MAT1161 – Cálculo a uma Variável

G2 - Maple – 19 de maio de 2016

Versão I

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5x) - 2$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 1$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2}\,\text{sen}(5x) - 2$.

(a) Encontre um polinômio g de grau 3 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f em $p = -1.2$ e que também satisfaça $f''(p) = g''(p)$ e $f'''(p) = g'''(p)$.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2), & x \leq 0 \\ \cos(x), & x > 0. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right]$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Gabarito - Versão I

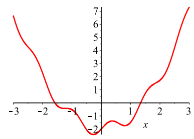
Questão 1) Método de Newton

Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->x^2+sin(5*x)/2-2;
```

$$f := x \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}\sin(5\,x) - 2 \qquad \textbf{(1)}$$

```
> plot(f(x),x=-3..3,numpoints=10000);
```



```
> x0:=1.0;
```

$$x0 := 1.0 \qquad \textbf{(2)}$$

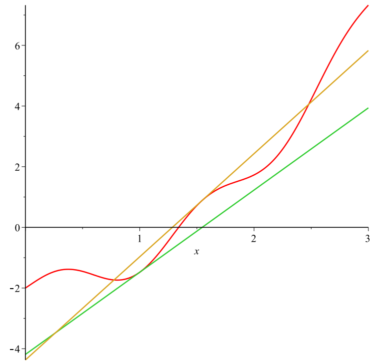
```
> x1:=x0-f(x0)/D(f)(x0);
```

$$x1 := 1.546097172 \qquad \textbf{(3)}$$

```
> x2:=x1-f(x1)/D(f)(x1);
```

$$x2 := 1.285341438 \qquad \textbf{(4)}$$

```
> plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=0..3,
  numpoints=10000);
```



Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=-1.2, encontre um polinômio de grau 3 que seja tangente e satisfaça f ´´ = g ´´ e f ´´´ = g ´´´. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d;
```

$$g := x \rightarrow a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d \qquad (5)$$

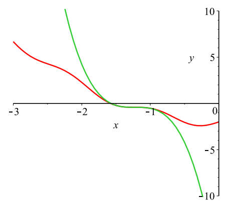
```
> x0:=-1.2;
```

$$x0 := -1.2 \qquad (6)$$

```
> s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),D(D(f))(x0)=D(D(g))(x0),D
  (D(D(f)))(x0)=D(D(D(g)))(x0)});
```

$$s := \{a = -10.00177382, b = -36.75273262, c = -44.99846966, d = -18.77758604\} \qquad (7)$$

```
> plot([f(x),subs(s,g(x))],x=-3..0,y=-10..10);
```



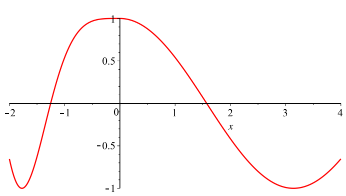
Questão 3.

```
> g:=x->cos(x);
  h:=x->cos(x^2);
  f:=x->piecewise(x<0,h(x),x>0,g(x));
  plot(f(x),x=-2..4,numpoints=1000);
```

$$g := x \rightarrow \cos(x)$$

$$h := x \rightarrow \cos(x^2)$$

$$f := x \rightarrow piecewise(x < 0, h(x), 0 < x, g(x))$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [-sqrt(Pi/2),Pi/2]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Resolução:

Domínio de x vai ser de -sqrt(Pi/2) até 0. O outro vértice vai estar em:

```
> OV:=x->arccos(h(x));
```

$$OV := x \to \arccos(h(x)) \tag{8}$$

Testando:

```
> evalf(OV(-0.4));
  evalf(OV(-0.8));
```

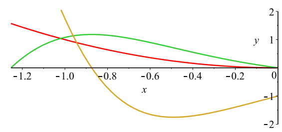
$$0.1599999998$$
$$0.6400000000 \tag{9}$$

Agora a função área:

```
> A:=x->(OV(x)-x)*h(x);
```

$$A := x \to (OV(x) - x)\, h(x) \tag{10}$$

```
> plot([OV(x),A(x),D(A)(x)],x=-sqrt(Pi/2)..0,y=-2..2);
```




```
> solve(D(A)(x)=0);
```

$$RootOf\left(2\cos(\_Z^2)\sin(\_Z^2)\,\_Z - \cos(\_Z^2)\sqrt{1-\cos(\_Z^2)^2} - 2\sin(\_Z^2)\,\_Z\sqrt{1-\cos(\_Z^2)^2}\,\arccos(\cos(\_Z^2)) + 2\sin(\_Z^2)\,\_Z^2\sqrt{1-\cos(\_Z^2)^2}\right) \tag{12}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0);
```

$$0.4731458350 \tag{13}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0,x=-sqrt(Pi/2)..0);
```

$$-0.8743680001 \tag{14}$$

```
> A(%);
```

$$1.182809796 \tag{15}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.182809796 \tag{16}$$

OBS: Você também poderia escolher usar x no domínio de 0 a Pi/2, mas aí teria que inverter a h(x), o que é mais difícil, porque a inversa da g(x) já está pronta, é arccos(x).

MAT1181 – Cálculo a uma Variável - Especial
G2 - Maple – 20 de maio de 2016
Versão IIIa

Nome Legível : ____________________

Assinatura : ____________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 3$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 1.5$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Encontre o menor valor de k para que x_k seja uma aproximação da raiz de f com erro menor do que 10^{-5}.

(c) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 3$.

(a) Encontre um polinômio de grau 7 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f em $p = 1.4$ e que também tenha tantas derivadas quanto possíveis iguais às derivadas de f em p.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16(x-4)^2(x-\pi+4)^2}{(\pi-8)^4}, & x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \operatorname{sen}(x), & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $[\pi - 4, \pi]$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

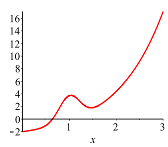
Gabarito - Versão IIIa

Questão 1) Método de Newton

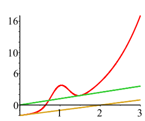
Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->exp(x)+4*exp( -(x-1)^2*10 ) - 3;
  plot(f(x),x=0..3,numpoints=10000);
  x0:=1.5;
  x1:=x0-f(x0)/D(f)(x0);
  x2:=x1-f(x1)/D(f)(x1);
  plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=0..3,
  numpoints=10000);
```

$$f := x \rightarrow e^{x} + 4\, e^{-10\,(x-1)^2} - 3$$



$$x0 := 1.5$$
$$x1 := -0.010511133$$
$$x2 := 2.014958684$$



b) Essa sequência vai convergir para a raiz de f(x)? (SIM)

