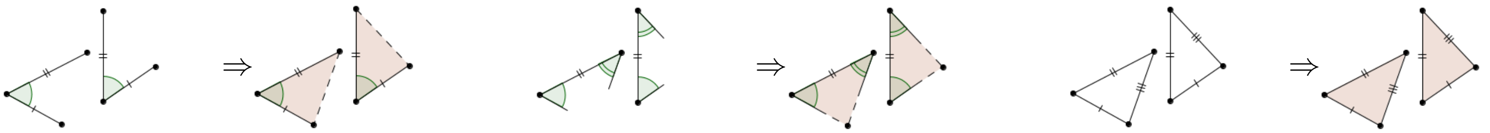
Группа 8-1, 1 пара.

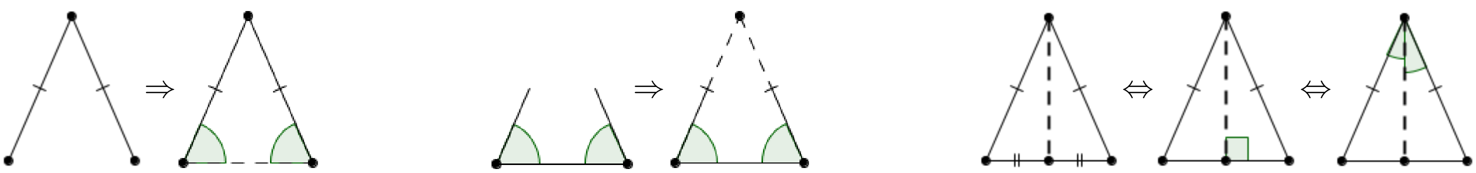
1. Вспоминаем 7-классную геометрию

Признаки равенства треугольников.

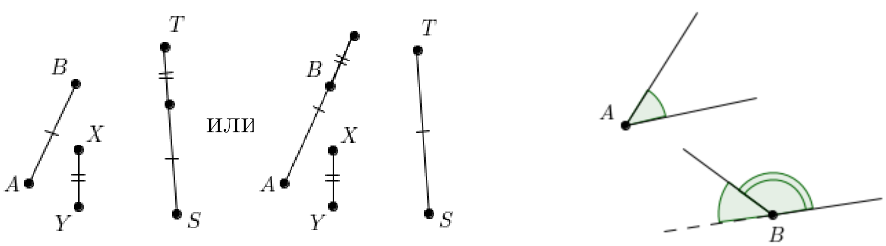


Сторона-Угол-Сторона (СУС) Угол-Сторона-Угол (УСУ) Сторона-Сторона-Сторона (ССС)

Равнобедренный треугольник.

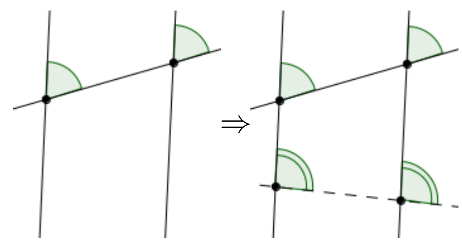


Реализация условия на чертеже.

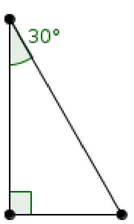


условие $ST = AB + XY$ условие $\angle A + \angle B = 180^\circ$

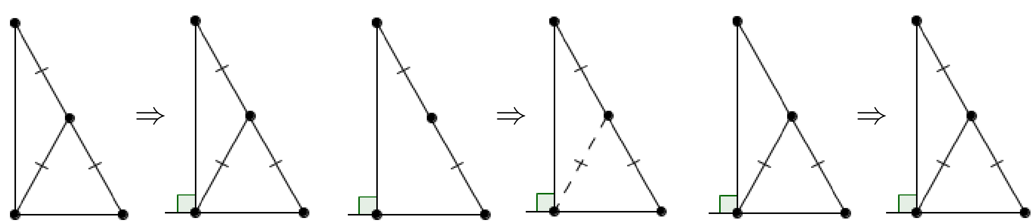
Параллельные прямые.



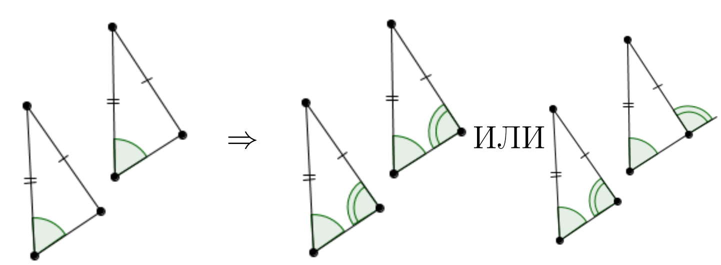
Треугольник 30-60-90.



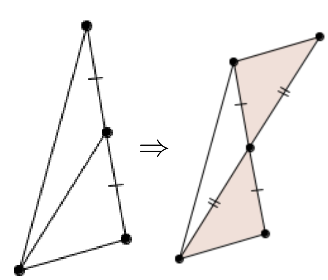
Медиана прямоугольного треугольника.



Четвёртый «признак равенства» треугольников.

