Январская математическая программа 2024.
Дистанционный отборочный тур. 9 класс.

1.1. В графе 11 вершин, 25 рёбер. Степень всех вершин 4 или 5. Сколько вершин степени 4?
Ответ. 5

1.2. В графе 8 вершин, 17 рёбер. Степень всех вершин 4 или 5. Сколько вершин степени 5?
Ответ. 2

1.3. В графе 10 вершин, 28 рёбер. Степень всех вершин 5 или 6. Сколько вершин степени 5?
Ответ. 4

1.4. В графе 13 вершин, 50 рёбер. Степень всех вершин 7 или 8. Сколько вершин степени 8?
Ответ. 9

Решение первого варианта. Пусть все 11 вершин степени 4. Тогда сумма степеней $11 \cdot 4 = 44$. Так как ребер 25, то сумма степеней вершин $25 \cdot 2 = 50$. От 44 не хватает 6. Заменим 6 вершин степени 4 на степень 5, получим требуемое. Осталось 5 вершин степени 4, что и является ответом.

2.1. У квадратного уравнения $x^2 + 8x - 7 = 0$ есть два различных корня x_1 и x_2. Найдите $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
Ответ. 71

2.2. У квадратного уравнения $x^2 + 5x - 13 = 0$ есть два различных корня x_1 и x_2. Найдите $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
Ответ. 38

2.3. У квадратного уравнения $3x^2 + 5x - 4 = 0$ есть два различных корня x_1 и x_2. Найдите $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
Ответ. 29

2.4. У квадратного уравнения $x^2 + 7x - 16 = 0$ есть два различных корня x_1 и x_2. Найдите $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
Ответ. 65

Решение первого варианта. По теореме Виета сумма корней $x_1 + x_2 = -8$, $x_1x_2 = -7$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 64 + 7 = 71$.

3.1. На доске написано 100 чисел. Оказалось, что сумма любых четырёх из них равна 10, 11 или 12. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 300, 299, 298

3.2. На доске написано 104 числа. Оказалось, что сумма любых четырёх из них равна 10, 11 или 12. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 312, 311, 310

3.3. На доске написано 100 чисел. Оказалось, что сумма любых четырёх из них равна 14, 15 или 16. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 400, 399, 398

3.4. На доске написано 104 числа. Оказалось, что сумма любых четырёх из них равна 14, 15 или 16. Чему может быть равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 416, 415, 414

Решение первого варианта. Упорядочим числа по неубыванию $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100}$. Сумма четырех самых больших не более 12, значит, a_4 не превышает 3. Сумма четырех самых маленьких не меньше 10, значит, a_{97} не меньше 3 (иначе сумма будет не более 8). Т.о. $a_4 = a_5 = \ldots = a_{97} = 3$. Больше 3 ни одно из чисел быть не может (иначе сумма с несколькими тройками будет больше 12). Сумма $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ равна 10, 11 или 12, а все остальные числа равны 3. Откуда имеем три возможных ответа $300, 299, 298$. Для построения примеров берем всем числа кроме a_1 равными 3, а a_1 равно 1, 2 или 3.

4.1. Найдите последнюю цифру выражения $1 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 11 \cdot 11 + 16 \cdot 16 + 21 \cdot 21 + \ldots + 2021 \cdot 2021$. Здесь берутся все числа от 1 до 2021 у которых последняя цифра равна 1 или 6.

Ответ. 5

4.2. Найдите последнюю цифру выражения $1 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 11 \cdot 11 + 16 \cdot 16 + 21 \cdot 21 + \ldots + 2026 \cdot 2026$. Здесь берутся все числа от 1 до 2026 у которых последняя цифра равна 1 или 6.

Ответ. 1

4.3. Найдите последнюю цифру выражения $1 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 11 \cdot 11 + 16 \cdot 16 + 21 \cdot 21 + \ldots + 2031 \cdot 2031$. Здесь берутся все числа от 1 до 2031 у которых последняя цифра равна 1 или 6.

