Grafos
Caminhos e Circuitos -2

Prof. Michelle Nery Nascimento

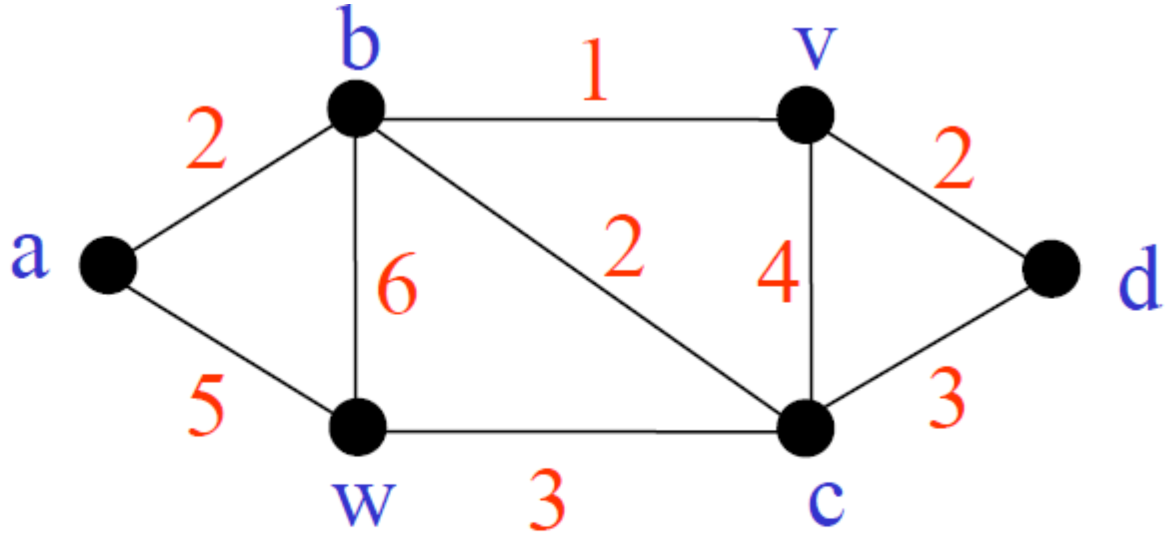
Problema do carteiro chinês

- Um carteiro deseja entregar cartas ao longo de todas as ruas de uma cidade, e retornar ao ponto inicial. Como ele pode planejar as rotas de forma a minimizar o caminho andado?

Problema do carteiro chinês

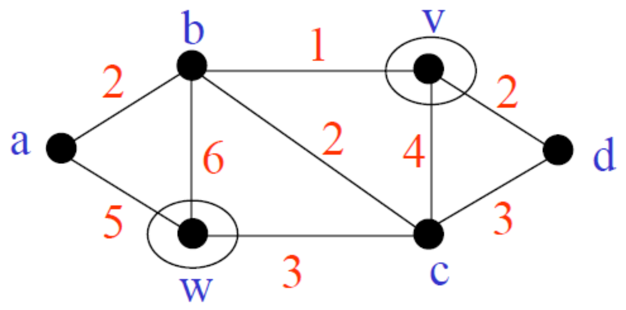
- Um carteiro deseja entregar cartas ao longo de todas as ruas de uma cidade, e retornar ao ponto inicial. Como ele pode planejar as rotas de forma a minimizar o caminho andado?
  - Se o grafo for euleriano, basta percorrer o ciclo de Euler
  - Caso contrário, algumas arestas serão percorridas mais de uma vez

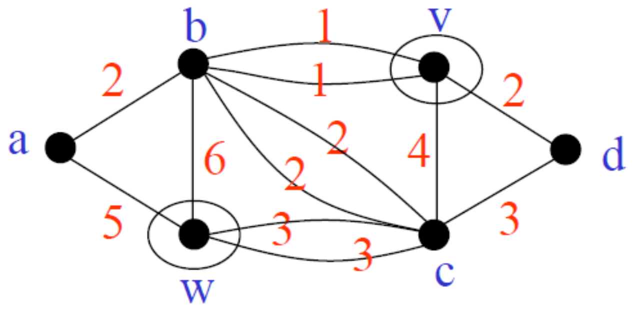
Problema do carteiro chinês



Problema do carteiro chinês

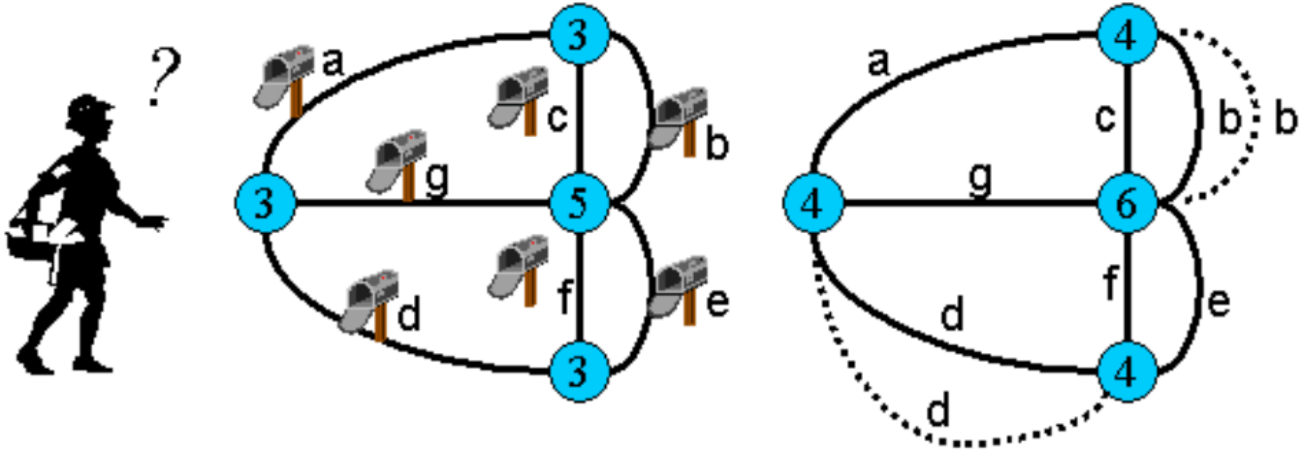
- Identifique os m nós de grau ímpar de G(N,A)
- Encontre o "casamento de pares com a mínima distância" desses m nós e identifique os m/2 caminhos mínimos deste "casamento" ótimo
- Adicione estes m/2 caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo G(N,A) contém zero vértices de grau ímpar
- Encontre um ciclo euleriano em G(N,A). Este ciclo é a solução ótima do problema no grafo original G(N,A) e o seu comprimento é igual ao comprimento total das arestas do grafo original mais o comprimento total dos m/2 caminhos mínimos





