Программа зачёта, 2025-05

Ко всем вопросам прикреплена ссылка либо на листик в Хеопсе (и первой, и второй групп), где есть разбор, либо на другое место с разбором.

Во всех теоретических вопросах, где не указано обратное, нужно знать не только формулировку, но и доказательство.

Теория

Алгебра

1. Комплексные числа. Тригонометрическая запись числа. Формула Муавра. Корень из комплексного числа. Группа 1, Группа 1, Группа 2, Группа 2
2. Неприводимые многочлены. Лемма Гаусса. Критерий Эйзенштейна. Разбор
3. НОД многочленов, его линейное представление. Разбор
4. Если у неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов есть общий корень, то они отличаются домножением на константу. Разбор
5. Счётные и континуальные множества. Счётность $\mathbb{Q}$. Континуальность $\mathbb{R}$. Неравномощность счётного и континуального множеств. Теорема Кантора — Бернштейна (формулировка). Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Окружность Аполлония. Точки Аполлония, принадлежность центра описанной окружности и точки Лемуана прямой, соединяющей точки Аполлония. Характеризация окружности Аполлония через углы. Группа 1, Группа 2
2. Задача 255, аналогичное утверждение для вневписанной окружности. Группа 1, Группа 2
3. Линейные функции на плоскости, два определения, их эквивалентность. Задание прямой, перпендикулярной OI, с помощью линейных функций. Разбор
4. Прямая Гаусса, доказательство через линейные функции. Теорема Ньютона, два доказательства: через линейные функции, с помощью масс. Через линейные функции, через массы группа 1, через массы группа 2
5. Связь радиусов: $4R = r_a + r_b + r_c - r$. Формула Карно. Группа 1, Группа 2
6. Точка Шалтая, ей свойства (задача 1 из листика: этого листика). Точка Шалтая — центр поворотной гомотетии, переводящей одну высоту в другую. Точка Болтая, точка Болтая как проекция O на симедиану. Разбор
7. Центр масс системы материальных точек, его существование и единственность. Теорема о группировке. Группа 1, Группа 2

8. Барицентрические координаты. Существование барицентрических координат у любой точки плоскости. Барицентрические координаты точек M, I, O, H, N, середины дуги BC окружности (ABC), точки пересечения касательных к (ABC) в вершинах B и C. Группа 1, Группа 2

Задачи

Алгебра

1. Вычислите суммы:
   (а) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$
   (б) $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$. Группа 1, Группа 2

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i \leqslant 2$ такой, что $P(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot \ldots \cdot Q_n(x)$. Группа 1, Группа 2

3. Докажите, что многочлен $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ в смысле делимости многочленов с вещественными коэффициентами. Группа 1, Группа 2

4. Имеется 101 корова, каждая весит рациональное число граммов. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково. Группа 1, Группа 2

5. Докажите, что для простого p многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$ неприводим. Разбор

6. Действительное число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Существуют ли трансцендентные числа? Группа 1, Группа 2

Геометрия

1. Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку. Группа 1, Группа 2

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle CID$.
   Эту задачу нужно считать в синусах. Группа 1, Группа 2

3. Прямая, соединяющая точки касания вневписанной окружности со стороной AB и продолжением стороны BC, пересекается в точке Z с прямой, соединяющей точки касания другой вневписанной окружности со стороной AC и продолжением стороны BC. Докажите, что Z лежит на высоте AH треугольника ABC. Чему равно AZ? Группа 1, Группа 2

4. **Окружность Ламуна.** Медианы разрезают треугольник на 6 маленьких треугольничков. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности. Группа 1, Группа 2

5. **Задача 255.** Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно, вневписанная окружность касается стороны AC и продолжением стороны AB в точках B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые B_1C_1 и B_2C_2, биссектриса угла B и средняя линия, параллельная AB пересекаются в одной точке.
Эту задачу нужно посчитать в барицентрических координатах. Группа 1, Группа 2

Комбинаторика

1. Натуральные числа m и n взаимно просты. Отрезок $[0, 1]$ разбит на $m+n$ равных отрезков. Докажите, что в каждом отрезке, кроме двух крайних, лежит ровно одна из точек
$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$
Группа 1, Группа 2

2. Заяц загадал 10 натуральных чисел. Волк за один ход называет 10 коэффициентов (тоже натуральные числа), а Заяц в ответ называет результат линейной комбинации своих чисел с коэффициентами Волка, при этом Заяц сам выбирает какое число умножать на какой коэффициент. За какое наименьшее число ходов Волк гарантированно может узнать все числа Зайца? Разбор

3. Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P. Группа 1, Группа 2

4. На клетчатой плоскости расположена фигура площади меньше 1. Докажите, что её можно подвинуть так, чтобы она не содержала вершин клеточек. Группа 1, Группа 2