Mat. Olímpica (MAT1050)

Questão 2 *(IMC 2024, Dia 2, P. 6)*

Gabriel Moreira

2024-08-17

Sumário

1. Questão 2

Enunciado:

"Prove que, para toda função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, existem $a < b < c \in \mathbb{Q}$ tais que
1. $f(b) \geq f(a)$
2. $f(b) \geq f(c)$"

Demonstração:

Suponha que exista $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ não satisfazendo essas condições. Ou seja, seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} &\neg(\exists a < b < c \in \mathbb{Q}, f(b) \geq f(a) \wedge f(b) \geq f(c)) \\ \Leftrightarrow\ &\forall a < b < c \in \mathbb{Q}, \neg(f(b) \geq f(a) \wedge f(b) \geq f(c)) \\ \Leftrightarrow\ &\forall a < b < c \in \mathbb{Q}, f(b) < f(a) \vee f(b) < f(c) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a existência de f leva a uma contradição.

Fixe $a < b < c \in \mathbb{Q}$ arbitrários. Temos que $f(b) < f(a) \vee f(b) < f(c)$.

A demonstração será dividida em duas etapas: caso 1, mostrar que $f(b) < f(c)$ leva a uma contradição; e caso 2, mostrar que $f(b) < f(a)$ também leva a uma contradição. Com essas duas demonstrações, teremos que não pode existir f, pois concluiríamos tanto que $f(b) < f(a) \vee f(b) < f(c)$ (pela definição de f) quanto que $\neg(f(b) < f(a) \vee f(b) < f(c))$ (pelas demonstrações dos casos 1 e 2), contradizendo essa propriedade para a, b, c, refutando a possibilidade de se definir f dessa forma.

1.1. Caso 1

Suponha que $f(b) < f(c)$.

Lema 1.1.1 Se $f(b) < f(c)$, $f(x)$ é estritamente crescente para $x \geq c$. Ou seja,

$$\forall x, y \in \{s \in \mathbb{Q} \mid s \geq c\}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Demonstração Tome $d \in \mathbb{Q}$ tal que $b < c < d$. Teremos $f(c) < f(b) \vee f(c) < f(d)$. Sabemos que vale $f(b) < f(c)$, logo $f(c) < f(b)$ é falso. Com isso, $f(c) < f(d)$. Logo, quando $x = c$ e $x < y$ para algum $y \in \mathbb{Q}$, temos $f(c) = f(x) < f(y)$.

Agora, para o caso $x \neq c$, fixe $x, y \in \mathbb{Q}$ tais que $c < x < y$. Isso implica, pela definição de f,

$$f(x) < f(c) \vee f(x) < f(y) \tag{1}$$

Além disso, note que $b < c < x$, logo

$$f(c) < f(b) \vee f(c) < f(x) \tag{2}$$

Sabemos que $f(b) < f(c)$, logo temos $f(c) < f(x)$ pela Equação 2. Com isso, pela Equação 1, deve valer que $f(x) < f(y)$. □

Lema 1.1.2 Se $f(b) < f(c)$, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $c < x < c + 1$ e $f(x) < f(c)$.

Demonstração Tome $d = c + 1 \in \mathbb{Q}$. Além disso, tome $p = f(c) \in \mathbb{Z}$ e $q = f(d) \in \mathbb{Z}$. Note que $d > c$, logo (pelo Lema 1.1.1) $f(d) > f(c)$, ou seja, $q > p$. Defina $\Delta = q - p > 0$. Note que $\Delta \geq 1$, pois q, p são inteiros. Defina, para $i \in \{1, 2, ..., \Delta + 1\}$,

$$m_i = d - \frac{i}{\Delta + 2} \tag{3}$$

Note que, para qualquer $i \in \{1, ..., \Delta + 1\}$, temos $0 < \frac{i}{\Delta+2} < 1$, logo

