MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P2 – 24 de outubro de 2018

Nome Legível : Gabarito

Assinatura :

Matrícula : Turma :

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$2,0$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Por Substituição Simples:

$u = \sqrt{x}$

$\Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\Rightarrow 2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

logo $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{u}\,du$

$= 2e^{u} + c$

$= 2e^{\sqrt{x}} + c$ //

(b) $\int (2x-2)\ln(x)\,dx$

Por Partes:

$$\begin{cases} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = 2x - 2\,dx \Rightarrow v = x^2 - 2x \end{cases}$$

logo

$$\int (2x-2)\ln(x)\,dx = (x^2-2x)\ln(x) - \int \frac{x^2-2x}{x}\,dx$$

$$= (x^2-2x)\ln(x) - \int x - 2\,dx$$

$$= (x^2-2x)\ln(x) - \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad //$$

Questão 2

Considere a função $f(x) = \ln(x^3 - x)$.

(a) Determine o domínio de f.

Dom(f): $x^3 - x > 0$. Para estudar o sinal de $x^3 - x$ podemos esboçar a curva $y = x^3 - x$ ou fatorar a expressão como $x^3 - x = x(x^2 - 1)$:

		-1		0		1	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x^2 - 1$	$+$		$-$		$-$		$+$
$x^3 - x$	$-$		$+$		$-$		$+$

Logo

Dom$(f) = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

(b) Calcule $f'(x)$ (a primeira derivada de f).

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

(c) Mostre que, se restringirmos o domínio de f ao intervalo $(1, +\infty)$, então f é uma função inversível.

1º modo: Se $x > 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 1 > 0$ e $x^3 - x > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\Rightarrow f$ é estritamente crescente

$\Rightarrow f$ é inversível.

2º modo: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3} \notin (1, +\infty)$.

Ou seja, $f'(x) \neq 0, \forall x \in (1, +\infty)$, o que implica que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em todo o intervalo $(1, +\infty)$. Logo f é inversível em $(1, +\infty)$.

(d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(f(2), 2)$.
Dica: Não é necessário determinar $f^{-1}(x)$.

1° modo:

$$y = (f^{-1})'(f(2))(x - f(2)) + f^{-1}(f(2))$$

Observe que:

- $f(2) = \ln(6)$
- $f^{-1}(f(2)) = 2$
- $(f^{-1})'(f(2)) \overset{TFI}{=} \dfrac{1}{f'(f^{-1}(f(2)))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{6}{11}$

Logo a equação pedida é:

$$y = \frac{6}{11}(x - \ln(6)) + 2 \quad //$$

2° modo: eq. da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2))$:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{11}{6}(x-2) + \ln(6)$$

Isolando a variável x:

$$\frac{11}{6}(x-2) = y - \ln(6)$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = \frac{6}{11}(y - \ln(6))$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{6}{11}(y - \ln(6)) + 2$$

Trocando as variáveis:

$$y = \frac{6}{11}(x - \ln(6)) + 2$$

eq. da Reta Tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(f(2), 2)$.

Questão 3

Considere a função
$$f(x) = e^{-2x} + 1$$

(a) Determine o domínio e a expressão da função f^{-1} (a função inversa de f).

$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f) = (1, +\infty)$ //

expressão de f^{-1}:

$y = e^{-2x} + 1$

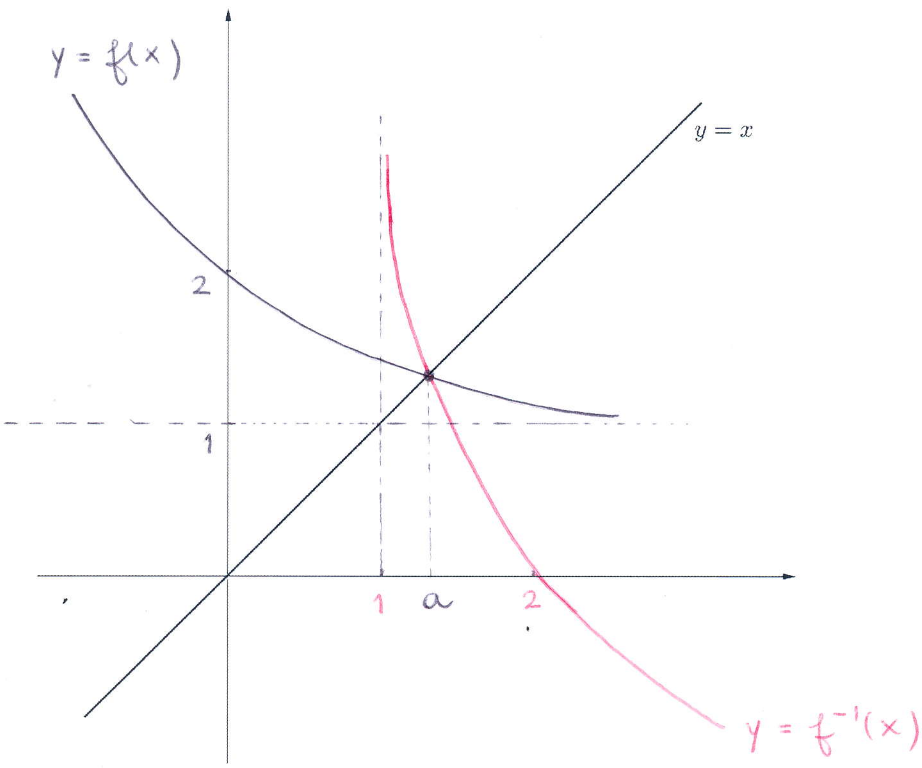
$\Rightarrow y - 1 = e^{-2x}$

$\Rightarrow \ln(y-1) = -2x$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \cdot \ln(y-1)$

logo $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \ln(x-1)$ //

(b) Esboce abaixo os gráficos das funções f e f^{-1}.



(c) Considere a região plana definida abaixo:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq x\,,\ y \leq f^{-1}(x)\}$$

(c.1) Seja $x = a$ a abscissa do <u>único</u> ponto de interseção entre a reta $y = x$ e os gráficos das funções f e f^{-1}.
Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma soma de integrais na variável x.

$$A(R) = \int_0^a x \, dx + \int_a^2 f^{-1}(x)\, dx$$

(c.2) Calcule a área da região $\mathcal{R}$ em termos de a.

1° modo:

$$A(R) = \int_0^a x \, dx + \int_a^2 -\frac{1}{2}\ln(x-1)\, dx$$

Observe que: $\int \ln(x-1)\,dx$. Por Partes: $u = \ln(x-1)$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{x-1}dx$$

e $dv = dx \Rightarrow v = x$

Logo $\int \ln(x-1)\,dx = x\ln(x-1) - \underbrace{\int \frac{x}{x-1}dx}$

substituição simples:
$m = x - 1 \Rightarrow dm = dx$
e $x = m + 1$

$$= x\ln(x-1) - \int \frac{m+1}{m}\, dm$$

$$= x\ln(x-1) - \int 1 + \frac{1}{m}\, dm$$

$$= x\ln(x-1) - m - \ln(|m|) + c$$

$$= x \ln(x-1) - (x-1) - \ln(|x-1|) + c.$$

Logo

$$A(R) = \int_0^a x \, dx - \frac{1}{2} \int_a^2 \ln(x-1) \, dx$$

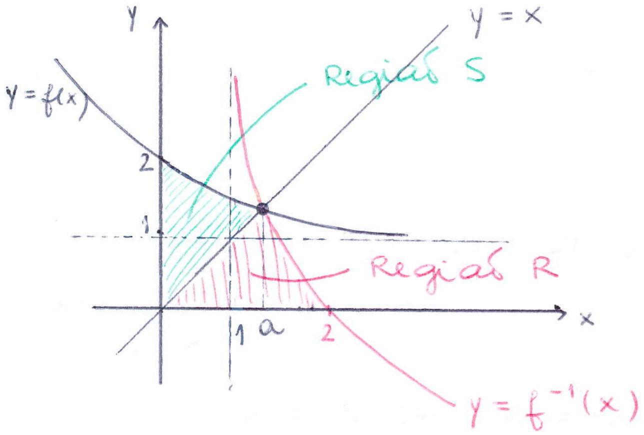
$$= \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{a} - \frac{1}{2} \Big(x \ln(x-1) - (x-1) - \ln|x-1| \Big) \Big|_{x=a}^{2}$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \Big(-1 - a\ln(a-1) + a - 1 + \ln(\underbrace{|a-1|}_{\text{Como}}) \Big)$$

Como $a > 1 \Rightarrow a - 1 > 0$
$\Rightarrow |a-1| = a-1$

$$= \frac{a^2}{2} + 1 + \frac{a}{2} + \frac{(a-1)}{2} \ln(a-1) \quad //$$

2° modo



Observe que

$$A(R) = A(S) = \int_0^a f(x) - x \, dx$$

$$= \int_0^a e^{-2x} + 1 - x \, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{a}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} e^{-2a} + a - \frac{a^2}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2a} + a - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \quad //$$