Образовательный центр «Сириус»
Отбор на январскую математическую образовательную программу 2024г.
11 ноября 2023г.

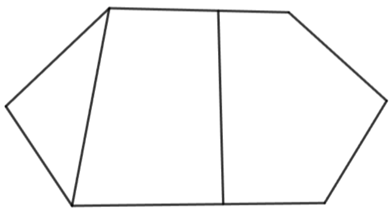
Задания для 7 класса

1. *Саша и Кирилл составляли задачи для 100 детей. Они точно знают, что 29 детей хотели бы задачу по алгебре, а 39 задачу по геометрии, остальные пока не определились, но хотят либо алгебру, либо геометрию. Могут ли авторы придумать 130 задач таких, чтобы независимо от того, что захотят неопределившиеся, можно было всем раздать задачу по вкусу? Одну задачу нельзя давать двоим школьникам; каждая задача относится только к одной теме.*

Ответ: нет, не могут. **Решение.** Любителей геометрии может оказаться $100 - 29 = 71$. Значит, авторам нужна как минимум 71 задача по геометрии. Аналогично, любителей алгебры может оказаться $100 - 39 = 61$, т.е. по алгебре надо заготовить минимум 61 задачу. Итого, авторам нужно заготовить как минимум $71 + 61 = 132$ задачи, т.е. 130 точно не хватит.

2. *Можно ли из треугольника, четырёхугольника и пятиугольника сложить шестиугольник без дырок и наложений? Многоугольники не обязательно должны быть выпуклые.*

Ответ: да, можно. **Решение.** Один из возможных примеров — на рисунке.



3. *Жора поставил в клетки таблицы 4×7 (4 строчки, 7 столбцов) 1 единицу, 2 двойки, 3 тройки, ..., 7 семёрок; в каждой клетке одна цифра. После этого он выписал на доску 4 семизначных числа, которые получились в 4 строках таблицы. Может ли каждое из этих чисел делится на 15?*

Ответ: нет, не может. **Решение.** Предположим противное. Если число делится на 15, то оно делится и на 3. Поскольку число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3, то сумма цифр в каждой строчке должна делится на 3. Значит, и сумма цифр во всей таблице должна делится на 3. С другой стороны, она равна

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 7 \cdot 7 \equiv 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 = 11 \not\equiv 0 \pmod 3,$$

противоречие.

4. *Натуральные числа $a < b$ и c таковы, что $a! \cdot b! = c!$. Докажите, что $c \leqslant 2b$. Напомним, что для натурального числа k через $k!$ обозначается $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.*

Решение. Заметим, что

$$c! = a! \cdot b! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot b < 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+b) = (a+b)!,$$

т.е. $c! < (a+b)!$, откуда $c < a + b < 2b$, что и требовалось.

5. *В ряд выстроилось 10 рыцарей и 10 лжецов. Каждого спросили: «Сколько лжецов слева от тебя?» и «Сколько лжецов справа от тебя?», и каждый назвал два числа. Оказалось, что среди 40 названных чисел много одинаковых. Какое наибольшее количество одинаковых чисел могло прозвучать?*

Ответ: 38. **Решение.** *Пример.* Десять рыцарей в центре, по пять лжецов по краям. Пусть каждый лжец, кроме двоих, рядом с рыцарями, скажет на оба вопроса «Пять» (и это будет неправдой), а двое рядом с рыцарями — на один вопрос «Пять», а на другой – любое число, кроме пяти (несложно видеть, что они могут так сказать и при этом оба раза сказать неправду). Каждый рыцарь на оба вопроса ответит «Пять».

Оценка. У нас есть пример на 38. Если ответ в задаче хотя бы 39, то не более одного человека дало другой ответ на один вопрос. Покажем, что это не может быть ни рыцарь, ни лжец.

Рыцарь. Рыцари всегда называют два числа с суммой 10. Поскольку девять рыцарей сказали 18 раз одно и то же число, то это число 5. Тогда оставшийся рыцарь должен как минимум один раз сказать число 5. Однако и второе его число тогда тоже 5.

Лжец. Т.к. рыцари все сказали правду, то (см. рассуждение выше) названное число равно 5. Посмотрим на 5 и 6 по счёту лжецов. Каждый из них хотя бы один раз должен сказать не «Пять», т.е. уже хотя бы два лжеца дали другой ответ.

6. *Можно ли расставить числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) по кругу так, чтобы соседние числа отличались на 5, 6, 7, 8 или 9?*

Ответ: Нельзя. **Решение.** Никакие из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 18, 19, 20 не могут быть соседними. Значит они занимают 10 нечётных позиций в кругу, а остальные 10 чисел — на чётных позициях. Число 6 тогда может быть соседним только к числу 1 из первого набора — противоречие.