$$d - 1 = c < m_i < d \tag{4}$$

Com isso, pelo Lema 1.1.1,

$$\forall i \in \{1, ..., \Delta + 1\}, f(c) = p < f(m_i) < q = f(d) \tag{5}$$

Note ainda que $m_{i+1} - m_i = -\frac{i+1}{\Delta+2} + \frac{i}{\Delta+2} = -\frac{1}{\Delta+2} < 0$, logo

$$\forall i \leq \Delta, m_{i+1} < m_i \tag{6}$$

Isso implica, para qualquer $i \leq \Delta$, que (devido ao Lema 1.1.1)

$$f(m_{i+1}) < f(m_i) \tag{7}$$

Como $f(m_{i+1})$ e $f(m_i)$ são números inteiros, isso sugere que

$$f(m_i) - f(m_{i+1}) \geq 1 \tag{8}$$

Afirmação 1.1.3

$$\forall i \in \{1, ..., \Delta + 1\}, f(m_i) \leq q - i \tag{9}$$

Ideia: Se cada $f(m_{i+1})$ é pelo menos 1 unidade menor que $f(m_i)$, e se $f(m_1) < q \Rightarrow f(m_1) \leq q - 1$, então em $f(m_{i+1})$ teremos subtraído pelo menos i unidades de $f(m_1)$, obtendo $f(m_{i+1}) \leq q - 1 - i = q - (i + 1)$.

Demonstração Por indução nos valores de $i \in \{1, ..., \Delta + 1\}$.

1. Para m_1, sabemos, pela Equação 5, que $f(m_1) < q$. Como ambos são números inteiros, deve valer que $f(m_1) \leq q - 1$.
2. Suponha que vale para m_i, para algum $i \in \{1, ..., \Delta\}$. Ou seja, $f(m_i) \leq q - i$. Observe agora que $f(m_i) - f(m_{i+1}) \geq 1$ pela Equação 8. Ou seja, $f(m_i) \geq 1 + f(m_{i+1})$. Logo,

$$1 + f(m_{i+1}) \leq f(m_i) \leq q - i \tag{10}$$

Com isso,

$$f(m_{i+1}) \leq q - (i + 1) \tag{11}$$

Demonstrando o caso de $i + 1 \in \{2, ..., \Delta + 1\}$.

□

Usando a afirmação acima, temos que $f(m_{\Delta+1}) \leq q - \Delta - 1$. Mas $\Delta = q - p$, logo $q - \Delta = p$. Com isso, $f(m_{\Delta+1}) \leq p - 1 < p$. Logo, se tomarmos $x = m_{\Delta+1}$, observando que $c < x = m_{\Delta+1} < c + 1 = d$ pela Equação 4, teremos $f(m_{\Delta+1}) = f(x) < f(c) = p$. □

Teorema 1.1.4 A suposição $f(b) < f(c)$ (caso 1) leva a uma contradição.

Demonstração Essa suposição permite a constatação dos dois lemas acima. Pelo Lema 1.1.2, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $c < x < c + 1$ e $f(x) < f(c)$. Mas, pelo Lema 1.1.1, $f(x) > f(c)$, uma contradição. □

1.2. Caso 2

Como não pode valer que $f(b) < f(c)$, deve valer que $f(b) < f(a)$. Mostraremos que esse caso também é impossível de forma similar ao caso anterior.

Lema 1.2.5 Se $f(b) < f(a)$, $f(x)$ é estritamente decrescente para $x \leq a$. Ou seja,

$$\forall x, y \in \{s \in \mathbb{Q} \mid s \leq a\}, x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$$

Demonstração Sejam $x, y \in \{s \in \mathbb{Q} \mid s \leq a\}$ tais que $x < y$.

1. Se $y = a$, teremos $x < a < b$, logo $f(a) < f(x)$ ou $f(a) < f(b)$. Sabemos que $f(b) < f(a)$, logo deve valer que $f(a) = f(y) < f(x)$.
2. Se $y \neq a$, então $x < y < a$, logo $f(y) < f(x)$ ou $f(y) < f(a)$. Pelo caso anterior, sabemos que $y < a \Rightarrow f(a) < f(y)$, logo deve valer que $f(y) < f(x)$.

