**Группа 9-3, 1 пара.**

**1.** Докажите, что в любом графе без изолированных вершин можно выделить не более половины вершин так, чтобы каждая из оставшихся была соединена хотя бы с одной выделенной.

**2.** Известно, что если у двух жителей деревни поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

**3.** Пусть $k > 1$ — натуральное число. В графе степень каждой вершины не меньше $k$. Докажите, что в этом графе найдётся простой цикл длины не меньше, чем $k + 1$.

**4.** Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

**5.** Все простые циклы графа G имеют длину, кратную натуральному числу $n > 3$. Докажите, что в графе есть вершина степени не более 2.

**6.** В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

**7.** В графе $n$ вершин, $5n$ ребер и нет циклов длины менее пяти. Докажите, что в этом графе есть 5 попарно не пересекающихся по вершинам циклов.

**Группа 9-3, 2 пара.**

## Квадратный трёхчлен — 1

**0.** $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$. Сравните значения $f\left(\sqrt[3]{9}\right)$ и $f\left(\sqrt[50]{30}\right)$.

**1.** Докажите, что квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при любом целом $x$, когда $2a$, $a + b$, $c$ – целые числа.

**2.** Значения $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ квадратичной функции $f(x)$ – целые числа. Докажите, что при любом целом $x$ значение $f(x)$ – целое число.

**3.** Докажите, что уравнение $a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$ при любых $a$, $b$, $c$ имеет действительные корни.

**4.** Значения квадратного трехчлена $ax^2 + 2bx + c$ отрицательны для всех $x$. Докажите, что значения трехчлена $a^2x^2 + 2b^2x + c^2$ при всех $x$ положительны.

**5.** Докажите, что для любых не равных нулю $a, b, c$ хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет решение.

**6.** Верно ли, что если $b > a + c > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня?

**7.** Докажите, что если квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при любом $x$, когда $2a, a + b, c$ – целые числа.

**8.** Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Верно ли, что если графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку, то графики всех трёх имеют ровно одну общую точку?

**9.** Докажите, что параболы $y = ax^2 + bx + c, y = bx^2 + cx + a, y = cx^2 + ax + b$ пересекаются в одной точке.

**10.** Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, если $a(4a + 2b + c) < 0$. Верно ли обратное?

**11.** Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$, где $x_1, x_2$ - корни квадратного уравнения $x^2 + x + b = 0$. Найдите $b$.

**12.** Найдите сумму корней всех квадратных уравнений вида $x^2 + px - 2017 = 0$, где $p$ принимает все целые значения от -100 до 100.

**Группа 9-3, 3 пара.**

**Неравенства-1**

**1.** Докажите неравенство $1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$ для положительных чисел $a$, $b$, $c$, $d$.

**2.** Докажите, неравенство $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

**3.** Сумма положительных чисел $x$ и $y$ равна 1. Докажите, что: а) $x^2+y^2 \geqslant \dfrac{1}{2}$; б) $x^4+y^4 \geqslant \dfrac{1}{8}$.

**4.** Докажите, что для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$ выполнено $ab+bc+ca \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$.

**5.** Докажите, что для положительных чисел $a$, $b$, $c$ выполнено $\dfrac{a+b+c}{abc} \leqslant \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$.

**6.** Докажите неравенство $|x|+|y|+|z| \leqslant |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$ для произвольных чисел $x$, $y$, $z$.

**7.** Докажите, что $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

**Группа 9-3, 1 пара.**

**Квадратный трёхчлен – 2**

**1.** Пусть $f_1$, $f_2$, $f_3$ — квадратные трехчлены с положительными старшими коэффициентами. Верно ли, что если каждые два из них имеют единственный общий корень, то и квадратный трехчлен $f_1 + f_2 + f_3$ имеет единственный корень?

**2.** Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все они имеют ровно одну общую точку.

**3.** У квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ два корня, один из них лежит на интервале $(0, 1)$, а второй лежит вне его. Докажите, что $f(b) \leqslant 0$.

**4.** Известно, что $ax^2 + bx + c > cx$ для любого $x$. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ для любого $x$.

**5.** Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов $x^2 f(\frac{1}{x}+1)$ или $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 3$ получить $x^2 + 10x + 9$.

**6.** Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

**7.** Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке.

**8.** Различные числа $a, b$ и $c$ таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

**9.** Существует ли два квадратных трехчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня.

**10.** Микрокалькулятор МК-17 умеет над числами, занесенными в память, производить только три операции:

1) проверять, равны ли выбранные два числа,
2) складывать выбранные числа,
3) по выбранным числам $a$ и $b$ находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число $x$. Как с помощью МК-17 узнать, равно ли это число единице?

**Группа 9-3, 2 пара.**

## Неравенства-2

**1.** Докажите, что $(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}} - n\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant a_{n+1}$.

**2.** Докажите неравенство $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{4}{c}+\dfrac{16}{d} \geqslant \dfrac{64}{a+b+c+d}$

**3.** Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – положительные числа с произведением 1. Докажите неравенство $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1} \geqslant \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}$.

**4.** *а*) Докажите **Неравенство Бернулли**: Пусть $x \geqslant -1$, $n$ — натуральное число. Тогда

$$(1+x)^n \geqslant 1+xn.$$

*б*) Докажите для натурального $k$ и положительных чисел $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ при $x_1+x_2+\ldots+x_n = n$ неравенство

$$x_1^k+\ldots+x_n^k \geqslant n.$$

**5.** Докажите, что не могут одновременно выполняться все неравенства $a(1-b) > \dfrac{1}{4}$, $b(1-c) > \dfrac{1}{4}$, $c(1-a) > \dfrac{1}{4}$ для положительных чисел $a$, $b$ и $c$.