```
> x[0]:=x0;
  for j from 1 to 100 do:
    x[j]:=x[j-1]-f(x[j-1])/D(f)(x[j-1]);
  od;
```

$$x_0 := 1.5$$

$$x_1 := -0.010511133$$
$$x_2 := 2.014958684$$
$$x_3 := 1.414700262$$
$$x_4 := 2.417344105$$
$$x_5 := 1.684818384$$
$$x_6 := 1.188050829$$
$$x_7 := 1.612261486$$
$$x_8 := 1.066152342$$
$$x_9 := 2.793229615$$
$$x_{10} := 1.976899116$$
$$x_{11} := 1.391899656$$
$$x_{12} := 2.082684012$$
$$x_{13} := 1.456411179$$
$$x_{14} := 8.420194215$$
$$x_{15} := 7.420855330$$
$$x_{16} := 6.422651241$$
$$x_{17} := 5.427524273$$
$$x_{18} := 4.440706155$$
$$x_{19} := 3.476068990$$
$$x_{20} := 2.568855251$$
$$x_{21} := 1.798724880$$
$$x_{22} := 1.284916921$$
$$x_{23} := 1.652287316$$
$$x_{24} := 1.144106670$$
$$x_{25} := 1.688433754$$
$$x_{26} := 1.192236246$$
$$x_{27} := 1.609335111$$
$$x_{28} := 1.058872890$$
$$x_{29} := 3.307527628$$
$$x_{30} := 2.417347329$$
$$x_{31} := 1.684820746$$
$$x_{32} := 1.188053602$$
$$x_{33} := 1.612259361$$
$$x_{34} := 1.066147156$$

$$x_{35} := 2.793507174$$
$$x_{36} := 1.977125703$$
$$x_{37} := 1.392034224$$
$$x_{38} := 2.084039983$$
$$x_{39} := 1.457262323$$
$$x_{40} := 9.357242730$$
$$x_{41} := 8.357501744$$
$$x_{42} := 7.358205633$$
$$x_{43} := 6.360117656$$
$$x_{44} := 5.365305146$$
$$x_{45} := 4.379333245$$
$$x_{46} := 3.416934383$$
$$x_{47} := 2.515373001$$
$$x_{48} := 1.757871268$$
$$x_{49} := 1.256096908$$
$$x_{50} := 1.619463219$$
$$x_{51} := 1.082955769$$
$$x_{52} := 2.220432272$$
$$x_{53} := 1.546116206$$
$$x_{54} := 0.7814883085$$
$$x_{55} := 0.6536107642$$
$$x_{56} := 0.6412037540$$
$$x_{57} := 0.6409214189$$
$$x_{58} := 0.6409212699$$
$$x_{59} := 0.6409212698$$
$$x_{60} := 0.6409212699$$
$$x_{61} := 0.6409212698$$
$$x_{62} := 0.6409212699$$
$$x_{63} := 0.6409212698$$
$$x_{64} := 0.6409212699$$
$$x_{65} := 0.6409212698$$
$$x_{66} := 0.6409212699$$
$$x_{67} := 0.6409212698$$
$$x_{68} := 0.6409212699$$

$$x_{69} := 0.6409212698$$
$$x_{70} := 0.6409212699$$
$$x_{71} := 0.6409212698$$
$$x_{72} := 0.6409212699$$
$$x_{73} := 0.6409212698$$
$$x_{74} := 0.6409212699$$
$$x_{75} := 0.6409212698$$
$$x_{76} := 0.6409212699$$
$$x_{77} := 0.6409212698$$
$$x_{78} := 0.6409212699$$
$$x_{79} := 0.6409212698$$
$$x_{80} := 0.6409212699$$
$$x_{81} := 0.6409212698$$
$$x_{82} := 0.6409212699$$
$$x_{83} := 0.6409212698$$
$$x_{84} := 0.6409212699$$
$$x_{85} := 0.6409212698$$
$$x_{86} := 0.6409212699$$
$$x_{87} := 0.6409212698$$
$$x_{88} := 0.6409212699$$
$$x_{89} := 0.6409212698$$
$$x_{90} := 0.6409212699$$
$$x_{91} := 0.6409212698$$
$$x_{92} := 0.6409212699$$
$$x_{93} := 0.6409212698$$
$$x_{94} := 0.6409212699$$
$$x_{95} := 0.6409212698$$
$$x_{96} := 0.6409212699$$
$$x_{97} := 0.6409212698$$
$$x_{98} := 0.6409212699$$
$$x_{99} := 0.6409212698$$
$$x_{100} := 0.6409212699 \qquad \textbf{(1)}$$

Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=0.5, encontre um polinômio de grau

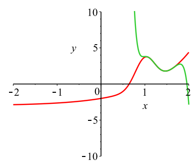
7 que seja tangente e tenha tantas derivadas quanto possíveis iguais às de f(x) neste ponto x0. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d+aa*x^4+bb*x^5+cc*x^6+dd*x^7;
  x0:=1.4;
  s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),seq((D@@k)(f)(x0)=(D@@k)(g)(x0),k=2..7)});
  plot([f(x),subs(s,g(x))],x=-2..2,y=-10..10,numpoints=1000);
```

$$g := x \to a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d + aa\,x^4 + bb\,x^5 + cc\,x^6 + dd\,x^7$$

$$x0 := 1.4$$

$s := \{a = -67912.63642, aa = 49047.56267, b = 55760.25336, bb = -21038.06703, c = -25106.85269, cc = 4970.435178, d = 4782.815797, dd = -499.7078187\}$



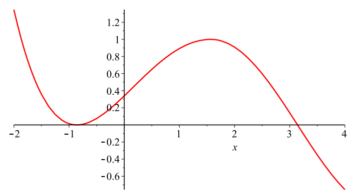
Questão 3)

```
> g:=x->sin(x);
  h:=x->(x-4)^2*(x-Pi+4)^2*16/(Pi-8)^4;
  f:=x->piecewise(x<Pi/2,h(x),x>Pi/2,g(x));
  plot(f(x),x=-2..4);
```

$$g := x \to \sin(x)$$

$$h := x \to \frac{16\,(x-4)^2\,(x-\pi+4)^2}{(\pi-8)^4}$$

$$f := x \to piecewise\left(x < \frac{1}{2}\pi, h(x), \frac{1}{2}\pi < x, g(x)\right)$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [Pi-4,Pi]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

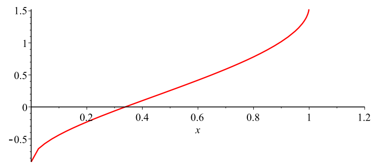
Resolução: Invertendo a função h(x):

```
> solve(x=h(y),y);
```

$$\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+64-16\pi+\sqrt{x\pi^4-32x\pi^3+384x\pi^2-2048x\pi+4096x}},\ \frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+64-16\pi+\sqrt{x\pi^4-32x\pi^3+384x\pi^2-2048x\pi+4096x}},\ \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+64-16\pi-\sqrt{x\pi^4-32x\pi^3+384x\pi^2-2048x\pi+4096x}},\ \frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2+64-16\pi-\sqrt{x\pi^4-32x\pi^3+384x\pi^2-2048x\pi+4096x}} \qquad \textbf{(2)}$$