Ответ. 2

4.4. Найдите последнюю цифру выражения $1 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 11 \cdot 11 + 16 \cdot 16 + 21 \cdot 21 + \ldots + 2036 \cdot 2036$. Здесь берутся все числа от 1 до 2036 у которых последняя цифра равна 1 или 6.

Ответ. 8

Решение первого варианта. В данной сумме каждое слагаемое оканчивается либо на 1, либо на 6. Заметим, что среди выписанных сумм ровно 203 оканчивается на 1 и ровно 202 оканчивается на 6. Итого получаем $203 \cdot 1 + 202 \cdot 6$ данное выражение оканчивается на 5.

5.1. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, использовав каждую цифру не более чем один раз, наибольшее натуральное число между 1000 и 2000.

Ответ. 1543

5.2. Составьте из цифр 3, 4, 5, 6, 7, использовав каждую цифру не более чем один раз, наибольшее натуральное число между 4000 и 6000.

Ответ. 5764

5.3. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 использовав каждую цифру не более чем один раз, наибольшее натуральное число между 30000 и 50000.

Ответ. 46532

5.4. Составьте из цифр 5, 6, 7, 8, 9 использовав каждую цифру не более чем один раз, наибольшее натуральное число между 6000 и 9000.

Ответ. 8976

Решение первого варианта. Легко видеть, что число указанное в ответе подходит и является наибольшим.

6.1. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 23?

Ответ. 18

6.2. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 26?

Ответ. 21

6.3. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 17?

Ответ. 12

6.4. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 19?

Ответ. 14

Решение первого варианта. Будем называть *перерывом на дом* промежуток между последним уроком одного дня и первым уроком следующего дня. Заметим, что перемен и перерывов на сон в любом случае ровно 22, так как после каждого урока, кроме последнего из 23, он есть. Заметим, что перерывов на сон ровно 4, поэтому перемен было $22 - 4 = 18$.

7.1. В ряд выписаны числа: 1, 11, 21, ..., 2021, 2031, ... Сумма первых k из них равна 93708, чему равно k?

Ответ. 138

7.2. В ряд выписаны числа: 1, 11, 21, ..., 2021, 2031, ... Сумма первых k из них равна 96466, чему равно k?

Ответ. 139

7.3. В ряд выписаны числа: 2, 12, 22, ..., 2022, 2032, ... Сумма первых k из них равна 93434, чему равно k?

Ответ. 137

7.4. В ряд выписаны числа: 2, 12, 22, ..., 2022, 2032, ... Сумма первых k из них равна 96188, чему равно k?

Ответ. 139

Решение первого варианта. В этой задаче была опечатка, и верный ответ — *так не бывает*. Решение предполагалось такое.

Пусть выписано k чисел. Тогда последнее выписанное число равно $1 + (k-1) \cdot 10$, тогда сумма всех чисел равна $k \cdot (1 + 1 + (k-1)10)/2 = 93708$ (мы расмотрели удвоенную сумма и разбили числа на пары с одинаковой суммой). Но, к сожалению, у этого квадратного уравнения целых решений нет.

8.1. Если выписать все натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+10$. То будет выписано ровно 11 пятёрок. Какое наименьшее трёхзначное число n удовлетворяет этому свойству?

Ответ. 149

8.2. Если выписать все натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+10$. То будет выписано ровно 11 двоек. Какое наименьшее трёхзначное число n удовлетворяет этому свойству?

Ответ. 119

8.3. Если выписать все натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+10$. То будет выписано ровно 11 троек. Какое наименьшее трёхзначное число n удовлетворяет этому свойству?

Ответ. 129

8.4. Если выписать все натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+10$. То будет выписано ровно 11 четвёрок. Какое наименьшее трёхзначное число n удовлетворяет этому свойству?