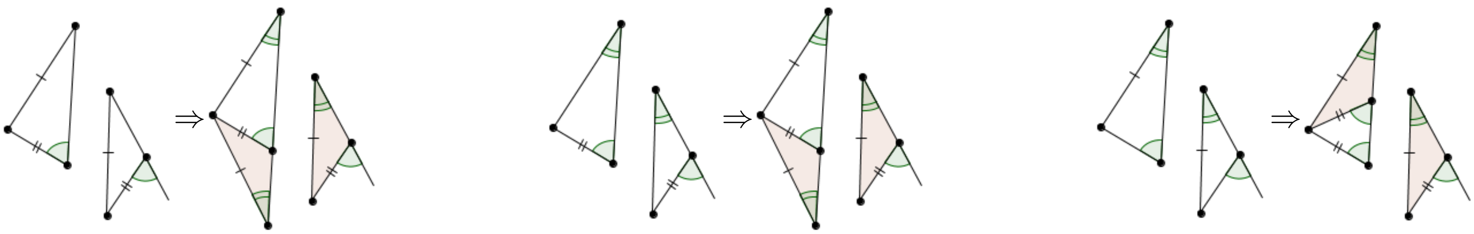


Перекладывание треугольников–1.



удвоение медианы

Перекладывание треугольников–2.



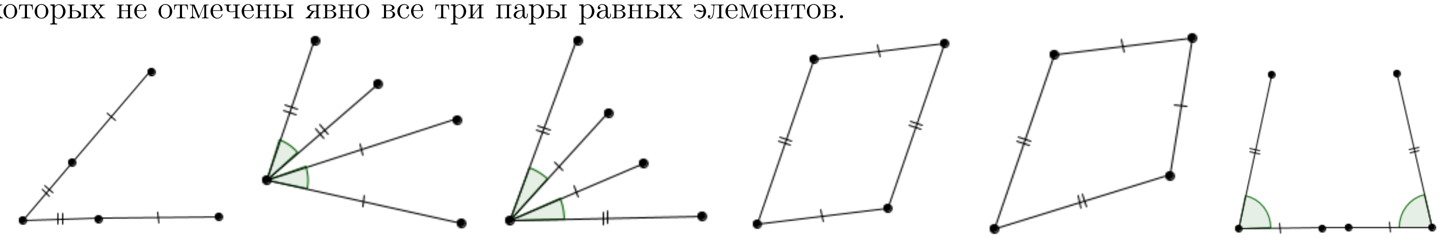
вокруг четвёртого «признака равенства» треугольников

Группа 8-1, 1 пара.

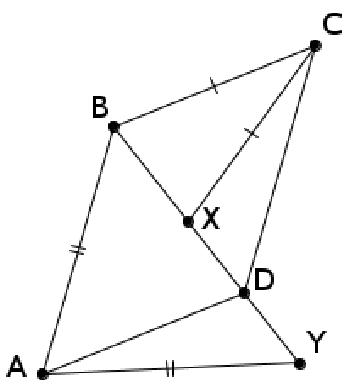
1. Вспоминаем 7-классную геометрию

Комментарий. В задачах часто треугольники не бывают так заметны (вспомните задачу 4 из отборочной олимпиады). Они могут пересекаться, углы и стороны могут иметь общие части, треугольники могут иметь общие стороны, общие углы; в последних двух случаях они могут быть не отмечены на чертеже!

0. На каждом из чертежей ниже найдите «незаметную» пару равных треугольников: т.е. такие, у которых не отмечены явно все три пары равных элементов.

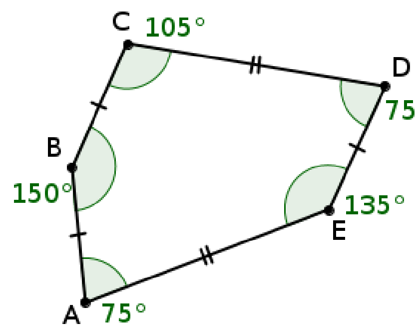


1.



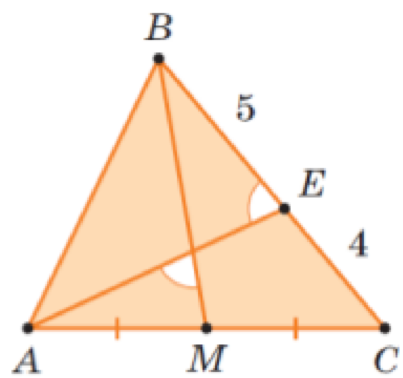
$ABCD$ — параллелограмм
(!) $DX = DY$

2.



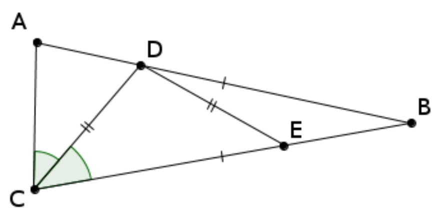
(?) $\angle ACE =$?

3.



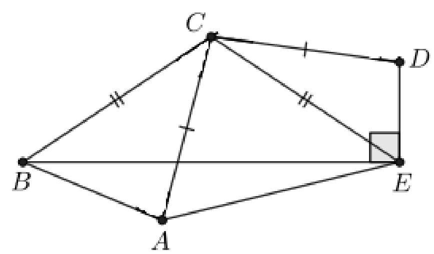
(?) $BM =$?

