MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P1 – 07 de abril de 2016

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$1,5$		
3^a	$2,0$		
Total	$5,0$		

Instruções Gerais:

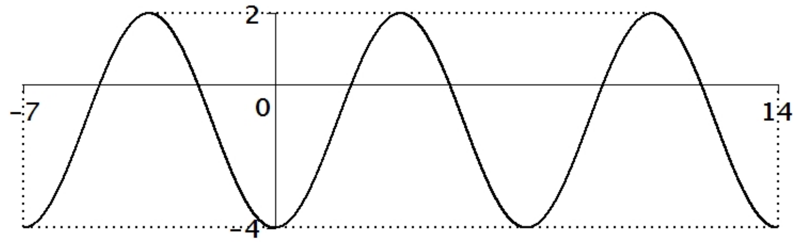
- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

A figura abaixo mostra o gráfico da função trigonométrica $f : [-7, 14] \to \mathbb{R}$



(a) Determine uma possível expressão para $f(x)$.

Solução:

Como a função f possui um mínimo local em $x = 0$, utilizaremos a expressão

$$f(x) = -A\cos(Bx) + C\,,$$

onde $A > 0$, $B > 0$. Pela figura acima verifica-se que o período de f é 7, que o gráfico de f está deslocado uma unidade para baixo e que $Im(f) = [-4, 2]$ (um intervalo de comprimento 6). Logo,

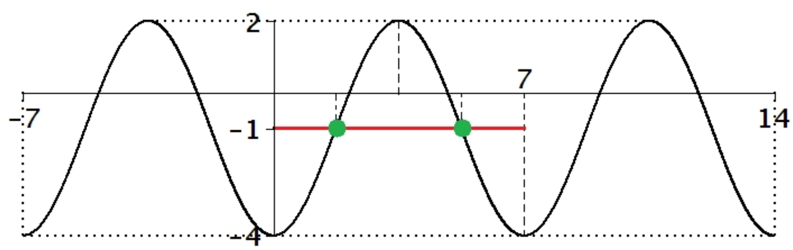
$$B = \frac{2\pi}{7}\,,\quad A = 3\,,\quad C = -1\,.$$

Assim, uma expressão para f é:

$$f(x) = -3\cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right) - 1\,.$$

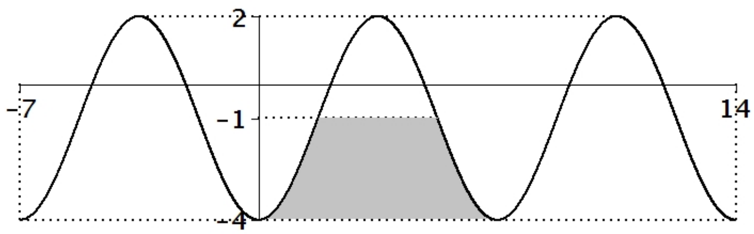
(b) Determine todos os valores de $x \in [0, 7]$ que satisfazem a equação $f(x) = -1$.

Solução:



Os valores são $x = \dfrac{7}{4}$ e $x = \dfrac{3 \cdot 7}{4} = \dfrac{21}{4}$.

(c) Na figura abaixo esboçamos novamente o gráfico da função f considerada nos itens anteriores.



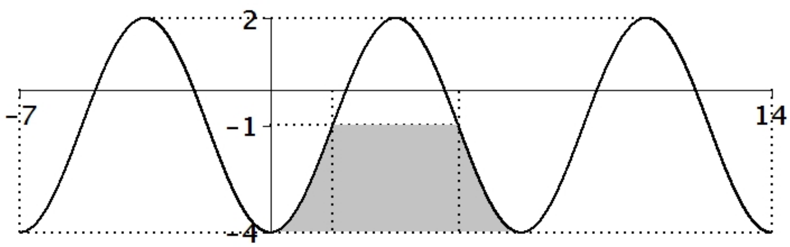
Seja $\mathcal{R}$ a região sombreada esboçada acima. Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma soma de integrais:

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_{a_1}^{a_2} g_1(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} g_2(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} g_3(x)\,dx \ ,$$

explicitando as expressões das funções g_1, g_2, g_3 e as constantes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

Atenção: Não é necessário calcular as integrais!