**6.** Докажите для вещественных чисел $a$ и $b$ неравенство $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

**7.** Докажите неравенство $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{c^2+ac+a^2}$ для положительных чисел $a$, $b$ и $c$

**8.** Пусть $x_i > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и $s = x_1+\ldots+x_n$. Докажите неравенство

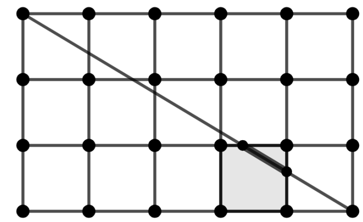
$$\frac{s}{s-x_1}+\frac{s}{s-x_2}+\ldots+\frac{s}{s-x_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}.$$

**Группа 9-3, 3 пара.**

**1.** Дан треугольник $ABC$ площадью 1. Внутри треугольника $ABC$ отмечены точки $K$, $L$, $M$, такие что $K$ — середина $AL$, $L$ — середина $BM$, $M$ — середина $CK$. Найдите площадь треугольника $KLM$.

**2.** Дан треугольник $ABC$ площади 1. Точки $M_1$, $M_2$, $M_3$ — середины сторон $AB$, $BC$ и $AC$, а точки $H_1$, $H_2$, $H_3$ — основания высот, лежащие на тех же сторонах. Докажите, что из отрезков $H_1M_2$, $H_2M_3$ и $H_3M_1$ можно построить треугольник. Чему равна его площадь?

**3.** Какая часть диагонали будет находиться внутри закрашенной клеточки?



**4.** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

**5.** Точка $N$ — середина медианы $BM$ треугольника $ABC$. Прямая $AN$ пересекает сторону $BC$ в точке $D$. Найдите $BD/DC$.

**6.** Точка $D$ середина стороны $AC$ треугольника $ABC$. На стороне $BC$ выбрана такая точка $E$, а на стороне $AB$ — точка $F$ так, что $\angle EDB = \angle EDC$ и $\angle FDA = \angle FDB$. Докажите, что $EF \parallel AC$.

**7.** Пусть $CK$ — биссектриса треугольника $ABC$. На сторонах $BC$ и $AC$ выбраны точки $L$ и $T$ соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $C$, $L$ и $T$ подобен исходному.

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Неравенства».

**Группа 9-3, 2 пара.**

**0.** В графе нет изолированных вершин. Докажите, что он связный.

**0.** В некоторой стране между любыми двумя городами существует ровно одна дорога, на которой введено одностороннее движение.

a) Докажите, что там есть город, из которого можно попасть в любой другой город.

b) Докажите, что стартовав из некоторого города можно объехать все остальные города, побывав в каждом городе ровно по одному разу.

**1.** В одной сказочной стране некоторые города соединены дорогами. Докажите, что Дед Мороз может в каждый город назначить эльфа (рыцаря или лжеца), чтобы на вопрос «есть ли лжецы среди эльфов соседних городов» любой эльф отвечал утвердительно.

**2.** В некотором государстве любые два города соединены синей или красной дорогой. Докажите, что или синий граф связен, или красный граф связен.

**3.** В компании из $n$ человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

**4.** Докажите, что существует граф на $2n$ вершинах, степени которого равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

**5.** Несколько человек не знакомы между собой. Докажите, что можно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых.

**6.** Докажите, что если в графе на $2n$ вершинах не менее $n^2 + 1$ ребер, то в нем есть треугольник.

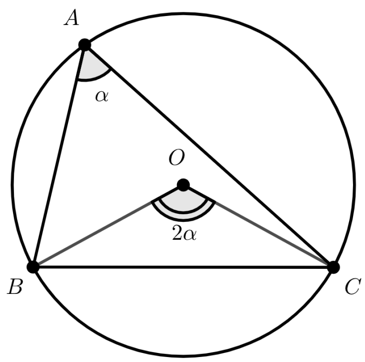
**7.** Дан граф на $n$ вершинах. Докажите, что все его ребра можно разбить на не более чем $\frac{n^2}{4}$ множеств, каждое из которых состоит из одного ребра или является треугольником.

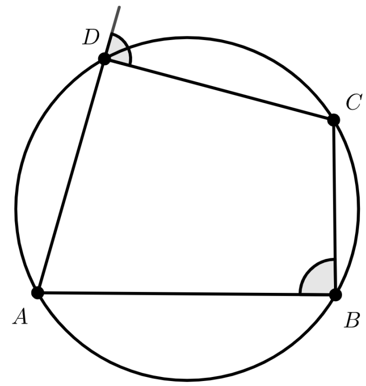
**8.** В стране 2390 городов и несколько дорог. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

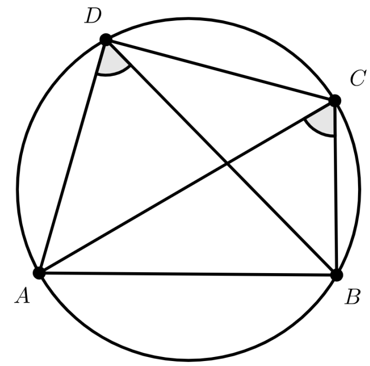
**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Квадратный трёхчлен».

**Группа 9-3, 1 пара.**




**1.** Треугольник разбили на три четырехугольника. Два из них являются вписанными. Докажите, что и третий тоже.

**2.** Точка $P$ внутри треугольника $ABC$ такова, что $\angle ABP = \angle BCP = \angle CAP$. Докажите, что точки пересечения лучей $AP$, $BP$ и $CP$ с описанной окружностью треугольника $ABC$ образуют треугольник, подобный исходному.

**3.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $60°$. Точки $I$ и $O$ — центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$ соответственно. Докажите, что точки $B$, $C$, $I$ и $O$ лежат на одной окружности.

**4.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что если $AD \parallel BC$ и $CF \parallel DE$, то $BE \parallel AF$.

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ через центр $O$ описанной окружности и вершины $B$ и $C$ проведена окружность $S$. Пусть $OK$ — диаметр окружности $S$, $D$ и $E$ — соответственно точки её пересечения с прямыми $AB$ и $AC$. Докажите, что $ADKE$ — параллелограмм.

**6.** Основание высоты треугольника спроецировали на две другие высоты, а также две другие стороны треугольника. Докажите, что полученные четыре точки лежат на одной прямой.

