Группа 9-1, 1 пара.

Задачи к зачёту. 9 класс

Алгебра

1. Докажите неравенство $|x|+|y|+|z| \leqslant |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$ для произвольных чисел x, y, z.

2. Докажите для натурального k и положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n при $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$ неравенство $x_1^k+\ldots+x_n^k \geqslant n$.

3. Пусть $x_1,\ldots,x_n>0$ и $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=n$. Докажите, что $x_1+\dfrac{x_2^2}{2}+\dfrac{x_3^3}{3}+\ldots+\dfrac{x_n^n}{n} \geqslant 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

4. При каких вещественных a и b многочлен x^3+ax+1 делится на x^2+x+b?

5. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых равенство $P(x+y)=P(x)+P(y)+3xy(x+y)$ выполнено при всех вещественных x и y.

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два многочлена, коэффициенты каждого из которых взаимно просты в совокупности. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)\cdot Q(x)$ также взаимно просты в совокупности.

7. Многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

8. Докажите, что уравнение $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$ при любых a, b, c имеет действительные корни.

9. Даны три квадратных трёхчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все они имеют ровно одну общую точку.

10. У квадратного трехчлена $f(x)=x^2+ax+b$ два корня, один из них лежит на интервале $(0,1)$, а второй лежит вне его. Докажите, что $f(b)\leqslant 0$.

11. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

12. Найдите наименьшее значение α, для которого существует хотя бы одна пара x и y такая, что $x^2+2y^2-xy-\alpha x+\alpha y+\alpha^2 \leqslant 1$.

13. Про квадратный трёхчлен $f(x)$ известно, что уравнение $f(x)=A(x-1)$ имеет единственный корень, и уравнение $f(x)=B(x-1)$, $A<0<B$ имеет единственный корень. а) Докажите, что уравнение $f(x)=0$ корней не имеет; б) найдите дискриминант трёхчлена.

14. В параболу $y=x^2$ вписывается прямоугольный треугольник, гипотенуза которого параллельна оси абсцисс. Докажите, что высота этого треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 1.

15. Докажите, что проекции на ось абсцисс дуг, высекаемых парой параллельных прямых на параболе, имеют равные длины.

16. Прямая пересекла график гиперболы вида $y=k/x$ в двух точках. График гиперболы и одну из точек стёрли, а оси координат не стёрли. Восстановите эту точку с помощью циркуля и линейки.

17. Обозначим через O вершину параболы $y=ax^2$. Назовём прямую, пересекающую параболу в двух точках A и B, *особой*, если угол AOB – прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.

18. Прямые ℓ_i: $y=k_ix+b_i$, $i=1,2,3$ касаются параболы $y=x^2$. Известно, что $k_1=k_2+k_3$. Докажите, что $b_1\geqslant 2(b_2+b_3)$.

19. Уравнение $(x+a)(x+b)=9$ имеет корень $x=a+b$. Докажите, что $ab\leqslant 1$.

20. Положительные числа x, y таковы, что $x^5-y^3\geqslant 2x$. Докажите, что $x^3\geqslant 2y$.

21. Даны 111 целых ненулевых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить числа на две группы, и числа в группах перемножить, то сумма двух полученных произведений будет отрицательна.

22. Найдите все множества A чисел, обладающих свойством: если сумма двух чисел принадлежит множеству A, то их произведение также принадлежит множеству A.

Группа 9-1, 2 пара.

Задачи к зачёту. 9 класс

Геометрия

1. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Докажите, что точки B, C, I и O лежат на одной окружности.

2. На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

3. К двум окружностям, пересекающимся в точках A и B, проведена общая касательная. Докажите, что если C и D — точки касания, то $\angle CAD + \angle CBD = 180°$.

4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность w проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X и Y лежат на одной окружности.

5. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

6. К окружности проведены касательные в точках A и B, пересекающиеся в точке P. Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность в точках K и L. Пусть M — середина хорды KL. Докажите, что точки P, A, B, M лежат на одной окружности.

7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

8. Пусть Y — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что вневписанные окружности треугольников ABY и ACY касаются.

9. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны BC в точке K. Отрезки AK и DK пересекают окружность в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ, если сторона квадрата равна 1.

10. Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его противоположных сторон BC и AD в точках K и E. Отрезок KE пересекает диагональ BD четырёхугольника в точке M. Докажите, что $BM : MD = BK : DE$.

Группа 9-1, 3 пара.

Задачи к зачёту. 9 класс

Комбинаторика

1. На пустой шахматной доске расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом в свободную клетку ставится ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей можно такими ходами поставить на доску?

2. В колоде 36 карт. Изначально некоторые из них лежат картинкой вниз, а некоторые — картинкой вверх. За один ход разрешается взять стопку из нескольких карт вверху колоды, перевернуть и вновь положить её сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали картинками вверх?

3. На столе из спичек длины 1 выложен правильный треугольник со стороной n, разбитый на правильные треугольники со стороной 1. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, чтобы на столе не осталось ни одного правильного треугольника со стороной 1?

4. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 11 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова (даже одинаковые), то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

5. Можно ли отметить на плоскости 7 точек, чтобы среди любых трёх из них нашлись две на расстоянии 1 друг от друга?

6. Существуют ли два равных шестиугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

7. Могут ли все стороны 14-угольника лежать на семи прямых?

8. Можно ли отметить на плоскости восемь точек общего положения, среди которых нет пяти, лежащих в вершинах выпуклого пятиугольника?

9. Пусть $k > 1$ — натуральное число. В графе степень каждой вершины не меньше k. Докажите, что в этом графе найдётся простой цикл длины не меньше, чем $k + 1$.

10. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.