Problema do carteiro chinês

Rota: a b c b e f g d d



Trajeto Euleriano

- Sequência de arestas e vértices adjacentes que:
  - começa em um vértice **v** de um grafo G
  - termina em outro vértice **w** de G
  - passando **pelo menos uma vez em cada vértice**
  - e exatamente **uma única vez em cada aresta** de G

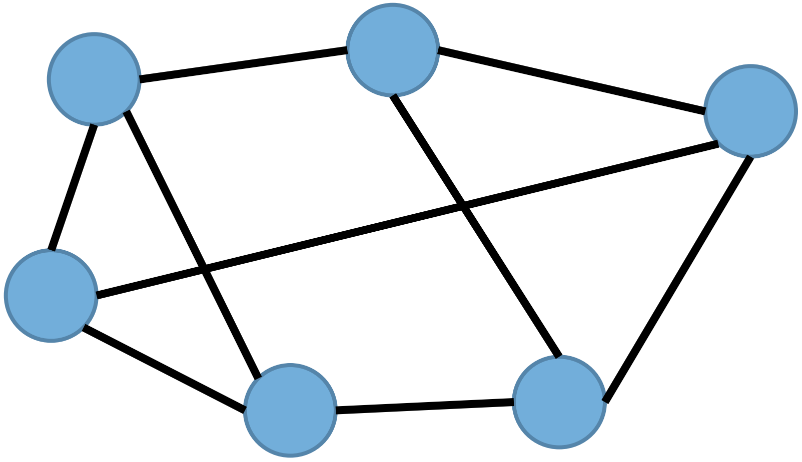
Grafos semieulerianos ou unicursais

- Um grafo G é dito unicursal ou semi-euleriano
  - se ele **possui pelo menos um Trajeto Euleriano**
- Se adicionarmos uma aresta conectando os vértices inicial e final do Trajeto Euleriano encontrado o grafo passa a ser um Grafo Euleriano

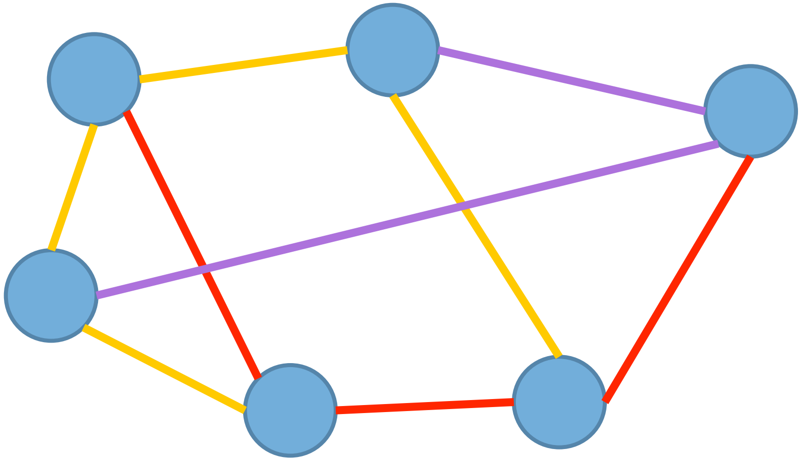
Grafos unicursais

- TEOREMA: Em um grafo conexo G com exatamente 2K vértices de grau ímpar, existem K subgrafos disjuntos de arestas, todos eles unicursais, de maneira que juntos eles contêm todas as arestas de G

Grafos unicursais

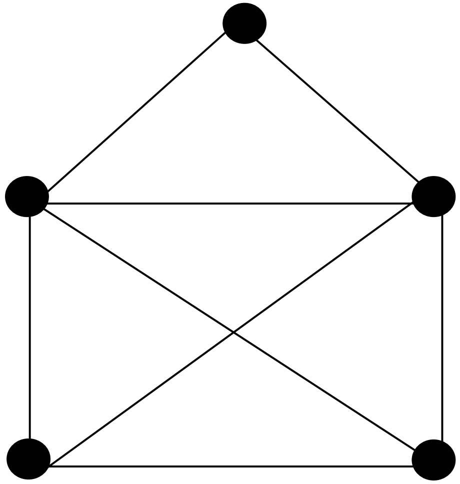


Grafos unicursais



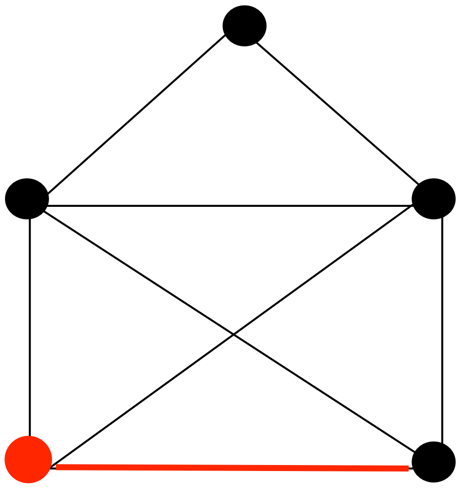
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