**7.** Пусть $O$ — центр описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$, $T$ — центр описанной окружности треугольника $AOC$, $M$ — середина $AC$. На сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $D$ и $E$ соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle B$. Докажите, что $BT \perp DE$.

**Группа 9-3, 2 пара.**

**Квадратный трёхчлен – 3**

**1.** Дан график квадратичной функции. Укажите множество точек на координатной плоскости, из которых к параболе можно провести одну касательную, две касательные, ни одной касательной.

**2.** Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 2x + 3$, проходящих через точку $(2; 3)$.

**3.** Напишите уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 2x + 3$, проходящих через точку $(2; -2)$.

**4.** Найдите наименьшее значение $\alpha$, для которого существует хотя бы одна пара $x$ и $y$ такая, что $x^2 + 2y^2 - xy - ax + ay + a^2 \leqslant 1$.

**5.** Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в точках $A$ и $B$. Известно, что угол между касательными к параболе, проведенными в точках $A$ и $B$ равен $90°$. Найдите площадь треугольника $ABC$, где $C$- вершина параболы.

**6.** При каких $a$ существует хотя бы одна пара $(x; y)$ такая что

$$3x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4x \cdot \sqrt{1 - a^2} + 4 \cdot (1 - a^2) + 4 = 0$$

.

**7.** Рассматриваются всевозможные параболы, пересекающие оси координат в трех различных точках. Для каждой такой параболы через эти точки проведем окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.

**Группа 9-3, 3 пара.**

## Неравенства-3

**0.** Докажите неравенство для положительных чисел $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

**1.** Докажите для натуральных $n$ неравенство: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\dfrac{2n-1}{2n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.

**2.** Докажите неравенство $\frac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\ldots+\dfrac{a_n}{2^n}<2$, где $a_n$ – последовательность чисел Фибоначчи.

**3.** Пусть $x_1,\ldots,x_n>0$ и $\dfrac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}=n$. Докажите, что

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\ldots+\frac{x_n^n}{n}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

**4.** Для положительных чисел $a,b,c$ докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

**5.** Докажите неравенство $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3\geqslant 6xyz$ при $x+y+z=0$.

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Квадратный трёхчлен».

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Неравенства».

**Группа 9-3, 3 пара.**

**1.** Пусть $M$ и $N$ — середины «меньшей» и «большей» дуг $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$ соответственно. Докажите, что
a) $AM$ — биссектриса угла $BAC$;
b) $AN$ — биссектриса внешнего угла $BAC$.

**2.** Хорды $AC$ и $BD$ окружности пересекаются в точке $P$. Докажите, что угол $APB$ равен полусумме «меньших» дуг $AB$ и $CD$.

**3.** Точки $A, B, C, D$ лежат на одной окружности. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $Q$. Докажите, что угол $AQD$ равен полуразности «меньших» дуг $AD$ и $BC$.

**4.** Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного $n$-угольника, могут быть представлены как $\dfrac{180^\circ \cdot k}{n}$ для некоторого натурального $k$ (для разных углов это $k$ может быть разным).

**5.** На окружность в указанном порядке отмечены точки $A$, $B$, $C$, $D$. Пусть $K$, $L$, $M$, $N$ — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

**6.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $K$ – середина дуги $AB$, не содержащей точек $C$ и $D$. Пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения пар хорд $CK$ и $AB$, $DK$ и $AB$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

**7.** В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $P$, лучи $BC$ и $AD$ — в точке $Q$. Биссектриса угла $APD$ пересекает отрезки $AD$ и $BC$ в точках $K$ и $M$; биссектриса угла $AQB$ пересекает отрезки $AB$ и $CD$ в точках $L$ и $N$. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

**8.** Окружность $\omega$ описана около остроугольного треугольника $ABC$. На стороне $AB$ выбрана точка $D$, а на стороне $AC$ — точка $E$ так, что $BC \parallel DE$. Точки $P$ и $Q$ на «меньшей» дуге $BC$ окружности $\omega$ таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи $QB$ и $PC$ пересекают прямую $DE$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180^\circ$.

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Неравенства».

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

**Группа 9-3, 3 пара.**

## Алгоритмы

**1.** На столе лежат $2n$ внешне одинаковых гирек разных весов. За одну операцию разрешается сравнить веса любых двух гирек.
**(a)** Как за $2n-1$ операцию определить самую тяжёлую гирю?
**(b)** Как за $3n-2$ операций найти и самую лёгкую, и самую тяжёлую гирю?

**2.** Дана клетчатая полоска $1 \times n$. Изначально в каждой клетке полоски лежит по одной печеньке. За одну операцию можно выбрать клетку и перенести всю стопку имеющихся там печенек влево или вправо на столько клеток, сколько печенек в стопке. Докажите, что за $n-1$ операцию можно собрать все печеньки в одной клетке.

**3.** На пустой шахматной доске расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом в свободную клетку ставится ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей можно такими ходами поставить на доску?

**4.** На кольцевой шнур нанизана связка из 20 колец размеров от 1 до 20. Два соседних кольца можно поменять местами, если их размеры отличаются на 2 или больше (а иначе нельзя). Докажите, что при любом расположения колец с помощью нескольких замен их можно расположить в порядке 1, 2, 3, . . . , 20, считая по часовой стрелке от кольца размера 1.

**5.** В колоде 36 карт. Изначально некоторые из них лежат картинкой вниз, а некоторые — картинкой вверх. За один ход разрешается взять стопку из нескольких карт вверху колоды, перевернуть и вновь положить её сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали картинками вверх?

**6.** На клетчатой полоске $1 \times n$ на 25 левых полях стоят 25 шашек. Шашка может ходить на соседнюю справа свободную клетку или перепрыгнуть через соседнюю справа шашку на следующую за ней клетку (если эта клетка свободна), движение влево не разрешается. При каком наименьшем $n$ все шашки можно переставить подряд без пробелов в обратном порядке?

**7.** В таблицу $10 \times 10$ изначально записаны нули. За один ход разрешается выбрать любой её столбец или любую строку, стереть записанные там числа и записать туда все числа от 1 до 10 в произвольном порядке — по одному в каждую клетку. Какую максимальную сумму чисел в таблице можно получить такими ходами?

