MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P2 – 20 de maio de 2017

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,5$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

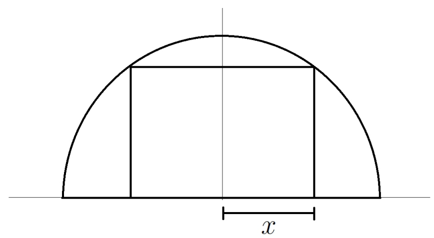
- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Considere um retângulo inscrito em uma semicircunferência de raio 2 e centro na origem. Seja x a medida indicada na figura abaixo:



(a) Determine o domínio e a expressão da função A que fornece a área do retângulo em termos da variável x.

A circunferência de centro na origem e raio 2 tem equação $x^2 + y^2 = 4$. Logo, a semicircunferência superior de centro na origem e raio 2 tem equação $y = \sqrt{4 - x^2}$. A área do retângulo pode então ser escrita como:

$$A(x) = \text{base} \,.\, \text{altura} = 2x \,.\, \sqrt{4 - x^2}\,, \quad \text{Dom}(A) = (0, 2)\,.$$

(b) Determine a área do retângulo de maior área possível que pode ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2 e centro na origem. *Obs.: Respostas sem justificativas não serão aceitas.*

Observe que

$$A'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \,.\, \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,.$$

Como $\text{Dom}(A) = (0, 2)$, o intervalo de crescimento de A é $(0, \sqrt{2}]$. Consequentemente, o intervalo de decrescimento é $[\sqrt{2}, 2)$. Logo, $x = \sqrt{2}$ é o máximo local de A, e a área do retângulo de maior área possível que pode ser inscrito em uma semicircunferência de raio 2 e centro na origem é $A(\sqrt{2}) = 4$.

Questão 2

Considere as funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \tan(x)$, ambas definidas no intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(a) Os gráficos das funções f e g possuem ponto de tangência? Se sim, determine as coordenadas do(s) ponto(s) de tangência e a(s) equação(ões) da(s) reta(s) tangente(s) compartilhada(s) pelos dois gráficos nesse(s) ponto(s).

Os gráficos de f e g são tangentes em $x = x_0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ se e somente se

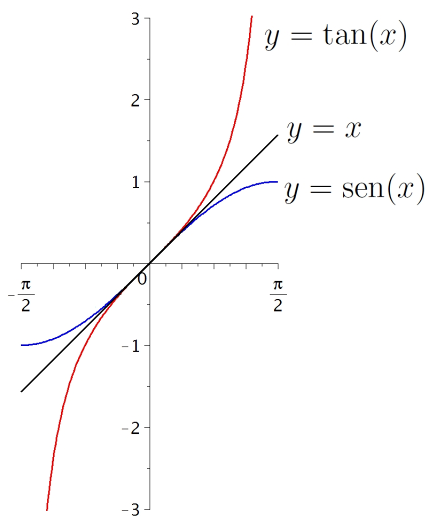
$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(x_0) = \tan(x_0) \\ \cos(x_0) = \sec^2(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(x_0) = \tan(x_0) \\ \cos(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2(x_0)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}(x_0) = \tan(x_0) \\ \cos^3(x_0) = 1 \end{cases}$$

Observe que a segunda equação é satisfeita se e somente se $x_0 = 0$, e este valor satisfaz também a primeira equação (pois $\text{sen}(0) = \tan(0) = 0$). Logo, os gráficos de f e g são tangentes no ponto $(0, 0)$.

Equação da reta tangente aos gráficos de f e g em $(0, 0)$:

$$y = f'(0)x + f(0) = g'(0)x + g(0) \Rightarrow y = x\,.$$

(b) Esboce abaixo os gráficos das funções f e g (indique ao lado de cada curva a sua respectiva equação). Caso tenha(m) sido encontrado(s) ponto(s) de tangência no item anterior, esboce também a(s) reta(s) tangente(s) aos gráficos das funções f e g no(s) ponto(s) de tangência.



