MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P3 – 06 de dezembro de 2017

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,5$		

T3 (2,0)	P3 Maple (3,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx$

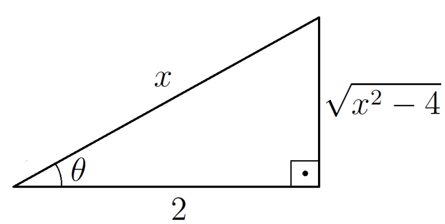
Solução:

Utilizando a substituição trigonométrica $x = 2\sec(\theta)$, temos que $dx = 2\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx &= \int \frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{4\sec^2(\theta)\sqrt{4\sec^2(\theta)-4}}\,d\theta \\
&= \int \frac{2\sec(\theta)\tan(\theta)}{4\sec^2(\theta)2\tan(\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sec(\theta)}\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \cos(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{4} + c
\end{aligned}$$

Como $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} = \dfrac{x}{2}$, podemos usar o triângulo abaixo para determinar $\operatorname{sen}(\theta)$:



Logo,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{4} + c = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + c$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \log_3(x)\ dx$

Solução:

Como o domínio da função $f(x) = \log_3(x)$ é o intervalo $(0, +\infty)$, a integral acima é uma integral imprópria:

$$\int_0^1 \log_3(x)\ dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \log_3(x)\ dx$$

Calculando a integral indefinida por partes:

$$\begin{cases} u = \log_3(x) & \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x\ln(3)}\,dx \\ dv = dx & \Rightarrow \quad v = x \end{cases}$$

Logo,

$$\int \log_3(x)\ dx = x\log_3(x) - \int \frac{x}{x\ln(3)}\,dx = x\log_3(x) - \frac{x}{\ln(3)} + c$$

Voltando à integral inicial:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log_3(x)\ dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \log_3(x)\ dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[x\log_3(x) - \frac{x}{\ln(3)} \right]\Bigg|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{\ln(3)} - t\log_3(t) + \frac{t}{\ln(3)} \right] \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{t\to 0^+} t\log_3(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log_3(t)}{\frac{1}{t}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t\ln(3)}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{t}{\ln(3)} = 0$$

Assim,

$$\int_0^1 \log_3(x)\ dx = \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{1}{\ln(3)} - t\log_3(t) + \frac{t}{\ln(3)} \right] = -\frac{1}{\ln(3)} - 0 + 0 = -\frac{1}{\ln(3)}$$

Questão 2

Considere a função f definida por

$$f(x) = 2x \,.\, e^{-1/x}$$

(a) Determine o domínio da função f.

Solução:

$$x \neq 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

(b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de f, caso existam.

Solução:

$$f'(x) = 2e^{-1/x} + 2xe^{-1/x} \,.\, \frac{1}{x^2} = 2e^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2e^{-1/x}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Estudo de sinal:

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < +\infty$
$2e^{-1/x}$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Logo, os intervalos de crescimento são $(-\infty, -1]$ e $(0, +\infty)$, e o intervalo de decrescimento é $[-1, 0)$.

(c) Determine as equações das retas assíntotas horizontais do gráfico de f, caso existam.

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 2x\,.\,e^{-1/x} &= +\infty\\ \lim_{x\to-\infty} 2x\,.\,e^{-1/x} &= -\infty\end{aligned}$$

Logo, não existem assíntotas horizontais.

(d) Determine as equações das retas assíntotas verticais do gráfico de f, caso existam.

Solução:

Como $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, vamos calcular o limite de f quando x se aproxima de 0 pela esquerda e pela direita:

$$\lim_{x\to0^+} 2x\,.\,e^{-1/x} = 0\,.\,0 = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} 2x\,.\,e^{-1/x} = \lim_{x\to0^-} \frac{2e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to0^-} \frac{2e^{-1/x}\,.\,\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^-} -2e^{-1/x} = -\infty$$

Logo, $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

(e) Determine as equações das retas assíntotas oblíquas do gráfico de f, caso existam.

Solução: Observe que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\,.\,e^{-1/x}}{x} = 2\,.\,1 = 2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} 2x\,e^{-1/x} - 2x &= \lim_{x\to+\infty} 2x\left(e^{-1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(e^{-1/x}-1\right)}{\frac{1}{x}} \\ &\overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{-1/x}\,.\,\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} -2e^{-1/x} = -2 \end{aligned}$$