**8.** Среди 16 монет есть 8 тяжёлых — весом по 11 г, и 8 лёгких — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой?

**Группа 9-3, 1 пара.**

**1.** Биссектриса $AD$ треугольника $ABC$ пересекает его описанную окружность в точке $M$. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника $ABD$, касается прямой $MB$.

**2.** Прямая $\ell$ проходит через точку $A$ и касается описанной окружности треугольника $ABC$. Окружность, проходящая через точки $B$ и $C$, вторично пересекает стороны $AB$ и $AC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Докажите, что $\ell \parallel DE$.

**3.** Две окружности касаются в точке $A$. К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся окружностей в точках $C$ и $B$. Найдите $\angle CAB$.

**4.** К двум окружностям, пересекающимся в точках $A$ и $B$, проведена общая касательная. Докажите, что если $C$ и $D$ — точки касания, то $\angle CAD + \angle CBD = 180°$.

**5.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Касательная, проведённая к описанной окружности треугольника $BOC$ в точке $O$, пересекает луч $CB$ в точке $F$. Окружность, описанная вокруг треугольника $DOF$, повторно пересекает прямую $BC$ в точке $E$. Докажите, что $AB = AE$.

**6.** Окружность, вписанная в угол с вершиной $O$, касается его сторон в точках $A$ и $B$, $K$ — произвольная точка на меньшей из двух дуг $AB$ этой окружности. На прямой $OB$ взята точка $L$ такая, что прямые $OA$ и $KL$ параллельны. Пусть $M$ — точка пересечения окружности $w$, описанной около треугольника $KLB$, с прямой $AK$, отличная от $K$. Докажите, что прямая $OM$ касается окружности $w$.

**Группа 9-3, 2 пара.**

**Оценки, примеры и принцип Дирихле**

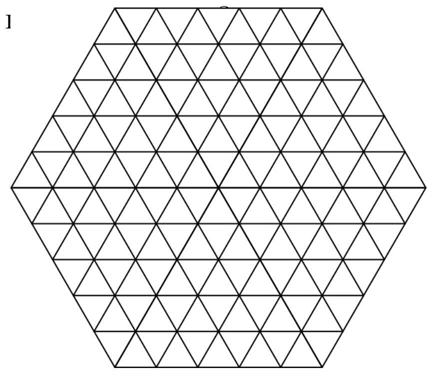
**1.** Дан деревянный кубик $2 \times 2 \times 2$. Малевич раскрасил все 24 квадрата $1 \times 1$ на его поверхности в несколько цветов так, что любые два соседних по стороне квадрата оказались разных цветов. Какое наибольшее число чёрных квадратов могло получиться?

**2.** Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

**3.** В парке в узлах квадратной решётки $10 \times 10$ высажено 121 дерево. Какое максимальное количество деревьев можно в нём вырубить так, чтобы на отрезке, соединяющем любую пару пней, находилось хотя бы одно дерево?

**4.** На столе из спичек длины 1 выложен правильный треугольник со стороной $n$, разбитый на правильные треугольники со стороной 1. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, чтобы на столе не осталось ни одного правильного треугольника со стороной 1?

**5.** Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать таким образом, чтобы никакая сумма двух выбранных чисел не делилась н



**6.** Правильный шестиугольник со стороной 5 разбит на правильные треугольники со стороной 1. Из узлов полученной решётки отметили не менее половины. Докажите, что найдётся окружность, проходящая хотя бы через 5 отмеченных узлов.

**7.** В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 11 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова (даже одинаковые), то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

**8.** Дано натуральное число $n$. Каким наименьшим числом клетчатых бумажных полос шириной в 1 клетку можно оклеить поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ ровно в один слой? Полосы состоят из целого числа клеток, полосы можно перегибать. Каждая клетка каждой полосы должна целиком накрывать некоторую клетку куба.

**Группа 9-3, 3 пара.**

**1.** Решите уравнение $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = 0$.

**2.** Докажите, что все вещественные корни уравнения $x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+2022) = 1$ меньше $\frac{1}{2022!}$.

**3.** При каких вещественных $a$ и $b$ многочлен $x^3 + ax + 1$ делится на $x^2 + x + b$?

**4.** Докажите, что многочлен $x^4+2x^2+2x+2$ нельзя представить в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами.

**5.** Найдите все многочлены $P(x)$, для которых равенство $P(x+y) = P(x)+P(y)+3xy(x+y)$ выполнено при всех вещественных $x$ и $y$.

**6** *а*) Пусть $P(x)$ – многочлен первой степени, а $Q(x)$ – многочлен второй степени. Оказалось, что $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Найдите $P(x)$.

*б*) Пусть $P(x)$ – многочлен первой степени, и $Q(x)$ – многочлены второй степени. Оказалось, что $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что $P(x) = Q(x)$.

**7.** Пусть $x_0$ – корень многочлена $nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} ? \ldots - x - 1$. Докажите, что $|x_0| \leqslant 1$.

**8.** Найдите все многочлены, делящиеся на $x^2 - 1$ и имеющие только два ненулевых коэффициента.

**9.** $P$, $Q$ – многочлены. $P$ разделили с остатком на $Q$ и выписали на доску неполное частное, остаток, $P$ и нуль-многочлен. Могут ли ровно 3 многочлена из выписанных совпадать?

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производилось решение выданных ранее задач по теме «Комбинаторика».

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Многочлены».

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Графы».

**Группа 9-3, 1 пара.**

**1.** Упростите выражение: *а)* $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$; *б)* $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}$.

**2.** Остаток от деления $P(x)$ на $x^2-3x+2$ равен $11x-4$, а от деления $P(x)$ на $x^2-7x+12$ равен $3x-8$. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $x^2-6x+8$.

**3.** Многочлен $P(x)$ представим в виде произведения квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами. Может ли у многочлена $P(x^17+x^6-15x^3+13)$ быль линейный множитель?

**4.** Пусть $a_1$, $a_2$,...,$a_n$ – положительные числа. Докажите, что многочлен $x^n+a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-a_3x^{n-3}-\ldots-a_n$ имеет не более одного положительного корня.

