# MAT1161/MAT1181
# Cálculo de Uma Variável
# P3 – 26 de junho de 2019

PUC RIO

Nome Legível : Gabarito

Assinatura : ______

Matrícula : ______ Turma : ______

| Questão | Valor | Grau | Revisão |
|---|---|---|---|
| $1^a$ | $1,2$ | | |
| $2^a$ | $2,0$ | | |
| $3^a$ | $1,8$ | | |

| T3 (2,0) | P3 Maple (3,0) | P3 (5,0) | Total (10,0) | Revisão |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Instruções Gerais:**

- A duração da prova é de 1h50min.
- A tolerância de entrada é de 30min após o início da prova. Se um aluno terminar a prova em menos de 30min, deverá aguardar em sala antes de entregar a prova e sair de sala.
- A prova deve ser resolvida apenas nas folhas recebidas e nos espaços reservados para soluções. Não é permitido destacar folhas da prova.
- A prova é sem consulta a professores, fiscais ou a qualquer tipo de material. A interpretação dos enunciados faz parte da prova.
- O aluno só poderá realizar a prova e assinar a lista de presença na sua turma/sala.
- O aluno só poderá manter junto a si: lápis, borracha e caneta. Caso necessário, o fiscal poderá solicitar ajuda a outro aluno e apenas o fiscal repassará o material emprestado.
- O celular deverá ser desligado e guardado.
- O aluno não poderá sair de sala enquanto estiver fazendo a prova.

**Instruções Específicas:**

- Todas as questões devem ser justificadas de forma clara, rigorosa e de preferência sucinta. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta de tinta azul ou preta. Não é permitido o uso de caneta de tinta vermelha ou verde.
- Não é permitido o uso de calculadora ou qualquer dispositivo eletrônico.
- Esta prova possui 3 questões. Confira.

## Questão 1

(a) Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{y^2-y}\,dy$.

$$\frac{1}{y^2-y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} = \frac{A(y-1)+By}{y^2-y} = \frac{(A+B)y - A}{y^2-y}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow A = -1,\ B = 1$$

logo $\displaystyle\int \frac{1}{y^2-y}\,dy = -\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy$

$$= -\ln(|y|) + \ln(|y-1|) + c$$

(b) Resolva o seguinte PVI (Problema de Valor Inicial):

$$\begin{cases} x^2\,y' = y^2 - y \\ y(-1) = -1 \end{cases}$$

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2-y}\,dy$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x} + c = -\ln(|y|) + \ln(|y-1|)$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x} + c = \ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right)$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1/x}\cdot e^{c} = \left|\frac{y-1}{y}\right|$$

$$\Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{y} = \pm e^{-1/x}\cdot e^{c}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{y} = 1 \pm e^{-1/x}\cdot e^{c}$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{1}{1 \pm e^{-1/x}\cdot e^{c}}$$

Aplicando a condição inicial:

$$y(-1) = \frac{1}{1 \pm e\cdot e^{c}} = -1$$

$$\frac{1}{1+e\cdot e^{c}} = -1 \qquad\qquad \frac{1}{1-e\cdot e^{c}} = -1$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\underbrace{-1-e\cdot e^{c}}_{<0} = \underbrace{1}_{>0} \qquad\qquad -1+e\cdot e^{c} = 1$$

(absurdo) $\qquad\qquad \Updownarrow$

$$e^{c} = \frac{2}{e}$$

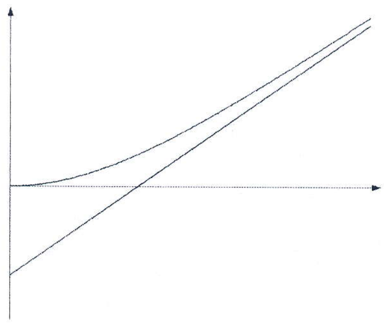
Logo solução do PVI:

$$y(x) = \frac{1}{1 - e^{-1/x}\cdot\frac{2}{e}} \quad //$$

### Questão 2

Considere a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \arctan(x)$.

Esboçamos abaixo o gráfico de $f$ e sua única assíntota.



(a) Mostre que a reta $y = \dfrac{\pi x}{2} - 1$ é assíntota oblíqua do gráfico de $f$.

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty} . \underbrace{\arctan(x)}_{\downarrow\, \pi/2} - \underbrace{\frac{\pi x}{2}}_{\downarrow\, +\infty} + 1 \qquad (\text{Indeterminação } +\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{\left( \arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right)}_{\downarrow\, 0}}_{(\text{Indeterminação } +\infty . 0)} + 1$$

$$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(x) - \pi/2 \ \to 0}{\frac{1}{x} \ \longrightarrow 0} \qquad \left(\text{Indeterminação } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{LH}{=} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 \ \to -\infty}{1 + x^2 \ \to +\infty} \qquad \left(\text{Indet. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{LH}{=} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} -1 = 1 - 1 = 0 \ //$$

(b) Calcule $\underbrace{\int x \arctan(x)\, dx}_{= I}$.

