Группа 8-1, 1 пара.

Зачётная работа
Вариант 1

Дорогой друг. На эту работу у тебя 90 минут. Не забудь подписать каждый лист, который будешь сдавать!

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM : BM = 1 : 2$, $BK : CK = 3 : 5$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Найдите $AO : KO$.

2. Для неотрицательных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}\geqslant\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

3. Псевдоладья — фигура, которая бьет как ладья, но только клетки своего цвета при шахматной раскраске. Псевдоладьи бьют сквозь друг друга. Какое максимальное количество псевдоладей можно расставить на доске 7×7 так, чтобы они не били друг друга?

4. Точки P и Q — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B. Докажите, что $BD = 2PQ$.

5. Скажем, что натуральное число k *сверхделится* на натуральное m, если k^m делится на m^k. Докажите, что если a сверхделится на b, а b сверхделится на c, то a сверхделится на c.

6. Из прямоугольной плитки шоколада размером 17×238 двое по очереди выкусывают квадратные куски любого размера (по линиям долек). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Зачётная работа
Вариант 2

Дорогой друг. На эту работу у тебя 90 минут. Не забудь подписать каждый лист, который будешь сдавать!

1. Внутри угла ABC отмечена точка D. Известно, что $AB = 2$, $CD = 3$, $BC = 4$, $\angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$. Точка E — середина отрезка BD. Найдите AE.

2. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$6abc\leqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leqslant 2(a^3+b^3+c^3).$$

3. Можно ли разрезать доску 11×11 на горизонтальные прямоугольники 1×2 и вертикальные прямоугольники 1×3?

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ нашлась точка K такая, что $AK = BK$. Прямая, проходящая через K и параллельная AB, пересекает диагональ AC в точке L. Докажите, что $\angle KBL = \angle ADB$.

5. Можно ли найти десять таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

6. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000. Кто выиграет при правильной игре?

Группа 8-1, 1 пара.

Зачётная работа
Вариант 3

Дорогой друг. На эту работу у тебя 90 минут. Не забудь подписать каждый лист, который будешь сдавать!

1. Существует ли трапеция с основаниями 4 и 9, а диагоналями 5 и 7?

2. Действительные числа a, b и c таковы, что $ab-1 < a-b$ и $ac-1 < a-c$. Докажите, что $bc+1 > b+c$.

3. 10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу — синие. Разрешены две операции:
1) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд;
2) перевернуть четыре фишки, расположенные в двух парах соседних фишек, между которыми одна фишка.
Удастся ли через несколько операций перевернуть все фишки синей стороной вверх?

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки N и M соответственно, причем $AN = NB$. На отрезке BM нашлась такая точка P, что $\angle NPM = \angle CPM$ и $PC = 2PN$. Докажите, что $BC = AP$.

5. При каких натуральных n число n^4+1 делится на n^2+n+1?

6. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Зачётная работа
Вариант 4

Дорогой друг. На эту работу у тебя 90 минут. Не забудь подписать каждый лист, который будешь сдавать!

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC нашлись точки K и L соответственно такие, что $KA = AC = CL$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Биссектрисы углов BAC и CBA пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AC$.

2. Для положительных a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

3. Фигура *полуконь* ходит как обычный конь, только в четырех направлениях: вверх-влево, вверх-вправо, вправо-вверх и вправо-вниз. Докажите, что с какой бы клетки доски 100×100 он ни начал, полуконь сможет сделать лишь конечное число ходов.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяли точки K и E так, что прямые AE и CK параллельны. Докажите, что прямые BE и DK тоже параллельны.

5. Коля написал число из одних троек. Всегда ли Кирилл может написать число, состоящее из одних четверок, которое делится на колино число?

6. Первый игрок ставит на шахматную доску ладью. Затем второй ее передвигает ходом коня. Затем ее передвигает первый - ходом слона, затем снова второй ходом коня и так далее. Запрещается ставить ладью на клетки, где она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?