4.



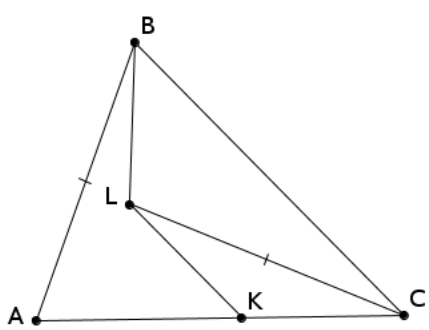
(!) $AD + AC = CE$

5.



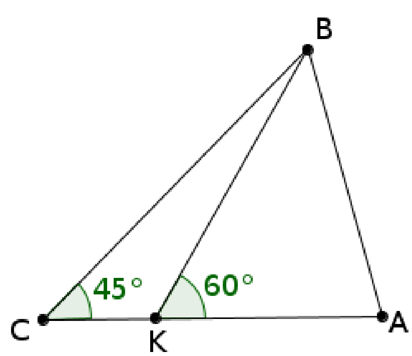
$\angle ACB + \angle BCD = 180°$
(!) $\angle BAC + \angle CDE = 180°$

6.



$\angle BAC + \angle BLC = 180°$, $LK \parallel BC$
(!) $AB = BK$

7.



$AK = 2KC$
(!) $\angle ABK = 45°$

Группа 8-1, 2 пара.

ТЧ-1: оценочки и пр.

1. При каких натуральных n:
а) $n-3$ делится на $n+5$?
б) $2n+2$ делится на $3n-7$?

2. Сумма двух натуральных чисел делится на их произведение. Чему могут равняться эти числа?

3. При какие натуральных n дробь равна целому числу:
а) $\dfrac{5n-8}{2n+1}$?
б) $\dfrac{n^2+4n+3}{n^2+1}$?

4. Найдите все натуральные $n>2$, для которых существуют n попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию: куб каждого из этих чисел делится на произведение остальных чисел.

5. Может ли произведение некоторых двух последовательных натуральных чисел равняться произведению некоторых двух последовательных четных чисел?

6. При каких натуральных n число n^4+1 делится на n^2+n+1?

7. Пусть x, y — натуральные числа, большие 1. Оказалось, что x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Докажите, что число $x+y-1$ — составное.

8. Дано составное нечетное число $2n+1$. При каких n оно является делителем числа $n!$?

9. Даны натуральные $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что их НОК не меньше na_1.

10. Непостоянная арифметическая прогрессия состоит из 10 простых чисел. Докажите, что разность этой прогрессии больше 200.

Группа 8-1, 3 пара.

Игры. Симметричная стратегия.

0. а) На столе лежат две стопки по 20 монет. За ход разрешается взять любое количество монет из одной стопки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков выигрывает при правильной игре? б) А если в одной стопке 30 монет, а в другой 20?

1. У ромашки а) 112 лепестков; б) 111 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

2. Двое по очереди ставят коней в клетки шахматной доски так, чтобы кони не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник - нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов - это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше - очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Из прямоугольной плитки шоколада размером а) 17×239 б) 17×238 двое по очереди выкусывают квадратные куски любого размера (по линиям долек). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. На доске размером 8×8 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы не появлялось закрашенных уголков из трёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Дан прямоугольный параллелепипед размерами а) $4 \times 4 \times 4$; б) $4 \times 4 \times 3$ в) $4 \times 3 \times 3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 8-1, 2 пара.

Игры. Полный анализ.

1. а) В левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. Два игрока по очереди двигают ее вправо или вверх на любое число клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

б) А если заменить ладью на короля, который может ходить на одну клетку вверх, вправо и по диагонали вправо-вверх?

в) А если на ферзя, который может ходить на любое количество клеток вверх, вправо и по диагонали вправо-вверх, а стоит изначально на клетке a4?

2. На доске написано число 2024. Петя и Вася играют в следующую игру: по очереди (начинает Вася) вычитают из написанного на доске числа любую его цифру, отличную от 0, и записывают его на доску вместо предыдущего. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан 0. Кто выиграет при правильной игре?

3. На столе лежит кучка в 30 миллионов спичек. Двое по очереди берут спички из кучи. За один ход играющий может взять из кучки любое число спичек вида 2^n (т. е. 1, 2, 4, 8, 16, ...). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

4. Игра начинается с числа 20240104. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль. Кто выиграет при правильной игре?

5. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выиграет при правильной игре?

6. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 1000. Кто выиграет при правильной игре?

7. Имеются две кучки конфет: в одной - 20, в другой - 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

8. Докажите, что результат игры в шахматы при оптимальной игре обоих противников предопределен.

9. Дед Мороз и Баба Яга играют в следующую игру. На снегу написано число 2. За один ход разрешается прибавлять к числу на снегу любой его делитель, кроме него самого. Если Дед Мороз(он ходит первым) первым получит число, большее тысячи, то Рождество состоится, а если это сделает Баба Яга, то наступит Конец Света. Что ожидает нашу планету при правильной игре обоих партнеров?

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 1 пара.

Игры. Какова конечная цель?

