MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P3 – 29 de junho de 2017

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ____________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$2,0$		
2^a	$2,0$		
3^a	$1,0$		

T3 (2,0)	P3 Maple (3,0)	P3 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

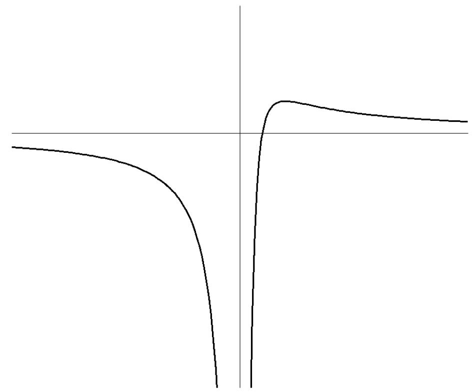
- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, cujo gráfico está esboçado abaixo:



Sabendo que o eixo x é uma assíntota horizontal do gráfico de f, faça o que se pede.

(a) Seja $\mathcal{R}$ a região plana definida por

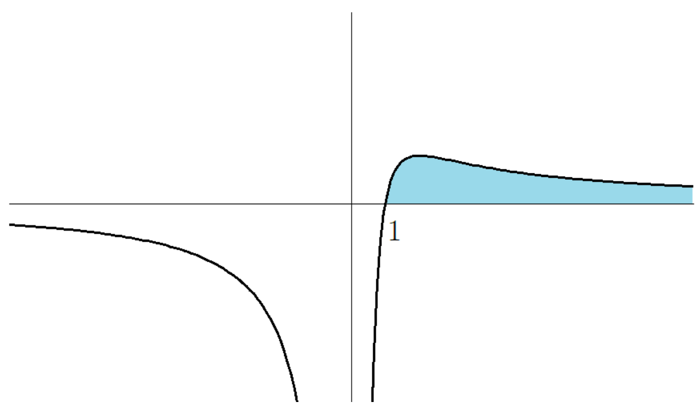
$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq y \leq f(x) \right\} .$$

Calcule a área de $\mathcal{R}$ e conclua que ela é infinita.

Observe que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo, a região $\mathcal{R}$ é essa esboçada abaixo:



$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\mathcal{R}) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[\ln(|x|) + \frac{1}{x} \right] \Big|_{x=1}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(\ln(|t|) + \frac{1}{t} \right) - (0+1) \right] = +\infty \end{aligned}$$

(b) Seja $\mathcal{S}$ o sólido obtido pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo x. Calcule o volume de $\mathcal{S}$.

Pelo Método de Discos,

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \int_1^{+\infty} A(x)\,dx\,,$$

onde $A(x)$ é a área de cada disco perpendicular ao eixo x com raio $r = f(x)$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\mathcal{S}) &= \int_1^{+\infty} \pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 \,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 \,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \pi \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\pi \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3}\right)\Big|_{x=1}^{t}\right] \\
&= \pi \lim_{t\to+\infty} \left[\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{3t^3}\right) - \left(-1 + 1 - \frac{1}{3}\right)\right] \\
&= \pi \left(0 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Questão 2

Considere a função g definida por

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-4}$$

(a) Determine o domínio da função g.

Observe que

$$\begin{aligned} x^2-4 \geq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) \\ 2x-4 \neq 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x \neq 2 \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty,-2] \cup (2,+\infty)$.

(b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de g, caso existam.

Temos que

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}(2x-4) - 2\sqrt{x^2-4}}{(2x-4)^2} = \frac{x(2x-4)-2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}(2x-4)^2} = \frac{-4x+8}{\sqrt{x^2-4}(2x-4)^2}$$

Como o denominador de $g'(x)$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x+8 > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Levando em consideração que $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty,-2] \cup (2,+\infty)$, segue que

$$\begin{aligned} &\text{Intervalo de crescimento de } g : (-\infty,-2] \\ &\text{Intervalo de decrescimento de } g : (2,+\infty) \end{aligned}$$

(c) Determine as equações das retas assíntotas horizontais e verticais do gráfico de g, caso existam.

Retas assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $y = \dfrac{1}{2}$ e $y = -\dfrac{1}{2}$ são retas assíntotas horizontais do gráfico de g.