Образовательный центр «Сириус»
Отбор на январскую математическую образовательную программу 2024г.
11 ноября 2023г.

Задания для 8 класса

1. *Вася получил в течение четверти по математике и 2, и 3, и 4, и 5. Он решил улучшить свою успеваемость. Для этого он взломал сайт электронного журнала и исправил все 2 на 3, 3 на 4, 4 на 5, и для честности 5 на 2; все замены происходят одновременно. От этого сумма оценок Васи не изменилась. Докажите, что пятёрок у Васи в три раза меньше, чем всех остальных оценок вместе взятых.*

Решение. Пусть Вася получил a_2 двоек, a_3 троек, a_4 четвёрок и a_5 пятёрок. Тогда исходная сумма оценок Васи равна $2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$, а конечная — $3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 2a_5$. По условию эти числа равны:

$$2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 3a_2 + 4a_3 + 5a_4 + 2a_5.$$

Перенесём все с a_2, a_3, a_4 в правую часть, а $2a_5$ — в левую. Тогда, после приведения подобных, получится $3a_5 = a_2 + a_3 + a_4$, что и требовалось.

2. *У каждого из трёх отцов — Андрея, Бориса и Василия — есть по одному сыну: Георгий, Дмитрий и Егор, и по одной дочери: Зинаида, Ирина и Жанна. Известно, что Зинаида — сестра Дмитрия, у Андрея — дочь Жанна, а у Василия — сын Егор. Является ли Георгий братом Ирины?*

Ответ: Нет, не является. **Решение.** Дмитрий не сын Василия, значит Зинаида — не дочь Василия. Так как Жанна тоже не дочь Василия, то его дочь — Ирина. Георгий не сын Василия (потому что у него сын Егор), значит он не брат Ирины.

3. *Найдите наибольшее натуральное $n > 1$, для которого найдется натуральное число m такое, что $5! \cdot n! = m!$. Напомним, что для натурального числа k через $k!$ обозначается $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.*

Ответ: $n = 5! - 1$. **Решение.** *Пример.* $n = 5! - 1$, $m = 5!$. *Оценка.* Заметим, что $n < m$, а тогда $m!/n! \geqslant m$, откуда $m \leqslant 5!$, откуда $n \leqslant m - 1 \leqslant 5! - 1$.

4. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.*

Решение 1. Поскольку $BE \perp AC$ и $CF \perp AB$, то $\angle ABE = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACF$. Тогда треугольники BPA и CAQ равны по двум сторонам и углу между ними. Осталось заметить, что $\angle QAP = \angle QAF + \angle BAP = \angle QAF + \angle CQA = 180^\circ - \angle QFA = 90^\circ$.

Решение 2. Треугольники BPA и CAQ получаются друг из друга поворотом на 90° и параллельным переносом, поэтому AP и её образ AQ перпендикулярны.

5. *Прохор написал на доске n-значное число m. После этого Венедикт выписал на доску n чисел, получающихся из m вычёркиванием одной цифры (первой, второй, ..., n-й). Например, если бы Прохор написал число 10200, то Венедикт выписал бы на доску числа 200, 1200, 1000, 1020 и 1020. Может ли Прохор выбрать такое число m, что сумма чисел, выписанных Венедиктом, будет равна 2023?*

Ответ: нет, не может. **Решение.** Если число Прохора состояло хотя бы из 5 цифр, то числа получающиеся при выкидывании каждой цифры, кроме возможно первой, не меньше 1000 и их хотя бы 4. То есть сумма уже хотя бы 4000.

Если в числе Прохора не более 3 цифр, то получается не более 3 чисел, каждое из которых меньше 100, и тогда их сумма менее 300.

Остается случай, когда число Прохора было четырехзначное. Т.е. $\overline{abcd}$. Тогда

$$\overline{bcd}+\overline{acd}+\overline{abd}+\overline{abc} \equiv (b+c+d)+(a+c+d)+(a+b+d)+(a+b+c) = 3(a+b+c+d) \equiv 0 \pmod 3.$$

Но 2023 не кратно 3, то есть такое невозможно.

6. *Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на доминошки (прямоугольники из двух клеток), причём вертикальных доминошек у Васи получилось на одну больше, чем горизонтальных. После чего Петя разбил на доминошки ту же самую клетчатую фигуру. Могло ли в разбиении Пети горизонтальных доминошек быть на одну больше, чем вертикальных?*

Ответ: нет, не могло. **Решение.** Покрасим столбцы с нечётными номерами в чёрный цвет, а с чётными — в белый. Тогда чётность количества чёрных клеток совпадает с чётностью количества горизонтальных доминошек. А в разбиении Васи и Пети эти чётности будут разными.