Plot para escolher qual delas é a inversa desejada

```
> plot((1/2)*Pi-(1/2)*sqrt(Pi^2+64-16*Pi-sqrt(x*Pi^4-32*x*Pi^3+384*
  x*Pi^2-2048*x*Pi+4096*x)),x=0..1.2);
```



```
> hinv:=x->(1/2)*Pi-(1/2)*sqrt(Pi^2+64-16*Pi-sqrt(x*Pi^4-32*x*
  Pi^3+384*x*Pi^2-2048*x*Pi+4096*x));
```

$$hinv := x \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 + 64 - 16\pi - \sqrt{x\pi^4 - 32x\pi^3 + 384x\pi^2 - 2048x\pi + 4096x}} \quad (3)$$

Domínio de x vai ser de Pi/2 até Pi. O outro vertice vai estar em:

```
> OV:=x->hinv(sin(x));
```

$$OV := x \to hinv(\sin(x)) \quad (4)$$

Testando:

```
> evalf(OV(3.));
  evalf(OV(2.));
```

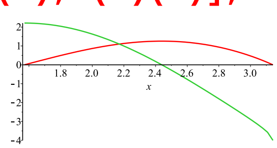
$$-0.348644407$$
$$1.047365680 \quad (5)$$

Agora a função área:

```
> A:=x->(x-OV(x))*sin(x);
```

$$A := x \to (x - OV(x))\sin(x) \quad (6)$$

```
> plot([A(x),D(A)(x)],x=Pi/2..Pi);
```



```
> solve(D(A)(x)=0);
```

Warning, solutions may have been lost

```
> fsolve(D(A)(x)=0);
```

$$0.6166653666 \tag{7}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0,x=2..3);
```

$$2.439837266 \tag{8}$$

```
> A(%);
```

$$1.575059609 - 0.3227796442\,\pi + 0.3227796442\,\Big(\pi^2 + 64 - 16\,\pi - \big(0.6455592885\,\pi^4 - 20.65789723\,\pi^3 + 247.8947668\,\pi^2 - 1322.105423\,\pi + 2644.210846\big)^{1/2}\Big)^{1/2} \tag{9}$$

```
> evalf(%);
```

$$1.256230248 \tag{10}$$

OBS: Essa não era a única forma de resolver a questão. Poderíamos ter colocado o domínio do outro lado e invertido a outra função. Assim o domínio seria de Pi-4 até Pi/2 e a inversa do seno neste intervalo é: Pi - arcsin(x). Fica

```
> OV:=x->Pi-arcsin(h(x));
```

$$OV := x \to \pi - \arcsin(h(x)) \tag{11}$$

```
> A:=x->(OV(x)-x)*h(x);
```

$$A := x \to (OV(x) - x)\, h(x) \tag{12}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0,x=Pi-4..Pi/2);
```

$$0.4938808367 \tag{13}$$

```
> evalf(A(%));
```

$$1.256230248 \tag{14}$$

Que é a mesma resposta.

MAT1181 – Cálculo a uma Variável - Especial
G2 - Maple – 20 de maio de 2016
Versão IIIb

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 8$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 0.7$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Encontre o menor valor de k para que x_k seja uma aproximação da raiz de f com erro menor do que 10^{-5}.

(c) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 8$.

(a) Encontre um polinômio de grau 7 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f em $p = 0.5$ e que também tenha tantas derivadas quanto possíveis iguais às derivadas de f em p.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{16(x-5)^2(x-\pi+5)^2}{(\pi-10)^4}, & x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \operatorname{sen}(x), & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $[\pi - 5, \pi]$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

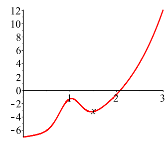
Gabarito - Versão IIIb

Questão 1) Método de Newton

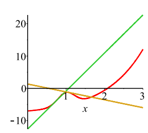
Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->exp(x)+4*exp( -(x-1)^2*10 ) - 8;
  plot(f(x),x=0..3,numpoints=10000);
  x0:=0.7;
  x1:=x0-f(x0)/D(f)(x0);
  x2:=x1-f(x1)/D(f)(x1);
  plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=0..3,
  numpoints=10000);
```

$$f := x \rightarrow e^{x} + 4\, e^{-10\,(x-1)^2} - 8$$



$$x0 := 0.7$$
$$x1 := 1.070385814$$
$$x2 := 0.5475639634$$



b) Essa sequência vai convergir para a raiz de f(x)? (SIM)