1. Есть 3 кучки камней. В одной из них 1997 камней, в другой — 1998 камней, а в третьей — 1999 камней. За один ход можно разделить одну кучку на две меньших (если в кучке было больше одного камня). Двое ходят по очереди, проигрывает не имеющий хода. Кто из них выиграет при правильной игре?

2. На доске написаны числа 717 и 3123. Двое игроков по очереди записывают на ней новые числа. За один ход можно записать натуральное число, равное разности двух уже записанных чисел, если оно еще не встречается на доске. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. В средней клетке полоски 1×2023 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает ее на 2 клетки, 1-й — на 4 клетки, 2-й — на 8 и т.д. (k-й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

4. а) Есть таблица 2×8 (2 — по вертикали) и карточки с числами от 1 до 16. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки подчеркивают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех подчеркнутых чисел. Если эта сумма не делится на 7 — выигрывает первый игрок, а если делится — второй. Кто выиграет при правильной игре?

б) Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Малыш и Карлсон по очереди выкусывают из шоколадки 2023×2023 квадратики. Малыш — 1×1, Карлсон — 2×2. Если Карлсон не может сделать хода, весь остаток шоколадки забирает Малыш. Начинает Карлсон. Выигрывает тот, кто съест больше шоколада. Кто это будет при правильной игре?

6. На доске нарисованы равенства:

а) $* = *$, $* + * = *$, $* + * + * = *$;

б) $* = *$, $* + * = *$, $* + * + * = *$, $\ldots$, $* + * + \ldots + * = *$ (в последнем равенстве 240 звездочек, т.е. всего 239 равенств). Двое игроков по очереди заменяют звездочки на произвольные числа. Первый хочет, чтобы в итоге все равенства оказались верными, а второй хочет ему помешать. Кто выиграет при правильной игре?

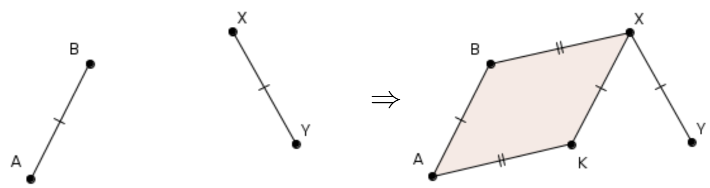
7. На плоскости даны 25 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Проигрывает тот, после чьего хода по отрезкам можно будет из любой точки добраться до любой другой. Кто выиграет при правильной игре?

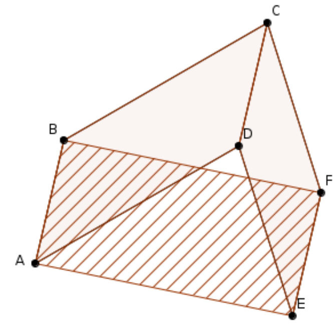
8. На столе лежат N спичек ($N > 3$). Двое делают ходы по очереди. За один ход разрешается объединить любые две кучки спичек, если в результате объем кучки не превысит $N/2$. В начале каждая кучка состоит из одной спички. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре?

Группа 8-1, 2 пара.

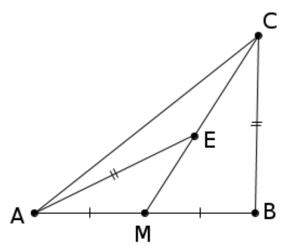
2. Параллелограмм.

Равенство и параллельность.

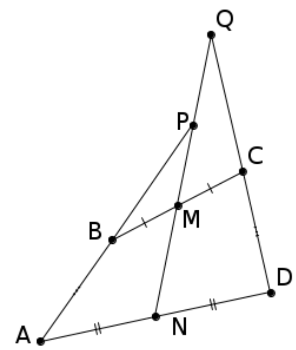




Примеры.

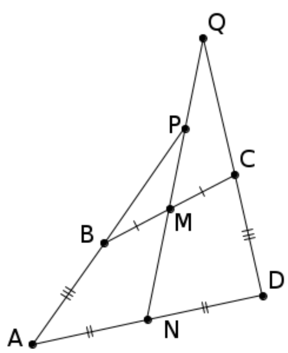


(!) $\angle AEM = \angle BCM$



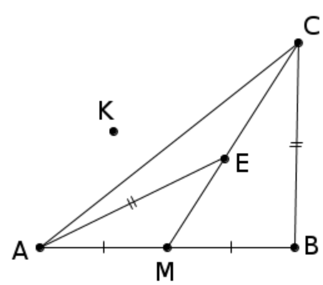
(!) $AB < CD \Rightarrow \angle APN > \angle DQN$

1.



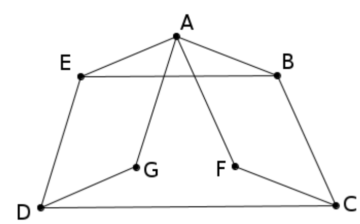
(!) $\angle APN = \angle DQN$

2.



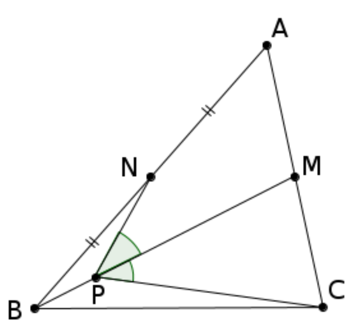
K симметрична B относительно CM
(!) $AK = CE$

3.



