Барицентрические координаты 2

Пусть точки P и Q имеют нормированные барицентрические координаты $(x_p : y_p : z_p)$ и $(x_q : y_q : z_q)$ соответственно. Тогда для любой точки O выполнено равенство

$$\overrightarrow{PQ} = (x_q - x_p)\overrightarrow{OA} + (y_q - y_p)\overrightarrow{OB} + (z_q - z_p)\overrightarrow{OC}.$$

Для произвольного вектора $\vec{v}$ существует единственная тройка чисел (v_1, v_2, v_3) с условием $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ такая, что $\vec{v} = v_1\overrightarrow{OA} + v_2\overrightarrow{OB} + v_3\overrightarrow{OC}$ для любой точки O и наоборот, любая тройка чисел с нулевой суммой однозначно соответствует некоторому вектору. Эта тройка называется *барицентрическими координатами вектора*. Барицентрические координаты вектора обладают обычными свойствами линейности.

Скалярное произведение векторов $\vec{u} = (u_1 : u_2 : u_3)$ и $\vec{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$ равно

$$2\vec{u}\cdot\vec{v} = -a^2(u_2v_3 + v_2u_3) - b^2(u_3v_1 + v_3u_1) - c^2(u_1v_2 + u_2v_1).$$

Умея вычислять скалярное произведение, можно проверять перпендикулярность прямых, а также вычислять длины отрезков, а именно

$$|\vec{v}|^2 = -v_2v_3a^2 - v_3v_1b^2 - v_1v_2c^2.$$

Умея вычислять длины отрезков, можно записать уравнение окружности. Уравнение окружности (ABC):

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy = 0.$$

Уравнение произвольной окружности ω может быть получено из уравнения (ABC) добавлением линейной функции:

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Коэффициенты α, β, γ равны степеням вершин A, B, C относительно ω. Тройка (α, β, γ) называются *барицентрическими координатами окружности ω*. Как правило, удобнее работать с уравнением окружности в ненормированных координатах:

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x + y + z)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

Радикальная ось окружностей с барицентрическими координатами $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ имеет уравнение $(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \gamma_2)z = 0$.

1. (*Это задача не про окружности, она про то, как может быть удобно работать с H и O.*) Введём обозначение $S_A = 2S\operatorname{ctg}\alpha$, аналогично определим S_B и S_C.

(а) Докажите, что

$$S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = \overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AB},$$

где C_1 — основание высоты из вершины C.

(б) Докажите, что H имеет барицентрические координаты

$$\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right) = (S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B)\,.$$

(в) Докажите, что O имеет барицентрические координаты

$$\left(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C\right) = (S_A(S_B+S_C) : S_B(S_A+S_C) : S_C(S_A+S_B))\,.$$

Выведите отсюда, что точки H, M, O лежат на одной прямой.

2. Найдите уравнение окружностей **(а)** BHC; **(б)** BOC.

3. **(а)** Найдите уравнение окружности, проходящей через точку A и касающейся стороны BC в точке B.
(б) Найдите барицентрические координаты точки Шалтая треугольника ABC со стороны вершины A.

4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Окружность с диаметром AH пересекает повторно окружность (ABC) в точке A'. Докажите, что $A'H$ делит BC пополам.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E, F соответственно. Окружность (AEF) повторно пересекает окружность (ABC) в точке A'. Докажите, что прямая $A'D$ проходит через середину дуги BC окружности (ABC).

6. В треугольнике ABC провели медиану BM и высоту CH. Касательные к (ABC), проведённые в точках B и C, пересекаются в точке D. Докажите, что окружность (CMD), окружность (ABC) и окружность, проходящая через точки B и H и касающаяся прямой BC, пересекаются в одной точке.