Partes: $u = \arctan(x) \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$

$dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$

Logo $I = \dfrac{x^2}{2} \arctan(x) - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{x^2}{1+x^2}\, dx$ divisão de polinômios

$= \dfrac{x^2}{2} \arctan(x) - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1 + x^2 - 1}{1+x^2}\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \arctan(x) - \dfrac{1}{2} \int 1\, dx + \dfrac{1}{2} \int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} \arctan(x) - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \arctan(x) + c$

$= \dfrac{(x^2+1)}{2} \arctan(x) - \dfrac{x}{2} + c$ //

(c) Considere a região plana

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\,,\ \frac{\pi x}{2} - 1 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Calcule a área de $\mathcal{R}$.

$$A(R) = \int_0^{+\infty} x\arctan(x) - \frac{\pi x}{2} + 1 \, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} x\arctan(x) - \frac{\pi x}{2} + 1 \, dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(x^2+1)}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + x\right]\Bigg|_{x=0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(x^2+1)}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2} - \frac{\pi x^2}{4}\right]\Bigg|_{x=0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{(t^2+1)}{2}}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{\arctan(t)}_{\downarrow \, \pi/2} + \underbrace{\frac{t}{2}}_{\downarrow \, +\infty} - \underbrace{\frac{\pi t^2}{4}}_{\downarrow \, -\infty} - 0 - 0 + 0$$

(Indeterminação $+\infty - \infty$)

$$= \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{\left(\arctan(t) + \frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\arctan(t)}_{\to \frac{\pi}{4}}$$

Indeterminação $0 \cdot (+\infty)$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\arctan(t) + \frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}}{\frac{2}{t^2}} + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\arctan(t)$$

Indeterminação $\frac{0}{0}$.

$$\overset{LH}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2}}{-\frac{4}{t^3}} + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\arctan(t)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \frac{t^3}{t^2(t^2+1)} + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} \arctan(t)$$

Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \frac{\cancel{t^4}\left(\frac{1}{t}\right)}{\cancel{t^4}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} + \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \arctan(t)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad //$$

## Questão 3

Considere a função $f(x) = \arccos(x)$.

(a) Estude o sinal de $f''(x)$ e determine o intervalo de concavidade para cima e o intervalo de concavidade para baixo do gráfico de $f$.

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-(-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1-x^2)}$$

Lembrando que $Dom(f) = [-1, 1]$, estudo de sinal de $f''(x)$:

| | $-1$ a $0$ | $0$ a $1$ |
|---|---|---|
| $-x$ | + | − |
| $\sqrt{1-x^2}$ | + | + |
| $1-x^2$ | + | + |
| $f''(x)$ | + | − |

Logo, intervalo de concavidade para cima do gráfico de $f$:
$[-1, 0]$

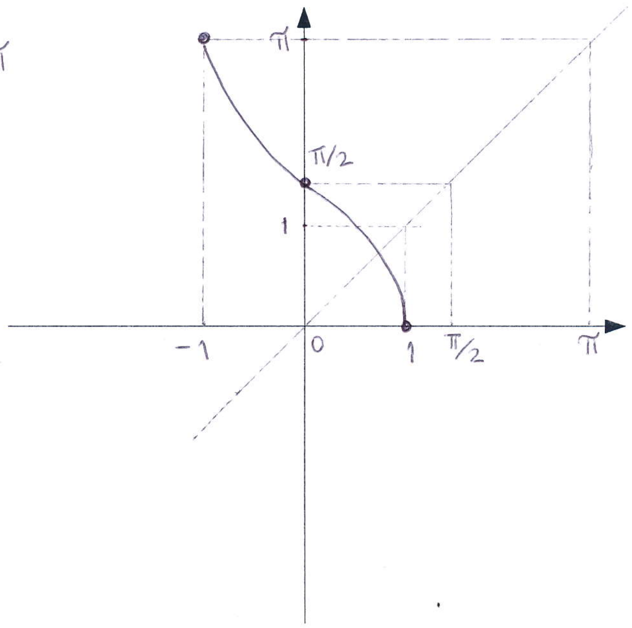
E intervalo de concavidade para baixo do gráfico de $f$:
$[0, 1]$.

(b) Esboce o gráfico de $f$. Calcule $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$ e marque em seu desenho os pontos $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$.

$f(-1) = \arccos(-1) = \pi$

$f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$f(1) = \arccos(1) = 0$



(c) Seja $\mathcal{R}$ a região plana definida por

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le f(x)\right\}\,.$$

Considere o sólido $\mathcal{S}$ obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo $y$. Calcule o volume de $\mathcal{S}$.

$y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)$.

Pelo Método de Discos,

$$\text{Vol}(S) = \int_0^{\pi/2} \pi \cdot \cos^2(y)\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2y)\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ y + \frac{\operatorname{sen}(2y)}{2} \right] \Bigg|_{y=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \ //$$