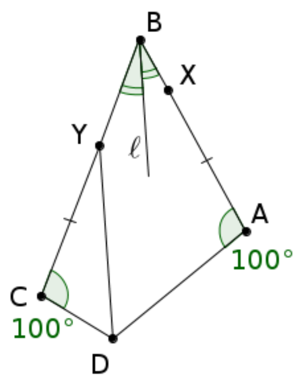
$BE \parallel CD$
$ABCF$, $AGDE$ — параллелограмм
(!) $CD = BE + GF$

4.



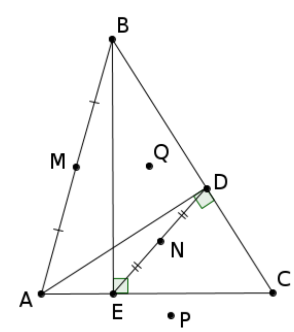
$PC = 2PN$
(!) $BC = AP$

5.



$YD \parallel \ell$
(?) $\angle AXY = ?$

6.



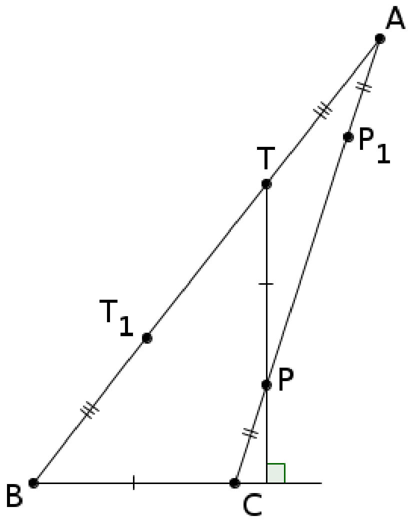
P симметрична M относительно AD
Q симметрична M относительно BE
(!) N лежит на PQ

На другой стороне есть ещё задачи!

Группа 8-1, 2 пара.

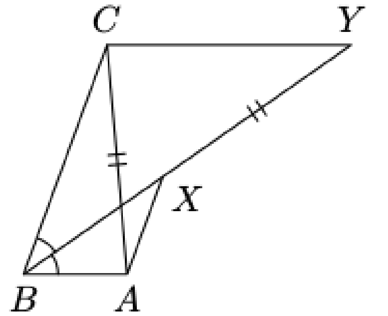
2. Параллелограмм.

7.



(!) $\angle CBA - \angle P_1T_1A = 45^\circ$

8.

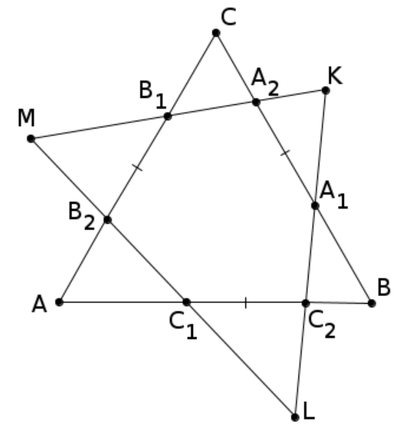


$\angle BAC > \angle ACB$

$AX \parallel BC$, $CY \parallel AB$

(!) $\angle BAC - \angle ACB = 60^\circ$

9.



ABC — равносторонний

(!) углы треугольника, составленного из отрезков B_1A_2, A_1C_2, C_1B_2 равны углам треугольника KLM

Группа 8-1, 3 пара.

ТЧ-2: разложение на простые и пр.

1. Натуральные числа от 1 до 12 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

2. Петя считает, что если взять два взаимно простых натуральных числа, произведение которых равно 1000, то их сумма делится на 7. Не ошибается ли он?

3. В произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15$ вычеркните наименьшее количество сомножителей так, чтобы произведение оставшихся чисел было точным квадратом.

4. Можно ли найти десять таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

5. Приведите пример 10 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности, никакие 9 из которых не являются взаимно простыми в совокупности.

6. Сколько есть пар натуральных чисел a, b таких, что $a < b$, НОД(a, b) =12, а НОК$(a, b) = 12000$?

7. Существуют ли 10 различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на НОК оставшихся 8 чисел?

8. а) Существуют ли различные натуральные числа a и b такие, что НОК$(a, a + 7)$ =НОК$(b, b + 7)$?

б) Дано натуральное n. Существуют ли различные натуральные числа a и b такие, что НОК$(a, a + n)$ =НОК$(b, b + n)$?

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 8-1, 3 пара.

Игры. Ответный ход.

1. У ромашки а) 111 лепестков; б) 112 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На крайней правой клетке доски 1×40 стоит белая фишка, а на крайней левой — черная. Два игрока по очереди двигают фишки (каждый свою) на одну, две или три клетки в любом направлении. Перепрыгивать фишку соперника нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. На крайней правой клетке доски 1×40 стоит фишка. Два игрока по очереди двигают эту фишку вправо или влево на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Оставлять фишку на месте нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник - нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов - это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше - очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает. С каким наилучшим счетом первый сможет гарантированно победить?