Solução:



Utilizando a divisão da região $\mathcal{R}$ proposta na figura acima, uma forma de escrever a área no formato pedido seria:

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{R}) &= \int_0^{\frac{7}{4}} f(x) - (-4)\,dx + \int_{\frac{7}{4}}^{\frac{21}{4}} -1 - (-4)\,dx + \int_{\frac{21}{4}}^{7} f(x) - (-4)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{4}} -3\cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right) + 3\ dx + \int_{\frac{7}{4}}^{\frac{21}{4}} 3\,dx + \int_{\frac{21}{4}}^{7} -3\cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right) + 3\ dx\end{aligned}$$

Questão 2

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

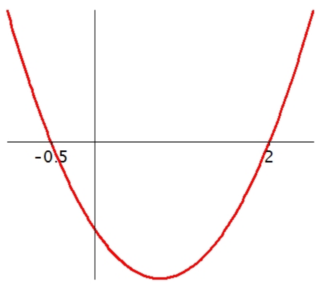
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} - x$$

(a) Determine, caso exista(m):

(a.1) O(s) intervalo(s) de crescimento e decrescimento de f.

Solução:

O gráfico da derivada de f, $f'(x) = x^2 - \dfrac{3x}{2} - 1$, é a parábola abaixo:



Logo,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

Conclui-se então que

$$\text{Intervalos de crescimento de } f : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \; , \; [2, +\infty)$$

$$\text{Intervalo de decrescimento de } f : \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$$

(a.2) O(s) ponto(s) de máximo local e de mínimo local de f.

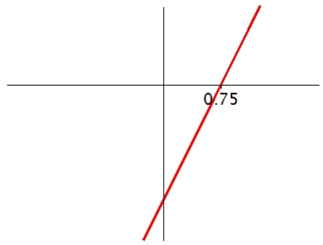
Solução:

Utilizando-se o item acima, temos que $x = -\dfrac{1}{2}$ é um máximo local e $x = 2$ é um mínimo local.

(a.3) O(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo.

Solução:

O gráfico da segunda derivada de f, $f''(x) = 2x - \dfrac{3}{2}$, é a reta abaixo:



Logo,

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$
$$f''(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$$

Conclui-se então que

$$\text{Intervalo de concavidade para cima : } \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$$
$$\text{Intervalo de concavidade para baixo : } \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$$

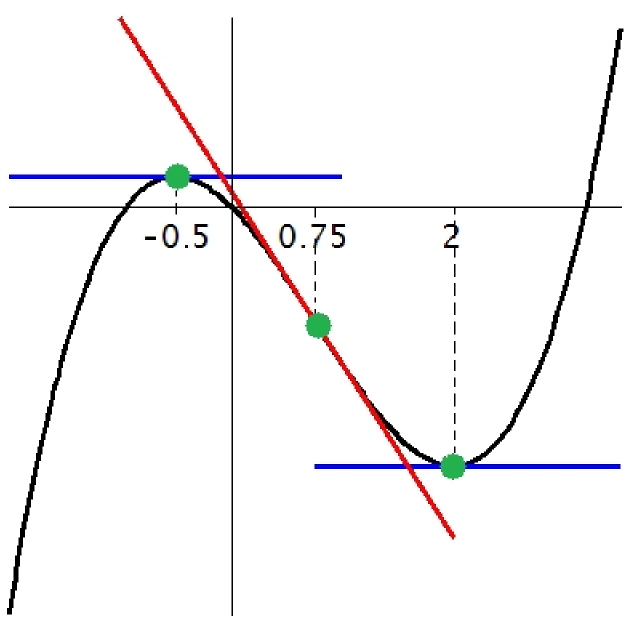
(a.4) O(s) ponto(s) de inflexão de f.

Solução:

Utilizando-se o item acima, temos que o ponto de inflexão é $\left(\frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{33}{32}\right)$.

(b) Faça um esboço do gráfico de f indicando explicitamente o(s) ponto(s) de máximo, de mínimo e de inflexão determinado(s) nos itens anteriores. Esboce também a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de f no(s) ponto(s) em que a derivada é zero e no(s) ponto(s) de inflexão.