□

Lema 1.2.6 Se $f(b) < f(a)$, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a - 1 < x < a$ e $f(x) < f(a)$.

Demonstração Tome $d = a - 1 \in \mathbb{Q}$, $p = f(a) \in \mathbb{Z}$, $q = f(d) \in \mathbb{Z}$. Note, pelo Lema 1.2.5, que $d < a \Rightarrow f(a) < f(d) \Rightarrow p < q$. Assim, defina $\Delta = q - p \geq 1 > 0$. Além disso, defina, para $i \in \{1, 2, ..., \Delta + 1\}$,

$$m_i = d + \frac{i}{\Delta + 2} \tag{12}$$

Note que, para todo $i \in \{1, ..., \Delta + 1\}$, vale $0 < \frac{i}{\Delta+2} < 1$, logo

$$d < m_i < a = d + 1 \tag{13}$$

Pelo Lema 1.2.5, teremos então

$$f(a) = p < f(m_i) < q = f(d) \tag{14}$$

Observe ainda que $m_{i+1} - m_i = \frac{1}{\Delta+2} > 0$, logo $m_{i+1} > m_i$. Pelo Lema 1.2.5, isso sugere que $f(m_{i+1}) < f(m_i)$, ou seja (por serem inteiros)

$$f(m_i) - f(m_{i+1}) \geq 1 \tag{15}$$

Afirmação 1.2.7

$$\forall i \in \{1, ..., \Delta + 1\}, f(m_i) \leq q - i \tag{16}$$

Demonstração Por indução em i.

1. Se $i = 1$, temos, pela Equação 14, que $f(m_1) < q$, o que implica $f(m_1) \leq q - 1$, pois tanto $f(m_1)$ quanto q são inteiros.
2. Suponha que, para algum $i \in \{1, ..., \Delta\}$, vale $f(m_i) \leq q - i$. Note que, pela Equação 15, vale $f(m_i) - f(m_{i+1}) \geq 1 \Rightarrow f(m_i) \geq 1 + f(m_{i+1})$. Com isso,

$$1 + f(m_{i+1}) \leq f(m_i) \leq q - i \tag{17}$$

Logo,

$$f(m_{i+1}) \leq q - (i + 1) \tag{18}$$

Demonstrando o caso de $i + 1 \in \{2, ..., \Delta + 1\}$. □

Pela afirmação acima, vale que $f(m_{\Delta+1}) \leq q - \Delta - 1$. Mas $\Delta = q - p \Rightarrow q - \Delta = p$. Logo $f(m_{\Delta+1}) \leq p - 1 < p$. Com isso, se tomarmos $x = m_{\Delta+1}$, notando pela Equação 13 que $d = a - 1 < x = m_{\Delta+1} < a$, teremos $f(m_{\Delta+1}) = f(x) < f(a) = p$. □

Teorema 1.2.8 Não pode existir a função f.

Demonstração Sabe-se, pela definição de f, que $f(b) < f(a) \vee f(b) < f(c)$, pois $a < b < c$. Pelo Teorema 1.1.4, sabe-se que $\neg(f(b) < f(c))$, logo $f(b) < f(a)$. A partir disso, valem os lemas 1.2.5 e 1.2.6. Pelo Lema 1.2.6, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a - 1 < x < a$ e $f(x) < f(a)$. Porém, pelo Lema 1.2.5, como $x < a$, temos $f(a) < f(x)$, uma contradição. Com isso, é impossível satisfazer a propriedade definidora de f, pelo que não existe função definida tal como f. □

1.3. Conclusão

Como não existe função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ não satisfazendo as condições do enunciado, segue que, para qualquer função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, devem existir $a < b < c \in \mathbb{Q}$ tais que $f(b) \geq f(a)$ e $f(b) \geq f(c)$.