5. а) Первый игрок ставит на шахматную доску ладью. Затем второй ее передвигает ходом ладьи. Затем ее передвигает первый, затем снова второй и так далее. Запрещается ставить ладью на клетки, где она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?

б) Первый игрок ставит на шахматную доску ладью. Затем второй ее передвигает ходом коня. Затем ее передвигает первый - ходом слона, затем снова второй ходом коня и так далее. Запрещается ставить ладью на клетки, где она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?

6. На доске написаны числа от 1 до 1000. Двое по очереди вычеркивают числа (по одному) до тех пор, пока не останутся два числа, после чего второй платит первому столько рублей, какова разность этих чисел. Какой наибольший выигрыш может обеспечить себе первый игрок?

7. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2023$. Два игрока по очереди заменяют два из написанных чисел на их сумму, произведение или разность (любого знака). После 2022 ходов на доске останется одно число. Первый выигрывает, если оно будет кратно 2023, а второй в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

Группа 8-1, 1 пара.

ТЧ-3: еще тч.

1. Петя умножил 21 на некоторое четырехзначное число N, и обнаружил, что в результате получился точный куб. Найдите N.

2. а) Найдите какое-нибудь натуральное число половина которого — точный квадрат, а треть — точный куб.

б) Решите пункт а) с дополнительным условием: пятая часть числа должна равняться точной пятой степени.

3. На плоскости отмечено несколько точек, и некоторые пары точек соединены отрезками. Докажите, что можно расставить в точках различные натуральные числа так, чтобы в точках, не соединенных отрезком, оказались взаимно простые числа, а в точках, соединенных отрезком — не взаимно простые числа.

4. Скажем, что натуральное число k *сверхделится* на натуральное m, если k^m делится на m^k. Докажите, что если a сверхделится на b, а b сверхделится на c, то a сверхделится на c.

5. Найдите все пары натуральных чисел x, y такие, что оба числа $x^3 + y$ и $x + y^3$ делятся на $x^2 + y^2$.

6. Целые числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что abc можно представить в виде m^3n^2, где m и n — целые числа.

7. Докажите, что при любых натуральных $m < n$ число $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n}$ не является целым числом.

Группа 8-1, 2 пара.

Игры. Повторение и закрепление.

1. На столе лежит куча из 2023 спичек. Двое по очереди берут из нее спички. За один ход можно взять две, три или пять спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Под ёлкой лежат 2012 шишек. Винни-Пух и ослик Иа-Иа играют в игру: по очереди берут себе шишки. Своим ходом Винни-Пух берёт одну или четыре шишки, а Иа-Иа – одну или три. Первым ходит Пух. Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

3. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 99 точек, а рядом висят два ведра с краской: красной и синей. Два маляра по очереди красят по одной точке в один из цветов. Проигрывает маляр, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре?

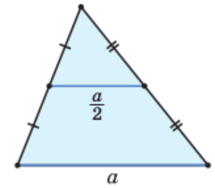
4. Выписаны в ряд числа от 1 до 2024. Играют двое, делая ходы поочередно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выигрывает тот, кто зачеркнёт последнее число. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Есть полоска 1×25 и 25 монет. За один ход можно либо положить монету на пустую клетку, либо передвинуть любую монету на ближайшую свободную клетку справа. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Группа 8-1, 3 пара.

3. Средняя линия

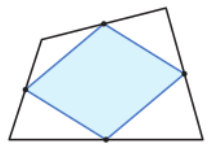
Определение. *Средней линией* треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Третью сторону треугольника, с которой его средняя линия не имеет общих точек, называют *основанием.*

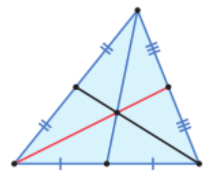


Свойство средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна половине основания.

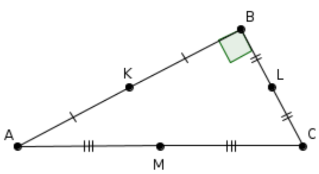
Теорема Вариньона. Середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Данный параллелограмм часто называют *параллелограммом Вариньона.*

Теорема о медианах треугольника. Три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от его вершин.



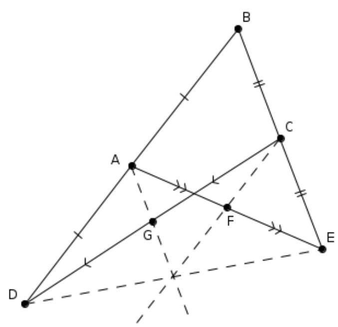


1.



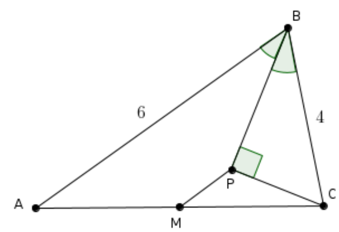
(!) $KL = BM$

2.



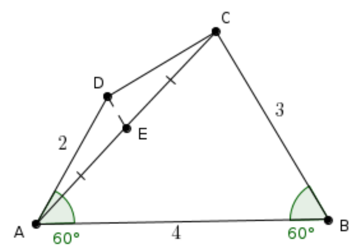
(!) AG и CF пересекаются на DE

3.