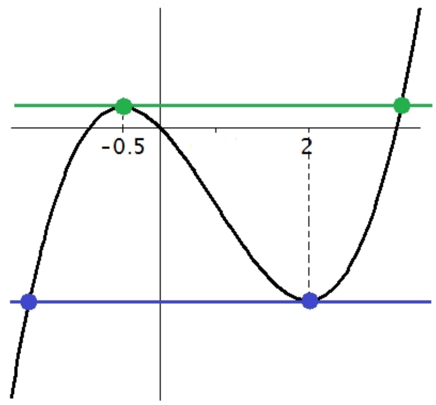
Solução:



(c) Determine os valores $k \in \mathbb{R}$ para que a equação $f(x) = k$ possua exatamente duas soluções.

Solução:

De acordo com o esboço do gráfico de f feito no item anterior, verificamos que existem apenas duas retas horizontais (de equação $y = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$) que interceptam o gráfico de f em exatamente dois pontos:



Assim, os dois valores de k possíveis são:

$$k = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{48} \quad \text{ou} \quad k = f(2) = -\frac{7}{3}\,.$$

(d) Existe alguma reta tangente ao gráfico de f com coeficiente angular (inclinação) menor do que -2? Justifique sua resposta.

Solução:

Não, pois a inclinação de qualquer reta tangente ao gráfico de f é dada pela derivada de f, mas a inequação

$$f'(x) = x^2 - \frac{3x}{2} - 1 < -2$$

não possui solução.

Outra forma de concluir isto é lembrar que o gráfico da derivada de f (esboçado no item (a.1)) é uma parábola cujo vértice possui ordenada

$$y_v = -\frac{25}{16} > -2\,.$$

Questão 3

Considere um triângulo isósceles com um vértice no ponto $A = (1, 1)$ e outros dois vértices, B e C, pertencentes à curva de equação $y = (x - 1)^2$. As seguintes condições devem ser satisfeitas:

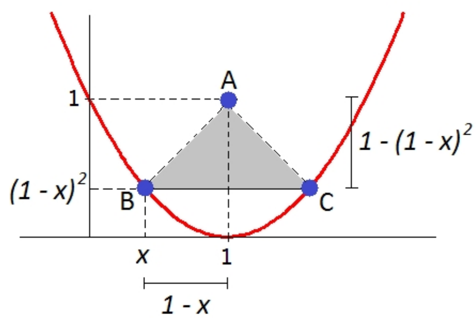
- O lado BC é paralelo ao eixo x.
- A ordenada (coordenada y) do vértice A é maior que as ordenadas dos vértices B e C.
- A abscissa (coordenada x) do vértice B é menor que a abscissa do vértice C.

Seja x a abscissa do vértice B.

(a) Determine o domínio e a expressão da função $A(x)$ que fornece a área do triângulo em termos de x.

Solução:

De acordo com a figura abaixo, devemos calcular a área de um triângulo de base $2(1 - x)$ e altura $1 - (1 - x)^2$:



Logo,

$$A(x) = \frac{2(1 - x)(1 - (1 - x)^2)}{2} = (1 - x)(1 - (1 - x)^2) = x^3 - 3x^2 + 2x \quad \text{e} \quad \mathrm{Dom}(A) = (0, 1)\,.$$

(b) Determine a área máxima do triângulo.

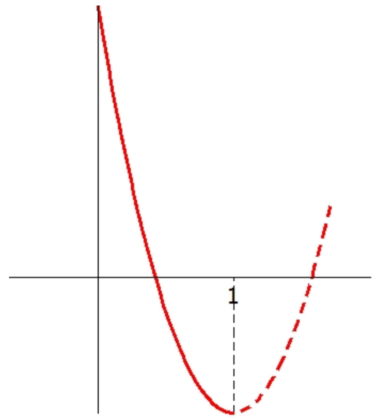
Solução:

Como o domínio não é fechado (apenas limitado), então os únicos candidatos a extremo local são os valores de $x \in (0, 1)$ que satisfazem a seguinte equação:

$$A'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0\,.$$

Logo, $x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (a outra raiz foi descartada por ser maior do que 1).

Segue abaixo o gráfico de $A'(x)$ no domínio $(0, 1)$: uma parábola de concavidade para cima que intercepta o eixo x em $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e em outro valor maior do que 1



Conclui-se então que:

$$A'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$
$$A'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

Logo,

$$\text{Intervalo de crescimento de } A: \ \left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$
$$\text{Intervalo de decrescimento de } A: \ \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

Ou seja, $x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ é um máximo local de A. A área máxima do triângulo é então dada por:

$$A\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\,.$$