Январская математическая программа 2024.
Дистанционный отборочный тур. 8 класс.

1.1. В графе 20 вершин степени 4, 5 степени 2, 6 степени 7. Сколько в нём рёбер?

Ответ. 66

1.2. В графе 20 вершин степени 6, 5 степени 4, 6 степени 7. Сколько в нём рёбер?

Ответ. 91

1.3. В графе 12 вершин степени 4, 6 степени 7, 8 степени 3. Сколько в нём рёбер?

Ответ. 57

1.4. В графе 24 вершин степени 3, 5 степени 4, 10 степени 5. Сколько в нём рёбер?

Ответ. 71

Решение первого варианта. Посчитаем сумму степеней вершин нашего графа $20 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 7 = 132$. Поделим пополам, получим количество рёбер равно 66.

2.1. Нейросеть спросили, что можно делать с числом 2023. Она ответила, что можно несколько раз последовательно вычитать 15 или 18. Какие числа большие 30, но меньшие 40 можно получить?

Ответ. 31, 34, 37

2.2. Нейросеть спросили, что можно делать с числом 2023. Она ответила, что можно несколько раз последовательно вычитать 15 или 18. Какие числа большие 25, но меньшие 35 можно получить?

Ответ. 28, 31, 34

2.3. Нейросеть спросили, что можно делать с числом 2023. Она ответила, что можно несколько раз последовательно вычитать 15 или 18. Какие числа большие 35, но меньшие 45 можно получить?

Ответ. 37, 40, 43

2.4. Нейросеть спросили, что можно делать с числом 2023. Она ответила, что можно несколько раз последовательно вычитать 15 или 18. Какие числа большие 40, но меньшие 50 можно получить?

Ответ. 43, 46, 49

Решение первого варианта. Числа 15 и 18 кратны трем, значит, остаток от деления на 3 будет постоянным. 2023 при делении на 3 дает 1, значит, можно получить лишь числа, дающие остаток 1 при делении на 3. Таковых в диапазоне $(30; 40)$ — $31, 34, 37$.

3.1. Какое наибольшее число клеток можно закрасить в прямоугольнике 11×12, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали горизонтальную полоску из трёх клеток?

Ответ. 88

3.2. Какое наибольшее число клеток можно закрасить в прямоугольнике 13×15, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали горизонтальную полоску из трёх клеток?

Ответ. 130

3.3. Какое наибольшее число клеток можно закрасить в прямоугольнике 11×15, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали горизонтальную полоску из трёх клеток?

Ответ. 110

3.4. Какое наибольшее число клеток можно закрасить в прямоугольнике 11×18, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали горизонтальную полоску из трёх клеток?

Ответ. 132

Решение первого варианта. В прямоугольнике 11 строк и 12 столбцов. Разобьем его на горизонтальные прямоугольники 1×3 — их будет 5 в каждой строке, итого 55. В каждом таком прямоугольнике можно покрасить не более 2 клеток, значит, всего будет покрашено не более 110. Пример: вертикальные прямоугольники 11×2, между которыми полоска из непокрашенных клеток. Всего их поместится 5.

4.1. В классе есть 10 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно выбрать команду из 4 из них для участия в олимпиаде для девочек?

Ответ. 210

4.2. В классе есть 10 мальчиков и 11 девочек. Сколькими способами можно выбрать команду из 4 из них для участия в олимпиаде для девочек?

Ответ. 330

4.3. В классе есть 12 мальчиков и 12 девочек. Сколькими способами можно выбрать команду из 4 из них для участия в олимпиаде для девочек?

Ответ. 495

4.4. В классе есть 12 мальчиков и 9 девочек. Сколькими способами можно выбрать команду из 4 из них для участия в олимпиаде для девочек?

Ответ. 126

Решение первого варианта. Очевидно, мальчики в олимпиаде для девочек не принимают участия. А из 10 девочек можно выбрать 4 так: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 : 4! = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$.

5.1. Найдите последнюю цифру выражения $3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 13 \cdot 13 + 18 \cdot 18 + 23 \cdot 23 + \ldots + 2023 \cdot 2023$. Здесь берутся все числа от 3 до 2023 у которых последняя цифра равна 3 или 8.

Ответ. 5

5.2. Найдите последнюю цифру выражения $3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 13 \cdot 13 + 18 \cdot 18 + 23 \cdot 23 + \ldots + 2028 \cdot 2028$. Здесь берутся все числа от 3 до 2028 у которых последняя цифра равна 3 или 8.

Ответ. 9

5.3. Найдите последнюю цифру выражения $3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 13 \cdot 13 + 18 \cdot 18 + 23 \cdot 23 + \ldots + 2033 \cdot 2033$. Здесь берутся все числа от 3 до 2033 у которых последняя цифра равна 3 или 8.

Ответ. 8

5.4. Найдите последнюю цифру выражения $3 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 13 \cdot 13 + 18 \cdot 18 + 23 \cdot 23 + \ldots + 2038 \cdot 2038$. Здесь берутся все числа от 3 до 2038 у которых последняя цифра равна 3 или 8.

