Introdución al Álgebra Lineal (Strang): Revisión de Ideas Claves

Ciencias de la Computación V

10 de abril de 2016

1. Capitulo 1 Introducción a vectores

1.1. Vectores y combinaciones lineales

- Un vector v en el espacio de dos dimensiones tiene dos componentes v_1 y v_2.
- $v + w = (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)$ y $cv = (cv_1, cv_2)$ se halla un componente por vez.
- La combinación lineal de tres vectores u, v y w es $cu + cv + cw$.
- Se toma todas las combinaciones lineales de u o u y v o $u,\ v,\ w$. En tres dimensiones estas combinaciones suelen ocupar una linea, luego un plano y todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

1.2. Longitud y producto punto

- El producto punto $v \cdot w$ multiplica cada componente v_i por w_i y adiciona todo $v_i w_i$.
- La longitud $\|v\|$ de un vector es la raíz cuadrada de $v \cdot v$.
- $u = v/\|v\|$ es un vector unitario. Su longitud es 1.
- El producto punto es $v \cdot w = 0$ cuando el vector v y w son perpendiculares.
- El coseno de Θ (el angulo entre cualquier v y w distinto de cero) nunca excede 1:

  $$cos\Theta = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

  Desigualdad de Schwarz

  $$|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|$$

  El problema 21 produce la desigualdad del triangulo $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

1.3. Matrices

- **Matrix times vector**: $Ax =$ combinación de las columnas de A.
- La solución a $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$, cuando A es una matriz invertible.
- La matriz de diferencia A se invierte por la matriz suma $S0A^{-1}$.
- Las matrices cíclicas son no invertibles. Sus tres columnas se encuentran en el mismo plano. Estas columnas dependientes se adhieren al vector cero. $Cx = 0$ tiene muchas soluciones.

2. Capitulo 2 Solución de ecuaciones lineales

2.1. Vectores y ecuaciones lineales

- Las operaciones básicas sobre vectores son la multiplicación por escalar y la adición de vectores.
- La utilización de la multiplicación por escalar y la suma conforman una combinación lineal. Ej: cv+dw.
- La matriz de multiplicación Ax, puede ser computada utilizando productos puntos, una fila a la vez. Pero Ax debe ser entendido como una combinación de columnas de A.
- AX=b, "b" es una combinación lineal de las columnas de la matriz de A.
- Cada ecuación en Ax=b da una línea (n=2) o un plano (n=3) o un hiperplano cuando (n>3)

2.2. La idea de la eliminación

- Un sistema Ax=b se transforma en un sistema triangular Ux=c, luego de la eliminación.
- Se sustrae $l_{ij} = \frac{entrada-eliminar-en-fila-i}{pivot-en-fila-j}$
- Un vector cero en una posición pivot puede ser reparado si hay un no cero abajo.
- Un sistema triangular superior es resuelto por sustitución hacia atrás.
- Cuando un corte es permanente, el sistema puede no tener solución o muchas soluciones.

2.3. Eliminación usando matrices

- $Ax = x_1$ veces las columnas $1 + \cdots + x_n$ veces la columna n. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.
- Multiplicando $Ax = b$ por E_{21} sustrae un múltiplo l_{21} de la ecuación 1 de la ecuación 2. El número $-l_{21}$ es la entrada $(2,1)$ de la matriz de eliminación E_{21}.
- Para una matriz aumentada $[Ab]$, el paso de eliminación da $[E_{21}AE_{21}b]$.
- Cuando se multiplica A por cualquier matriz B esta multiplica cada columna de B por separado.

2.4. Reglas para operaciones de metrices

- Las entradas (i,j) de AB es (fila de i de A) . (columna j de B).
- Una matriz de m x n veces por una matriz n x p usa mnp multiplicaciones separadas.
- AB es también la suma de estas matrices: (columna de j de A) veces (fila de j de B).
- La multiplicación por bloque es permitida cuando las figuras coinciden correctamente.
- La eliminación por bloque produce el complemento $D - CA^{-1}B$.

2.5. Matriz inversa

- La matriz inversa esta dada por $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$.
- A es invertible si y solo si tiene n pivots (con intercambios de filas permitios).
- Si $Ax = 0$ para un vector x distinto de 0, entonces A no es invertible.
- La inversa de AB es el producto de $B^{-1}A^{-1}$. Y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
- El método Gauss-Jordan resuelve $AA^{-1} = I$ para encontrar las n columnas de A^{-1}. La matriz aumentada $[AI]$ esta reducida a la fina $[IA^{-1}]$.

