MAT1161 – Cálculo de Uma Variável

P2 – 09 de novembro de 2016

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,5$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{5e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\ dx = I$

Solução:

Por Substituição simples:

Seja $u = \dfrac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad du = -\dfrac{2}{x^3}\, dx \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{x^3}\, dx = -\dfrac{1}{2}\, du\,.$

Logo, $I = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int 5e^u\ du \;=\; -\dfrac{5e^u}{2} + c \;=\; -\dfrac{5}{2}\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + c\,.$

(b) $\displaystyle\int x^2 e^x\ dx = I$

Solução:

Por Partes:

Sejam $u = x^2$ e $dv = e^x dx \quad\Rightarrow\quad du = 2x\, dx$ e $v = e^x\,.$

Logo, $I = x^2e^x - 2\displaystyle\int xe^x\ dx\,.$

Utilizando a técnica de integração por partes novamente:

Sejam $\tilde{u} = x$ e $d\tilde{v} = e^x dx \quad\Rightarrow\quad d\tilde{u} = dx$ e $\tilde{v} = e^x\,.$

Logo, $I = x^2e^x - 2\left[xe^x - \displaystyle\int e^x\ dx\right] \;=\; x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c\,.$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{8x}+1}\,dx = I$

Solução:

Por Substituição simples:

Seja $u = e^{4x} \;\Rightarrow\; du = 4e^{4x}\,dx \;\Rightarrow\; e^{4x}\,dx = \dfrac{1}{4}\,du\,.$

Logo, $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}\,du \;=\; \frac{\arctan(u)}{4} + c \;=\; \frac{\arctan\left(e^{4x}\right)}{4} + c\,.$

(d) $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx = I$

Solução:

Por Partes:

Sejam $u = \arctan(x)$ e $dv = dx \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$ e $v = x\,.$

Logo, $I = x\arctan(x) - \displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx\,.$

Utilizando Substituição simples:

Seja $w = 1+x^2 \;\Rightarrow dw = 2x\,dx \;\Rightarrow x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dw\,.$

Logo,

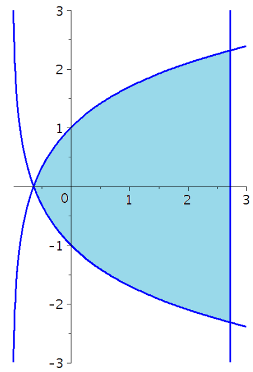
$$\begin{aligned} I &= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,dw\right] \\ &= x\arctan(x) - \frac{\ln(w)}{2} + c \\ &= x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c\,. \end{aligned}$$

Questão 2

Considere as funções $f(x) = 1 + \ln(x+1)$ e $g(x) = -1 - \ln(x+1)$.

(a) Esboce a região plana $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq e\,,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

Solução:



(b) Calcule a área da região plana $\mathcal{R}$.

Solução:

Calculando a abscissa do ponto de interseção entre as curvas $y = 1 + \ln(x+1)$ e $y = -1 - \ln(x+1)$:

$$\begin{aligned} & 1 + \ln(x+1) = -1 - \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x+1) = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x + 1 = \frac{1}{e} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{1-e}{e} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\mathcal{R}) &= \int_{\frac{1-e}{e}}^{e} (1 + \ln(x+1)) - (-1 - \ln(x+1))\, dx \\ &= 2\int_{\frac{1-e}{e}}^{e} 1 + \ln(x+1)\, dx \\ &= 2x\Big|_{\frac{1-e}{e}}^{e} + 2\int_{\frac{1-e}{e}}^{e} \ln(x+1)\, dx\,. \end{aligned}$$

Calculando separadamente a integral indefinida $I = \int \ln(x+1)\ dx$:

Substituição simples: seja $w = x+1 \ \Rightarrow\ dw = dx$. Logo, $I = \int \ln(w)\ dw\,$.

Partes: sejam $u = \ln(w)$ e $dv = dx \ \Rightarrow\ du = \dfrac{1}{w}\,dw$ e $v = w$. Logo,

$$I = w\ln(w) - \int \frac{w}{w}\ dw \ = \ w\ln(w) - \int 1\ dw \ = \ w\ln(w) - w + c \ = \ (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + c\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathcal{R}) &= \left[2x + 2(x+1)\ln(x+1) - 2(x+1)\right]\Big|_{\frac{1-e}{e}}^{e} \\
&= \left[2(x+1)\ln(x+1) - 2\right]\Big|_{\frac{1-e}{e}}^{e} \\
&= \left[2(e+1)\ln(e+1) - 2\right] - \left[2\,.\,\frac{1}{e}\,.\,\ln\left(\frac{1}{e}\right) - 2\right] \\
&= 2(e+1)\ln(e+1) + \frac{2}{e}\,.
\end{aligned}$$

(c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

Solução:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \;=\; \frac{1}{0+1}(x-0) + (1 + \ln(0+1)) \;=\; x + 1\,.$$

Logo, a equação da reta tangente é $y = x + 1$.

