MAT1161 – Cálculo de Uma Variável
P2 – 19 de maio de 2016

Nome Legível : ______________________________

Assinatura : ______________________________

Matrícula : ______________________ Turma : __________

Questão	Valor	Grau	Revisão
1^a	$1,5$		
2^a	$1,5$		
3^a	$2,0$		

T2 (2,0)	P2 Maple (3,0)	P2 (5,0)	Total (10,0)	Revisão

Instruções Gerais:

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

Instruções Específicas:

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

Questão 1

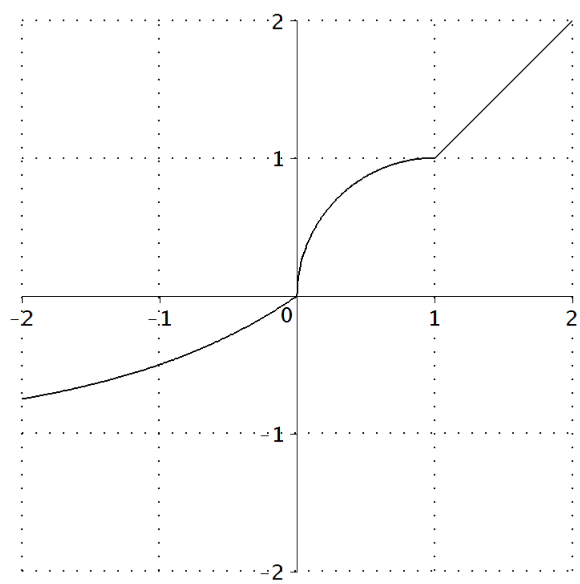
Considere a função f definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x)\,, & -2 \le x \le 0 \\ f_2(x)\,, & 0 < x \le 1 \\ f_3(x)\,, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

tal que

- $f_1(x) = a^x + b,\ \ a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbb{R}$
- O gráfico de f_2 é metade de uma semicircunferência
- O gráfico de f_3 é um segmento de reta

A figura abaixo é o gráfico de f:



(a) Sabendo que:

- Os <u>valores máximos</u> de f_1, f_2 e f_3 são 0, 1, 2, respectivamente
- O ponto $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de f

determine as expressões das funções f_1, f_2 e f_3, explicitando o valor das constantes a e b.
<u>Solução</u>:

Os pontos $(0,0)$ e $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ pertencem ao gráfico de f_1:

$$\begin{cases} f_1(-1) = \dfrac{1}{a} + b = -\dfrac{1}{2} \\ f_1(0) = 1 + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 2,\ b = -1$$

Logo,

$$f_1(x) = 2^x - 1\,.$$

Para determinar a expressão de f_2 devemos primeiramente determinar a equação da circunferência de centro $(1,0)$ e raio 1:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1\,.$$

Logo,

$$y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

Como o gráfico de f_2 é um trecho da semicircunferência superior, segue que

$$f_2(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

Como o gráfico de f_3 é um segmento de reta, sua expressão é da forma $f_3(x) = cx + d$, onde c e d são constantes reais. Pelas informações do enunciado, temos que o gráfico de f_3 passa pelos pontos $(1,1)$ e $(2,2)$. Logo,

$$\begin{cases} f_3(1) = c + d = 1 \\ f_3(2) = 2c + d = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c = 1,\ d = 0$$

