x - c)$

$\Rightarrow y = -\ln(-x\ln(x) + x - c)$

condição inicial:

$y(e) = -\ln(-e \cdot \ln(e) + e - c)$

$= -\ln(-c) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(-c) = 0$

$\Leftrightarrow -c = e^{0} = 1$

$\Leftrightarrow c = -1$

logo solução do PVI:

$y(x) = -\ln(-x\ln(x) + x + 1)$ //