**5.** У многочлена $ax^5+bx^4+c$ имеется ровно три различных корня. Докажите, что у многочлена $cx^5+bx+a$ тоже имеется ровно три различных корня.

**6.** Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два многочлена, коэффициенты каждого из которых взаимно просты в совокупности. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)\cdot Q(x)$ также взаимно просты в совокупности.

**7.** Найдите все такие многочлены $P(x)$, что при всех вещественных $x$ выполнено $xP(x-1)=(x-26)P(x)$.

**8.** Многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

**9.** Многочлен степени не выше $n$ принимает целые значения в точках 0, 1,..., $n$. Докажите, что он принимает целые значения во всех целых точках.

**10.** Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, причем для некоторых целых $x_1$ и $x_2$ выполнено $|P(x_1)|=|P(x_2)|=1$. Докажите, что рациональным корнем многочлена $P$ может быть разве лишь $\frac{x_1+x_2}{2}$.

**Группа 9-3, 2 пара.**

**0.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $E$.
a) Докажите, что если $ABCD$ вписанный, то $EB \cdot EA = EC \cdot ED$.
b) Докажите, что если $EB \cdot EA = EC \cdot ED$, то $ABCD$ вписанный.

**1.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $E$.
a) Докажите, что четырехугольник если $ABCD$ вписанный, то $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.
b) Докажите, что четырехугольник если $AE \cdot EC = BE \cdot ED$, то $ABCD$ вписанный.

**2.** На луче $OA$ отметили точки $A$ и $B$, на луче $OC$ — точки $C$ и $D$, а на луче $OE$ — точки $E$ и $F$. Оказалось, что четырехугольники $ABCD$ и $CDEF$ вписанные. Докажите, что четырехугольник $ABFE$ тоже вписанный.

**3.** Высоты остроугольного треугольника $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $H$. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.

**4.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Окружность $w$ проходит через точки $A$ и $D$ и пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Обозначим через $X$ и $Y$ отражения точек $P$ и $Q$ относительно середин отрезков $AB$ и $AC$ соответственно. Докажите, что точки $B$, $C$, $X$ и $Y$ лежат на одной окружности.

**5.** На прямых, содержащих высоты $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ отметили точки, из которых соответствующие стороны (то есть $AC$ и $AB$ соответственно) видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.

**6.** Окружность $w$ касается сторон угла $BAC$ в точках $B$ и $C$. Прямая $\ell$ пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Окружность $w$ пересекает $\ell$ в точках $P$ и $Q$. Точки $S$ и $T$ выбраны на отрезке $BC$ так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки $P$, $Q$, $S$ и $T$ лежат на одной окружности.

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

**Группа 9-3, 1 пара.**

**0.** Касательная в вершине $A$ к описанной окружности треугольника $ABC$ пересекает прямую $BC$ в точке $D$. Докажите, что $DB \cdot DC = DA^2$.

**1.** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с гипотенузой $BC$. Пусть $AD$ его высота. Докажите, что $CD \cdot CB = CA^2$.

**2.** На медиане $AM$ треугольника $ABC$ выбрана такая точка $D$, что $\angle DBC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle DCB = \angle CAM$.

**3.** Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи $BA$ и $DC$ пересекаются в точке $O$. Точка $K$ такова, что $\angle AKO = \angle ABK$. Докажите, что $\angle CKO = \angle CDK$.

**4.** Через центр $I$ вписанной в неравнобедренный треугольник $ABC$ окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой $AI$ и пересекающая прямую $BC$ в точке $K$. Из точки $I$ на прямую $AK$ опущен перпендикуляр $ID$. Докажите, что точки $A, B, C, D$ лежат на одной окружности.

**5.** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABD$, $L$ — основание биссектрисы угла $C$ треугольника $ACD$. Докажите, что прямая $BI$ касается окружности $CIL$.

**6.** В треугольнике $ABC$ $(AB < BC)$ точка $I$ — центр вписанной окружности, $M$ — середина стороны $AC$, $N$ — середина дуги $ABC$ описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

**Группа 9-3, 2 пара.**

## Точки и отрезки

**1.** Найдётся ли такое расположение точек на плоскости, что от каждой на кратчайшем от неё расстоянии лежит ровно 3 точки?

**2.** Найдётся ли такое расположение точек на плоскости, что от каждой на кратчайшем от неё расстоянии лежит ровно 4 точки?

**3.** Найдётся ли такое расположение точек на плоскости, что от каждой на расстоянии 1 лежит ровно 4 точки?

**4.** Можно ли отметить на плоскости 7 точек, чтобы среди любых трёх из них нашлись две на расстоянии 1 друг от друга?

**5.** Расположите на плоскости наибольшее возможное количество точек так, чтобы расстояния между каждыми двумя точками принимали не более трёх разных значений.

**6.** Какое наименьшее количество точек можно расположить на плоскости так, чтобы каждая из них была соединена непересекающимися отрезками с четырьмя другими?

**7.** Можно ли расположить на плоскости 9 точек и провести насколько прямых, чтобы на каждой прямой лежали ровно 3 точки, и через каждую точку проходили 3 прямые?

**8.** Все точки плоскости покрашены в один из $N$ цветов, и точек каждого цвета бесконечно много. При каком наибольшем $N$ это возможно, если на любой прямой лежат точки не более чем двух цветов?

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

**Группа 9-3, 1 пара.**

## Многоугольники

**9.** Даны 100 точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой). Всегда ли существует 100-угольник с вершинами в этих точках?

**10.** При каком наименьшем $N$ существуют два $N$-угольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

**11.** Существуют ли два равных 6-угольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

**12.** Существуют ли четыре многоугольника, у каждого из которых одно и то же множество вершин, но ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

**13.** Все стороны многоугольника лежат на 6 прямых. Какое наибольшее количество сторон может быть у этого многоугольника?

**13c.** Все стороны многоугольника лежат на 7 прямых. Какое наибольшее количество сторон может быть у этого многоугольника?

