MAT1250 e 1260 – Álgebra Linear

P4 – 06 de dezembro de 2022

(Versão I)

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$3,0$		
2^a	$4,0$		
3^a	$3,0$		
G4	$10,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.
- Caso o aluno tenha perguntas ou observações a serem feitas ao professor, deverá descrevê-las na capa da prova.

Questão 1

Seja k uma constante. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinate de A.

(b) Para quais valores de k, a matriz A é invertível?

(c) Para quais valores de k, a matriz A é ortogonalmente diagonalizável?

(d) Suponha que $k = 3$ e encontre a matriz A^{-1}.

Questão 2

Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Considere $T_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida pela matriz M e $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$ seu o polinômio característico.

(a) Para cada autovalor de T_M, determine os autoespaços associados.

(b) É possível encontrar uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_M?
(Lembre-se que neste item também é preciso justifique sua resposta.)

(c) Determine $\text{Im}(T_M)$.

(d) Determine a imagem do plano de equação $x + y + z = 0$ pela transformação T_M.

Questão 3

Seja E a matriz dada pelo produto de matrizes como abaixo.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Considere $T_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida pela matriz E.

(a) Determine a nulidade de E.

(b) Determine uma base do espaço linha de E.

(c) Para cada autovalor de E, determine os autoespaços associados.

(d) Se possível, diagonalize E ortogonalmente, sempre justificando suas respostas. Se não for possível, apenas justifique.

(e) Determine explicitamente E^6. (Ou seja, determine explicitamente todas as 9 entradas da matriz E^6 sem deixar indicado como produto de matrizes).

MAT1250 e 1260 – Álgebra Linear
P4 – 06 de dezembro de 2022
(Versão II)

Nome Legível : ____________________

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$3,0$		
2^a	$4,0$		
3^a	$3,0$		
G4	$10,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis, mas as respostas devem ser escritas a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.
- Caso o aluno tenha perguntas ou observações a serem feitas ao professor, deverá descrevê-las na capa da prova.

Questão 1

Seja k uma constante. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinate de A.

(b) Para quais valores de k, a matriz A é invertível?

(c) Para quais valores de k, a matriz A é ortogonalmente diagonalizável?

(d) Suponha que $k = 3$ e encontre a matriz A^{-1}.

Questão 2

Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Considere $T_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida pela matriz M e $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$ seu o polinômio característico.

(a) Para cada autovalor de T_M, determine os autoespaços associados.

(b) É possível encontrar uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_M?
(Lembre-se que neste item também é preciso justifique sua resposta.)

(c) Determine $\mathrm{Im}(T_M)$.

(d) Determine a imagem do plano de equação $x - 3y + 6z = 0$ pela transformação T_M.

Questão 3

Seja E a matriz dada pelo produto de matrizes como abaixo.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Considere $T_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida pela matriz E.

(a) Determine a nulidade de E.

(b) Determine uma base do espaço linha de E.

(c) Para cada autovalor de E, determine os autoespaços associados.

(d) Se possível, diagonalize E ortogonalmente, sempre justificando suas respostas. Se não for possível, apenas justifique.

(e) Determine explicitamente E^6. (Ou seja, determine explicitamente todas as 9 entradas da matriz E^6 sem deixar indicado como produto de matrizes).