Ответ. 139

Решение первого варианта. Заметим, что число 149 подходит: 149, 150, $\ldots$, 159 содержат именно 11 пятёрок: у чисел от 150 до 159 в разряде десятков и одну в разряде единиц у числа 155. Докажем, что меньше не подходят. Перечислим числа которые меньше 149 и содержат пятёрку: 105, 115, 125, 135, 145, 150. Очевидно, что если $n \leqslant 148$, то пятёрок будет не более 10.

9.1. Сколько различных нечётных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 Если число должно быть меньше 1000?

Ответ. 93

9.2. Сколько различных нечётных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,6 Если число должно быть меньше 1000?

Ответ. 62

9.3. Сколько различных нечётных чисел можно составить из цифр 1,2,4,5,6 Если число должно быть меньше 1000?

Ответ. 62

9.4. Сколько различных нечётных чисел можно составить из цифр 1,3,4,5,6 Если число должно быть меньше 1000?

Ответ. 93

Решение первого варианта. Если число однозначное, то это 1, 3 или 5. Если число двузначное, то его вторая цифра это 1,3 или 5 — три варианта, а первая — любая из пяти вариантов, итого 15 вариантов. Если число трёхзначное, то первые две по 5 вариантов, последняя три варианта — 75. Складываем, получаем ответ: $3 + 15 + 75 = 93$.

10.1. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов двух вещественных корней уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$ при натуральных a?

Ответ. 22

10.2. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов двух вещественных корней уравнения $x^2 - ax + 11 = 0$ при натуральных a?

Ответ. 27

10.3. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов двух вещественных корней уравнения $x^2 - ax + 13 = 0$ при натуральных a?

Ответ. 38

10.4. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов двух вещественных корней уравнения $x^2 - ax + 17 = 0$ при натуральных a?

Ответ. 47

Решение первого варианта. Для начала, заметим, что квадратное уравнение $x^2 - ax + 7 = 0$ имеет два вещественных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = a^2 - 28 \geqslant 0$. Так как a натуральное, то $a^2 \geqslant 36$
Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. Нам нужно найти наименьшее возможное значение выражения $x_1^2 + x_2^2$. По формуле для квадратного трехчлена, $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 7$.
Заметим, что $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 14 \geqslant 36 - 14 = 22$. Если $a = 6$, то все неравенства обращаются в равенства.

11.1. Абсцисса вершины параболы равна 2023, а один из корней равен 110. Чему равен второй корень?

Ответ. 3936

11.2. Абсцисса вершины параболы равна 2024, а один из корней равен 132. Чему равен второй корень?

Ответ. 3916

11.3. Абсцисса вершины параболы равна 11, а один из корней равен 30. Чему равен второй корень?

Ответ. -8

11.4. Абсцисса вершины параболы равна 24, а один из корней равен 54. Чему равен второй корень?

Ответ. -6

Решение первого варианта. По теореме Виета сумма корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равна $-b/a$, а абсцисса вершины параболы $-b/(2a)$. Таким образом, сумма корней равна удвоенной абсциссе вершины параболы (кроме теоремы Виета на это есть много других причин, например симметрия). Получаем второй корень по формуле $2 \cdot 2023 - 110 = 3936$.

12.1. На стороне AD четырёхугольника $ABCD$ отметили точку Z. Оказалось, что $AC = BD$, $\angle ABZ = \angle BZA = 51^\circ$. Пусть диагонали пересекаются в точке M, а угол $\angle AMB = 102^\circ$. Найдите величину угла $\angle AZC$.

Ответ. 78

12.2. На стороне AD четырёхугольника $ABCD$ отметили точку Z. Оказалось, что $AC = BD$, $\angle ABZ = \angle BZA = 52^\circ$. Пусть диагонали пересекаются в точке M, а угол $\angle AMB = 104^\circ$. Найдите величину угла $\angle AZC$.

