группа 10 [2024-2025]

Однородные симметрические неравенства: Мюрхед.

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, такой что $\alpha_1 \geqslant$ $lpha_2\geqslant ...\geqslant lpha_n$. Введём обозначение следующего симметрического многочлена от переменных x_1, x_2, \dots, x_n :

$$T_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\text{sym}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Примеры.

- $T_{(2,1,0)}(x,y,z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + xz^2$;
- $T_{(1,1,1)}(x,y,z) = 6xyz$;
- $T_{(1,1,0)}(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$.

Ещё определение. Пусть даны два набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ таковы, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n,$ $\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\ldots\geqslant\beta_n$ и $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=$ $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$. Тогда будем говорить, что α мажорирует β (обозначается как $\alpha > \beta$), если для любого $1 \le k \le n$ верно

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^k \beta_i.$$

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha > \beta$. Тогда для любых неотрицательных x_1, x_2, \dots, x_n верно:

$$T_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant T_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дружеский совет. Если у вас неоднородное неравенство, то сделайте его однородным.

- 1. Для положительных значений переменных докажите неравенства:
 - (a) $\frac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3 y^3 z^3} \geqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$;
 - **(6)** $x^4 + y^4 + z^4 \ge x + y + z$ при условии xyz = 1;
 - **(B)** $a^3(bc+a^2) + b^3(ac+b^2) + c^3(ab+c^2) \ge 2abc(ab+bc+ac)$.
- **2.** Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) + xyz \le 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

3. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что x + y + z = 1, докажите неравенство

$$1 + x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge 4(xy + yz + zx).$$

4. Для неотрицательных чисел x, y, z, таких что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, докажите неравенство

$$x + y + z \geqslant xy + yz + zx$$
.

5. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство

Ю. Г. Арутюнов

11 ноября

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

6. Для неотрицательных чисел a, b, c верно a + b + c = ab + bc + ac. Докажите, что

$$a+b+c+1 \geqslant 4abc$$
.

7. Для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию a + b + c = 1, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \le 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗА РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРА-НЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗА РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРА-НЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗА РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРА-НЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗА РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРА-НЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗА РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРА-НЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!

ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕ-ШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ! ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!ЗАПИШИТЕ РЕШЕНИЯ ЗАРАНЕЕ!