```
> x[0]:=x0;
  for j from 1 to 400 do:
    x[j]:=x[j-1]-f(x[j-1])/D(f)(x[j-1]);
  od;
```

$$x_0 := 0.7$$

$$x_1 := 1.070385814$$
$$x_2 := 0.5475639634$$
$$x_3 := 1.446326664$$
$$x_4 := -3.698947389$$
$$x_5 := 318.5390644$$
$$x_6 := 317.5390644$$
$$x_7 := 316.5390644$$
$$x_8 := 315.5390644$$
$$x_9 := 314.5390644$$
$$x_{10} := 313.5390644$$
$$x_{11} := 312.5390644$$
$$x_{12} := 311.5390644$$
$$x_{13} := 310.5390644$$
$$x_{14} := 309.5390644$$
$$x_{15} := 308.5390644$$
$$x_{16} := 307.5390644$$
$$x_{17} := 306.5390644$$
$$x_{18} := 305.5390644$$
$$x_{19} := 304.5390644$$
$$x_{20} := 303.5390644$$
$$x_{21} := 302.5390644$$
$$x_{22} := 301.5390644$$
$$x_{23} := 300.5390644$$
$$x_{24} := 299.5390644$$
$$x_{25} := 298.5390644$$
$$x_{26} := 297.5390644$$
$$x_{27} := 296.5390644$$
$$x_{28} := 295.5390644$$
$$x_{29} := 294.5390644$$
$$x_{30} := 293.5390644$$
$$x_{31} := 292.5390644$$
$$x_{32} := 291.5390644$$
$$x_{33} := 290.5390644$$
$$x_{34} := 289.5390644$$

$$x_{35} := 288.5390644$$
$$x_{36} := 287.5390644$$
$$x_{37} := 286.5390644$$
$$x_{38} := 285.5390644$$
$$x_{39} := 284.5390644$$
$$x_{40} := 283.5390644$$
$$x_{41} := 282.5390644$$
$$x_{42} := 281.5390644$$
$$x_{43} := 280.5390644$$
$$x_{44} := 279.5390644$$
$$x_{45} := 278.5390644$$
$$x_{46} := 277.5390644$$
$$x_{47} := 276.5390644$$
$$x_{48} := 275.5390644$$
$$x_{49} := 274.5390644$$
$$x_{50} := 273.5390644$$
$$x_{51} := 272.5390644$$
$$x_{52} := 271.5390644$$
$$x_{53} := 270.5390644$$
$$x_{54} := 269.5390644$$
$$x_{55} := 268.5390644$$
$$x_{56} := 267.5390644$$
$$x_{57} := 266.5390644$$
$$x_{58} := 265.5390644$$
$$x_{59} := 264.5390644$$
$$x_{60} := 263.5390644$$
$$x_{61} := 262.5390644$$
$$x_{62} := 261.5390644$$
$$x_{63} := 260.5390644$$
$$x_{64} := 259.5390644$$
$$x_{65} := 258.5390644$$
$$x_{66} := 257.5390644$$
$$x_{67} := 256.5390644$$
$$x_{68} := 255.5390644$$

$$x_{69} := 254.5390644$$
$$x_{70} := 253.5390644$$
$$x_{71} := 252.5390644$$
$$x_{72} := 251.5390644$$
$$x_{73} := 250.5390644$$
$$x_{74} := 249.5390644$$
$$x_{75} := 248.5390644$$
$$x_{76} := 247.5390644$$
$$x_{77} := 246.5390644$$
$$x_{78} := 245.5390644$$
$$x_{79} := 244.5390644$$
$$x_{80} := 243.5390644$$
$$x_{81} := 242.5390644$$
$$x_{82} := 241.5390644$$
$$x_{83} := 240.5390644$$
$$x_{84} := 239.5390644$$
$$x_{85} := 238.5390644$$
$$x_{86} := 237.5390644$$
$$x_{87} := 236.5390644$$
$$x_{88} := 235.5390644$$
$$x_{89} := 234.5390644$$
$$x_{90} := 233.5390644$$
$$x_{91} := 232.5390644$$
$$x_{92} := 231.5390644$$
$$x_{93} := 230.5390644$$
$$x_{94} := 229.5390644$$
$$x_{95} := 228.5390644$$
$$x_{96} := 227.5390644$$
$$x_{97} := 226.5390644$$
$$x_{98} := 225.5390644$$
$$x_{99} := 224.5390644$$
$$x_{100} := 223.5390644$$
$$x_{101} := 222.5390644$$
$$x_{102} := 221.5390644$$

$$x_{103} := 220.5390644$$
$$x_{104} := 219.5390644$$
$$x_{105} := 218.5390644$$
$$x_{106} := 217.5390644$$
$$x_{107} := 216.5390644$$
$$x_{108} := 215.5390644$$
$$x_{109} := 214.5390644$$
$$x_{110} := 213.5390644$$
$$x_{111} := 212.5390644$$
$$x_{112} := 211.5390644$$
$$x_{113} := 210.5390644$$
$$x_{114} := 209.5390644$$
$$x_{115} := 208.5390644$$
$$x_{116} := 207.5390644$$
$$x_{117} := 206.5390644$$
$$x_{118} := 205.5390644$$
$$x_{119} := 204.5390644$$
$$x_{120} := 203.5390644$$
$$x_{121} := 202.5390644$$
$$x_{122} := 201.5390644$$
$$x_{123} := 200.5390644$$
$$x_{124} := 199.5390644$$
$$x_{125} := 198.5390644$$
$$x_{126} := 197.5390644$$
$$x_{127} := 196.5390644$$
$$x_{128} := 195.5390644$$
$$x_{129} := 194.5390644$$
$$x_{130} := 193.5390644$$
$$x_{131} := 192.5390644$$
$$x_{132} := 191.5390644$$
$$x_{133} := 190.5390644$$
$$x_{134} := 189.5390644$$
$$x_{135} := 188.5390644$$
$$x_{136} := 187.5390644$$

$$x_{137} := 186.5390644$$
$$x_{138} := 185.5390644$$
$$x_{139} := 184.5390644$$
$$x_{140} := 183.5390644$$
$$x_{141} := 182.5390644$$
$$x_{142} := 181.5390644$$
$$x_{143} := 180.5390644$$
$$x_{144} := 179.5390644$$
$$x_{145} := 178.5390644$$
$$x_{146} := 177.5390644$$
$$x_{147} := 176.5390644$$
$$x_{148} := 175.5390644$$
$$x_{149} := 174.5390644$$
$$x_{150} := 173.5390644$$
$$x_{151} := 172.5390644$$
$$x_{152} := 171.5390644$$
$$x_{153} := 170.5390644$$
$$x_{154} := 169.5390644$$
$$x_{155} := 168.5390644$$
$$x_{156} := 167.5390644$$
$$x_{157} := 166.5390644$$
$$x_{158} := 165.5390644$$
$$x_{159} := 164.5390644$$
$$x_{160} := 163.5390644$$
$$x_{161} := 162.5390644$$
$$x_{162} := 161.5390644$$
$$x_{163} := 160.5390644$$
$$x_{164} := 159.5390644$$
$$x_{165} := 158.5390644$$
$$x_{166} := 157.5390644$$
$$x_{167} := 156.5390644$$
$$x_{168} := 155.5390644$$
$$x_{169} := 154.5390644$$
$$x_{170} := 153.5390644$$

$$x_{171} := 152.5390644$$
$$x_{172} := 151.5390644$$
$$x_{173} := 150.5390644$$
$$x_{174} := 149.5390644$$
$$x_{175} := 148.5390644$$
$$x_{176} := 147.5390644$$
$$x_{177} := 146.5390644$$
$$x_{178} := 145.5390644$$
$$x_{179} := 144.5390644$$
$$x_{180} := 143.5390644$$
$$x_{181} := 142.5390644$$
$$x_{182} := 141.5390644$$
$$x_{183} := 140.5390644$$
$$x_{184} := 139.5390644$$
$$x_{185} := 138.5390644$$
$$x_{186} := 137.5390644$$
$$x_{187} := 136.5390644$$
$$x_{188} := 135.5390644$$
$$x_{189} := 134.5390644$$
$$x_{190} := 133.5390644$$
$$x_{191} := 132.5390644$$
$$x_{192} := 131.5390644$$
$$x_{193} := 130.5390644$$
$$x_{194} := 129.5390644$$
$$x_{195} := 128.5390644$$
$$x_{196} := 127.5390644$$
$$x_{197} := 126.5390644$$
$$x_{198} := 125.5390644$$
$$x_{199} := 124.5390644$$
$$x_{200} := 123.5390644$$
$$x_{201} := 122.5390644$$
$$x_{202} := 121.5390644$$
$$x_{203} := 120.5390644$$
$$x_{204} := 119.5390644$$

$$x_{205} := 118.5390644$$
$$x_{206} := 117.5390644$$
$$x_{207} := 116.5390644$$
$$x_{208} := 115.5390644$$