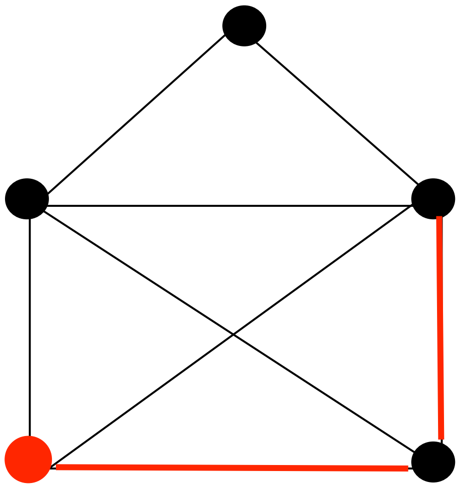
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



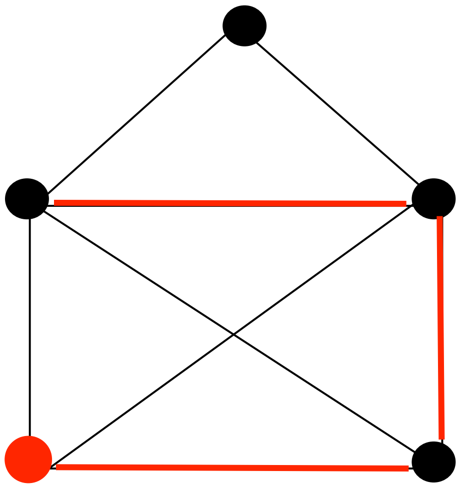
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



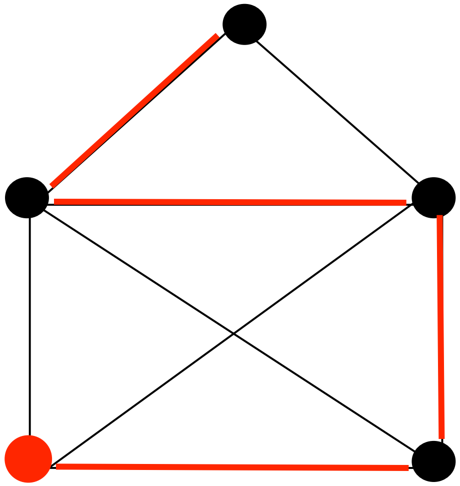
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



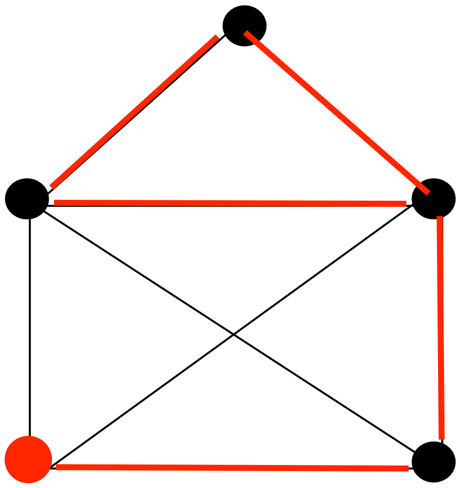
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



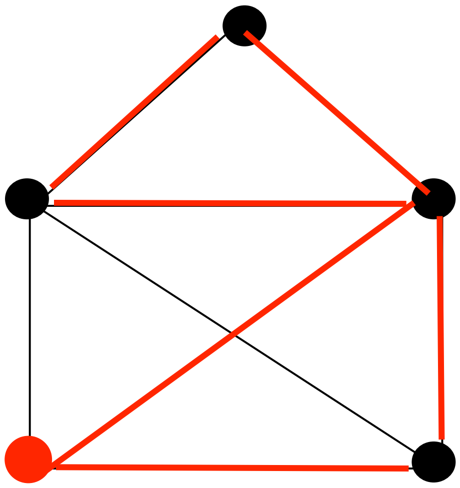
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



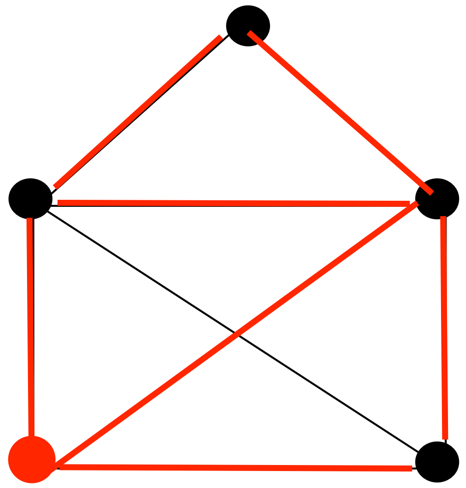
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



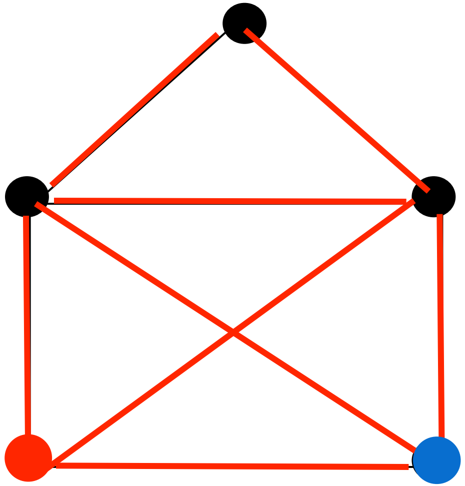
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