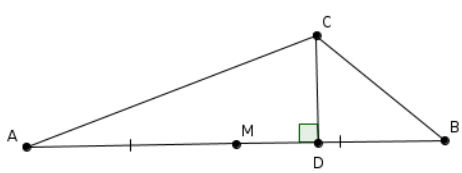
$AM = MC$
(?) $MP = ?$

4.



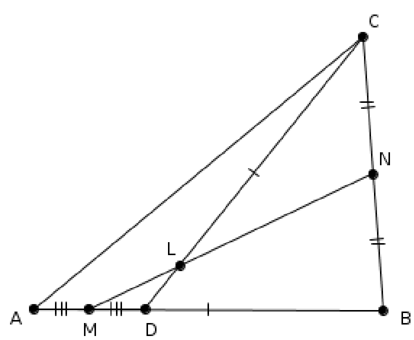
(?) $DE = ?$

5.



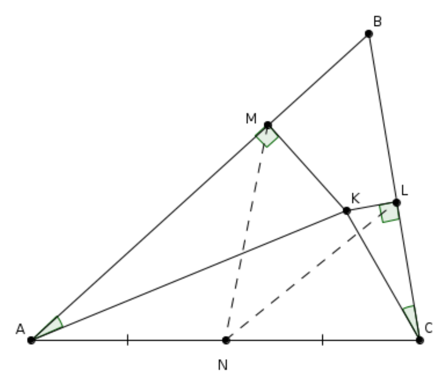
$\angle B = 2\angle A$
(!) $BC = 2MD$

6.



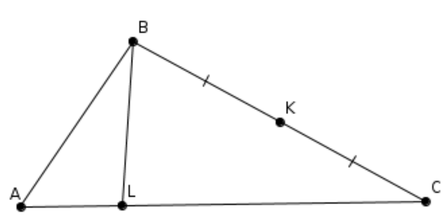
(!) $MD = ML$

7.



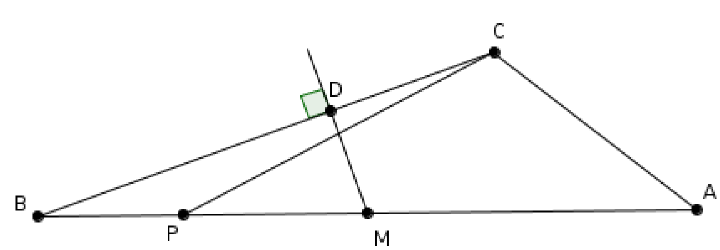
(!) $MN = NL$

8.



$CL = AL + AB$
(!) $\angle KLB = 90^\circ \Leftrightarrow AC = 3AB$

9.



$\angle A = 2\angle B$, $AM = MB$, $AP = 2AC$
(!) MD проходит через середину PC

Группа 8-1, 1 пара.

Клетчатая комбинаторика 1. Подсчеты.

0. В клетках таблицы 6×6 записаны действительные числа. Оказалось, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел положительная, докажите, что найдется уголок из трех клеток, в котором сумма чисел тоже положительная.

1. В каждой клетке таблицы 9×9 записано целое число. В каждой строке и столбце подсчитали сумму чисел. Могло ли оказаться так, что 18 полученных сумм оказались последовательными целыми числами?

2. В клетках таблицы 100×100 записаны действительные числа. Оказалось, что в каждом прямоугольнике 1×7 сумма чисел положительная. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке отрицательная или ноль?

3. Квадрат 9×9 клеток разбили на трёхклеточные уголки. В каждой из 100 вершин клеток написали, сколько уголков содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

4. В клетках таблицы 100×100 записаны целые числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждом квадрате 2×2 и 3×3 нечётны?

5. В клетках таблицы 100×100 записаны числа 1 и -1. Могло ли оказаться так, что ровно в 99 столбцах суммы чисел отрицательны, а ровно в 99 строках суммы чисел положительны?

6. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы так, чтобы сумма чисел на диагонали из левого нижнего в правый угол стала неотрицательна.

7. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записаны 1 или 0, так, что сумма всех чисел равна $\frac{n^2}{2}$. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах получилась одинаковая сумма чисел.

8. В каждой клетке таблицы 101×101, записаны числа 1 или 0. Оказалось, что в трёх угловых клетках стоит 1, а в последней угловой клетке — 0. Обязательно ли найдется квадрат 2×2, в котором сумма чисел нечётна?

Группа 8-1, 2 пара.