Ответ. 76

12.3. На стороне AD четырёхугольника $ABCD$ отметили точку Z. Оказалось, что $AC = BD$, $\angle ABZ = \angle BZA = 49^\circ$. Пусть диагонали пересекаются в точке M, а угол $\angle AMB = 98^\circ$. Найдите величину угла $\angle AZC$.

Ответ. 82

12.4. На стороне AD четырёхугольника $ABCD$ отметили точку Z. Оказалось, что $AC = BD$, $\angle ABZ = \angle BZA = 53^\circ$. Пусть диагонали пересекаются в точке M, а угол $\angle AMB = 106^\circ$. Найдите величину угла $\angle AZC$.

Ответ. 74

Решение первого варианта. Заметим, что $AZ = AB$, так как треугольник ABZ равнобедренный по двум углам. Из треугольника ABM заметим, что $\angle ABD = 180^\circ - 102^\circ - \angle BAM$. С другой стороны, $\angle CAZ = \angle BAZ - \angle BAM = 78^\circ - \angle BAM = \angle ABD$. Получаем равные треугольники CAZ и DBA, откуда искомый угол $\angle AZC = 78^\circ$.

13.1. Доску 13×22 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 95

13.2. Доску 13×25 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 108

13.3. Доску 10×22 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 73

13.4. Доску 10×25 раскрасили в белый, синий и красный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 все цвета разные. Известно, что хотя бы один из углов доски белый. Сколько красных клеток на доске?

Ответ. 83

Решение первого варианта. Отрежем от нашего прямоугольника белую угловую клетку. Разрежем то, что осталось от ее строки на горизонтальные полоски 1×3. Оставшийся прямоугольник 12×22 разрежем на вертикальные полоски 1×3. Таким образом наш прямоугольник без одной белой клетки разбился на полоски 1×3, следовательно, всего красных клеток $(13 \cdot 22 - 1)/3 = 95$. Для построения примера достаточно покрасить доску чередующимися диагоналями: белая, красная, синяя, белая, красная, синяя и так далее.

14.1. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. $AB = BC = CD$, $\angle BAC = 21°$, $\angle CDE = 60°$. Найдите $\angle ACE$. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 18

14.2. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. $AB = BC = CD$, $\angle BAC = 23°$, $\angle CDE = 60°$. Найдите $\angle ACE$. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 14

14.3. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. $AB = BC = CD$, $\angle BAC = 22°$, $\angle CDE = 60°$. Найдите $\angle ACE$. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 16

14.4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. $AB = BC = CD$, $\angle BAC = 19°$, $\angle CDE = 60°$. Найдите $\angle ACE$. Ответ дайте в градусах.

Ответ. 22

Решение первого варианта. Так как $AB = BC$, то равны дуги AB и BC, а тогда $\angle CDA$ в два раза больше угла $\angle BAC$. Таким образом, $\angle ACE = \angle ADE = \angle CDE - \angle CDA = 60° - 2 \cdot 21° = 18°$.

15.1. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 24 или 26 А во всех строках кроме первой сумма равна 24. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 24, 26, 28, 30, 32, 34

15.2. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 26 или 28 А во всех строках кроме первой сумма равна 26. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 26, 28, 30, 32, 34, 36

15.3. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 27 или 29 А во всех строках кроме первой сумма равна 27. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 27, 29, 31, 33, 35, 37

15.4. В квадратной таблице 5×5 расставлены натуральные числа. Сумма чисел в каждом столбце равна 28 или 30 А во всех строках кроме первой сумма равна 28. Чему может быть равна сумма чисел в первой строке?

Ответ. 28, 30, 32, 34, 36, 38

Решение первого варианта. Посчитаем сумму всех чисел в таблице двумя способами. Если во всех столбцах сумма 24, то во всей таблице 120 и в первой строке тоже 24, если же среди столбцо есть одно число 26, то будет сумма равна 26. Если среди столбцов две суммы по 26, то в первой строке получим 28, и так далее до пяти столбцов по 26. Получаем ответ: 24, 26, 28, 30, 32, 34. В каждом ситуации приводится пример.