MAT1161 – Cálculo de Uma Variável

P1 - Gabarito – 12 de setembro de 2017

Nome Legível : ____________________

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,5$		

T1 (2,0)	P1 Maple (3,0)	P1 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

(a) Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x}} - 3\,.$$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.

Observe que $f(x) = 3x^2\, x^{-\frac{1}{2}} - 3 = 3x^{\frac{3}{2}} - 3$

Logo, $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2}$

A equação da reta tangente pedida é:

$y = f'(1).(x-1) + f(1) \Rightarrow y = \dfrac{9\sqrt{1}}{2}.(x-1) + \dfrac{3.1^2}{\sqrt{1}} - 3$

$\Rightarrow y = \dfrac{9x}{2} - \dfrac{9}{2}$

(b) Considere a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x}} + a\,.$$

Sabendo que $y = 3x + 1$ é a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(b, g(b))$, determine o valor das constantes reais a e b.

Observe que $g(x) = 3x^{\frac{3}{2}} + a \Rightarrow g'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2}$

Equação da reta tangente ao gráfico de g em $x = b$:

$y = g'(b).(x-b) + g(b) \Rightarrow y = \dfrac{9\sqrt{b}}{2}.(x-b) + 3b^{\frac{3}{2}} + a$

$\Rightarrow y = \dfrac{9\sqrt{b}}{2}.x - \dfrac{9b}{2}.\sqrt{b} + 3b^{\frac{3}{2}} + a = 3x + 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{9\sqrt{b}}{2} = 3 \Rightarrow \sqrt{b} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow b = \dfrac{4}{9} \\[2ex] -\dfrac{9b\sqrt{b}}{2} + 3b^{\frac{3}{2}} + a = 1 \Rightarrow -\dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} + a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{13}{9} \end{cases}$$

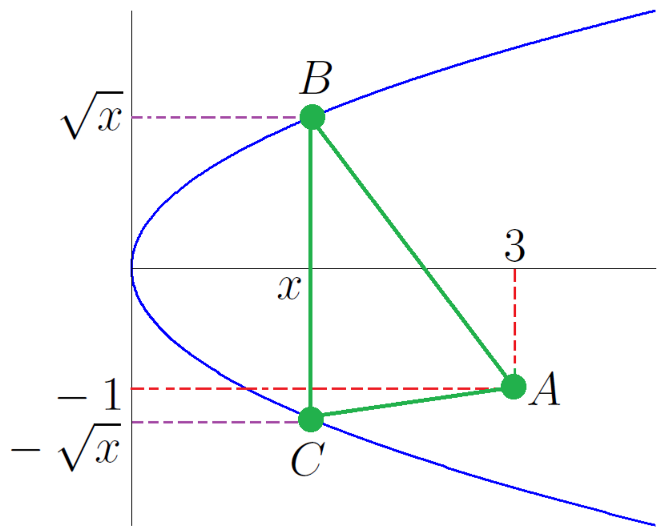
Questão 2

Considere um triângulo com um vértice no ponto $A = (3, -1)$ e outros dois vértices, B e C, pertencentes à curva de equação $x = y^2$. As seguintes condições devem ser satisfeitas:

- O lado BC é paralelo ao eixo y.
- A abscissa (coordenada x) do vértice A é maior que as abscissas dos vértices B e C.
- A ordenada (coordenada y) do vértice B é maior que a ordenada do vértice C.

Seja x a abscissa do vértice B.

(a) Determine o domínio e a expressão da função $A(x)$ que fornece a área do triângulo em termos de x.



$\text{Dom}(A) = (0, 3)$

$A(x) = \dfrac{1}{2}\,.\,\text{base}\,.\,\text{altura}$

$\text{base} = \text{lado BC} = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$

$\text{altura} = 3 - x$

Logo, $A(x) = \dfrac{1}{2}.(3 - x).2\sqrt{x} = (3 - x)\sqrt{x}$

(b) Determine a área do triângulo ABC que tem área máxima.
Obs.: Respostas sem justificativas não serão aceitas.

$A(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} = 0$

Então, $A'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, o único candidato a máximo é $x = 1$. Verificando:

$A'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Logo, o único intervalo de crescimento de A é $(0, 1]$

Consequentemente, o intervalo de decrescimento de A é $[1, 3)$

Conclui-se que em $x = 1$ a função A possui um máximo local, pois a função cresce antes de $x = 1$ e decresce depois.

Assim, área máxima $= A(1) = (3 - 1)\sqrt{1} = 2$.

Questão 3

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{se } x < 1 \\ h(x)\,, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

onde

$$g(x) = a + \int_{-1}^{x} (2t - 1)\ \mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad h(x) = \int_{-1}^{x} (3 - bt)\ \mathrm{d}t$$

(a) Determine os valores de a e b para que a função f seja contínua e diferenciável.

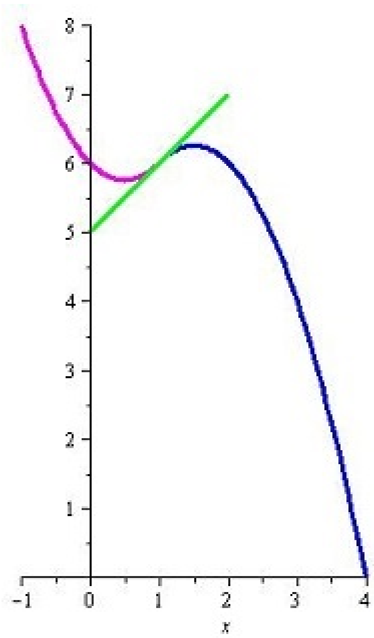
$$g(x) = a + (t^2 - t)\Big|_{t=-1}^{x} = a + x^2 - x - (1 + 1) = x^2 - x + a - 2 \Rightarrow g'(x) = 2x - 1$$

$$h(x) = \left(3t - \frac{bt^2}{2}\right)\Bigg|_{t=-1}^{x} = 3x - \frac{bx^2}{2} - \left(-3 - \frac{b}{2}\right) = -\frac{bx^2}{2} + 3x + 3 + \frac{b}{2} \Rightarrow h'(x) = -bx + 3$$

Temos que f é contínua e diferenciável se e somente se

$$\begin{cases} g(1) = h(1) \\ g'(1) = h'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = -\dfrac{b}{2} + 3 + 3 + \dfrac{b}{2} \\ 1 = -b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 6 \\ 1 = -b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$$

(b) Esboce abaixo o gráfico de f. Desenhe também a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.



$g(x) = x^2 - x + 6 \rightarrow$ o gráfico é uma parábola de concavidade para cima, com vértice em $\left(\frac{1}{2}, \frac{23}{4}\right)$

$h(x) = -x^2 + 3x + 4 \rightarrow$ o gráfico é uma parábola de concavidade para baixo, com vértice em

$\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$