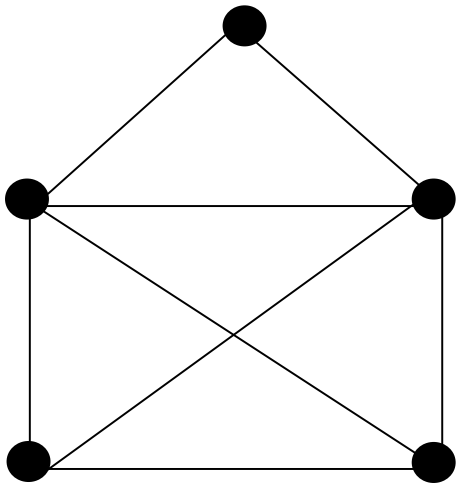
Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?



Grafos unicursais

- É possível fazer o desenho abaixo sem retirar o lápis do papel e sem retroceder?
- É possível fazer a mesma coisa terminando no ponto de partida?



Grafos hamiltonianos

- Um ***Circuito de Hamilton*** em um grafo conexo é um percurso que passa por todos os vértices do grafo uma única vez, voltando ao vértice inicial
- Um grafo que possui um Circuito Hamiltoniano é chamado de ***grafo hamiltoniano***

Grafos hamiltonianos

- O Circuito de Hamilton de um grafo com n vértices contém n arestas
- Um ***Caminho de Hamilton*** em um grafo conexo é um caminho simples que passa por todos os vértices do grafo exatamente uma única vez

Considerações – Grafos hamiltonianos

- O grafo deve ser conexo
- Se um grafo é hamiltoniano, então a inclusão de qualquer aresta não atrapalha essa condição
- Logo, *loops* e arestas paralelas podem ser desconsideradas (para $n \geq 3$)

Considerações – Grafos hamiltonianos

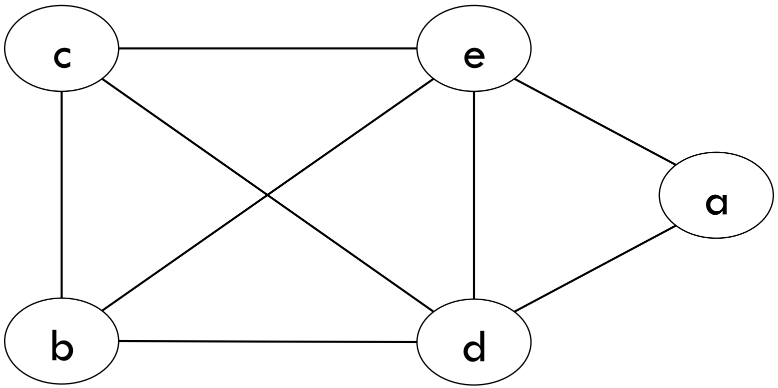
- Vimos que é possível determinar a priori se um grafo G possui um **circuito Euleriano**
- **Não** existe um teorema que indique para todo grafo se existe um circuito Hamiltoniano nem se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para achar um circuito Hamiltoniano

Considerações – Grafos hamiltonianos

- No entanto, existe uma técnica simples que pode ser usada em muitos casos para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano

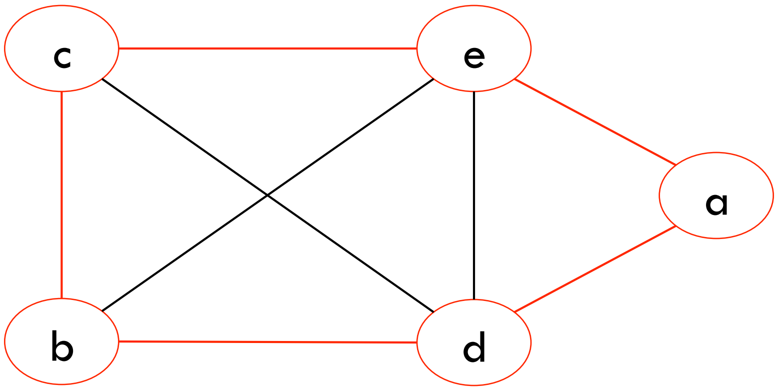
Considerações – Grafos hamiltonianos

- Há um circuito hamiltoniano em um grafo se:
  - Se G tem um circuito Hamiltoniano, então G tem um subgrafo H que:
    1. H contém cada vértice de G.
    2. H é conexo.
    3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices.
    1. Cada vértice de H tem grau 2



Considerações – Grafos hamiltonianos

- Há um circuito hamiltoniano em um grafo se:
  - Se G tem um circuito Hamiltoniano, então G tem um subgrafo H que:
    1. H contém cada vértice de G.
    2. H é conexo.
    3. H tem o mesmo número de arestas e de vértices.
    1. Cada vértice de H tem grau 2



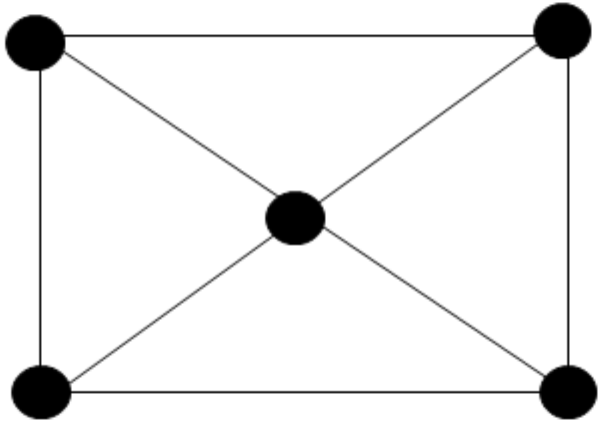
Grafos hamiltonianos

- Infelizmente, não é simples decidir se um grafo é hamiltoniano

- Há alguns teoremas que proveem condições suficientes, mas não necessárias, para isto

