PUC RIO

MAT1161/MAT1181
Cálculo de Uma Variável
P2 – 23 de maio de 2019

Nome Legível : Gabarito

Assinatura : ______

Matrícula : ______ Turma : ______

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$2,0$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int x \sec^2(x)\, dx$

Partes: $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = sec^2(x)\, dx \Rightarrow v = \tan(x)$

$\| $

$x\tan(x) - \int \tan(x)\, dx = x\tan(x) - \underbrace{\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\, dx}$

Substituição simples:

$m = \cos(x)$

$\Rightarrow dm = -sen(x)\, dx$

$= x\tan(x) + \int \frac{1}{m}\, dm$

$= x\tan(x) + \ln(|m|) + c$

$= x\tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + c$ //

(b) $\int \ln(x-1)\, dx$

Substituição simples:

$m = x - 1 \Rightarrow dm = dx$

$\|$

$\int \ln(m)\, dm$

Partes:

$u = \ln(m) \Rightarrow du = \frac{1}{m}\, dm$

$\|$

$dv = dm \Rightarrow v = m$

$m\ln(m) - \int \cancel{m} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}\, dm$

$= m\ln(m) - m + c$

$= (x-1)\ln(x-1) - (x-1) + c$ //

Questão 2

Considere a função

$$f(x) = x^2 - x\,,$$

cujo domínio é o maior intervalo possível para que f seja inversível e para que o ponto $P = (0, 1)$ pertença ao gráfico de f^{-1} (a função inversa de f).

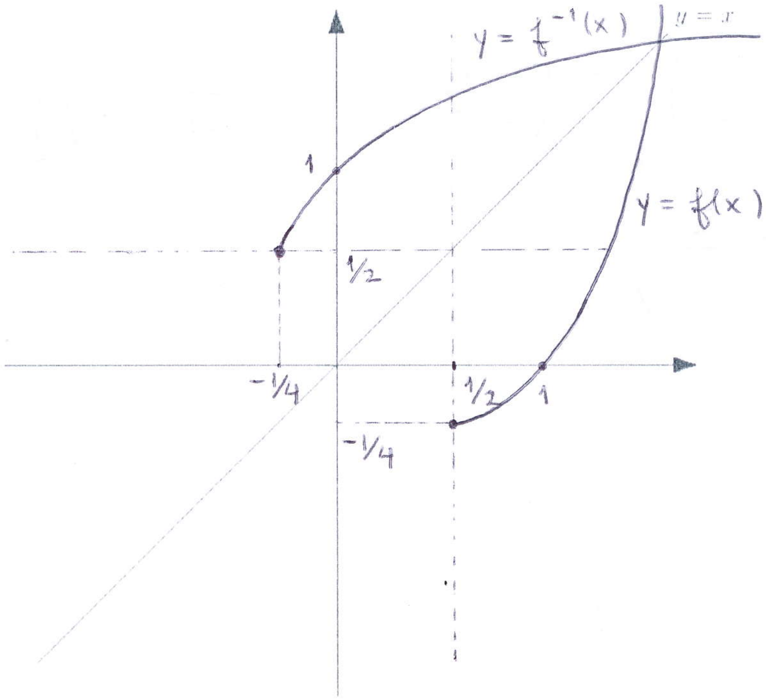
(a) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}.

$y = x^2 - x$ é uma parábola com $x_v = \frac{1}{2}$, logo $f(x) = x^2 - x$ é inversível se $Dom(f) = (-\infty, \frac{1}{2})$ $\underline{\underline{ou}}$ $Dom(f) = (\frac{1}{2}, +\infty)$. Como $P = (0,1) \in graf(f^{-1})$, temos que $Q = (1, 0) \in graf(f)$. Ou seja, $x = 1$ deve pertencer ao domínio de f. Logo

$$Dom(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = Im(f^{-1})$$

$$Im(f) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), +\infty\right) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) = Dom(f^{-1}).$$

(b) Esboce os gráficos das funções f e f^{-1} em seus respectivos domínios.



(c) Considere a região plana

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\right\}.$$

Escreva a área de $\mathcal{R}$ como uma soma de integrais na variável x.

