MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P2 – 24 de outubro de 2017

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$1,5$		
3^a	$2,0$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

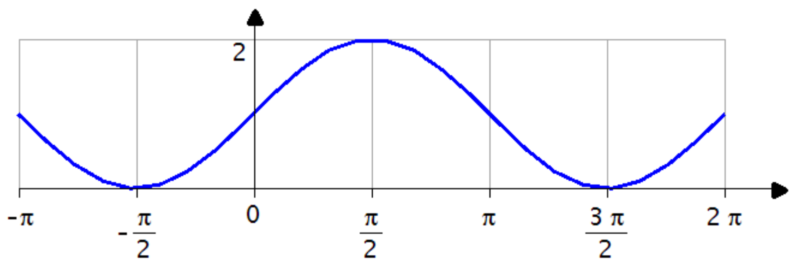
Questão 1

Considere a função $f : [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = 2\pi + x - \cos(x)$$

(a) Determine, caso exista(m), o(s) intervalo(s) de crescimento e decrescimento de f.

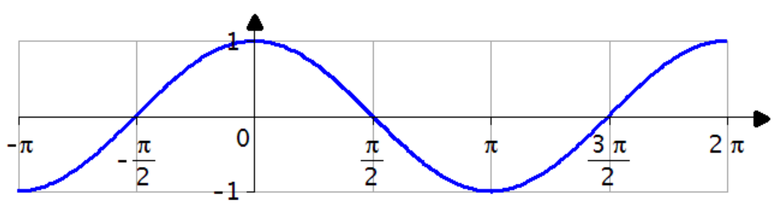
Observe que $f'(x) = 1 + \operatorname{sen}(x)$, cujo gráfico está esboçado abaixo:



Segue então que $f'(x) > 0$, $\forall x \in [-\pi, 2\pi]$, ou seja, o intervalo de crescimento de f é $[-\pi, 2\pi]$, e o intervalo de decrescimento não existe.

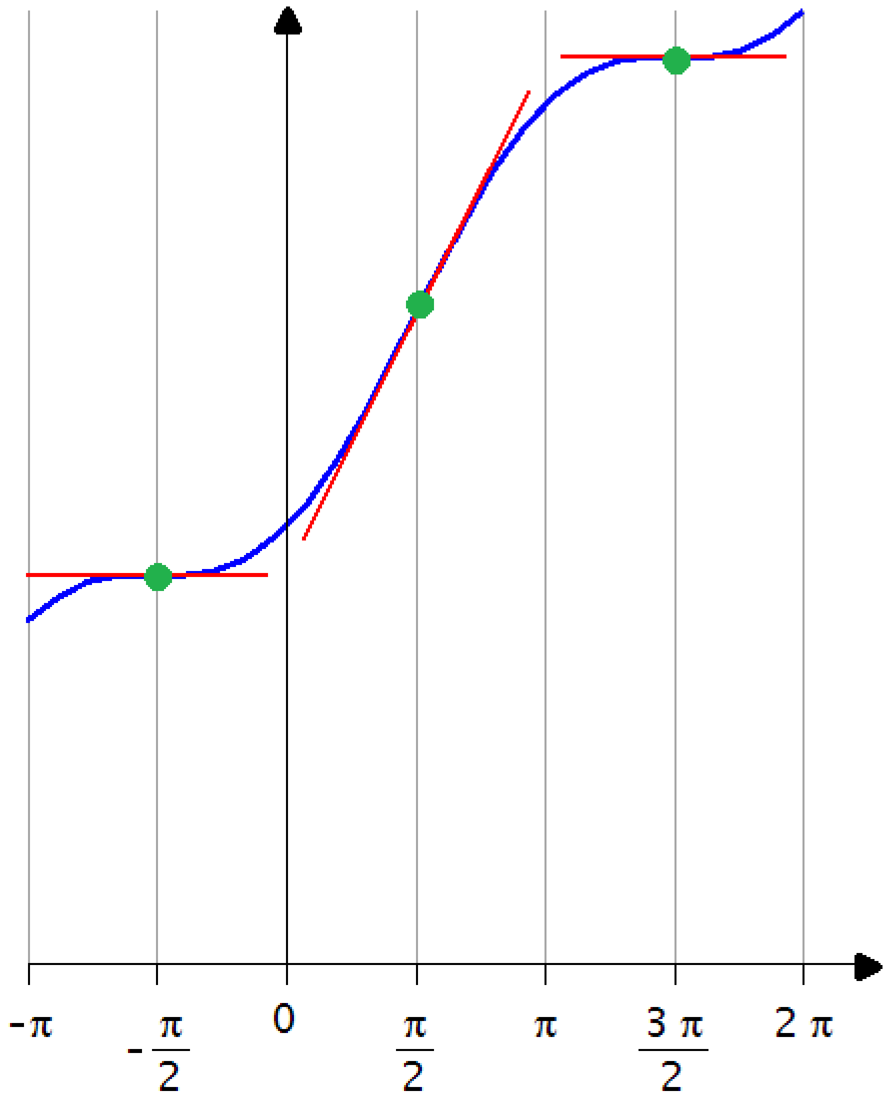
(b) Determine, caso exista(m), o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo.