(c.1) Mostre que $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$.

Dividindo os dois lados da identidade $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ por $\cos^2(x)$ temos que:

$$\frac{\text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)\,.$$

(c.2) Utilizando o item (c.1), calcule

$$\int x \tan^2(x)\, dx$$

.

$$\int x \tan^2(x)\, dx = \int x(-1 + \sec^2(x))\, dx = -\int x\, dx + \int x \sec^2(x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + \int x \sec^2(x)\, dx$$

Utilizando a Integração por Partes para calcular $\int x \sec^2(x)\, dx$: se $u = x$ e $dv = \sec^2(x)\, dx$, então $du = dx$ e $v = \tan(x)$. Logo,

$$\int x \tan^2(x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + \left[x \tan(x) - \int \tan(x)\, dx \right] = -\frac{x^2}{2} + x \tan(x) - \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx$$

Utilizando a Integração por Substituição Simples para calcular $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx$: se $w = \cos(x)$, então $dw = -\text{sen}(x)\, dx$. Logo,

$$\int x \tan^2(x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + x \tan(x) + \int \frac{1}{w}\, dw = -\frac{x^2}{2} + x \tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + c\,.$$

(d.1) Mostre que $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

Fazendo $x = y$ na identidade $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$, temos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \big(1 - \operatorname{sen}^2(x)\big) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

(d.2) Utilizando o item (d.1), calcule

$$\int x \operatorname{sen}^2(x)\, dx$$

.

$$\int x \operatorname{sen}^2(x)\, dx = \int x \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int x\, dx - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)\, dx$$

Utilizando a Integração por Partes para calcular $\int x\cos(2x)\, dx$: se $u = x$ e $dv = \cos(2x)\, dx$, então $du = dx$ e $v = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen}^2(x)\, dx &= \frac{1}{2}\int x\, dx - \frac{1}{2}\int x\cos(2x)\, dx \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x\operatorname{sen}(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\, dx\right] \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)}{8} + c
\end{aligned}$$

Questão 3

Considere a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^e}{e^x}.$$

(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, caso existam.

Obs.: Respostas sem justificativas não serão aceitas.

Como $f(x) = x^e e^{-x}$, segue que

$$f'(x) = ex^{e-1}e^{-x} + x^e e^{-x}(-1) = x^{e-1}e^{-x}(e - x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, e]\,,$$

pois $e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $x^{e-1} \geq 0$, já que $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$.

Analogamente, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [e, +\infty)$

Logo, o intervalo de crescimento de f é $[0, e]$, e o intervalo de decrescimento de f é $[e, +\infty)$.

(b) Determine o <u>valor máximo</u> e o <u>valor mínimo</u> da função f, caso existam.

Obs.: Respostas sem justificativas não serão aceitas.

Os candidatos a extremo local de f são $x = 0$ (extremo inicial do domínio) e $x = e$ (pois $f'(e) = 0$).

Como a função cresce em $[0, e]$, temos que $x = 0$ é um mínimo local de f.

Como a função cresce em $[0, e]$ e decresce em $[e, +\infty)$, temos que $x = e$ é um máximo local de f.

Além disso, embora o domínio de f não seja um intervalo fechado nos dois extremos, observe que $f(x) = x^e e^{-x} > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Concluímos então que:

Valor máximo de f: $f(e) = 1$

Valor mínimo de f: $f(0) = 0$

(c) Utilize os itens anteriores para determinar qual dos dois números é maior: π^e ou e^π.

Como o valor máximo de f é 1 e só é atingido quando $x = e$, então $f(x) < 1$, $\forall x \in [0, +\infty)$, $x \neq 1$. Em particular,

$$f(\pi) = \frac{\pi^e}{e^\pi} < 1 \Rightarrow \pi^e < e^\pi \,.$$