• Interseção entre os gráficos de f e f^{-1} e a reta $y = x$:

$x^2 - x = x \iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0, 2$.

$$A(R) = \int_{1/2}^{1} f^{-1}(x)\,dx + \int_{1}^{2} f^{-1}(x) - f(x)\,dx$$

(d) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

expressão de f^{-1}:

$y = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-y)}}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$ como $\mathrm{Im}(f^{-1}) = [1/2, +\infty)$, segue que

$f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}$. Logo

$$A(R) = \int_{1/2}^{1} \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} - x^2 + x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} 1 + \sqrt{1+4x}\,dx + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=1}^{2} = \frac{1}{2}.x\Big|_{x=1/2}^{2} + \frac{1}{8}\int_{3}^{9}\sqrt{u}\,du + \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$u = 1 + 4x$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2}\Big|_{u=3}^{9} - \frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(9 - \sqrt{3}) - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{13}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad //$$

Questão 3

Considere a função

$$f(x) = \ln(2x - 1).$$

(a) Determine o domínio da função f.

$2x - 1 > 0 \iff x > 1/2$

logo $\mathrm{Dom}(f) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2x-1} \cdot 2 \Rightarrow f'(2) = \dfrac{2}{3}$

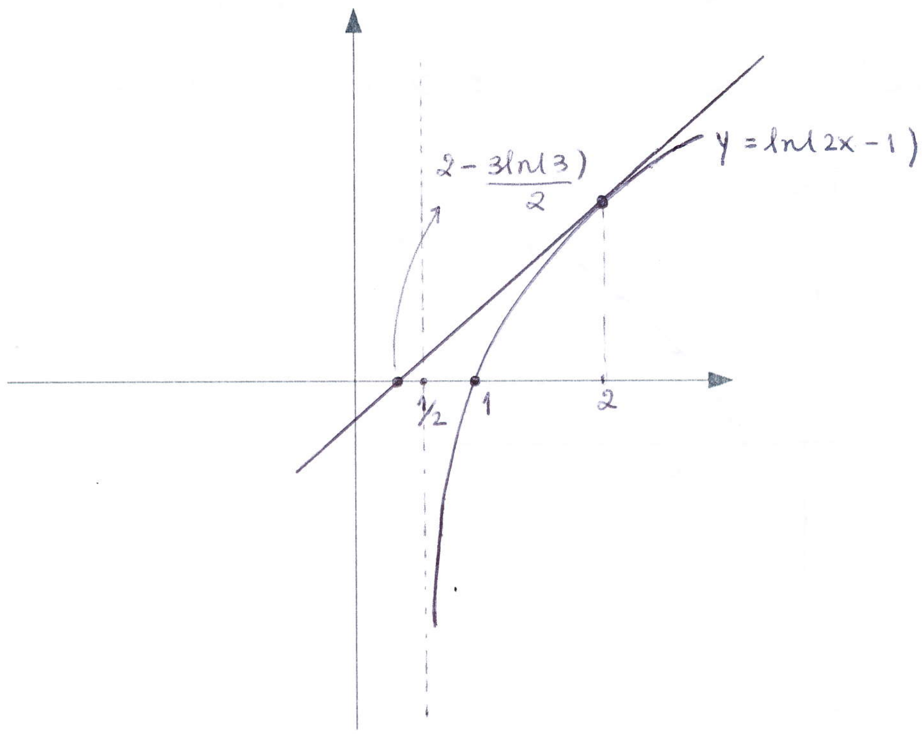
$f(2) = \ln(3)$

logo $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x-2) + \ln(3)$

$\Rightarrow y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + \ln(3)$ //

(c) Esboce abaixo o gráfico de f e a reta tangente determinada no item (b). Indique em seu desenho as abscissas dos pontos de interseção da reta e do gráfico de f com o eixo x.



(d) Explique por que não podemos utilizar $x = 2$ como condição inicial para obter, pelo Método de Newton, aproximações da raiz de f.

Pelo Método de Newton, se $x_0 = 2$, então

x_1 = interseção da reta tangente ao gráfico de f em $x_0 = 2$ com o eixo x

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 - \frac{3}{2}\ln(3).$$

Observe, no entanto, que $\underline{x_1 \notin \mathrm{Dom}(f)}$.

De fato, $\quad x_1 = 2 - \frac{3}{2}\ln(3) < \frac{1}{2}$

$$\iff \quad 4 - 3\ln(3) < 1$$

$$\iff \quad 3\ln(3) > 3$$

$$\iff \quad \ln(3) > 1,$$

o que é verdadeiro, pois $\ln(x)$ é uma função crescente, $3 > e$, $\ln(e) = 1$.