MAT1250 e 1260 – Álgebra Linear

P3 – 25 de novembro de 2022

(Versão I)

Nome Legível : ____________________

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$3,0$		
2^a	$3,0$		
3^a	$2,0$		
P3	$8,0$		
AVs	$1,0$		
T3	$2,0$		
G3	$10,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h45min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.
- Caso o aluno tenha perguntas ou observações a serem feitas ao professor, deverá descrevê-las na capa da prova.

Algumas definições:

- Uma matriz M é diagonalizável se existe uma matriz P invertível e uma matriz D diagonal tais que $M = PDP^{-1}$. Diagonalizar uma matriz M significa encontrar uma matriz P invertível, P^{-1} e uma matriz D diagonal tais que $M = PDP^{-1}$.
- Uma matriz quadrada P é dita ortogonal se $P^{-1} = P^T$.
- Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável se existe uma matriz P ortogonal e uma matriz D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$. Diagonalizar ortogonalmente uma matriz A significa encontrar uma matriz P ortogonal, P^{-1} e uma matriz D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.
- O núcleo, $\mathrm{Nuc}(T)$, de uma transformação linear T é conjunto dos vetores $\mathbf{u}$ do domínio tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
- A imagem, $\mathrm{Im}(T)$, de uma transformação linear T é conjunto dos vetores $\mathbf{w}$ do contra-domínio para os quais existe $\mathbf{v}$ no domínio tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
- Um conjunto de vetores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ é dito ortonormal se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ e se, $\forall i \neq j$, temos $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$.

Questão 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Para cada autovalor de A, determine os autoespaços associados.

(c) Se possível, diagonalize A ortogonalmente. Se não for possível, justifique brevemente.

(d) Se possível, determine os autovalores de A^3 e os autovetores associados. Se não for possível, justifique brevemente.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 = 9$$

$2-\lambda = +3$ $\qquad$ $2-\lambda = -3$

$2-3 = \lambda$ $\qquad$ $2+3 = \lambda$

$-1 = \lambda$ $\qquad$ $\lambda = 5$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$\dfrac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|}$ $\quad \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\dfrac{(1,1)}{\|(1,1)\|}$ $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

autoespaço

$2x + 3y = -x \;\therefore\; \cancel{3}y = -\cancel{3}x \;\therefore\; y = -x$

$3x + 2y = -y \;\therefore\; \cancel{3}x = -\cancel{3}y \;\therefore\; x = -y$

autoveto

$x(-1,1)$

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$2x + 3y = 5x \;\therefore\; 3y = 3x \;\therefore\; y = x$

$3x + 2y = 5y \;\therefore\; 3x = 3y \;\therefore\; x = y$

$x(1,1)$

Questão 2

Seja $\mathbf{w} = (1,0,1)$. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação dada por

$$T(x,y,z) = \underbrace{(x,y,z) \times \mathbf{w}} \to (1,0,1)$$

(ou seja, $T(x,y,z)$ é produto vetorial de (x,y,z) com $\mathbf{w}$).

(a) Calcule $T(0,1,0)$ e $T(3,0,3)$.

(b) Justifique a afirmação: T é uma transformação linear.

(c) Determine uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$.

(d) Determine uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

(e) Se possível, determine T^{-1}. Se não for possível, justifique brevemente.

inversível $\neq 0$

a) $T(0,1,0)$ e $w = (1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$i(1-0) \quad -j(0-0) \quad +k(0-1)$

$1 \quad 0 \quad -1 \quad \to (1,0,-1)$

$T(3,0,3)$ e $w(1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$i(0-0) \quad -j(3-3) \quad +k(0-0)$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad \to (0,0,0)$

c) $(x,y,z) \times (1,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} y & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} x & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$i(0-y) \quad -j(x-z) \quad +k(0-y)$

$(-y, \quad z-x, \quad -y)$

$-y = 0 \therefore y = 0$

$z - x = 0$

$z = x$

$\mathrm{Nuc}(T) = (x, 0, x)$

$\mathrm{Nuc}(T) = x(1,0,1)$

$(1,0,1)$ é uma base do núcleo

d) $(-y, z-x, -y)$

$\boxed{(0,-1,0) \quad (-1,0,-1)}$ / $(0,1,0)$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0(0)$

$0 \quad -1(0-0) \quad 0 = 0$

$\det = 0$ logo não é inversível

Questão 3

Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

(Lembre que: se a afirmação for verdadeira, apresente uma demonstração. Se a afirmação for falsa, exiba explicitamente um contraexemplo.)