Ответ. 2

Решение первого варианта. В данной сумме каждое слагаемое оканчивается либо на 9, либо на 4. Заметим, что среди выписанных сумм ровно 203 оканчивается на 9 и ровно 202 оканчивается на 4. Итого получаем $203 \cdot 9 + 202 \cdot 4$ данное выражение оканчивается на 5.

6.1. На доске написано 100 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них равна 10, 11 или 12. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 400, 399, 398

6.2. На доске написано 100 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх из них равна 13, 14 или 15. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 500, 499, 498

6.3. На доске написано 103 числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них равна 10, 11 или 12. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 412, 411, 410

6.4. На доске написано 103 числа. Оказалось, что сумма любых трёх из них равна 13, 14 или 15. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 515, 514, 513

Решение первого варианта. Упорядочим числа по неубыванию $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{100}$. Сумма трех самых больших не более 12, значит, a_3 не превышает 4. Сумма трех самых маленьких не меньше 10, значит, a_{98} не меньше 4 (иначе сумма будет не более 9). Таким образом, $a_3 = a_4 = \ldots = a_{98} = 4$. Больше 4 ни одно из чисел быть не может (иначе добавим к нему пару 4-ок и найдется сумма более 12). Сумма оставшихся двух самых маленьких чисел не может быть меньше 6. Имеем три возможных ответа $400, 399, 398$.

7.1. Мальчики и девочки играли в шахматы. Каждый мальчик сыграл в два раза больше партий, чем каждая девочка. Каждую третью игру мальчик играл с девочкой, а девочки между собой не играли. Сколько было мальчиков, если всего детей 25?

Ответ. 15

7.2. Мальчики и девочки играли в шахматы. Каждый мальчик сыграл в два раза больше партий, чем каждая девочка. Каждую третью игру мальчик играл с девочкой, а девочки между собой не играли. Сколько было мальчиков, если всего детей 30?

Ответ. 18

7.3. Мальчики и девочки играли в шахматы. Каждый мальчик сыграл в три раза больше партий, чем каждая девочка. Каждую вторую игру мальчик играл с девочкой, а девочки между собой не играли. Сколько было мальчиков, если всего детей 25?

Ответ. 10

7.4. Мальчики и девочки играли в шахматы. Каждый мальчик сыграл в три раза больше партий, чем каждая девочка. Каждую вторую игру мальчик играл с девочкой, а девочки между собой не играли. Сколько было мальчиков, если всего детей 30?

Ответ. 12

Решение первого варианта. Пусть m — мальчики, d — девочки, — количество партий, которое сыграла каждая девочка. Тогда 2 — количество партий которое сыграл каждый мальчик. Тогда количество партий, которое девочки сыграли с мальчиками равно dx. А количество, которое сыграли мальчики с девочками — это $2xm/3$. Получается: $2m/3 = dx$, $2m = 3d$. Зная, что $m + d = 25$, делим 25 в отношении $2 : 3$, получаем $m = 15$.

8.1. Сколько существует трёхзначных чисел меньших 520 у которых в записи есть хоть одна цифра 1?

Ответ. 168

8.2. Сколько существует трёхзначных чисел меньших 530 у которых в записи есть хоть одна цифра 2?

Ответ. 169

8.3. Сколько существует трёхзначных чисел меньших 530 у которых в записи есть хоть одна цифра 3?

Ответ. 160

8.4. Сколько существует трёхзначных чисел меньших 430 у которых в записи есть хоть одна цифра 2?

Ответ. 150

Решение первого варианта. В первой сотне все числа содержат первую цифру 1, и их ровно 100. Во второй сотне есть 10 чисел со второй цифрой 1 и 10 с последней, при этом число 211 и там и там, то есть во второй сотне 19 нужных чисел. Аналогично в третьей и в четвертой. Далее осталось учесть числа 501, 510, 511, $\ldots$, 519. Складываем $100 + 19 + 19 + 19 + 1 + 10$ получаем 168.

9.1. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла C, если $\angle B = 66^\circ$.

Ответ. 54

9.2. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла C, если $\angle B = 67^\circ$.

Ответ. 53

9.3. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла C, если $\angle B = 68^\circ$.

Ответ. 52

9.4. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите величину угла C, если $\angle B = 69^\circ$.

Ответ. 51

Решение первого варианта. Пусть M общая точка пересечения указанных трех прямых. Так как M лежит на середином перпендикуляре, то $AM = MB$, $\angle ABM = \angle BAM$, так как AM является биссектрисой, то $\angle BAM = \angle CAM$. Получаем из прямоугольного треугольника, что все указанные углы по 30°. Тогда угол $HBC = 66^\circ - 30^\circ = 36^\circ$, и искомый угол $\angle C = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

10.1. Для некоторого вещественного числа b оказалось, что $b - \frac{1}{b} = 5$. Чему может быть равно $b^2 + \frac{1}{b^2} + 1$?