2.6. Factorización A=LU

- La eliminación gaussiana(sin cambio de filas) factorea A en L veces U.
- La matriz triangular inferior L contiene los números l_{ij} que multiplica las filas pivots, desde A produciendo U. El producto LU agrega las filas para recuperar A.
- En el lado derecho se resuelve $Lc = b$ (forward) y$Ux = c$ (backward).

- **Factor:** Existe un $\frac{1}{3}(n^3 - n)$ multiplicaciones y substracciones del lado izquierdo.
- **Solución:**Existe un n^2 multiplicaciones y substracciones en el lado derecho. Para una matriz banda, cambiar $\frac{1}{3}n^3$ a nw^2 y cambia n^2 a $2wn$.

2.7. Transpuesta

La transpuesta coloca las filas de A en columnas de A^T. Entonces ($A_{ij}^T = A_{ji}$). Las transpuesta de AB es $B^T A^T$. La transpuesta de A^{-1} es la inversa de A^T. El producto punto es $x \cdot y = x^T y$. Entonces $(Ax)^T y$ es igual al producto punto de $x^T(A^T y)$. Cuando una matriz es simétrica ($A^T = A$), su factorización LDU es simétrica: $A = LDL^T$. Una matriz de permutación P tiene uno en una fila y columna y $P^T = P^{-1}$. Existen $n!$ matrices de permutaciones del tamaño de n. Mitad par y mitad impar. Si A es invertible, entonces la permutación P reordenando sus filas es $PA = LU$.

3. Capitulo 3 Vectores y Subespacios

Autor: Luis Esteban Martínez Lailla stban06@gmail.com, Facultad Politécnica - Universidad Nacional de Asunción.

3.1. 3.1 - Espacios de Vectores

Definición 1 *El espacio R^n consiste en todos los vectores columnas con n componentes.*

$M \Rightarrow$ El espacio vector de todas las matrices 2x2. $F \Rightarrow$ El espacio vector de todas las funciones reales $(f(x))$. $Z \Rightarrow$ El espacio vector que consiste en solo el vector cero.

Definición 2 *Un subespacio de un espacio vector es un grupo de vectores (incluyendo 0) que satisfaga 2 requerimientos:*

1. *$V + W$ está en el subespacio.*
2. *cV está en el subespacio.*

Un subespacio que contiene V y W, debe contener todas las combinaciones lineales $cV + dW$.

Definición 3 *El espacio columna consiste en todas las combinaciones lineales de las columnas. Las combinaciones son todos los posibles vectores Ax. Estos llenan el espacio columna $C(A)$*

"Ax=b tiene solución si y solo si b está en el espacio columna de A."

3.2. El espacio nulo de A: Resolviendo Ax=0

1. El espacio nulo de A "N(A)" contiene todas las soluciones tales que Ax=0.
2. La eliminación produce una matriz echelon U, y entonces una fila reducida R, con columnas pivots y columnas libres.
3. Cada columna libre de U o R lleva a una solución especial. La variable libre se iguala a 1 y las otras variables libres a 0. La sustitución por atrás resuelve Ax=0.
4. La solución completa a Ax=0 es una combinación de las soluciones especiales.
5. Si $n > m$ entonces A tiene al menos una columna sin pivot, dando una solución especial. Por lo que hay vectores x diferentes de cero en el espacio nulo de esta matriz A rectangular.

3.3. El rango y la forma reducida de fila

1. El rango (r) de A es el número de pivots después de la eliminación.
2. El rango es la dimensión del espacio columna. $r = dim(C(A))$
3. Las columnas pivots no son combinaciones de otras columnas.
4. Las columnas libres son combinaciones de otras columnas. Estas combinaciones son las soluciones especiales.
5. Ax=0 tiene r pivots y n-r variables libres.
6. La matriz del espacio nulo N contiene las n-r soluciones especiales. Entonces AN=0.

3.4. La solución completa de Ax=b

X particular soluciona $Ax_p = b$.
X null soluciona $Ax_n = 0$
La solución completa X= $x_p + x_n$.

3.4.1. Full column rank (r=n)

- Todas las columnas de A son columnas pivot.
- No hay variables libres o soluciones especiales.
- El espacio nulo N(A) contiene solo el vector cero.
- Si Ax=b tiene solución (puede no tener) entonces es única.

