

Тренировочная олимпиада 3

1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с действительными коэффициентами. Докажите, что найдётся натуральное n такое, что у уравнения $f(x) = \frac{1}{n}$ нет рациональных корней.
2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , а прямые AD и BC — в точке F . Точки X и Y — середины сторон AD и BC соответственно. Точка O — центр описанной окружности $ABCD$, а точка O_1 — центр описанной окружности треугольника EXY . Докажите, что $OF \parallel O_1E$.
3. Назовём натуральное число *хорошим*, если сумма всех его делителей, включая 1, но не включая само число, на 1 меньше этого числа. Найдите все хорошие числа, некоторая степень которых тоже хорошая.
4. В далёкой стране передвижение между городами возможно только на самолёте или на поезде. Самолётом или поездом можно путешествовать только между определёнными городами, причём необязательно в обе стороны. Известно, что для любых двух городов A и B можно добраться либо из A в B , либо из B в A , пользуясь только самолётом или только поездом. Докажите, что существует такой город, что из него можно добраться в любой другой город, пользуясь только одним видом транспорта (для разных городов могут использоваться разные виды транспорта).