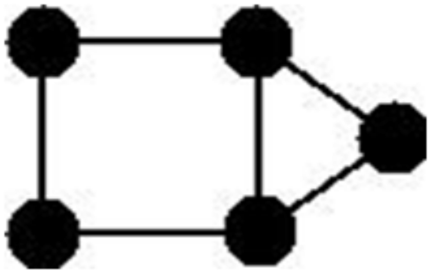
Grafos hamiltonianos

- TEOREMA: Seja G um grafo simples com n vértices ($n \geq 3$). Se para todo par de vértices não adjacentes v e w, a soma de seus graus for maior ou igual a n, então G é hamiltoniano



Grafos hamiltonianos

- TEOREMA: Seja G um grafo simples com n vértices ($n \geq 3$). Se o grau de cada vértice for $n/2$ no mínimo, G é hamiltoniano



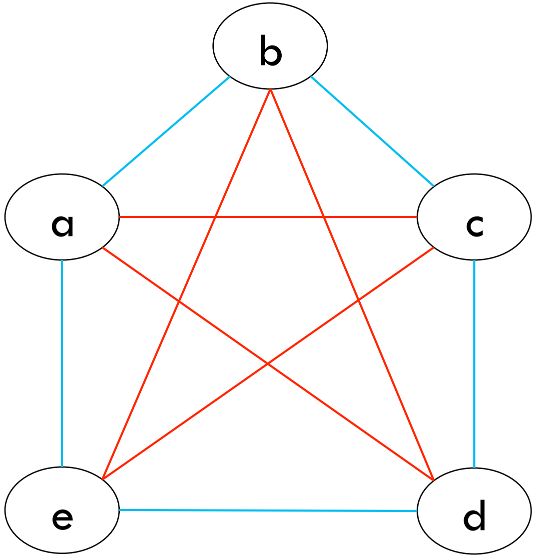
Grafos hamiltonianos

- TEOREMA: Em um grafo completo com n vértices, n ímpar e (n ≥ 3), existem $\frac{n-1}{2}$ circuitos hamiltonianos *disjuntos de arestas*

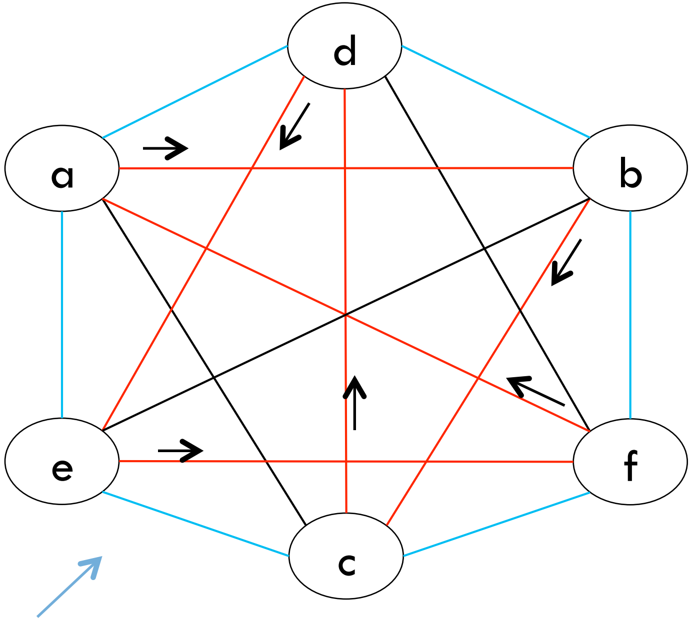
Grafos hamiltonianos

- TEOREMA: Em um grafo completo com n vértices, n par e (n ≥ 4), existem $\frac{n-2}{2}$ circuitos hamiltonianos disjuntos de arestas

Para um grafo onde
n ímpar e ($n \geq 3$)



Para um grafo onde
n par e ($n \geq 4$)



Vejam que há outros circuitos aqui, mas não disjuntos de arestas

Problema do caixeiro viajante

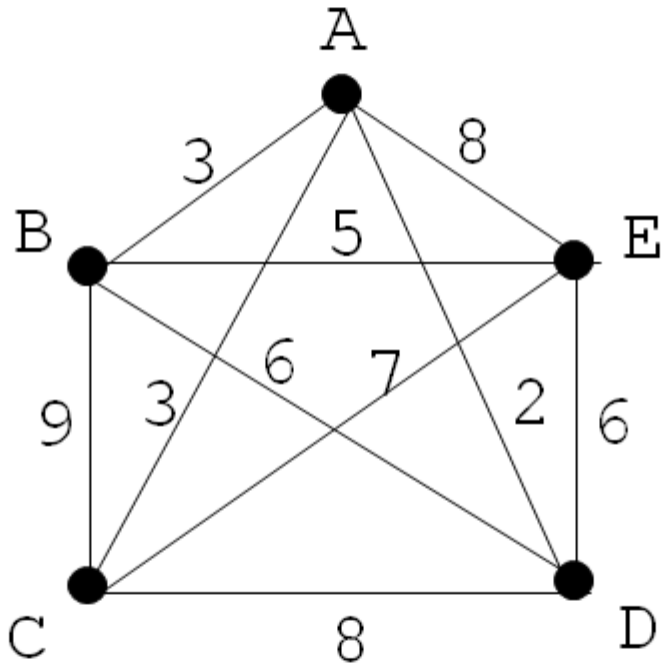
- Dado um conjunto de cidades a serem visitadas por um vendedor, qual é o ***caminho mínimo*** que pode ser realizado sem repetir cidades e retornar ao ponto de partida?