3.4.2. Full row rank (r=m)

- Todas las filas tienen pivots, y R no tiene fila de cero.
- Ax=b tiene una solución por cada lado derecho b.
- El espacio columna es todo el espacio R^m.
- Existen n-r=n-m soluciones especiales en el espacio nulo de A.

3.5. Independencia, bases y dimensión

Cada vector en el espacio es una combinación única de los vectores bases.

Definición 4 *Las columnas de A son linealmente independientes cuando la única solución a Ax=0 es x=0. Ninguna otra combinación Ax de las columnas dan el vector cero.*

Definición 5 *La secuencia de vectores* $V_1, V_2, \ldots, V_n$ *es linealmente independiente si la única combinación que genera el vector cero es* $0V_1 + 0V_2 + \ldots + 0V_n$.

Definición 6 *Un conjunto de vectores generan un espacio si las combinaciones lineales llenan el espacio.*

Definición 7 *El espacio fila de una matriz es el subespacio de* R^n *generado por las filas.*
El espacio fila de A es $C(A^T)$. *Esto es el espacio columna de* A^T.

- Los vectores bases son L.I y ellos generan el espacio.
- Los vectores $V_1, \ldots, V_n$ son bases para R^n exactamente cuando ellos son las columnas de una matriz invertible nxn. Entonces R^n tiene infinitas y diferentes bases.
- Las columnas pivots son una base para su espacio columna. Las filas pivots de A son una base para su espacio fila.

Definición 8 *La dimensión de un espacio es el número de vectores de la base.*

3.6. 3.6 - Dimensiones de los cuatro subespacios

1. El espacio fila es $C(A^T)$, un subespacio de R^n.
2. El espacio columna es $C(A)$, un subespacio de R^m.
3. El espacio nulo es $N(A)$, un subespacio de R^n.
4. El espacio nulo izquierdo es $N(A^T)$, un subespacio de R^m.

Obs. Ver el big picture.

3.6.1. Teorema fundamental del Algebra Lineal, Parte I

$C(A)$ y $C(A^T)$ tienen la misma dimensión r.
$N(A)$ y $N(A^T)$ tienen dimensiones n-r y m-r.

4. Capitulo 4 Ortogonalidad

4.1. La ortogonalidad de los cuatro subespacios

- Subespacios V y W son ortogonales si cada v en V es ortogonal a cada w en W.
- V y W son complementos ortogonales si W contiene todos los vectores perpendiculares a V (y viceversa). Dentro R^n, las dimensiones de complementos V y W se suman a n.
- El espacio nulo N (A) y el espacio de la fila C (A^T) son complementos ortogonales, de Ax = 0. Del mismo modo N (A^T) y C (A) son complementos ortogonales.
- n vectores independientes en R^n abarcarán (span) R^n.
- Cada x en R^n tiene un componente x_n en el espacio nulo y un componente x_r en el espacio fila.

4.2. Proyecciones

- La proyección de b sobre a es $p = a\widehat{x} = a(a^T b/a^T a)$
- El rango de una matriz de proyección $P = aa^T/a^T a$ multiplica b para producir p.
- b proyectar sobre un subespacio deja e=b-p perpendicular al subespacio.
- Cuando A es de rango completo n, la ecuación $A^T A\widehat{x} = A^T b$ conduce a $\widehat{x}$ y $p = A\widehat{x}$
- La matriz de proyección $P = A(A^T A)^{-1}A^T$ tiene $P^T = P$ y $P^2 = P$.

4.3. Aproximaciones por mínimos cuadrados

- La solución por mínimos cuadrados $\widehat{x}$ ocurre cuando se minimiza $E = \|Ax - b\|^2$. Esta es la suma de los cuadrados de los errores en las m ecuaciones ($m > n$).
- La mejor $\widehat{x}$ proviene de las ecuaciones normales $A^T A\widehat{x} = A^T b$.
- Para encajar m puntos por una línea b = C + Dt, las ecuaciones normales estan dadas por C y D.

- Las alturas de la mejor línea son $p = (p_1, \ldots, p_m)$. Las distancias verticales a los puntos de datos son los errores $e = (e_1, \ldots, e_m)$.
- Si tratamos de encajar m puntos por la combinación de $n < m$ funciones, las m ecuaciones Ax = b son generalmente insolubles. Las n ecuaciones $A^T A\widehat{x} = A^T b$ dan la solución de mínimos cuadrados.

