MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P2 – 20 de outubro de 2022

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$2,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$2,0$		

Q2 (1,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (6,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e lacrado dentro do saco plástico fornecido pelo fiscal.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde. Não é permitido o uso de corretivo líquido.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

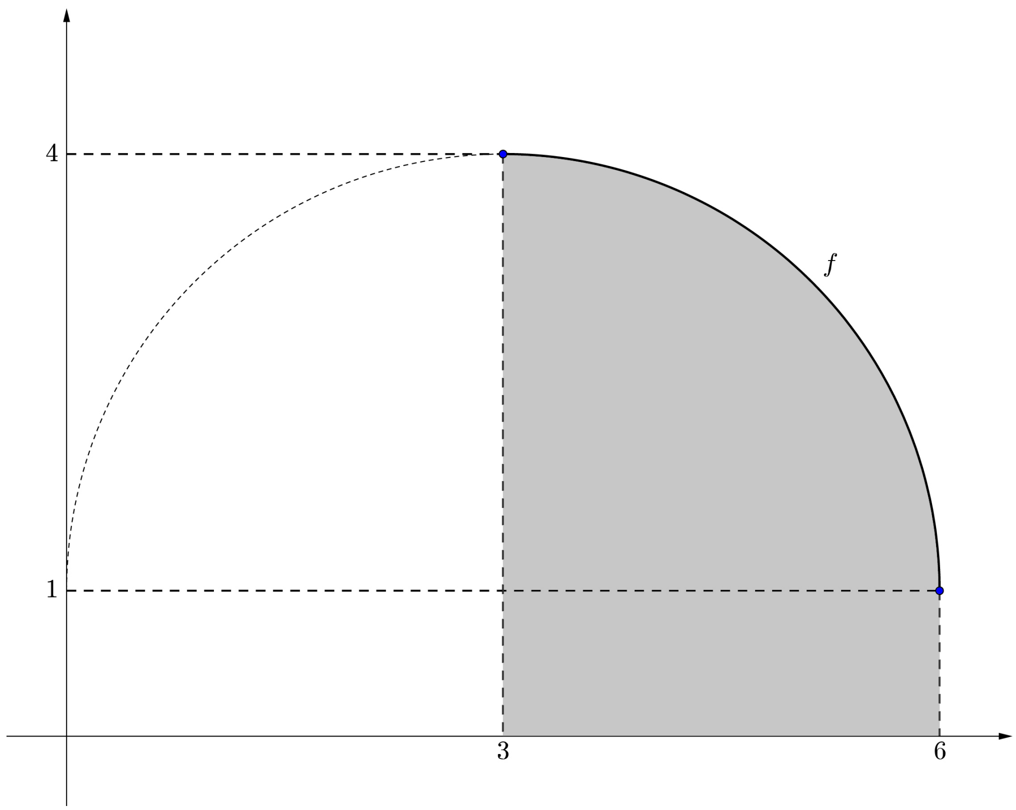
Questão 1. Seja f a função de variável x cujo gráfico é uma semicircunferência superior de raio igual a 3 com ponto máximo em $(3, 4)$.

Considere $\mathcal{R}$ a região dada por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x),\ \ 3 \leq x \leq 6\}$$

(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

Solução: Como o raio é igual a 3 e $(3, 4)$ é o ponto máximo da semicircunferência superior temos que centro da semicircunferência é o ponto $(3, 1)$ e o esboço da região $\mathcal{R}$ é dado por



(b) Determine a expressão $f(x)$.

Solução: Segue do item (a) que o centro da semicircunferência é o ponto $(3, 1)$ e raio é igual a 3. Então,

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3^2 \therefore (y-1)^2 = 9 - (x-3)^2 \therefore y = 1 \pm \sqrt{9 - (x-3)^2}$$

e, como o gráfico de f é a semicircunferência superior, concluímos que $f(x) = 1 + \sqrt{9 - (x-3)^2}$.

(c) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma integral na variável x.
Atenção: Neste item não é necessário calcular a integral.

Solução: Segue dos itens (a) e (b) que

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_3^6 f(x)\,dx = \int_3^6 1 + \sqrt{9 - (x-3)^2}\,dx$$

(d) Escreva a área da região $\mathcal{R}$ através de uma soma de duas integrais na variável y.
Atenção: Neste item não é necessário calcular as integrais.

Solução: Segue dos itens (a) e (b) que

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3^2 \therefore (x-3)^2 = 9-(y-1)^2 \therefore x = 3 \pm \sqrt{9-(y-1)^2}$$

e, como o gráfico é a semicircunferência à direita, obtemos $x = 3+\sqrt{9-(y-1)^2}$. Logo,

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 6-3\,dy + \int_1^4 3+\sqrt{9-(y-1)^2}-3\,dy = \int_0^1 3\,dy + \int_1^4 \sqrt{9-(y-1)^2}\,dy$$

(e) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ utilizando o método que preferir.

Solução: Segue do item (a) que

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \frac{1}{4}\pi(3)^2 + (6-3)(1) = \frac{9\pi}{4} + 3.$$

Questão 2. Calcule:

(a) $\displaystyle\int \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))\,dx$

Solução:Fazendo a substituição simples

$$u = \operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow du = \cos(x)\,dx,$$

obtemos

$$\int \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))\,dx \quad = \quad \int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + c = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)) + c$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Solução: Fazendo a substituição simples

$$\left\{\begin{array}{l} u = x+1 \therefore du = dx \\ x = 0 \therefore u = 1 \\ x = 1 \therefore u = 2 \end{array}\right. ,$$

obtemos $x = u-1$ e

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^2 (u-1)u^{-\frac{1}{2}}\,du = \int_1^2 u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\,du = \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Questão 3. Sejam f e g funções deriváveis, onde

$$f(x) = g\left(\sqrt{2x}\right) . \cos(\pi x)$$

(a) Sabendo que $g(2) = -1$ e $g'(2) = 2$, calcule $f(2)$ e $f'(2)$.

Solução: Primeiramente, note que

$$f'(x) = g'\left(\sqrt{2x}\right) \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2)\cos(\pi x) + g\left(\sqrt{2x}\right)(-\mathrm{sen}(\pi x))(\pi).$$

Então,

$$f(2) = g\left(\sqrt{2(2)}\right) . \cos(\pi(2)) = g(2)(1) = -1 \qquad \text{e}$$

$$f'(2) = g'\left(\sqrt{2(2)}\right) \frac{(2)\cos(\pi(2))}{2\sqrt{2(2)}} + g\left(\sqrt{2(2)}\right)(-\mathrm{sen}(\pi(2)))(\pi) = g'(2)\frac{(2)(1)}{4} + g(2)(0)(\pi) = 1.$$

(b) Sabendo que a função g não possui raízes reais, determine as raízes de f no intervalo $[-1, 2]$.

Solução: Como g não possui raízes reais, temos que

$$f(x) = 0 \therefore g\left(\sqrt{2x}\right) . \cos(\pi x) = 0 \overset{g\neq 0}{\therefore} \cos(\pi x) = 0 \therefore \pi x = \frac{\pi}{2} + k(\pi) \therefore x = \frac{1}{2} + k,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sabendo que $x \in [-1, 2]$, obtemos

$$f(x) = 0 \therefore x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$