Ответ. 28

10.2. Для некоторого вещественного числа b оказалось, что $b - \frac{1}{b} = 7$. Чему может быть равно $b^2 + \frac{1}{b^2} + 1$?

Ответ. 52

10.3. Для некоторого вещественного числа b оказалось, что $b - \frac{1}{b} = 5$. Чему может быть равно $b^2 + \frac{1}{b^2} + 3$?

Ответ. 30

10.4. Для некоторого вещественного числа b оказалось, что $b - \frac{1}{b} = 7$. Чему может быть равно $b^2 + \frac{1}{b^2} + 3$?

Ответ. 54

Решение первого варианта. Заметим, что $b^2 + \frac{1}{b^2} + 1 = \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + 3 = 28$.

11.1. Для каких натуральных a, найдётся целое b такое, что $ab - 4a - 2b = 3$?

Ответ. 41334

11.2. Для каких натуральных a, найдётся целое b такое, что $ab - 4a - 2b = 5$?

Ответ. 42064

11.3. Для каких натуральных a, найдётся целое b такое, что $ab - 5a - 3b = 9$?

Ответ. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27

11.4. Для каких натуральных a, найдётся целое b такое, что $ab - 3a - 4b = 11$?

Ответ. 46510

Решение первого варианта. Добавим 8 и разложим на множители, получим $(a-2)(b-4) = 11$, У числа 11 есть 4 целых делителя: -11, -1, 1, 11. Чтобы найти a надо к каждому из данных чисел добавить 2, заметим, что полученное -9 не является натуральным. Получаем ответ 1,3, 13.

12.1. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. При повороте на какой наименьший угол относительно B прямая BD перейдёт в прямую BE. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 36

12.2. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. При повороте на какой наименьший угол относительно B прямая BD перейдёт в прямую BA. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 72

12.3. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. При повороте на какой наименьший угол относительно C прямая CA перейдёт в прямую CE. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 36

12.4. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. При повороте на какой наименьший угол относительно C прямая CA перейдёт в прямую CD. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 37

Решение первого варианта. Для ответа на поставленный вопрос, нам достаточно найти величину угла $\angle DBE$. Так как угол правильного пятиугольника равен $108°$, то угол $\angle ABE = (180° - 108°)/2 = 36°$ как угол при основании в равнобедреном треугольнике ABE. Аналогично $\angle CBD = 36°$, откуда $\angle DBE = 108° - 36° - 36° = 36°$.

13.1. Доску 13×22 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 95

13.2. Доску 13×25 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 108

13.3. Доску 10×22 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 73

13.4. Доску 13×25 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 83

Решение первого варианта. Отрежем от нашего прямоугольника белую угловую клетку. Разрежем то, что осталось от ее строки на горизонтальные полоски 1×3. Оставшийся прямоугольник 12×22 разрежем на вертикальные полоски 1×3. Таким образом наш прямоугольник без одной белой клетки разбился на полоски 1×3, следовательно, всего красных клеток $(13 \cdot 22 - 1)/3 = 95$. Для построения примера достаточно покрасить доску чередующимися диагоналями: белая, красная, синяя, белая, красная, синяя и так далее.

14.1. Сколько нечётных цифр в числе $(\underbrace{999\ldots97}_{10\text{ цифр}})^2$?

Ответ. 10

14.2. Сколько нечётных цифр в числе $(\underbrace{999\ldots97}_{11\text{ цифр}})^2$?

Ответ. 11

14.3. Сколько нечётных цифр в числе $(\underbrace{999\ldots97}_{12\text{ цифр}})^2$?

Ответ. 12

14.4. Сколько нечётных цифр в числе $(\underbrace{999\ldots97}_{13\text{ цифр}})^2$?

Ответ. 13

Решение первого варианта. Заметим, что $(\underbrace{999\ldots97}_{10\text{ цифр}})^2 = (10^{10}-3)^2 = 10^{20}-6*10^{10}+9$. Тогда, при вычитании 6ки из 11го разряда, он станет равен 4, а все более старшие разряды до 20го включительно станут 9 (21й пропадёт). Прибавляя 9, разряд единиц станет 9. То есть, всего 10 нечётных цифр.

15.1. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 24 или 26 А во всех строках кроме первой сумма равна 24. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 24, 26, 28, 30, 32, 34

15.2. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 26 или 28 А во всех строках кроме первой сумма равна 26. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 26, 28, 30, 32, 34, 36

15.3. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 27 или 29 А во всех строках кроме первой сумма равна 27. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 27, 29, 31, 33, 35, 37

15.4. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 28 или 30 А во всех строках кроме первой сумма равна 28. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 28, 30, 32, 34, 36, 38

Решение первого варианта. Посчитаем сумму всех чисел в таблице двумя способами. Если во всех столбцах сумма 24, то во всей таблице 120 и в первой строке тоже 24, если же среди столбцо есть одно число 26, то будет сумма равна 26. Если среди столбцов две суммы по 26, то в первой строке получим 28, и так далее до пяти столбцов по 26. Получаем ответ: 24, 26, 28, 30, 32, 34. В каждом ситуации приводится пример.