**14.** Докажите, что следующие два определения выпуклого многоугольника эквивалентны.

**I.** Многоугольник $M$ выпуклый, если вместе с любыми двумя точками из $M$ все точки отрезка, соединяющего эти точки, принадлежат $M$. (Это определение относится не только к многоугольникам и не только в двумерном пространстве.)

**II.** Многоугольник выпуклый, если он лежит в одной полуплоскости относительно каждой своей стороны (прямой, содержащей сторону).

**15.** Докажите, что в любом $N$-угольнике ($N > 3$) существует диагональ, целиком принадлежащая этому многоугольнику **(лемма о внутренней диагонали)**.

**16.** Какое наименьшее количество внутренних диагоналей может быть в $N$-угольнике? Ответ должен зависеть от $N$.

**17.** Многоугольник разбит внутренними диагоналями на треугольники. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников две стороны являются сторонами исходного многоугольника.

**Группа 9-3, 2 пара.**

**Алгебра. Базовые задачи – 1**

**1.** Про разность седьмых степеней двух линейных функций известно, что она является ненулевым многочленом чётной степени. Докажите, что у этого многочлена нет корней.

**2.** Про квадратный трёхчлен $f(x)$ известно, что уравнение $f(x) = A(x-1)$ имеет единственный корень, и уравнение $f(x) = B(x-1)$, $A < 0 < B$ имеет единственный корень. а) Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ корней не имеет; б) найдите дискриминант трёхчлена.

**3.** Пусть $D > 0$ – дискриминант квадратного трёхчлена $f(x)$. Докажите, что уравнение $f(x) + f(x + \sqrt{D}) = 0$ имеет единственное решение.

**4.** В параболу $y = x^2$ вписывается прямоугольный треугольник, гипотенуза которого параллельна оси абсцисс. Докажите, что высота этого треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 1.

**5.** Обозначим через $O$ вершину параболы $y = ax^2$. Назовём прямую, пересекающую параболу в двух точках $A$ и $B$, *особой*, если угол $AOB$ – прямой. Докажите, что все особые прямые проходят через одну точку.

**6.** На оси $Ox$ произвольно расположены различные точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 3$. Построены все параболы, задаваемые приведёнными квадратными трёхчленами и пересекающие ось $Ox$ в данных точках (и не пересекающие её в других точках). Пусть $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\ldots y = f_m(x)$ — соответствующие параболы. Докажите, что парабола $y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$ пересекает ось $Ox$ в двух точках.

**7.** Прямая пересекла график гиперболы вида $y = k/x$ в двух точках. График гиперболы и одну из точек стёрли, а оси координат не стёрли. Восстановите эту точку с помощью циркуля и линейки.

**8.** Докажите, что проекции на ось абсцисс дуг, высекаемых парой параллельных прямых на параболе, имеют равные длины.

**9.** Прямые $\ell_i$: $y = k_i x + b_i$, $i = 1, 2, 3$ касаются параболы $y = x^2$. Известно, что $k_1 = k_2 + k_3$. Докажите, что $b_1 \geqslant 2(b_2 + b_3)$.

**10.** Несколько линейных функций таковы, что квадрат любой из них при всех значениях аргумента больше суммы остальных функций, Докажите, что среди этих функций есть невозрастающая.

**11.** Дан многочлен $P(x)$ с неотрицательными коэффициентами степени $n$. Числа $a, b, c$ являются длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$, $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого треугольника.

**Группа 9-3, 3 пара.**

**0.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $A$ проведены биссектриса $AD$ и высота $AH$. $HX$ и $HY$ — биссектрисы треугольников $AHB$ и $AHC$. Докажите, что точки $X$, $Y$, $D$ и $H$ лежат на одной окружности.

**1.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Докажите, что точки $A$, $A_1$ и середины отрезков $BC_1$ и $CB_1$ лежат на одной окружности.

**2.** На плоскости дана окружность $w$ и точка $P$. Через точку $P$ проведены четыре прямые, каждая из которых пересекает $w$. Докажите, что середины образовавшихся хорд лежат на одной окружности.

**3.** К окружности проведены касательные в точках $A$ и $B$, пересекающиеся в точке $P$. Через точку $P$ проведена секущая, пересекающая окружность в точках $K$ и $L$. Пусть $M$ — середина хорды $KL$.

a) Докажите, что точки $P$, $A$, $B$, $M$ лежат на одной окружности.

b) Через точку $A$ проведена хорда $AE$ параллельно $KL$. Докажите, что $BE$ проходит через $M$.

**4.** Точка $H$ — ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$, точка $M$ — середина отрезка $BC$. Точка $D$ — основание перпендикуляра из точки $H$ на прямую $AM$. Докажите, что точки $B, C, D, H$ лежат на одной окружности.

**5.** В треугольнике $ABC$ на стороне $BC$ выбрана точка $M$ так, что точка пересечения медиан треугольника $ABM$ лежит на описанной окружности треугольника $ACM$, а точка пересечения медиан треугольника $ACM$ лежит на описанной окружности треугольника $ABM$. Докажите, что медианы треугольников $ABM$ и $ACM$ из вершины $M$ равны.

**6.** На высотах $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ остроугольного треугольника $ABC$ взяты точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, отличные от точки пересечения высот $H$, причем сумма площадей треугольников $ABC_2$, $BCA_2$, $CAB_2$ равна площади треугольника $ABC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_2B_2C_2$, проходит через точку $H$.

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производилось решение выданных ранее задач по теме «Алгебра».