Assim,

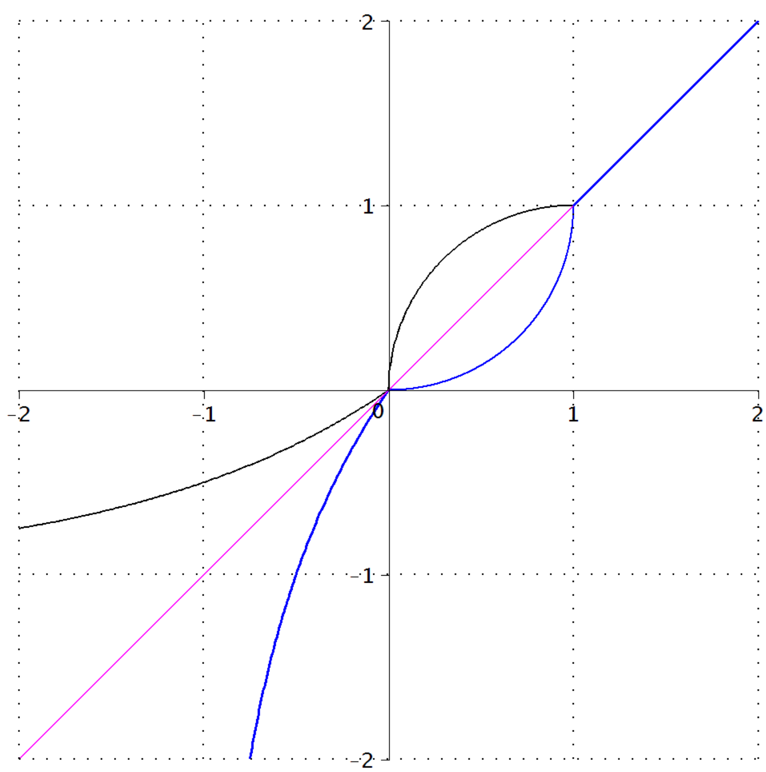
$$f_3(x) = x\,.$$

(b) A função f é inversível? Em caso afirmativo, esboce abaixo a reta $y = x$ e o gráfico de f^{-1}.

Lembre-se de justificar as suas respostas!

Solução:

Sim, pois f é estritamente crescente em todo o seu domínio.



Questão 2

Considere a função $f(x) = \cos(3x) + 2$.

(a) Considere como domínio de f o maior intervalo possível para que f seja inversível e para que o gráfico de f^{-1} (a função inversa de f) passe pelo ponto $P = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$. Nestas condições, determine o domínio de f e também o de f^{-1}, e determine uma expressão para $f^{-1}(x)$.

Solução:

Sabendo que os gráficos de f e f^{-1} devem ser simétricos com relação à reta $y = x$, se o ponto $P = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ pertence ao gráfico de f^{-1}, então o ponto $Q = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ pertence ao gráfico de f. Ou seja, $\text{Dom}(f)$ deve ser um intervalo que contenha $x = \frac{\pi}{2}$ no qual f seja estritamente crescente ou decrescente.

Observe que:

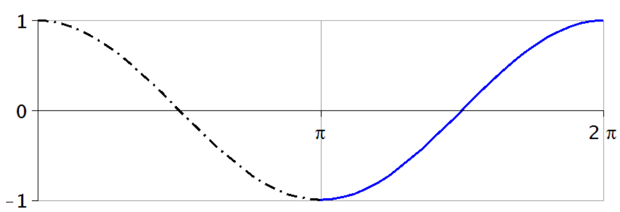
$$f'(x) = -3\,\text{sen}(3x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Como $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3}$, então $\text{Dom}(f) = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Além disso, $\text{Im}(f) = [1, 3] = \text{Dom}(f^{-1})$.

Para determinar a expressão de f^{-1}:

$$y = \cos(3x) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2 = \cos(3x) \tag{1}$$

Para isolar a variável x, devemos aplicar aos dois lados da equação (1) a função inversa de $\cos(3x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Para determiná-la, considere $\theta = 3x$ (logo $\theta \in [\pi, 2\pi]$). Abaixo esboçamos a curva $y = \cos(\theta)$:



- Se $g(\theta) = \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, então $g^{-1}(\theta) = \arccos(\theta)$
- A curva em azul ($\theta \in [\pi, 2\pi]$) pode ser obtida por uma reflexão da curva tracejada com relação ao eixo vertical seguida de um deslocamento de 2π unidades para a direita.
- Conclui-se que se $g(\theta) = \cos(\theta)$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$, então $g^{-1}(\theta) = 2\pi - \arccos(\theta)$ (reflexão da curva $y = \arccos(\theta)$ com relação ao eixo horizontal seguida de deslocamento de 2π unidades para cima)

Assim, voltando à equação (1):

$$\begin{aligned} y = \cos(3x) + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad y - 2 = \cos(3x) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\pi - \arccos(y-2) = 3x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi - \arccos(y-2)}{3} \end{aligned}$$

E então,

$$f^{-1}(x) = \frac{2\pi - \arccos(x-2)}{3}\,.$$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto P.

