

Точка Болтая

Точкой Болтая треугольника ABC со стороны вершины A назовём такую точку B , что

$$\angle BAB = \angle ACB \quad \text{и} \quad \angle CAB = \angle ABB.$$

Несложно видеть, что B лежит на (BOC) .

- Докажите, что точки A , B и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности.
 - Докажите, что B — это проекция O на симедиану.
 - Докажите, что B и точка Шалтая изогонально сопряжены.
- В треугольнике ABC провели высоту AN и отметили точку M — середину стороны AB . Докажите, что описанная окружность треугольника BMN проходит через точку Болтая со стороны вершины A .
- Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проведённая в точке A , пересекает прямую BC в точке D . Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямая OD проходит через точку Болтая со стороны вершины A .
- В треугольнике ABC провели высоту AD и отметили середины M и N отрезков AB и AC . Докажите, что прямая, проходящая через D и точку Болтая со стороны вершины A , делит отрезок MN пополам.
- На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вне построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$. Прямая AG пересекает отрезок BD в точке X , прямая AE пересекает отрезок CF в точке Y . Докажите, что окружности (DGX) и (FEY) пересекаются в точке Болтая.

Шалтай или Болтай

- Внешняя биссектриса угла A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D , а окружность (ABC) — в точке A_1 . Точки I и I_a — центры вписанной и внеписанной окружности, касающейся BC , соответственно. Докажите, что $DI \perp A_1I_a$.
- На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки P и Q , что $\angle PAB = \angle ACB$ и $\angle QAC = \angle ABC$. Точки M и N таковы, что точки P и Q являются серединами отрезков AM и AN соответственно. Отрезки BM и CN пересекаются в точке X . Докажите, что X лежит на (ABC) .
- (Устный тур Тургора 2025) Дан треугольник ABC . Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA , а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C . Окружность (CPW) пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB , в точке Q . Докажите, что $LC = LQ$.