$$x_{209} := 114.5390644$$
$$x_{210} := 113.5390644$$
$$x_{211} := 112.5390644$$
$$x_{212} := 111.5390644$$
$$x_{213} := 110.5390644$$
$$x_{214} := 109.5390644$$
$$x_{215} := 108.5390644$$
$$x_{216} := 107.5390644$$
$$x_{217} := 106.5390644$$
$$x_{218} := 105.5390644$$
$$x_{219} := 104.5390644$$
$$x_{220} := 103.5390644$$
$$x_{221} := 102.5390644$$
$$x_{222} := 101.5390644$$
$$x_{223} := 100.5390644$$
$$x_{224} := 99.53906440$$
$$x_{225} := 98.53906440$$
$$x_{226} := 97.53906440$$
$$x_{227} := 96.53906440$$
$$x_{228} := 95.53906440$$
$$x_{229} := 94.53906440$$
$$x_{230} := 93.53906440$$
$$x_{231} := 92.53906440$$
$$x_{232} := 91.53906440$$
$$x_{233} := 90.53906440$$
$$x_{234} := 89.53906440$$
$$x_{235} := 88.53906440$$
$$x_{236} := 87.53906440$$
$$x_{237} := 86.53906440$$
$$x_{238} := 85.53906440$$

$$x_{239} := 84.53906440$$
$$x_{240} := 83.53906440$$
$$x_{241} := 82.53906440$$
$$x_{242} := 81.53906440$$
$$x_{243} := 80.53906440$$
$$x_{244} := 79.53906440$$
$$x_{245} := 78.53906440$$
$$x_{246} := 77.53906440$$
$$x_{247} := 76.53906440$$
$$x_{248} := 75.53906440$$
$$x_{249} := 74.53906440$$
$$x_{250} := 73.53906440$$
$$x_{251} := 72.53906440$$
$$x_{252} := 71.53906440$$
$$x_{253} := 70.53906440$$
$$x_{254} := 69.53906440$$
$$x_{255} := 68.53906440$$
$$x_{256} := 67.53906440$$
$$x_{257} := 66.53906440$$
$$x_{258} := 65.53906440$$
$$x_{259} := 64.53906440$$
$$x_{260} := 63.53906440$$
$$x_{261} := 62.53906440$$
$$x_{262} := 61.53906440$$
$$x_{263} := 60.53906440$$
$$x_{264} := 59.53906440$$
$$x_{265} := 58.53906440$$
$$x_{266} := 57.53906440$$
$$x_{267} := 56.53906440$$
$$x_{268} := 55.53906440$$
$$x_{269} := 54.53906440$$
$$x_{270} := 53.53906440$$
$$x_{271} := 52.53906440$$
$$x_{272} := 51.53906440$$

$x_{273} := 50.53906440$
$x_{274} := 49.53906440$
$x_{275} := 48.53906440$
$x_{276} := 47.53906440$
$x_{277} := 46.53906440$
$x_{278} := 45.53906440$
$x_{279} := 44.53906440$
$x_{280} := 43.53906440$
$x_{281} := 42.53906440$
$x_{282} := 41.53906440$
$x_{283} := 40.53906440$
$x_{284} := 39.53906440$
$x_{285} := 38.53906440$
$x_{286} := 37.53906440$
$x_{287} := 36.53906440$
$x_{288} := 35.53906440$
$x_{289} := 34.53906440$
$x_{290} := 33.53906440$
$x_{291} := 32.53906440$
$x_{292} := 31.53906440$
$x_{293} := 30.53906440$
$x_{294} := 29.53906440$
$x_{295} := 28.53906440$
$x_{296} := 27.53906440$
$x_{297} := 26.53906440$
$x_{298} := 25.53906440$
$x_{299} := 24.53906440$
$x_{300} := 23.53906440$
$x_{301} := 22.53906440$
$x_{302} := 21.53906440$
$x_{303} := 20.53906440$
$x_{304} := 19.53906441$
$x_{305} := 18.53906444$
$x_{306} := 17.53906451$

$$x_{307} := 16.53906470$$
$$x_{308} := 15.53906523$$
$$x_{309} := 14.53906666$$
$$x_{310} := 13.53907054$$
$$x_{311} := 12.53908109$$
$$x_{312} := 11.53910976$$
$$x_{313} := 10.53918769$$
$$x_{314} := 9.539399516$$
$$x_{315} := 8.539975196$$
$$x_{316} := 7.541539157$$
$$x_{317} := 6.545783800$$
$$x_{318} := 5.557273064$$
$$x_{319} := 4.588147353$$
$$x_{320} := 3.669520837$$
$$x_{321} := 2.873430279$$
$$x_{322} := 2.325468412$$
$$x_{323} := 2.107369565$$
$$x_{324} := 2.079824225$$
$$x_{325} := 2.079437265$$
$$x_{326} := 2.079437190$$
$$x_{327} := 2.079437190$$
$$x_{328} := 2.079437190$$
$$x_{329} := 2.079437190$$
$$x_{330} := 2.079437190$$
$$x_{331} := 2.079437190$$
$$x_{332} := 2.079437190$$
$$x_{333} := 2.079437190$$
$$x_{334} := 2.079437190$$
$$x_{335} := 2.079437190$$
$$x_{336} := 2.079437190$$
$$x_{337} := 2.079437190$$
$$x_{338} := 2.079437190$$
$$x_{339} := 2.079437190$$
$$x_{340} := 2.079437190$$

$$x_{341} := 2.079437190$$
$$x_{342} := 2.079437190$$
$$x_{343} := 2.079437190$$
$$x_{344} := 2.079437190$$
$$x_{345} := 2.079437190$$
$$x_{346} := 2.079437190$$
$$x_{347} := 2.079437190$$
$$x_{348} := 2.079437190$$
$$x_{349} := 2.079437190$$
$$x_{350} := 2.079437190$$
$$x_{351} := 2.079437190$$
$$x_{352} := 2.079437190$$
$$x_{353} := 2.079437190$$
$$x_{354} := 2.079437190$$
$$x_{355} := 2.079437190$$
$$x_{356} := 2.079437190$$
$$x_{357} := 2.079437190$$
$$x_{358} := 2.079437190$$
$$x_{359} := 2.079437190$$
$$x_{360} := 2.079437190$$
$$x_{361} := 2.079437190$$
$$x_{362} := 2.079437190$$
$$x_{363} := 2.079437190$$
$$x_{364} := 2.079437190$$
$$x_{365} := 2.079437190$$
$$x_{366} := 2.079437190$$
$$x_{367} := 2.079437190$$
$$x_{368} := 2.079437190$$
$$x_{369} := 2.079437190$$
$$x_{370} := 2.079437190$$
$$x_{371} := 2.079437190$$
$$x_{372} := 2.079437190$$
$$x_{373} := 2.079437190$$
$$x_{374} := 2.079437190$$

$$x_{375} := 2.079437190$$
$$x_{376} := 2.079437190$$
$$x_{377} := 2.079437190$$
$$x_{378} := 2.079437190$$
$$x_{379} := 2.079437190$$
$$x_{380} := 2.079437190$$
$$x_{381} := 2.079437190$$
$$x_{382} := 2.079437190$$
$$x_{383} := 2.079437190$$
$$x_{384} := 2.079437190$$
$$x_{385} := 2.079437190$$
$$x_{386} := 2.079437190$$
$$x_{387} := 2.079437190$$
$$x_{388} := 2.079437190$$
$$x_{389} := 2.079437190$$
$$x_{390} := 2.079437190$$
$$x_{391} := 2.079437190$$
$$x_{392} := 2.079437190$$
$$x_{393} := 2.079437190$$
$$x_{394} := 2.079437190$$
$$x_{395} := 2.079437190$$
$$x_{396} := 2.079437190$$
$$x_{397} := 2.079437190$$
$$x_{398} := 2.079437190$$
$$x_{399} := 2.079437190$$
$$x_{400} := 2.079437190 \qquad \textbf{(1)}$$

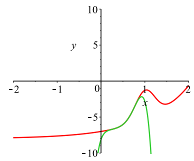
Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=0.5, encontre um polinômio de grau 7 que seja tangente e tenha tantas derivadas quanto possíveis iguais às de f(x) neste ponto x0. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d+aa*x^4+bb*x^5+cc*x^6+dd*x^7;
  x0:=0.5;
  s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),seq((D@@k)(f)(x0)=(D@@k)
  (g)(x0),k=2..7)});
  plot([f(x),subs(s,g(x))],x=-2..2,y=-10..10,numpoints=1000);
```