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

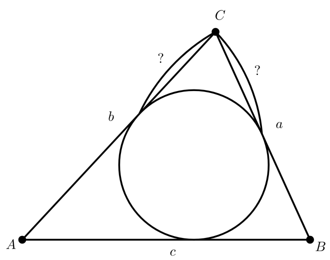
**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

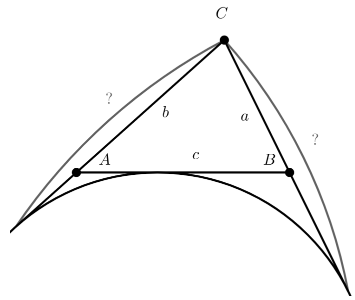
**Группа 9-3, 1 пара.**

**0.** Решите систему уравнений

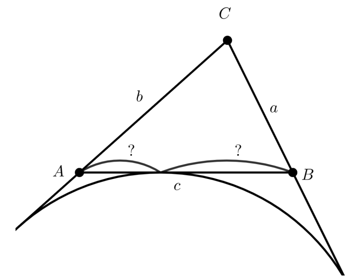
$$\begin{cases} x + y = 841; \\ y + z = 934; \\ z + x = 567. \end{cases}$$




**1.**




**2a.**




**2b.**

**Теорема.** В описанном четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство

$$AB + CD = AD + BC.$$

**3.** В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники $ABC$ и $ACD$, касаются.

**4.** Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников $ABC$ и $ACD$ касаются сторон $BC$ и $CD$ соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой $AC$ совпадают.

**5.** Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанная окружность треугольника $ABD$ касается продолжений сторон $AD$ и $AB$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что точки пересечения отрезка $MN$ со сторонами $BC$ и $CD$ лежат на вписанной окружности треугольника $BCD$.

**6.** Точка $M$ — середина стороны $AB$ треугольника $ABC$. Точки $I_a$ и $I_b$ — центры вневписанных окружностей $w_a$ и $w_b$, касающихся сторон $BC$ и $AC$ этого треугольника. Прямая $MI_a$ пересекает окружность $w_a$ в точках $P$ и $Q$. Прямая $MI_b$ пересекает окружность $w_b$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что точки $P, Q, X, Y$ лежат на одной окружности.

**Группа 9-3, 2 пара.**

## Выпуклость и выпуклая оболочка

**1.** На плоскости отмечено 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то 4 из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника.

**2.** Можно ли отметить на плоскости восемь точек, среди которых нет пяти, лежащих в вершинах выпуклого пятиугольника?

**3.** На плоскости дано $n$ точек, причем любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого $n$-угольника.

**4.** Докажите, что многоугольник выпуклый тогда и только тогда, когда он совпадает со своей выпуклой оболочкой.

**5.** Докажите, что у любого невыпуклого многоугольника есть диагональ, ни одна из точек которой, кроме концов, не принадлежит многоугольнику, а у выпуклого многоугольника такой диагонали нет.

**6.** На плоскости дано $n$ $(n \geqslant 3)$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

**7.** На плоскости нарисовано несколько попарно непараллельных прямых, по каждой из которых в одном из двух направлений ползет жук со скоростью 1 сантиметр в секунду. Докажите, что в какой-то момент жуки окажутся в вершинах выпуклого многоугольника.

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

**Группа 9-3, 2 пара.**

## Алгебра. Базовые задачи – 2

**1.** Девять чисел таковы, что сумма каждых четырёх из них меньше суммы пяти остальных чисел. Докажите, что все эти числа положительны.

**2.** Уравнение $(x+a)(x+b)=9$ имеет корень $x=a+b$. Докажите, что $ab \leqslant 1$.

**3.** Пусть $a$, $b$, $c$ — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что оба корня уравнения $ax^2+bx-c=0$ меньше 1.

**4.** Даны трёхчлены $f_k = ax^2+bx+c_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, каждый из которых имеет по два корня: $x_1$ и $z_1$, $x_2$ и $z_2$, …, $x_n$ и $z_n$ (корни не упорядочены). Какие значения может принимать выражение $f_1(x_2)+f_2(x_3)+\ldots+f_{n-1}(x_n)+f_n(x_1)$?

**5.** Найдите все множества $A$ чисел, обладающих свойством: если сумма двух чисел принадлежит множеству $A$, то их произведение также принадлежит множеству $A$.

**6.** Положительные числа $x$, $y$ таковы, что $x^5-y^3 \geqslant 2x$. Докажите, что $x^3 \geqslant 2y$.

**7.** Даны 111 целых ненулевых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить числа на две группы, и числа в группах перемножить, то сумма двух полученных произведений будет отрицательна.

**8.** Пусть $x$ и $y$ — соответственно корни уравнений $x^3-3x^2+5x-17=0$ и $y^3-3y^2+5y+11=0$. Найдите сумму $x+y$.

**Группа 9-3, 3 пара.**

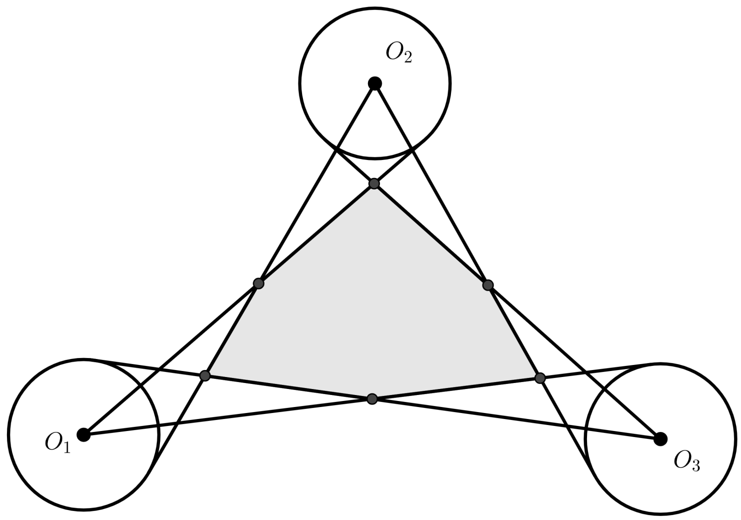
**0.** Докажите, что в треугольнике $ABC$ точка $D$ на стороне $AC$, для которой выполнено равенство $AB + CD = BC + DA$, — это точка касания вписанной окружности со стороной $AC$.

**1.** Пусть $X$ — точка касания вписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$. Докажите, что вписанные окружности треугольников $ABX$ и $ACX$ касаются.

**2.** Пусть $Y$ — точка касания вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$. Докажите, что вневписанные окружности треугольников $ABY$ и $ACY$ касаются.

