PUC RIO

MAT1161/MAT1181
Cálculo de Uma Variável
P2 – 15 de maio de 2018

Nome Legível : Gabarito

Assinatura :

Matrícula : Turma :

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$1,5$		
3^a	$2,0$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

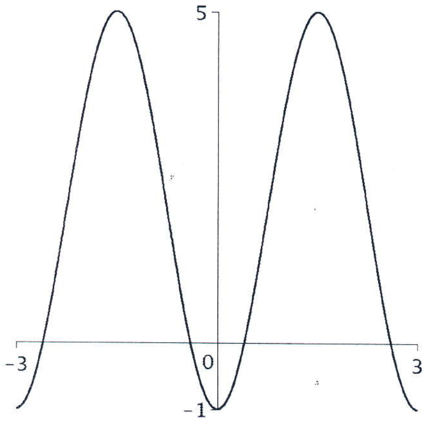
Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões: a primeira e a segunda com 3 itens cada, a terceira com 4 itens. Confira.

Questão 1

Considere a função $f(x) = A\cos(Bx) + C$.

(a) Sabendo que a curva abaixo é o gráfico de f, determine A, B e C.



• Período = 3

$\Rightarrow B = \frac{2\pi}{3}$

• $A < 0$, pois o gráfico de f cresce imediatamente após $x = 0$.

• $\operatorname{Im}(f) = [-1, 5]$, um intervalo de comprimento 6.

Logo $A = -3$, $C = 2$.

(b) Determine todos os valores de $x \in [0, 3]$ que satisfazem a equação $f(x) = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} \iff -3\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2 = \frac{1}{2}, \quad x \in [0,3]$$

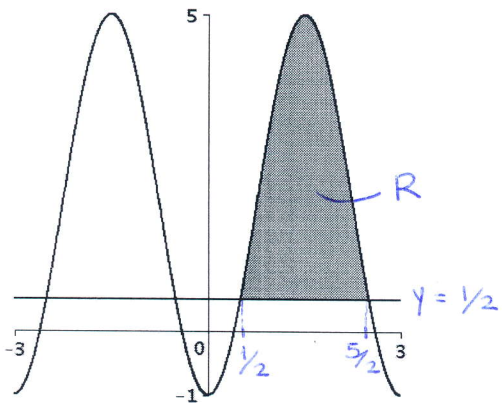
$$\iff \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad x \in [0,3]$$

$$\iff \cos(\theta) = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{2\pi x}{3} \in [0, 2\pi]$$

$$\iff \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$\iff x = \frac{3\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \quad //$$

(c) Calcule a área da região $\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 3,\ \frac{1}{2} \leq y \leq f(x) \right\}$.



$$A(R) = \int_{1/2}^{5/2} f(x) - 1/2 \, dx$$

$$= \int_{1/2}^{5/2} -3\cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + 2 - \frac{1}{2} \, dx$$

$$= -3 \int_{1/2}^{5/2} \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) dx + \frac{3}{2} \int_{1/2}^{5/2} 1 \, dx$$

$$= \left(-3 \cdot \frac{3}{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{3x}{2} \right) \Bigg|_{x=1/2}^{5/2} = \frac{3}{2} \left(\frac{-3}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + x \right) \Bigg|_{x=1/2}^{5/2}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\left(-\frac{3}{\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5}{2} \right) - \left(-\frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} + 3 \,//$$

Questão 2

Considere a função $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, cujo domínio é o maior intervalo possível para que f seja inversível e para que o gráfico de f^{-1} (a função inversa de f) passe pelo ponto $(1, 0)$.

(a) Determine o domínio de f e o domínio de f^{-1}.

$(1,0) \in \text{graf}(f^{-1}) \Rightarrow (0,1) \in \text{graf}(f)$

$\Rightarrow x = 0 \in \text{Dom}(f)$.

Observe que $f'(x) = -2x + 2 = 0 \iff x = 1$.

Logo a função f (que é quadrática) é inversível nos domínios $(-\infty, 1]$ e $[1, +\infty)$. Como $x = 0$ deve pertencer ao domínio de f, escolheremos

$\text{Dom}(f) = (-\infty, 1]$.

Além disso, $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f) = (-\infty, f(1)] = (-\infty, 2]$.

(b) Determine uma expressão para $f^{-1}(x)$.

$y = -x^2 + 2x + 1 \iff x^2 - 2x + y - 1 = 0$

$\iff x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1(y-1)}}{2}$ (Bhaskara)