Logo, $y = 2x - 2$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

Analogamente,

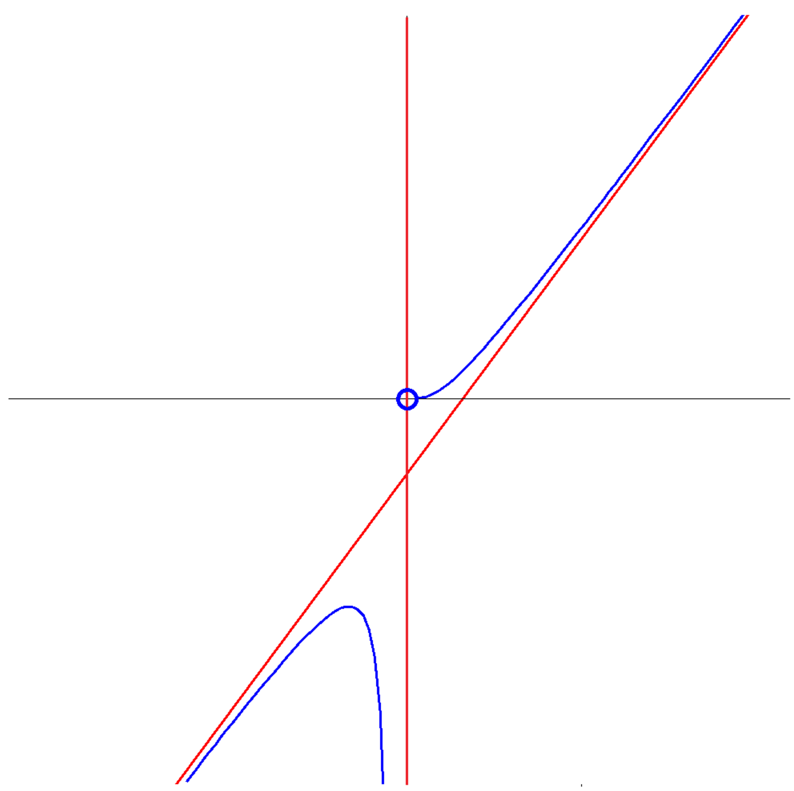
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x\,.\,e^{-1/x}}{x} = 2\,.\,1 = 2$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} 2x\,e^{-1/x} - 2x &= \lim_{x\to+\infty} 2x\left(e^{-1/x}-1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\left(e^{-1/x}-1\right)}{\frac{1}{x}} \\ &\overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-1/x}\,.\,\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -2e^{-1/x} = -2 \end{aligned}$$

Obtemos então novamente que $y = 2x - 2$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

(f) Sabendo que no intervalo $(-\infty, 0)$ o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo, e que no intervalo $(0, +\infty)$ o gráfico de f tem concavidade voltada para cima, utilize as informações obtidas nos itens anteriores para esboçar o gráfico de f e suas retas assíntotas, caso existam.



Questão 3

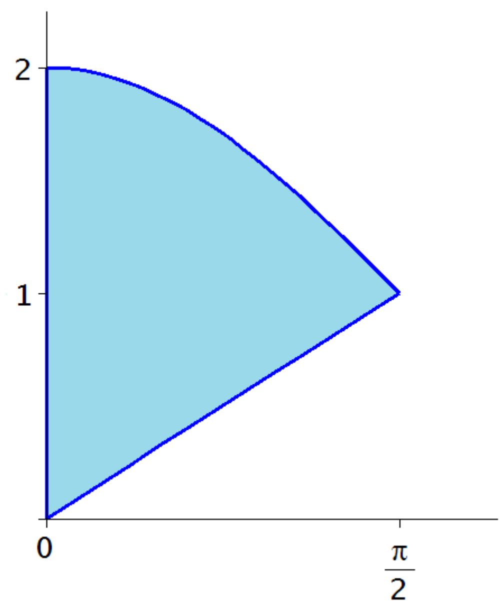
Considere a região plana $\mathcal{R}$ definida por:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{2x}{\pi} \leq y \leq 1 + \cos(x) \right\}$$

Seja $\mathcal{S}$ o sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

(a) Esboce abaixo a região plana $\mathcal{R}$.

Solução:

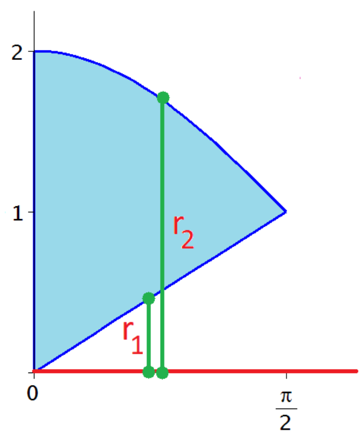


(b) Utilizando o método que preferir, <u>escreva</u> o volume de $\mathcal{S}$ como uma integral ou como uma soma de integrais.
Obs.: Neste item não é necessário calcular o volume.

Solução: Pelo Método de Discos,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(x)\, dx\,,$$

onde $A(x)$ é a área do anel perpendicular ao eixo de rotação que possui raio interno $r_1 = \dfrac{2x}{\pi}$ e raio externo $r_2 = 1 + \cos(x)$:



Logo,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left((1+\cos(x))^2 - \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2 \right) dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(1 + 2\cos(x) + \cos^2(x) - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) dx$$

(c) <u>Calcule</u> o volume de $\mathcal{S}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos(x) + \cos^2(x) - \frac{4x^2}{\pi^2}\, dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos(x) + \frac{1+\cos(2x)}{2} - \frac{4x^2}{\pi^2}\, dx \\
&= \pi \left(x + 2\,\mathrm{sen}(x) + \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi^2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi \left(\left(\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{6} \right) - (0+0+0+0-0) \right) \\
&= 2\pi + \frac{7\pi^2}{12}
\end{aligned}$$