$$g := x \to a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d + aa\,x^4 + bb\,x^5 + cc\,x^6 + dd\,x^7$$

$$x0 := 0.5$$

$$s := \{a = 363.1648351, aa = -740.5475895, b = -104.0215808, bb = 875.5819001, c = 17.59941309, cc = -510.7499540, d = -8.124434327, dd = 104.2352450\}$$



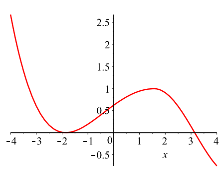
Questão 3)

```
> g:=x->sin(x);
  h:=x->(x-5)^2*(x-Pi+5)^2*16/(Pi-10)^4;
  f:=x->piecewise(x<Pi/2,h(x),x>Pi/2,g(x));
  plot(f(x),x=-4..4);
```

$$g := x \to \sin(x)$$

$$h := x \to \frac{16\,(x-5)^2\,(x-\pi+5)^2}{(\pi-10)^4}$$

$$f := x \to piecewise\left(x < \frac{1}{2}\,\pi, h(x), \frac{1}{2}\,\pi < x, g(x)\right)$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [Pi-5,Pi]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Resolução: Invertendo a função h(x):

```
> solve(x=j(y),y);
```

$$RootOf\left(-x + \_Z^4 - 17\ \_Z^3 - 34\ \_Z^2 + 800\ \_Z + 2400\right) \tag{2}$$

Não deu certo, vai ter que inverter o outro lado. Assim o domínio seria de Pi-5 até Pi/2 e a inversa do seno neste intervalo é: Pi - arcsin(x). Fica

```
> OV:=x->Pi-arcsin(h(x));
```

$$OV := x \rightarrow \pi - \arcsin(h(x)) \tag{3}$$

```
> A:=x->(OV(x)-x)*h(x);
```

$$A := x \rightarrow (OV(x) - x)\ h(x) \tag{4}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0,x=Pi-5..Pi/2);
```

$$0.04811377338 \tag{5}$$

```
> evalf(A(%));
```

$$1.542424805 \tag{6}$$

MAT1161 – Cálculo a uma Variável
G2 - Maple – 20 de maio de 2016
Versão IV

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 3$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 1$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = e^x + 4e^{-10(x-1)^2} - 3$.

(a) Encontre um polinômio g de grau 3 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f em $p = 0.5$ e que também satisfaça $f''(p) = g''(p)$ e $f'''(p) = g'''(p)$.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{(x+2)(x-2)^2}{8}, & x > 0. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

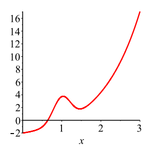
Gabarito - versão IV

Questão 1) Método de Newton

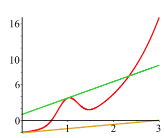
Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->exp(x)+4*exp( -(x-1)^2*10 ) - 3;
  plot(f(x),x=0..3,numpoints=10000);
  x0:=1.0;
  x1:=x0-f(x0)/D(f)(x0);
  x2:=x1-f(x1)/D(f)(x1);
  plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=0..3,
  numpoints=10000);
```

$$f := x \rightarrow e^{x} + 4\, e^{-10\,(x-1)^2} - 3$$



$$x0 := 1.0$$
$$x1 := -0.367879441$$
$$x2 := 2.966120155$$



Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=0.5, encontre um polinômio de grau 3 que seja tangente e tenha f ´´ = g ´´ e f ´´´ = g ´´´. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

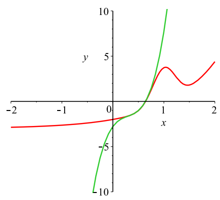
```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d;
  x0:=0.5;
```

```
s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),D(D(f))(x0)=D(D(g))(x0),D(D(D(f)))(x0)=D(D(D(g)))(x0)});
plot([f(x),subs(s,g(x))],x=-2..2,y=-10..10);
```

$$g := x \to a\, x^3 + b\, x^2 + c\, x + d$$

$$x0 := 0.5$$

$$s := \{a = 22.16411985, b = -19.28821936, c = 7.597250688, d = -2.770024220\}$$



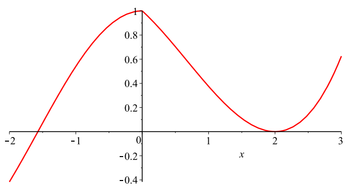
Questão 3)

```
> g:=x->(x+2)*(x-2)^2/8;
  h:=x->cos(x);
  f:=x->piecewise(x<0,h(x),x>0,g(x));
  plot(f(x),x=-2..3);
```

$$g := x \to \frac{1}{8}\,(x+2)\,(x-2)^2$$

$$h := x \to \cos(x)$$

$$f := x \to piecewise(x < 0, h(x), 0 < x, g(x))$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [-Pi/2,2]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Resolução:

Invertendo o polinômio.

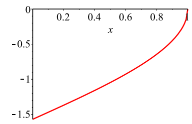
```
> solve(x=g(y),y);
```

$$\frac{1}{3}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}+\frac{16}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3},\ -\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}+\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}\right),\ -\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}-\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Poderíamos tentar descobrir qual dessas é a parte que queremos, que tem o intervalo [0,2] na imagem, mas isso parece muito complicado. (Mas daria certo!)

Em vez disso, vamos inverter o coseno no intervalo certo.

```
> plot(-arccos(x),x=0..1);
```



Domínio de x vai ser de 0 até 2. O outro vértice vai estar em:

```
> OV:=x->-arccos(g(x));
```

$$OV := x \rightarrow -\arccos(g(x)) \tag{2}$$

Testando:

```
> evalf(OV(0.5));
  evalf(OV(1.2));
```

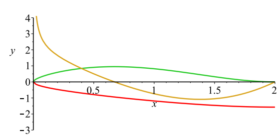
$$-0.7910135158$$
$$-1.311914293 \tag{3}$$

Agora a função área:

```
> A:=x->(x-OV(x))*g(x);
```

$$A := x \rightarrow (x - OV(x))\, g(x) \tag{4}$$

```
> plot([OV(x),A(x),D(A)(x)],x=0..2,y=-3..4);
```



```
> solve(D(A)(x)=0);
Warning, solutions may have been lost
```

$$2 \tag{5}$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0);
```

$$0.6718899675 \tag{6}$$

Ficou no lugar certo, então não preciso colocar um intervalo.