(d) Dê a fórmula que expressa, segundo o Método de Newton, a $(n+1)$-ésima aproximação, x_{n+1}, em função da n-ésima aproximação, x_n, da raiz de f.

Solução:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \;=\; x_n - \frac{1 + \ln(x_n+1)}{\frac{1}{x_n+1}} \;=\; -1 - (x_n+1)\ln(x_n+1)\,.$$

(e) Explique por que não podemos usar $x = 0$ como condição inicial para obter, pelo Método de Newton, aproximações da raiz de f.

Solução:

Se $x_1 = 0$, então pelo item (c) temos que $x_2 = -1 - (0+1)\ln(0+1) = -1$. Entretanto, $x = -1$ não pertence ao domínio de f $(\mathrm{Dom}(f) = (-1, +\infty))$.

Questão 3

Considere a função $f(x) = 3 + \operatorname{sen}(3x)$.

(a) Considere como domínio de f o maior intervalo possível para que f seja inversível e para que o gráfico de f^{-1} (a função inversa de f) passe pelo ponto $P = \left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Nestas condições, determine o domínio de f e também o de f^{-1}, e determine uma expressão para $f^{-1}(x)$.

Solução:

Sabendo que os gráficos de f e f^{-1} devem ser simétricos com relação à reta $y = x$, se o ponto $P = \left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, então o ponto $Q = \left(\dfrac{\pi}{3}, 3\right)$ pertence ao gráfico de f. Ou seja, $\operatorname{Dom}(f)$ deve ser um intervalo que contenha $x = \dfrac{\pi}{3}$ no qual f seja estritamente crescente ou decrescente.

Observe que:

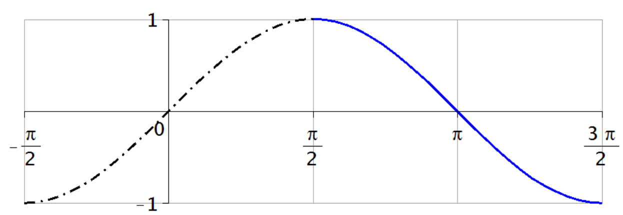
$$f'(x) = 3\cos(3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{6}\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Como $\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}$, então $\operatorname{Dom}(f) = \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Além disso, $\operatorname{Im}(f) = [2, 4] = \operatorname{Dom}(f^{-1})$.

Para determinar a expressão de f^{-1}:

$$y = 3 + \operatorname{sen}(3x) \quad \Leftrightarrow \quad y - 3 = \operatorname{sen}(3x) \tag{1}$$

Para isolar a variável x, devemos aplicar aos dois lados da equação (1) a função inversa de $\operatorname{sen}(3x)$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Para determiná-la, considere $\theta = 3x$ (logo, $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$). Abaixo esboçamos a curva $y = \operatorname{sen}(\theta)$:



- Se $g(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, então $g^{-1}(\theta) = \operatorname{arcsen}(\theta)$.
- A curva em azul ($\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$) pode ser obtida por uma reflexão da curva tracejada com relação ao eixo vertical seguida de um deslocamento de π unidades para a direita.
- Conclui-se que se $g(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, então $g^{-1}(\theta) = \pi - \operatorname{arcsen}(\theta)$ (reflexão da curva $y = \operatorname{arcsen}(\theta)$ com relação ao eixo horizontal seguida de deslocamento de π unidades para cima)

Assim, voltando à equação (1):

$$\begin{aligned} y = 3 + \operatorname{sen}(3x) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 3 = \operatorname{sen}(3x) \\ &\Leftrightarrow \quad \pi - \operatorname{arcsen}(y-3) = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(y-3)}{3} \end{aligned}$$

E então,

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi - \operatorname{arcsen}(x-3)}{3}\,.$$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto P.

Solução:

$$y = \left(f^{-1}\right)'(3)\,(x-3) + f^{-1}(3)\,.$$

Temos que $f^{-1}(3) = \dfrac{\pi - \operatorname{arcsen}(0)}{3} = \dfrac{\pi}{3}\,.$

Pelo Teorema da Função Inversa,

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{3\,\cos(\pi)} = -\frac{1}{3}\,.$$

Logo, a equação pedida é:

$$y = -\frac{1}{3}(x-3) + \frac{\pi}{3}\,.$$