Solução:

$$y = \left(f^{-1}\right)'(2)\,(x-2) + f^{-1}(2)\,.$$

Temos que $f^{-1}(2) = \dfrac{2\pi - \arccos(0)}{3} = \dfrac{\pi}{2}\,.$

Pelo Teorema da Função Inversa,

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{3\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{1}{3}\,.$$

Logo, a equação pedida é:

$$y = \frac{1}{3}(x-2) + \frac{\pi}{2}\,.$$

Questão 3

Considere as funções $f(x) = \displaystyle\int_0^x (t-4)^4 e^t\,\mathrm{d}t$ e $g(x) = x^2$.

(a) Escreva a expressão da função h definida por $h(x) = f(g(x))$.

Solução:

$h(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (t-4)^4 e^t\,dt$

(b) Derive a função h.

Solução:

$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = (x^2-4)^4 e^{x^2}\,2x\,.$

(c) Determine a(s) abscissa(s) (coordenada x) do(s) ponto(s) de máximo local e de mínimo local de h, caso exista(m).

Solução:

$$h'(x) = (x^2-4)^4 e^{x^2}\, 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2, 0, 2$$

Estudo de sinal de $h'(x)$:

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$(x^2-4)^4$	$+$	$+$	$+$	$+$
e^{x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$h'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Conclui-se que o intervalo de crescimento de h é $[0, +\infty)$ e o intervalo de decrescimento é $(-\infty, 0]$. Logo, em $x = 0$ temos um mínimo local de h. Em $x = 2$ e $x = -2$ não existem máximos nem mínimos.

(d) Calcule a segunda derivada da função h.

Solução:

$$\begin{aligned}
h''(x) &= 4(x^2-4)^3\, 2x\, e^{x^2}\, 2x + (x^2-4)^4\, e^{x^2}\, 2x\, 2x + (x^2-4)^4\, e^{x^2}\, 2 \\
&= 16x^2\, e^{x^2}(x^2-4)^3 + 4x^2\, e^{x^2}(x^2-4)^4 + 2e^{x^2}(x^2-4)^4 \\
&= 2e^{x^2}(x^2-4)^3(8x^2 + 2x^2(x^2-4) + (x^2-4)) \\
&= 2e^{x^2}(x^2-4)^3(2x^4 + x^2 - 4)
\end{aligned}$$

(e) Determine a(s) abscissa(s) (coordenada x) do(s) ponto(s) de inflexão de h, caso exista(m).

Solução:

$$h''(x) = 2e^{x^2}(x^2-4)^3(2x^4+x^2-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x=-2 \text{ ou } x=2 \text{ ou } 2x^4+x^2-4=0\,.$$

Para resolver a equação $2x^4+x^2-4=0$, considere $y=x^2$:

$$2x^4+x^2-4=0 \;\Leftrightarrow\; 2y^2+y-4=0 \;\Leftrightarrow\; y=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$$

Como $y=x^2\geq 0$, descartaremos a solução negativa $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}$.

Logo,

$$2x^4+x^2-4=0 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{4}}=\alpha \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{4}}=-\alpha\,.$$

Estudo de sinal de $h''(x)$:

	$-\infty<x<-2$	$-2<x<-\alpha$	$-\alpha<x<\alpha$	$\alpha<x<2$	$2<x<\infty$
$2(x^2-4)^3$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
e^{x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^4+x^2-4$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$h''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Conclui-se que os intervalos de concavidade para cima do gráfico de h são $(-\infty,-2]$, $[-\alpha,\alpha]$, $[2,+\infty)$ e os intervalos de concavidade para baixo são $[-2,-\alpha]$ e $[\alpha,2]$. Logo, as abscissas dos pontos de inflexão são $x=-2,-\alpha,\alpha,2$.