Problema do caixeiro viajante

- Representação em grafos
  - Cidades: vértices
  - Arestas: ligações entre as cidades

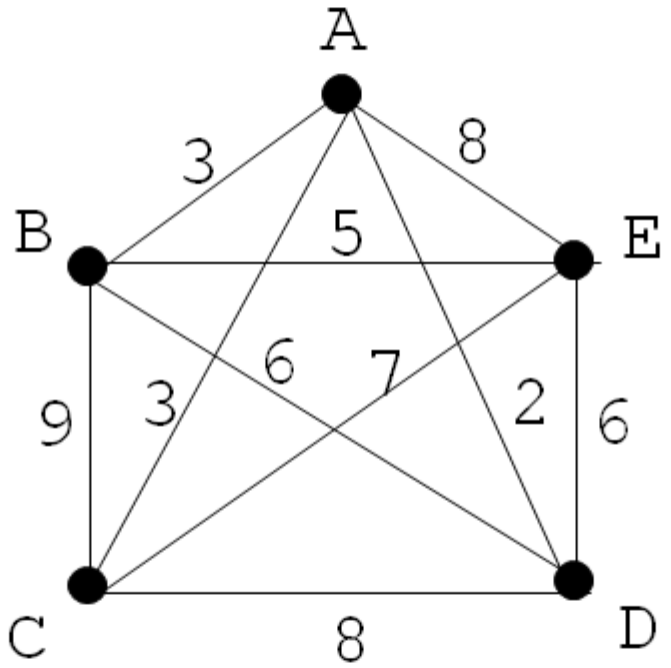
- Arestas ponderadas!

Problema do caixeiro viajante



Problema do caixeiro viajante

Encontrar um circuito de Hamilton de peso mínimo

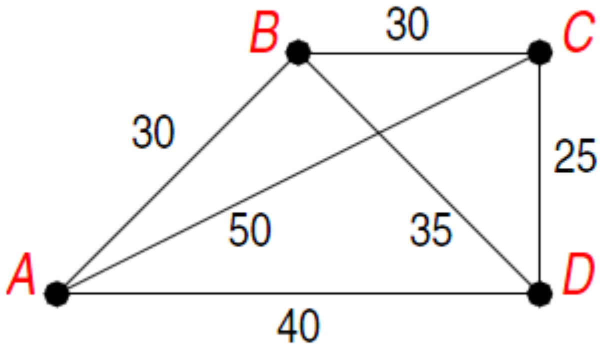


Problema do caixeiro viajante

- Generalizando o problema, temos várias aplicações
  - entrega de encomendas / correspondências
  - recolhimento de objetos
  - planejamento de viagens
  - leitura de contadores de consumo
  - ...

- Possível solução:
  - Enumere todos os possíveis circuitos Hamiltonianos começando e terminando em A;
  - Calcule a distância de cada um deles;
  - Determine o menor deles

Rota	Distância (km)
$ABCDA$	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
$ABDCA$	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
$ACBDA$	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
$ACDBA$	$50 + 25 + 35 + 30 = 140$
$ADBCA$	$40 + 35 + 30 + 50 = 155$
$ADCBA$	$40 + 25 + 30 + 30 = 125$



  - Assim, tanto a rota ABCDA ou ADCBA tem uma distância total de 125 km.

Problema do caixeiro viajante

- A solução é um circuito Hamiltoniano que minimiza a distância total percorrida para um grafo valorado arbitrário G com n vértices, onde uma distância é atribuída a cada aresta.
- Algoritmo:
  - Atualmente, força bruta, como feito no exemplo anterior.
  - Problema da classe NP-Completo.

- Exemplo: para o grafo K_{30} existem

$$29! \approx 8{,}84 \times 10 \uparrow 30$$

circuitos Hamiltonianos diferentes começando e terminando num determinado vértice.

Problema do caixeiro viajante

- É fácil encontrar tal caminho?
  - Problema combinatório
  - Solução recursiva

- Uso de ***heurísticas*** para a resolução do problema

Resolvendo problemas exponenciais

1. Usar algoritmos exponenciais “eficientes” aplicando técnicas de tentativa e erro.
2. Usar algoritmos aproximados. Acham uma resposta que pode não ser a solução ótima, mas é garantido ser próxima dela.
3. Concentrar no caso médio. Buscar algoritmos melhores que outros neste quesito e que funcionem bem para as entradas de dados que ocorrem usualmente na prática.
   - Existem poucos algoritmos exponenciais que são muito úteis na prática.

Heurísticas

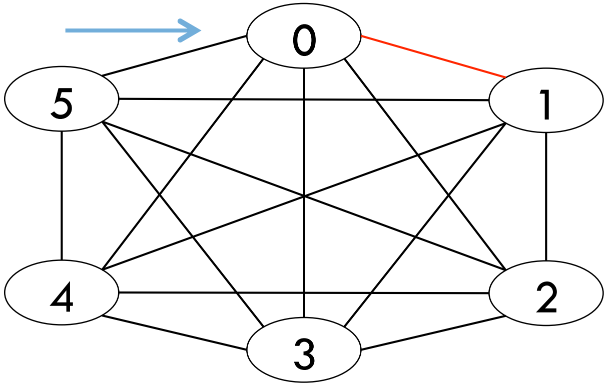
- É um algoritmo que pode produzir um bom resultado (ou até a solução ótima), mas pode também não obter solução ou obter uma distante da ótima
  - Pode haver instâncias em que uma heurística nunca vai encontrar uma solução

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

1. escolha um vértice arbitrário como vértice atual.
2. descubra a aresta de menor peso que seja conectada ao vértice atual e a um vértice não visitado V.
3. faça o vértice atual ser V.
4. marque V como visitado.
5. se todos os vértices no domínio estiverem visitados, encerre o algoritmo.
6. Se não vá para o passo 2.
7. A sequência dos vértices visitados é a saída do algoritmo.