```
> A(%);
```

$$0.9500753255 \tag{7}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.9500753255 \tag{8}$$

MAT1161 – Cálculo a uma Variável

G2 - Maple – 20 de maio de 2016

Versão V

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = 3^x + 5\,\text{sen}(10x) - 30$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 3$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = 3^x + 5\,\text{sen}(10x) - 30$.

(a) Encontre um polinômio g de grau 3 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f em $p = 0.5$ e que também satisfaça $f''(p) = g''(p)$ e $f'''(p) = g'''(p)$.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2), & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{(x+2)(x-2)^2}{8}, & x > 0. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $\left[-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, 2\right]$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

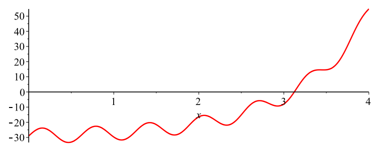
Gabarito - versão V

Questão 1) Método de Newton

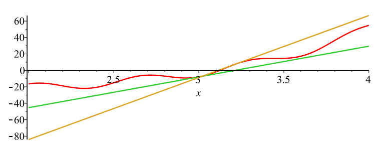
Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->3^x+5*sin(x*10)-30;
  plot(f(x),x=0..4,numpoints=10000);
  x0:=3.0;
  x1:=evalf(x0-f(x0)/D(f)(x0));
  x2:=evalf(x1-f(x1)/D(f)(x1));
  plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=2..4,
  numpoints=10000);
```

$$f := x \to 3^x + 5\sin(10\,x) - 30$$



$$x0 := 3.0$$
$$x1 := 3.212445109$$
$$x2 := 3.114981433$$



Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=0.5, encontre um polinômio de grau 3 que seja tangente e tenha f ´´ = g ´´ e f ´´´ = g ´´´. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

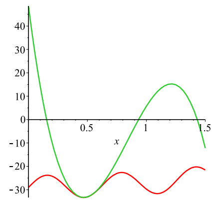
```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d;
  x0:=0.5;
  s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),D(D(f))(x0)=D(D(g))(x0),D
```

```
(D(D(f)))(x0)=D(D(D(g)))(x0)});
plot([f(x),subs(s,g(x))],x=0..1.5);
```

$$g := x \to a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$$x0 := 0.5$$

$$s := \{a = -236.0023804, b = 594.7798878, c = -401.6921409, d = 48.58882548\}$$



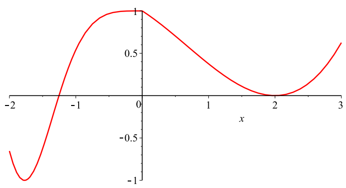
Questão 3)

```
> g:=x->(x+2)*(x-2)^2/8;
  h:=x->cos(x^2);
  f:=x->piecewise(x<0,h(x),x>0,g(x));
  plot(f(x),x=-2..3);
```

$$g := x \to \frac{1}{8}\,(x+2)\,(x-2)^2$$

$$h := x \to \cos(x^2)$$

$$f := x \to piecewise(x < 0, h(x), 0 < x, g(x))$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [-sqrt(Pi/2),2]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Resolução:

Invertendo o polinômio.

```
> solve(x=g(y),y);
```

$$\frac{1}{3}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}+\frac{16}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3},\ -\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}+\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}\right),\ -\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}+\frac{2}{3}-\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}-\frac{8}{3\left(-64+108\,x+12\sqrt{-96\,x+81\,x^2}\right)^{1/3}}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Poderíamos tentar descobrir qual dessas é a parte que queremos, que tem o intervalo [0,2] na imagem, mas isso parece muito complicado. (Mas daria certo!)

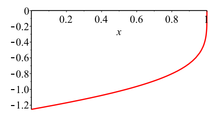
Em vez disso, vamos inverter a outra função.

```
> solve(x=h(y),y);
```

$$\sqrt{\arccos(x)},\ -\sqrt{\arccos(x)} \tag{2}$$

Note que queremos a resposta com o sinal de menos, pois o domínio está nos números negativos.
Conferindo:

```
> plot(-sqrt(arccos(x)),x=0..1);
```



Domínio de x vai ser de 0 até 2. O outro vertice vai estar em:

```
> OV:=x->-sqrt(arccos(g(x)));
```

$$OV := x \rightarrow -\sqrt{\arccos(g(x))} \tag{3}$$

Testando:

```
> evalf(OV(0.5));
  evalf(OV(1.2));
```

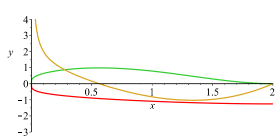
$$-0.8893894062$$
$$-1.145388272 \tag{4}$$

Agora a função área:

```
> A:=x->(x-OV(x))*g(x);
```

$$A := x \rightarrow (x - OV(x))\, g(x) \tag{5}$$

```
> plot([OV(x),A(x),D(A)(x)],x=0..2,y=-3..4);
```




```
> solve(D(A)(x)=0);
```

Warning, solutions may have been lost

(6)

$$2 \qquad (6)$$

```
> fsolve(D(A)(x)=0);
```

$$0.5612761513 \qquad (7)$$

Ficou no lugar certo, então não preciso colocar um intervalo.

```
> A(%);
```

$$0.9816403718 \qquad (8)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.9816403718 \qquad (9)$$

MAT1161 – Cálculo a uma Variável
G2 - Maple – 20 de maio de 2016
Versão VI

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,0$		
2^a	$1,0$		
3^a	$1,0$		
Total	$3,0$		

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara e rigorosa. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Quando usar o Maple na resolução de qualquer questão, deixe isto claro fornecendo os comandos de entrada no programa.
- Respostas aproximadas devem ser dadas com 5 casas decimais.
- Você pode consultar o *Help* do Maple durante a prova, mas não pode consultar quaisquer outros materiais.
- Você não pode utilizar comandos do pacote *student* para resolver ou justificar as questões da prova.
- Você não pode obter ajuda do professor (nem de colegas) com seus comandos durante a prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Atenção:

Antes de se desesperar, verifique se o seu erro não é de um destes tipos comuns:

- Falta de ; no final da linha
- Parênteses que abre mas não fecha ou fecha mas não abre
- Falta do = ou do : na atribuição de valor (f:=...)
- Falta de -> na atribuição de função (f:=x->...)
- X maiúsculo onde deveria ser minúsculo
- Deixar de usar parênteses para algum comando
- Deixar de especificar domínio para o plot (x=...) ou o implicitplot (x=...,y=...)
- Falta do sinal de multiplicação (é 2*x e não 2x)
- O comando para a função seno é sin e não sen
- Ordem certa dos parênteses na derivada é D(f)(x)
- Os comandos Int e Sum são diferentes dos int e sum
- π se escreve Pi (e não PI ou pi)
- e^x se escreve exp(x)
- O separador de decimal é o ponto e não a vírgula (por exemplo, $\frac{1}{10} = 0.1$ e não $0,1$)
- Espaço indevido entre o nome do comando e o argumento (por exemplo, sin (x) se escreve sin(x); plot (f(x),...) se escreve plot(f(x),...))