4.4. Base ortogonal y Gram-Schmidt

- Si los vectores ortonormales $q_1, \ldots, q_n$ son las columnas de Q, entonces $q_i^T q_j = 0$ y $q_i^T q_i = 1$ se traducen en $Q^T Q = I$.
- Si Q es cuadrada (una matriz ortogonal), entonces $Q^T = Q^{-1}$: transpuesta = inversa.
- La longitud de Qx es igual a la longitud de x: $\|Qx\| = \|x\|$.
- La solución de mínimos cuadrados de $Qx = b$ es $\widehat{x} = Q^T b$. La proyección sobre el espacio columna que es abarcado por las q es $P = QQ^T$.
- Q también preserva los productos punto: $(Qx)^T(Qy) = x^T Q^T QY = x^T y$.
- Si Q es cuadrada entonces $P = I$ y todos los $b = q_1(q_1^T b) + \ldots + q_n(q_n^T b)$.
- Gram-Schmidt produce vectores ortonormales q_1, q_2, q_3Q1, Q2, Q3 de ser independiente a, b, c. La factorización de la matriz es $A = QR$ =(Q ortogonal) (R triangular).
- **El proceso de Gram-Schmidt:** Primero se elige $A = a$. La siguiente dirección B debe ser perpendicular a A. **Se inicia con b y se substrae la proyección sobre** A. Ésto es:

  $B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$.

  A es ortogonal a B. Siguiente paso:

  $C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B$.

  Finalmente, *dividir los vectores ortogonales A, B, C... por sus longitudes.* Los vectores resultantes $q_1, q_2, \ldots$ son ortonormales.

5. Capitulo 5 Determinante

5.1. Propiedades de las determinates

- El determinante se define por $det\ I = 1$, inversión de signo y la linealidad en cada fila.
- Después de de la eliminación det$A$ es $\pm$ (producto de los pivots).
- La determinante es exactamente cero cuando A es no invertible.
- Dos propiedades notables son $det\ AB = (det\ A)(det\ B)$ y $det\ A^T = det\ A$.

5.2. Permutaciones y cofactores

- Sin intercambio de filas *det* $A =$ (*producto de pivots*). En la esquina superior izquierda *det* A_k =(*producto de los primeros* k *pivots*).
- Cada término en la gran fórmula (8) utiliza cada fila y columna de una vez. La mitad de los n! términos tienen signos + (cuando *det* $P = +1$) y la otra mitad tiene signo menos.
- El cofactor c_{ij} es $(-1)^{i+j}$ veces la determinante más pequeña que omite la fila i y columna j (debido al uso de la columna y fila a_{ij}).
- La determinante es el producto punto de cualquier fila de A con las filas del cofactor. Cuando la fila de A tiene muchos ceros, solo necesitamos unos pocos cofactores.

5.3. Regla de Cramer, inversos y volumenes

- La regla de Cramer resuelve $Ax = b$ por relaciones del tipo $x_1 = |B_1|/|A| = |ba_1...a_n|/|A|$.
- Cuando C es la matriz cofactor para A, la inversa es $A^{-1} = C^T/det\ A$.
- El volumen de una caja es $|det\ A|$, cuando los bordes de la caja son la fila de A.
- Área y volumen son necesarios para cambiar las variables en integrales dobles y triples.
- En $\mathbb{R}^3$, el producto cruz $u \times v$ es perpendicular a u y v.

6. Capitulo 6 Valorespropios y vectorespropios

6.1. Introducción a valorespropios

- $Ax = \lambda x$ dice que el vectorpropio x mantiene la misma dirección cuando se multiplica por A.
- $Ax = \lambda x$ también dice que $det(A - \lambda I) = 0$. Esto determina n valores propios.
- Los valores propios de $A^2 y A^{-1}$ son λ^2 y λ^{-1}, con igual vectorpropio.
- La suma de $\lambda's$ es igual a la suma de la diagonal principal de A (*The trace*). El producto de $\lambda's$ es igual a la determinante.
- Matriz de proyección P, motriz de reflexión R, matriz de rotación 90° Q tiene valorespropios especiales $1,\ 0,\ -1,\ i,\ -i$. Una matriz singular tiene $\lambda = 0$. Una matriz triangular tiene $\lambda's$ en su diagonal.