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

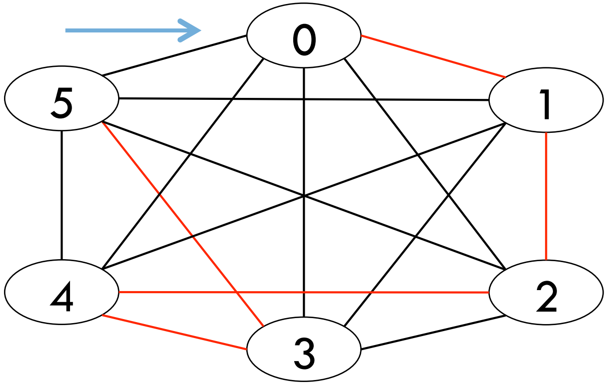
- Algoritmo do vizinho mais próximo, heurística gulosa simples:



	1	2	3	4	5
0	3	10	11	7	25
1		8	12	9	26
2			9	4	20
3				5	15
4					18

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

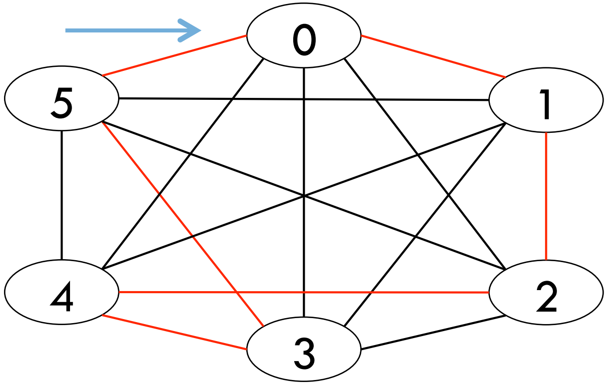
- Algoritmo do vizinho mais próximo, heurística gulosa simples:



	1	2	3	4	5
0	3	10	11	7	25
1		8	12	9	26
2			9	4	20
3				5	15
4					18

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

- Algoritmo do vizinho mais próximo, heurística gulosa simples:



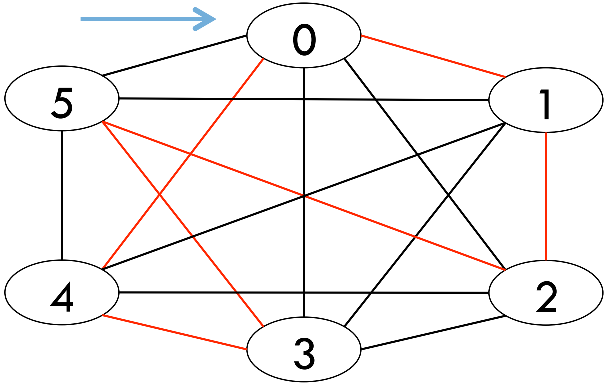
	1	2	3	4	5
0	3	10	11	7	25
1		8	12	9	26
2			9	4	20
3				5	15
4					18

Solução:
3+8+4+5+15+25 = 60

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

- Embora o algoritmo do vizinho mais próximo não encontre a solução ótima, a obtida está bem próxima do ótimo
- Entretanto, é possível encontrar instâncias em que a solução obtida pode ser muito ruim (uma vez que a aresta final pode ser muito longa)

Heurística para o PCV (Caixeiro Viajante)