$\iff x = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{1 + (1-y)}}{2}$

$\iff x = 1 \pm \sqrt{2-y}$

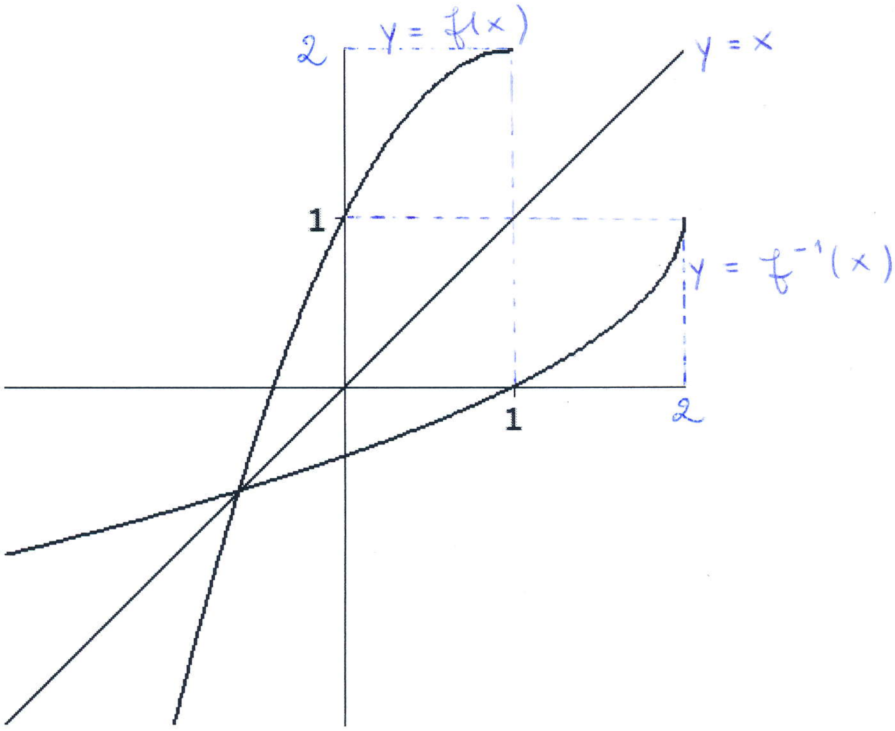
Como $x \in Dom(f) = (-\infty, 1]$, então $x \leq 1$. Logo

$x = 1 - \sqrt{2-y}$.

Conclui-se que $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{2-x}$ //

Obs.: Poderíamos chegar ao mesmo resultado reescrevendo a eq. da parábola $y = -x^2 + 2x + 1$ como $y = -(x-1)^2 + 1$ (pois seu vértice é $(1,1)$). Assim, não precisaríamos de Bhaskara para isolar x.

(c) Esboce abaixo a reta $y = x$ e os gráficos das funções f e f^{-1} (em seus respectivos domínios).



Questão 3

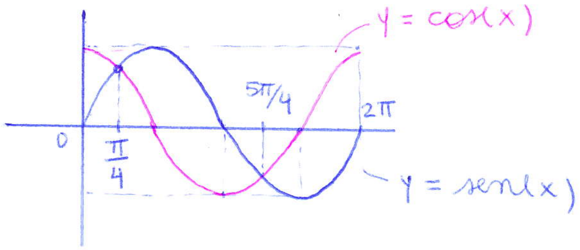
Considere a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = e^x \cos(x) .$$

(a) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de f.

$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) = e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$

Análise do sinal de f':



e^x	+	+	+
$\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$	+	−	+
$f'(x)$	+	−	+
	0 — $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ — $\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$ — 2π

Obs.: Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, verifique que o gráfico de $\cos(x)$ está acima do gráfico de $\operatorname{sen}(x)$, então $\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \geq 0$. Para os outros intervalos, procedemos de maneira análoga.

Int. cresc. f : $[0, \pi/4]$, $[5\pi/4, 2\pi]$

Int. decresc. f : $[\pi/4, 5\pi/4]$

(b) Determine os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e onde tem concavidade voltada para baixo.

$f''(x) = e^x(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + e^x(-\operatorname{sen}(x) - \cos(x))$

$= -2e^x \operatorname{sen}(x)$.

Análise de sinal de f'':

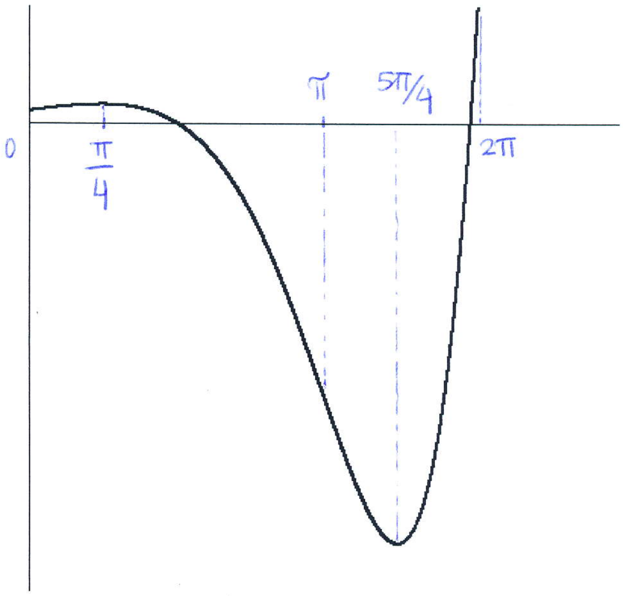
$-2e^x$	−	−
$\operatorname{sen}(x)$	+	−
$f''(x)$	−	+
	0 — π	π — 2π

Logo,

Int. conc. p/ cima : $[\pi, 2\pi]$

Int. conc. p/ baixo: $[0, \pi]$.

(c) Faça um esboço do gráfico de f indicando explicitamente as abscissas dos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.



(d) Sejam a e b as duas raízes da função f no intervalo $[0, 2\pi]$, $a < b$. Calcule $\int_a^b e^x \cos(x)\, dx$.

$f(x) = 0 \iff e^x \cos(x) = 0 \iff \cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}, \; 3\pi/2$

Devemos calcular $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^x \cos(x)\, dx$.

Integral indefinida:

Partes: $u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$

$dv = \cos(x)\, dx \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x)$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x)\, dx}$$

Partes: $u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$

$dv = \operatorname{sen}(x)\, dx \Rightarrow v = -\cos(x)$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + c$$

Logo $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\exp\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot(-1) - \exp\left(\pi/2\right)\cdot 1\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(-\exp\left(3\pi/2\right) - \exp\left(\pi/2\right)\right) \;//$$