**3.** В описанном четырёхугольнике $ABCD$ лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $E$, а лучи $BC$ и $AD$ — в точке $F$. Докажите, что $AE + CF = AF + CE$.

**4.** В описанном четырёхугольнике $ABCD$ лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $E$, а лучи $BC$ и $AD$ — в точке $F$. Докажите, что $BE + BF = = DE + DF$.




**5.** Центры $O_1$, $O_2$ и $O_3$ трёх непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек $O_1$, $O_2$ и $O_3$ проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.

**6.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. В треугольники $ABD$ и $ACD$ вписаны окружности. К ним проведена общая касательная (отличная от $BC$), пересекающая $AD$ в точке $K$. Докажите, что длина отрезка $AK$ не зависит от выбора точки $D$.

**Группа 9-3, 1 пара.**

## Алгебра. Дополнительные задачи

**1.** Многочлен $P(x)$ такой, что многочлен $Q(x) = P(x) - 12$ имеет 6 целых корней. Докажите, что многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

**2.** Прямая пересекает график кривой, заданной уравнением $y^2 = x^3$ в трёх точках $A_k(x_k; y_k)$, $k = 1, 2, 3$. Докажите, что $\dfrac{x_1}{y_1} + \dfrac{x_2}{y_2} + \dfrac{x_3}{y_3} = 0$.

**3.** Пусть $S_n = a^n + b^n + c^n$. Известно, что $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 14$. Докажите, что $|S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}| = 8$.

**4.** Докажите, что все члены последовательности $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ являются целыми числами.

**5.** Существуют ли квадратные трёхчлены вида $f_k(x) = x^2 - a_k x + b_k$, корни каждого из которых отличны от нуля, и набор корней которых совпадает с набором коэффициентов $\{a_k, b_k\}$?

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

**Группа 9-3, 3 пара.**

## Теорема Хелли

**8.** На прямой лежит несколько отрезков. Каждые два имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

**9.** На плоскости лежит несколько прямоугольников с параллельными сторонами. Каждые два имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

**10.** На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

**11.** *(теорема Хелли)*. На плоскости дано $n$ выпуклых фигур, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все $n$ фигур имеют общую точку.

**12.** На плоскости расположены несколько точек, любые три из которых покрываются кругом радиуса 1. Докажите, что все точки покрываются кругом радиуса 1.

**13.** Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

**Группа 9-3, 1 пара.**

**Теорема синусов.** Отношение любой стороны в треугольнике к синусу противоположного ей угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

**0.** Две стороны треугольника равны 6 и 7, а высота, опущенная на его третью сторону, равна 5. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

**1.** Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается его стороны $BC$ в точке $K$. Отрезки $AK$ и $DK$ пересекают окружность в точках $P$ и $Q$. Найдите длину отрезка $PQ$, если сторона квадрата равна 1.

**2.** Два противоположных угла четырёхугольника прямые, а третий равен $45°$. Найдите отношение диагоналей этого четырёхугольника.

**3.** В окружность радиуса $R$ вписан треугольник с углом $\alpha$. Продолжения двух его высот, опущенных из двух других его углов, пересекают эту окружность в точках $K$ и $E$. Найдите длину отрезка $KE$.

**4.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$, а прямые $BC$ и $AD$ — в точке $K$. Найдите отрезок $BK$, если $DM = 3$, $AM = 4$, $AK = 5$.

**5.** Окружность, вписанная в четырёхугольник $ABCD$, касается его противоположных сторон $BC$ и $AD$ в точках $K$ и $E$. Отрезок $KE$ пересекает диагональ $BD$ четырёхугольника в точке $M$. Докажите, что $BM : MD = BK : DE$.

**6.** В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $M$, а стороны $AB$ и $CD$ равны. Через точки $B$ и $C$ параллельно данным сторонам $CD$ и $AB$ провели прямые, которые пересеклись в точке $O$. Докажите, что луч $MO$ — биссектриса угла $BOC$.

**7.** В окружность вписана трапеция с основаниями $BC$ и $AD$, диагональ которой равна сумме оснований. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ABC$ и $ABD$, равно радиусу окружности, описанной около трапеции.

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

## Группа 9-3, 3 пара.

### Теория чисел

**1.** Существует ли восьмизначное число, которое при делении на свою первую слева цифру дает в остатке 1, при делении на вторую цифру дает в остатке 2, ..., при делении на последнюю цифру дает в остатке 8?

**2.** По кругу записаны различные натуральные числа. Каждое число разделили с остатком на следующее за ним по часовой стрелке число. Могли ли все полученные остатки быть одинаковыми?

**3.** На одну доску записали 11 натуральных чисел, а на другую – НОД всех пар чисел первой доски. Оказалось, что каждое число, встречающееся на одной доске, встречается и на другой. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть на первой доске?

**4.** 73 команды провели однокруговой турнир по волейболу. Могло ли оказаться так, что все команды можно разделить на две непустые группы такие, что все команды первой группы набрали одинаковое число очков, и все команды второй группы – одинаковое число очков, но отличное от числа очков у команд первой группы?

**5.** 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа, и в каждой группе посчитали произведение чисел. Затем у каждого из 18 полученных произведений посчитали сумму цифр. Могут ли полученные суммы цифр быть равными?

**6.** Существуют ли три натуральных числа, больших 1 таких, что квадрат любого из них, уменьшенный на 1, делится на каждое из двух других чисел?

**7.** Решите в простых числах уравнение $p^2 + 11q^2 = r$.

**8.** Найдите все натуральные числа, у которых разность между наибольшим и наименьшим собственными делителями равна 12345 (собственным называется делитель, отличный от 1 и самого числа).

**9.** Натуральное число, большее 1 000 000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?

**10.** Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\dfrac{a+1}{b+1} + \dfrac{a}{b}$, где $a$ и $b$ – натуральные числа.

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

**Группа 9-3, 1 пара.**

На паре проводилась консультация к зачёту.

**Группа 9-3, 2 пара.**

На паре проводилась консультация к зачёту.

**Группа 9-3, 3 пара.**

На паре проводилась консультация к зачёту.