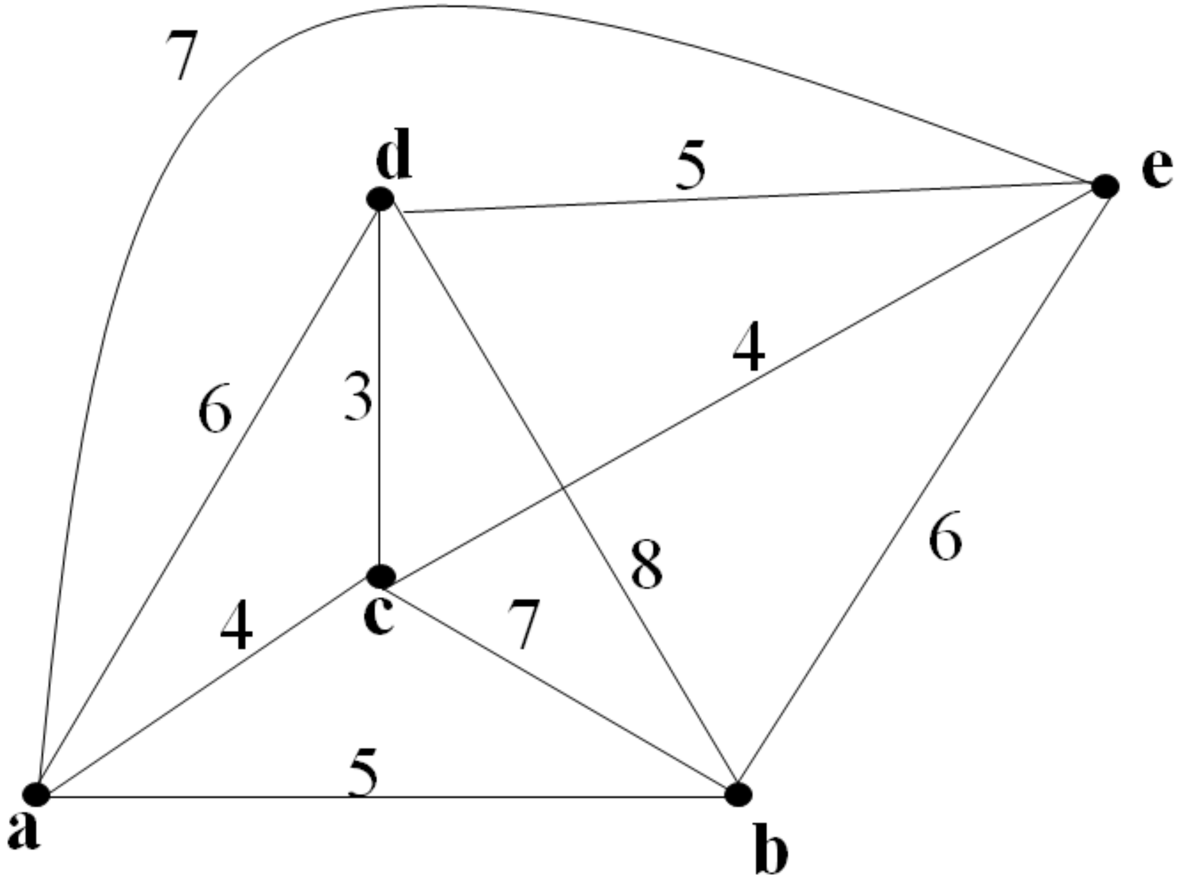


	1	2	3	4	5
0	3	10	11	7	25
1		8	12	9	26
2			9	4	20
3				5	15
4					18

- Caminho ótimo para esta instância: 0 1 2 5 3 4 0 (comprimento 58).

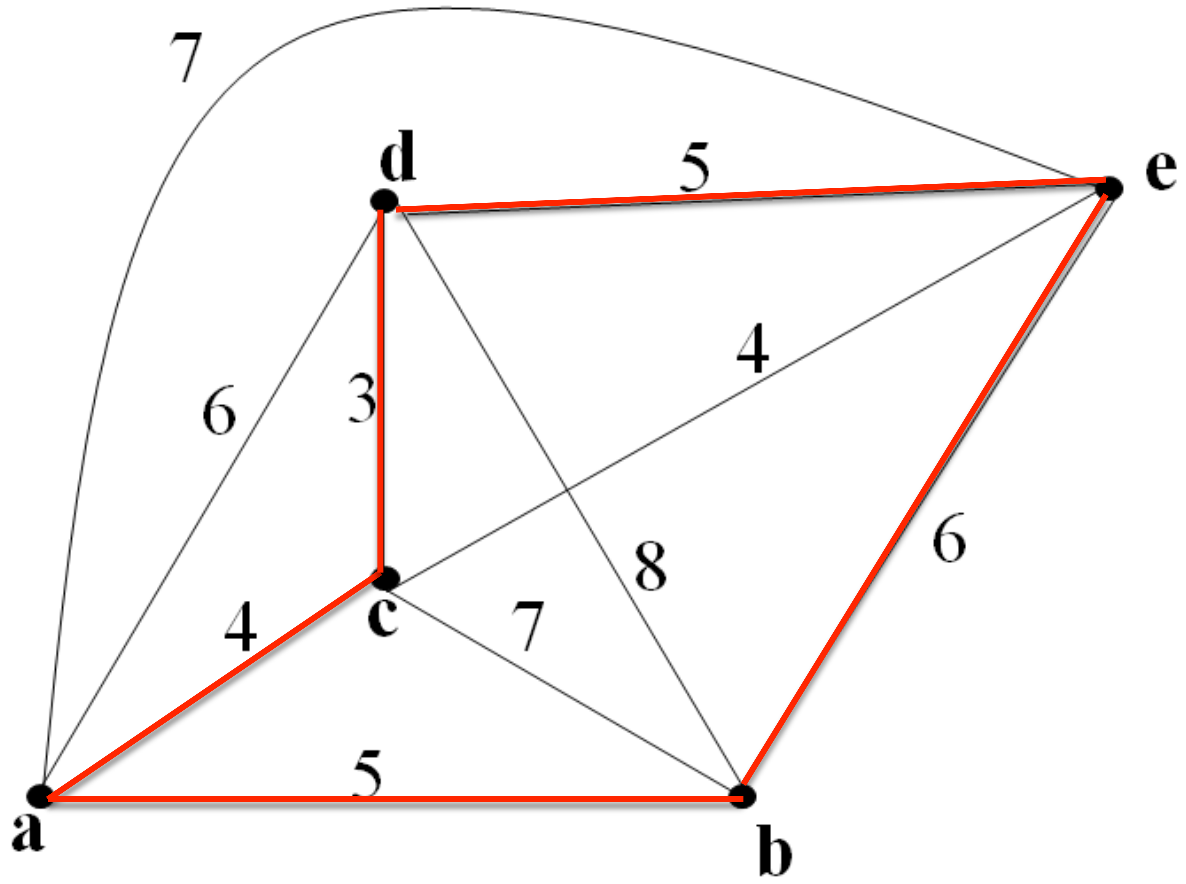
Exercício

- Encontre a solução do PCV para este grafo



Resolução

Caminho: 4+3+5+6+5 = 23



Exercício

- Onze amigos gostariam de ser reunir periodicamente para almoçar e colocar a conversa em dia. Eles querem se sentar à mesa de tal forma que, em cada encontro, cada amigo tenha vizinhos diferentes, para variar as conversas.
- Quantos almoços serão necessários para realizarem todas as configurações possíveis?

Exercício

- Em um grafo completo com n vértices, n ímpar e $(n \geq 3)$, existem $(n-1)/2$ circuitos hamiltonianos *disjuntos de arestas*