Observe que $f''(x) = \cos(x)$, cujo gráfico está esboçado abaixo:



Segue então que os intervalos onde gráfico de f tem concavidade voltada para cima ($f''(x) \geq 0$) são $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, e os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo ($f''(x) \leq 0$) são $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(c) Faça um esboço do gráfico de f indicando explicitamente o(s) ponto(s) de máximo, de mínimo e de inflexão. Esboce também a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de f no(s) ponto(s) em que a derivada é zero e no(s) ponto(s) de inflexão.



Questão 2

Considere a função $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x+2} t^2 e^t \, dt$.

(a) Determine a primeira e a segunda derivadas de f.

Observe que $f(x) = g(h(x))$, onde $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} t^2 e^t \, dt$ e $h(x) = 2x+2$. Logo,

$$f'(x) = g'(h(x)) \,.\, h'(x) = (2x+2)^2 e^{2x+2} .\, 2$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\left[2(2x+2)\,.\,2\,.\,e^{2x+2} + (2x+2)^2 e^{2x+2}\,.\,2\right] \\ &= 8(2x+2)e^{2x+2} + 4(2x+2)^2 e^{2x+2} \\ &= e^{2x+2}(16x^2+48x+32) \end{aligned}$$

(b) Determine as abscissas (coordenadas x) dos pontos de inflexão do gráfico de f. Justifique sua resposta.

$$f''(x) = e^{2x+2}(16x^2+48x+32) = 0 \iff x = -2, -1$$

Estudo de sinal de $f''(x)$:

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < \infty$
e^{2x+2}	$+$	$+$	$+$
$16x^2+48x+32$	$+$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Conclui-se que as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de f são $x = -2$ e $x = -1$, pois são nestes valores que $f''(x)$ muda de sinal.

(c) Determines as ordenadas (coordenadas y) dos pontos de inflexão do gráfico de f.

Ponto de inflexão $(-1, f(-1))$:

$$f(-1) = \int_0^0 t^2 e^t \; dt = 0$$

Ponto de inflexão $(-2, f(-2))$:

$$f(-2) = \int_0^{-2} t^2 e^t \; dt$$

Calculando primeiramente a integral indefinida $\displaystyle\int t^2 e^t \; dt$ por partes:

$$\begin{array}{rcl} u & = & t^2 \;\Rightarrow\; du = 2t\,dt \\ dv & = & e^t\,dt \;\Rightarrow\; v = e^t \end{array}$$

Logo,

$$\int t^2 e^t \; dt = t^2 e^t - \int 2te^t \; dt = t^2 e^t - 2\int te^t \; dt$$

Calcularemos a integral $\displaystyle\int te^t \; dt$ também por partes:

$$\begin{array}{rcl} u & = & t \;\Rightarrow\; du = dt \\ dv & = & e^t\,dt \;\Rightarrow\; v = e^t \end{array}$$

Logo,

$$\int t^2 e^t \; dt = t^2 e^t - 2\left[te^t - \int e^t \; dt\right] = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + c$$

Assim,

$$f(-2) = \int_0^{-2} t^2 e^t \; dt = \left(4e^{-2} + 4e^{-2} + 2e^{-2}\right) - (0 - 0 + 2) = \frac{10}{e^2} - 2$$

Questão 3

Sejam f e g funções dadas por

$$f(x) = 1 + 2^{1-x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1 + 2^{x-1}$$

e considere R a região dada por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x),\ x \leq 3 \text{ e } y \leq 3\}.$$

(a) Esboce a região R.