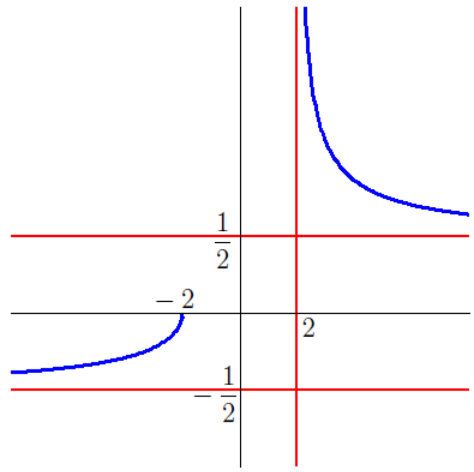
Retas assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-4} = 0$$

$$\lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-4} = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{2(x-2)} = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x-2}} = +\infty$$

Logo, $x = 2$ é a única reta assíntota vertical do gráfico de g.

(d) Utilizando as informações obtidas nos itens anteriores, esboce o gráfico de g e suas retas assíntotas, caso existam.



Questão 3

Seja f a função definida por $f(x) = \text{sen}(x^2)$.

(a) Mostre que a função f é inversível no intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.

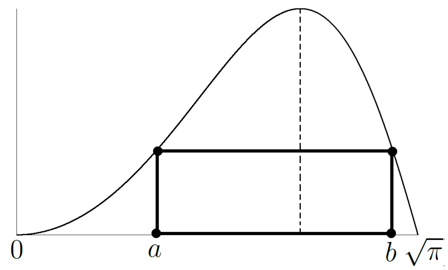
Primeiramente observe que se $x \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$, então $x^2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Como $f'(x) = 2x\cos(x^2)$, segue que:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- Se $x \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, então $2x > 0$ e $\cos(x^2) > 0$, logo $f'(x) > 0$

Conclui-se então que f é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$, logo é inversível.

(b) *Considere um retângulo com dois vértices (de abscissas a e b) sobre o eixo x e dois vértices sobre o gráfico da função f, como indicado na figura abaixo. Escreva a área do retângulo como uma função de b.*



A este item um aluno deu a seguinte resposta:

> Os vértices do retângulo são $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, \operatorname{sen}(a^2))$ e $(b, \operatorname{sen}(b^2))$. Logo, a área do retângulo é dada por:
>
> $$\text{Área} = \text{comprimento da base} \, . \, \text{altura} = (b - a). \operatorname{sen}(b^2)$$
>
> Para que a área seja escrita como uma função apenas de b, devemos escrever a em termos de b. Sabemos que a é tal que
>
> $$\begin{aligned} & \operatorname{sen}(a^2) = \operatorname{sen}(b^2) \\ \Rightarrow \ & \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(a^2\big)\big) = \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(b^2\big)\big) \\ \Rightarrow \ & a^2 = b^2 \\ \Rightarrow \ & a = b \quad (\text{pois } a, b > 0) \end{aligned}$$
>
> Conclui-se que o comprimento da base do retângulo é $b - a = b - b = 0$, logo a área do retângulo é 0.

Corrija a resolução do aluno e determine corretamente a área do retângulo em termos de b.

O aluno errou ao escrever que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(a^2)) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(b^2)) \Rightarrow a^2 = b^2$. De fato, utilizando o item (a), temos que:

$$\begin{aligned} & a \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \\ \Rightarrow \ & a^2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Rightarrow \ & \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(a^2\big)\big) = a^2 \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned} & b \in \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right) \\ \Rightarrow \ & b^2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \not\subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Rightarrow \ & \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(b^2\big)\big) \neq b^2 \end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$\begin{aligned} & \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(a^2\big)\big) = \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(b^2\big)\big) \\ \Rightarrow \quad & a^2 = \operatorname{arcsen}\big(\operatorname{sen}\big(b^2\big)\big) \\ \Rightarrow \quad & a = \sqrt{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(b^2))}\,, \quad \text{pois } a > 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Área} = (b-a).\operatorname{sen}(b^2) = \left(b - \sqrt{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(b^2))}\right)\operatorname{sen}(b^2)$$