Lembre também que frequentemente uma linha que foi apagada (porque você mudou de ideia) continua tendo efeitos sobre o que você fizer depois. Use o comando restart; e abaixo dele copie só aquelas linhas que forem relevantes para o problema, apertando enter em todas.

Embora seu arquivo não seja utilizado para correção, recomendamos que você o salve com frequência para evitar perda de trabalho em caso de travamento do programa durante a prova.

Questão 1. Considere a função $f(x) = 3^x + 10\,\mathrm{sen}(5x) - 20$. Desejamos encontrar uma aproximação para uma raiz de f usando o método de Newton com o valor inicial $x_0 = 2.3$.

(a) Encontre os valores de x_1, x_2 e x_3 (com 5 casas decimais).

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com suas retas tangentes em x_0 e x_1 em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 2. Considere a função $f(x) = 3^x + 10\,\mathrm{sen}(5x) - 20$.

(a) Encontre um polinômio g de grau 3 cujo gráfico seja tangente ao gráfico de f no ponto $p = 1$ e que também satisfaça $f''(p) = g''(p)$ e $f'''(p) = g'''(p)$.

(b) Desenhe o gráfico da função f junto com o gráfico do polinômio encontrado no item (a) em uma boa janela de visualização. Além dos comandos, copie para o papel como ficou o desenho.

Questão 3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2), & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{(x+1)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo x no intervalo $\left[-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, \infty\right)$. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

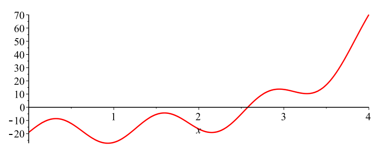
Gabarito - versão VI

Questão 1) Método de Newton

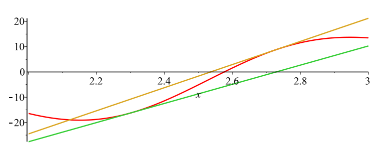
Considere a função e o x0 dado abaixo, encontre os valores de x1 e x2 (e desenhe a função junto com as retas tangentes em x0 e x1). Escolha uma boa janela de visualização.

```
> f:=x->3^x+10*sin(x*5)-20;
  plot(f(x),x=0..4,numpoints=10000);
  x0:=2.3;
  x1:=evalf(x0-f(x0)/D(f)(x0));
  x2:=evalf(x1-f(x1)/D(f)(x1));
  plot([f(x),D(f)(x0)*(x-x0)+f(x0),D(f)(x1)*(x-x1)+f(x1)],x=2..3,
  numpoints=10000);
```

$$f := x \rightarrow 3^x + 10 \sin(5\,x) - 20$$



$$x0 := 2.3$$
$$x1 := 2.728379099$$
$$x2 := 2.535418769$$



Questão 2. Com a mesma função da questão anterior, no ponto x0=0.5, encontre um polinômio de grau 3 que seja tangente e tenha f´´ = g´´ e f´´´ = g´´´. Coloque no desenho junto com a função. Escolha uma boa janela de visualização.

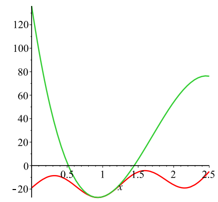
```
> g:=x->a*x^3+b*x^2+c*x+d;
  x0:=1.0;
  s:=solve({f(x0)=g(x0),D(f)(x0)=D(g)(x0),D(D(f))(x0)=D(D(g))(x0),D
```

```
(D(D(f)))(x0)=D(D(D(g)))(x0)});
plot([f(x),subs(s,g(x))],x=0..2.5);
```

$$g := x \to a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$$x0 := 1.0$$

$$s := \{a = -58.43330417,\ b = 296.9758703,\ c = -401.1728819,\ d = 136.0410731\}$$



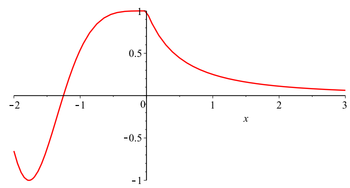
Questão 3)

```
> g:=x->1/(x+1)^2;
  h:=x->cos(x^2);
  f:=x->piecewise(x<0,h(x),x>0,g(x));
  plot(f(x),x=-2..3);
```

$$g := x \to \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$h := x \to \cos(x^2)$$

$$f := x \to \mathit{piecewise}(x < 0,\ h(x),\ 0 < x,\ g(x))$$



Considere a função f(x) definida acima. Desejamos construir um retângulo com dois vértices sobre o gráfico da função e dois vértices sobre o eixo x no intervalo [-sqrt(Pi/2),2]. Qual é a área máxima que podemos obter para esse retângulo?

Resolução:

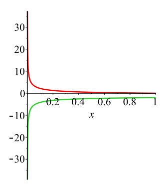
Invertendo g(x).

```
> solve(x=g(y),y);
```

$$-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}, -\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

Qual dessas duas funções é a que nós queremos?

```
> plot([-(sqrt(x)-1)/sqrt(x),-(sqrt(x)+1)/sqrt(x)],x=0..1);
```



É a vermelha, pois dá valores positivos.

```
> k:=x->-(sqrt(x)-1)/sqrt(x);
```

(2)

$$k := x \rightarrow -\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

(Em vez disso, poderíamos inverter a outra função. Mas vamos seguir o caminho acima.)

```
> solve(x=h(y),y);
```

$$\sqrt{\arccos(x)},\ -\sqrt{\arccos(x)} \quad (3)$$

Domínio de x vai ser de -sqrt(Pi/2) até zero. O outro vértice vai estar em:

```
> OV:=x->k(h(x));
```

$$OV := x \rightarrow k(h(x)) \quad (4)$$

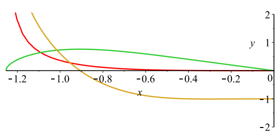
(5)

Agora a função área:

```
> A:=x->(OV(x)-x)*h(x);
```

$$A := x \rightarrow (OV(x) - x)\, h(x) \quad (6)$$

```
> plot([OV(x),A(x),D(A)(x)],x=-sqrt(Pi/2)..0,y=-2..2);
```




```
> solve(D(A)(x)=0);
Warning, solutions may have been lost
> fsolve(D(A)(x)=0);
```

$$-0.9066122232 \quad (7)$$

Ficou no lugar certo, então não preciso colocar um intervalo.

```
> A(%);
```

$$0.7615262760 \quad (8)$$

```
> evalf(%);
```

$$0.7615262760 \quad (9)$$