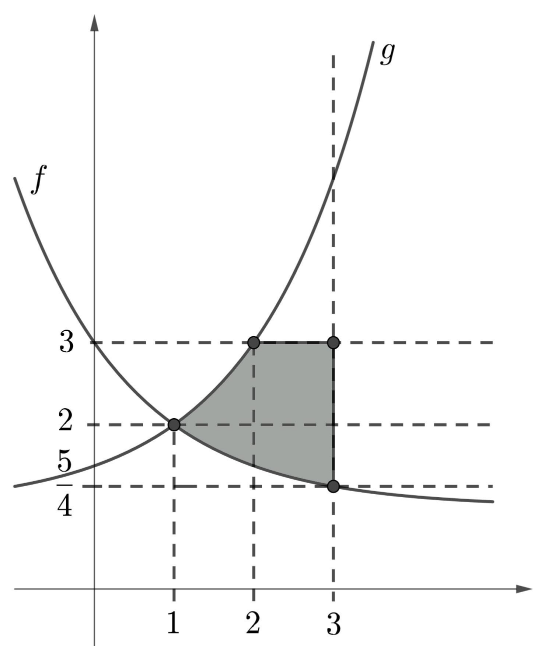
Solução: Note que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{1-x} = 2^{x-1} \Leftrightarrow 1 - x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{e} \quad f(1) = g(1) = 2.$$

Além disso,

$$f(3) = \frac{5}{4}, \quad \text{e} \quad g(x) = 3 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Logo,



(b) Escreva a área da região R como uma soma de duas integrais na variável x.

Solução: Segue do item (a) que

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) &= \int_1^2 g(x) - f(x)\,dx + \int_2^3 3 - f(x)\,dx \\
&= \int_1^2 (1 + 2^{x-1}) - (1 + 2^{1-x})\,dx + \int_2^3 3 - (1 + 2^{1-x})\,dx
\end{aligned}$$

(c) Escreva a área da região R como uma soma de duas integrais na variável y.

Solução: Como

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 + 2^{1-x} \Leftrightarrow y - 1 = 2^{1-x} \Leftrightarrow \log_2(y-1) = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \log_2(y-1)$$

e

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 1 + 2^{x-1} \Leftrightarrow y - 1 = 2^{x-1} \Leftrightarrow \log_2(y-1) = x - 1 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2(y-1),$$

segue do item (a) que

$$\text{Área}(R) = \int_{\frac{5}{4}}^{2} 3 - (1 - \log_2(y-1))\, dy + \int_{2}^{3} 3 - (1 + \log_2(y-1))\, dy$$

(d) Calcule a área da região R.

Solução: Usando o item (b):

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) &= \int_1^2 (1 + 2^{x-1}) - (1 + 2^{1-x})\, dx + \int_2^3 3 - (1 + 2^{1-x})\, dx \\
&= \int_1^2 2^{x-1} - 2^{1-x}\, dx + \int_2^3 2 - 2^{1-x}\, dx \\
&= \left(\frac{2^{x-1}}{\ln(2)} + \frac{2^{1-x}}{\ln(2)} \right) \Bigg|_1^2 + \left(2x + \frac{2^{1-x}}{\ln(2)} \right) \Bigg|_2^3 \\
&= \left(\frac{2}{\ln(2)} + \frac{2^{-1}}{\ln(2)} \right) - \left(\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)} \right) + \left(6 + \frac{2^{-2}}{\ln(2)} \right) - \left(4 + \frac{2^{-1}}{\ln(2)} \right) \\
&= 2 + \frac{1}{4\ln(2)}.
\end{aligned}$$

E, usando o item (c):

$$\begin{aligned}
\text{Área}(R) &= \int_{\frac{5}{4}}^{2} 3 - (1 - \log_2(y-1))\, dy + \int_2^3 3 - (1 + \log_2(y-1))\, dy \\
&= \int_{\frac{5}{4}}^{2} 2 + \log_2(y-1)\, dy + \int_2^3 2 - \log_2(y-1)\, dy \\
&= \left(2y + (y-1)\log_2(y-1) - \frac{y-1}{\ln(2)} \right) \Bigg|_{\frac{5}{4}}^{2} + \left(2y - (y-1)\log_2(y-1) + \frac{y-1}{\ln(2)} \right) \Bigg|_2^3 \\
&= \left(4 + 0 - \frac{1}{\ln(2)} \right) - \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{\ln(2)} \right) + \left(6 - 2\log_2(2) + \frac{2}{\ln(2)} \right) - \left(4 - 0 + \frac{1}{\ln(2)} \right) \\
&= \left(4 - \frac{1}{\ln(2)} \right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\ln(2)} \right) + \left(6 - 2 + \frac{2}{\ln(2)} \right) - \left(4 + \frac{1}{\ln(2)} \right) \\
&= 2 + \frac{1}{4\ln(2)},
\end{aligned}$$

já que

$$\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\log_2(2^{-2}) = \frac{1}{4}(-2) = -\frac{1}{2}.$$