6.2. Diagonalizar una matriz

- Si A tiene n vectorespropios independiente $x_1, ..., x_n$, estos entran en el espacio columna de S.

$$S^{-1}AS = \Lambda$$
$$A = S\Lambda S^{-1}$$

- Las potencias de A son $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$. Los vectores propios de S no se han modificado.

- Los valores propios de A^k son $(\lambda_1)^k, ..., (\lambda_n)^k$ en la matriz Λ^k.

- La solución a $u_{k+1} = Au_k$ empezando desde u_0 es $U_k = A^k u_0 = S\Lambda S^{-1} u_0$:

$$u_k = c_1(\lambda)^k x_1 + \cdots + c_n(\lambda)^k x_n$$

  siempre que

$$u_0 = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

  Esto muestran los pasos 1, 2, 3 ($c's$ desde $S^{-1}u_0$, λ^k desde Λ^k y $x's$ desde S).

- A es diagonalizable si cada valorpropio tiene suficientes vectorespropios (GM=AM).

6.3. Aplicación a ecuaciones diferenciales

- La ecuación $u' = Au$ es lineal con coeficientes constantes, empezando desde $u(0)$.

- Su solución es por lo general una combinación de exponenciales, implicando cada λ y x:

  Vectorespropios independientes

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$$

- Las constantes $c_1, ..., c_n$ son determinadas por $u(0) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = Sc$.

- $u(t)$ se aproxima a cero (estabilidad) si cada λ tiene parte real negativa.

- La solución es siempre $u(t) = e^{At}u(0)$, con la matriz exponencial e^{At}.

- Ecuaciones con y'' se reducen a $u' = Au$ por combinación de y' e y en $u = (y, y')$.

6.4. Matrices simetricas

- La matriz simétrica A tiene *valorespropios real* y *vectorespropios perpendiculares.*
- La diagonalización se convierte a $A = Q\Lambda Q^T$ con una matriz ortogonal Q.
- Todas las matrices simétricas son diagonalizables, incluso con valores propios repetidos.
- El signo del valorpropio coincide con el signo del pivots, cuando $A = A^T$.
- Toda matriz cuadrada puede ser "triagonalizada"por $A = QTQ^{-1}$.

6.5. Matriz defiida positiva

- Una matriz definida positiva tiene valoresprepios positivos y pivots positivos.
- Un test rápido esta dado por la determinante de la parte superior izquierda: $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.
- La gráfica de $x^T Ax$ es entonces un "bowl"subiendo desde $x = \mathbf{0}$:

  $$x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

  es positivo excepto en $(x, y) = (0, 0)$.
- $A = R^T R$ es automáticamente positiva definida si R tiene columnas independientes.
- La elipse $x^T Ax = 1$ tiene sus ejes a lo largo de los vectores propios de A. Con longitudes $1/\sqrt{\lambda}$.

6.6. Matrices similares

- B es similar a A si $B = M^{-1}AM$, para alguna matriz invertible M.
- Matrices similares tienen iguales valorespropios. Los vectorespropios se multiplican por M^{-1}.
- Si A tiene n vectorespropios independiente entonces A es similar a Λ ($M = S$).
- Cada matriz es similar a una matriz de Jordan J (que tiene A como su parte diagonal). J tiene un bloque para cada vectorpropio y 1's para los vectorespropios faltantes.

6.7. Descomposición en valor singular (SVD)

- El factor SVD de A en $V\Sigma V^T$ de r valores singulares $\sigma_1 \geq ... \geq \sigma_r > 0$.
- Los números $\sigma_1^2, ..., \sigma_r^2$ son los vectorespropios distintos de cero de AA^T y $A^T A$.
- La columna ortonormal de U y V son vectorespropios de AA^T y $A^T A$.
- Esas columnas tiene bases ortonormales para los cuatro espacios fundamentales de A.
- Esas bases diagonalizan la matriz: $Av_i = \sigma_1 u_i$ para $i \leq r$. Esto es $AV = U\Sigma$.

Este material fue elaborado por:

Esteban Lailla stban06@gmail.com
Juan Carlos Miranda juancarlosmiranda81@gmail.com
Julio Mello prof.juliomello@gmail.com
Pastor Enmanuel Pérez-Estigarribia peperez.estigarribia@gmail.com
Luis G. Moré lmore@pol.una.py

Bibliografía consultada

[1] GILBERT STRANG. *INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA (Fourth Edition)*, ISBN 978-0-9802327-2-1