Образовательный центр «Сириус»

Отбор на январскую математическую образовательную программу 2024г.

11 ноября 2023г.

Задания для 9 класса

1. *В зоопарке живут только коты и собаки. Выяснилось, что 10% котов считают себя собаками, а 30% собак считают себя котами. Остальные коты и собаки считают себя как надо. Животных, считающих себя котами, в два раза больше, чем животных, считающих себя собаками. Во сколько раз котов больше чем собак?*

Ответ: В $11/7$ раз.

Решение. Пусть в зоопарке c котов и d собак. Котами себя считают $9/10c+3/10d$, а собаками себя считают $7/10d+1/10c$. По условию $9/10c+3/10d = 2(7/10d+1/10c)$, откуда $9c+3d = 14d+2c$, сократим и получим: $c = 11/7d$. Таким образом котов в $11/7$ раз больше чем собак.

2. *Каждое из 99 не обязательно целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ больше 1, а их сумма равна 100. Докажите, что $a_1 + a_2 > a_3$.*

Решение. Заметим, что так как все числа больше 1, то сумма любых двух чисел больше 2. С другой стороны, любое число меньше 2, так как сумма остальных 98 больше 98.

3. *Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $b = ac$, a делится на d и c делится на d. Докажите, что число $a + b + c + d$ — составное.*

Решение. Пусть $a + b + c + d$ — простое. Заметим, что $a + b + c + d = ac + a + c + d$ и это делится на d, так как $a \,\vdots\, d$ и $c \,\vdots\, d$. А ещё $a + b + c + d > d$, значит $d = 1$. Тогда $a+b+c+d = ac+a+c+1 = (a+1)(c+1)$. Получили разложение простого числа на множители большие 1, противоречие.

4. *В распоряжении мастера имеется* 450 *белых кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков мастер должен нарисовать одну из цифр* 0, 1, 2, …, 9. *Сможет ли мастер нарисовать цифры так, что для любой последовательности из* 300 *цифр можно будет выбрать* 300 *кубиков и выложить их в ряд, чтобы цифры на верхних гранях кубиков образовывали эту последовательность? Цифры* 6 *и* 9 *на кубиках отличаются: они выглядят как* $\underline{6}$ *и* $\underline{9}$.

Ответ: Нет, не сможет. **Решение.** Заметим, что каждая цифра должна встречаться хотя бы на 300 кубиках, иначе не получится выложить последовательность, состоящую из 300 экземпляров этой цифры. Следовательно, кубиков должно быть не менее $10 \cdot 300/6 = 500$.

5. *На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AMND$ — вписанный. Докажите, что $\angle ANB = \angle CMD$.*

Решение. Так как четырёхугольник $AMND$ вписанный, то $\angle MAD + \angle DNM = 180°$. Из свойства параллельных прямых $\angle MAD + \angle MBC = 180°$, так как углы смежные, то $\angle DNM + \angle MNC = 180°$. Из этих трёх равенств получаем, что $\angle MBC + \angle MNC = 180°$, следовательно, четырёхугольник $MBCN$ вписанный. Теперь мы знаем, что четырёхугольники $MBCN$ и $MADN$ вписанные.

Заметим, что $\angle ANB = 180° - \angle BNC - \angle AND = 180° - \angle BMC - \angle AMD = \angle CMD$.

6. *В школе 50 детей посещают несколько кружков. Для каждого кружка имеется список его участников. Оказалось, что для любых двух кружков их списки различны, а общие участники, если есть, и в том, и в другом списке идут подряд. Какое наибольшее количество кружков может быть в школе? В кружке может быть один участник.*

Ответ: $\frac{50 \cdot 49}{2} + 50$. **Решение. Оценка.** Давайте каждому кружку, в котором больше 1 человека, сопоставим пару учеников: первый и последний в списке. Двум кружкам не может быть сопоставлена одна и та же пара, ведь иначе их списки полностью совпадут по составу, что невозможно. Тогда количество кружков можно оценить количеством пар школьников + количеством кружков из 1 школьника — $\frac{50\cdot 49}{2}+50$.

Пример 1. Пусть для каждой пары участников будет свой кружок, куда ходят только они, а так же для каждого школьника свой персональный. Под условие он подходит, ведь пересечение двух кружков максимум по одному человеку (для каждого кружка можно записать список участников в любом порядке). Всего кружков: 50 по одному человеку и $\frac{50\cdot 49}{2}$ по два.

Пример 2. Запишем общий список из 50 учеников, упорядочив их, например, по алфавиту. Каждый клуб будет состоять из подряд идущих в этом списке детей. Всего различных списков будет: выбрать начало и конец списка — $\frac{51\cdot 50}{2}$. Соответствующим списком у клуба будет кусок общего списка, понятно, что такой пример подходит.