(a) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, então $\{T(1,0), T(0,1)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(b) Se M é uma matriz ortogonal, então M é diagonalizável.

(c) (*Item extra valendo* $0,5$ *ponto*) Se A é uma matriz quadrada e A^T sua transposta, então $B = AA^T$ é simétrica.

(d) (*Item extra valendo* $0,5$ *ponto*) Se A é uma matriz quadrada e A^T sua transposta, então $B = AA^T$ é ortogonalmente diagonalizável.

MAT1250 e 1260 – Álgebra Linear

P3 – 25 de novembro de 2022

(Versão II)

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$3,0$		
2^a	$3,0$		
3^a	$2,0$		
P3	$8,0$		
AVs	$1,0$		
T3	$2,0$		
G3	$10,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h45min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.
- Caso o aluno tenha perguntas ou observações a serem feitas ao professor, deverá descrevê-las na capa da prova.

Algumas definições:

- Uma matriz M é diagonalizável se existe uma matriz P invertível e uma matriz D diagonal tais que $M = PDP^{-1}$. Diagonalizar uma matriz M significa encontrar uma matriz P invertível, P^{-1} e uma matriz D diagonal tais que $M = PDP^{-1}$.
- Uma matriz quadrada P é dita ortogonal se $P^{-1} = P^T$.
- Uma matriz A é ortogonalmente diagonalizável se existe uma matriz P ortogonal e uma matriz D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$. Diagonalizar ortogonalmente uma matriz A significa encontrar uma matriz P ortogonal, P^{-1} e uma matriz D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.
- O núcleo, $\text{Nuc}(T)$, de uma transformação linear T é conjunto dos vetores $\mathbf{u}$ do domínio tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
- A imagem, $\text{Im}(T)$, de uma transformação linear T é conjunto dos vetores $\mathbf{w}$ do contra-domínio para os quais existe $\mathbf{v}$ no domínio tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.
- Um conjunto de vetores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ é dito ortonormal se $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ e se, $\forall i \neq j$, temos $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$.

Questão 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Para cada autovalor de A, determine os autoespaços associados.

(c) Se possível, diagonalize A ortogonalmente. Se não for possível, justifique brevemente.

(d) Se possível, determine os autovalores de A^3 e os autovetores associados. Se não for possível, justifique brevemente.

Questão 2

Seja $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação dada por

$$T(x, y, z) = (x, y, z) \times \mathbf{w}$$

(ou seja, $T(x, y, z)$ é produto vetorial de (x, y, z) com $\mathbf{w}$).

(a) Calcule $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 5, 5)$.

(b) Justifique a afirmação: T é uma transformação linear.

(c) Determine uma base de $\mathrm{Nuc}(T)$.

(d) Determine uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

(e) Se possível, determine T^{-1}. Se não for possível, justifique brevemente.

Questão 3

Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

(Lembre que: se a afirmação for verdadeira, apresente uma demonstração. Se a afirmação for falsa, exiba explicitamente um contraexemplo.)

(a) Se M é uma matriz ortogonal, então M é diagonalizável.

(b) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, então $\{T(1,0), T(0,1)\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(c) (*Item extra valendo* $0,5$ *ponto*) Se A é uma matriz quadrada e A^T sua transposta, então $B = AA^T$ é simétrica.

(d) (*Item extra valendo* $0,5$ *ponto*) Se A é uma matriz quadrada e A^T sua transposta, então $B = AA^T$ é ortogonalmente diagonalizável.