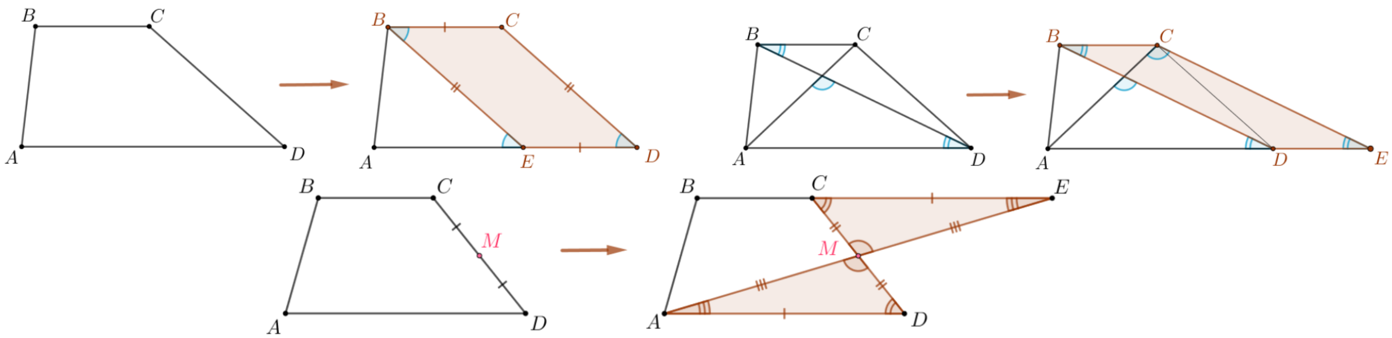
На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 3 пара.

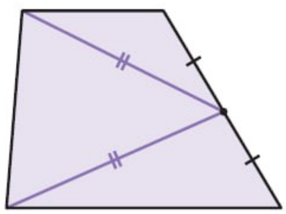
На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 8-1, 1 пара.

4. Трапеция. 10 января

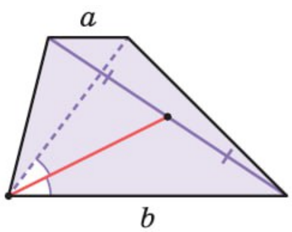


1.



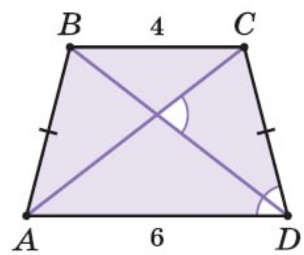
(!) трапеция прямоугольная

2.



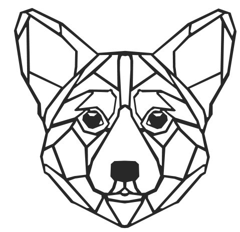
(?) пунктирная диагональ=?
(через a и b)

3.



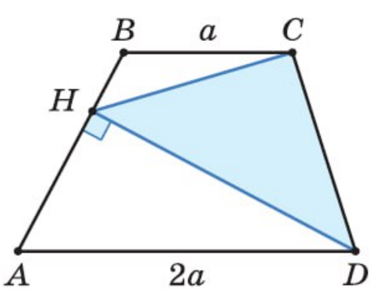
(?) боковая сторона=?

4.



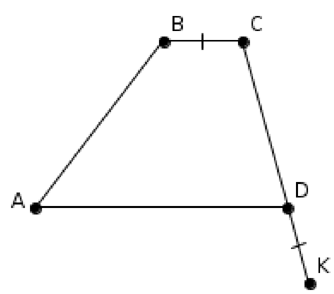
a) Существует ли трапеция, с основаниями 2 и 6, а боковыми сторонами 1 и 5?
b) Существует ли трапеция с основаниями 4 и 9, а диагоналями 5 и 7?

5.



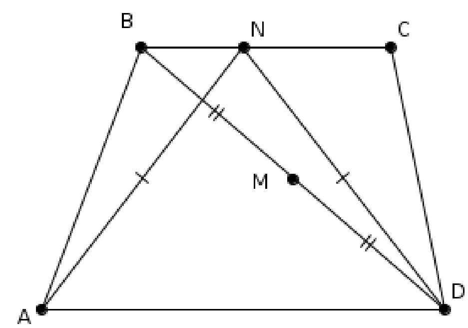
(!) $CH = CD$

6.



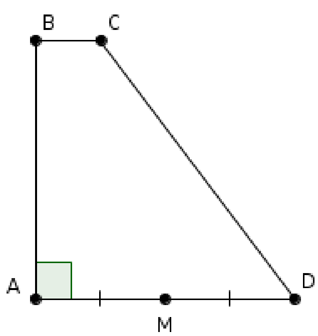
$\angle B = \angle A + \angle D$
(!) $AK = BK$

7.



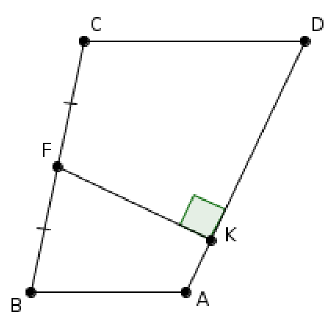
(!) $AB = 2MN$

8.



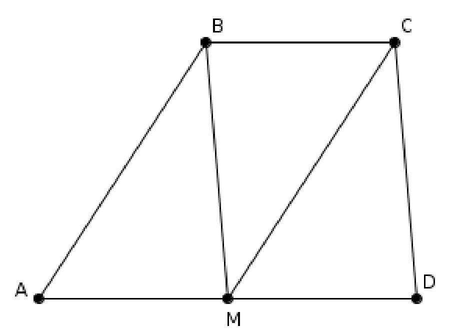
$AB = AD = CD - BC$
(!) $\angle ADC = 2\angle ABM$

9.



$3AK \leqslant KD$
(!) $AB + CD \geqslant 2AF$

10.



$P_{ABM} = P_{BCM} = P_{CDM}$
(!) $AD = 2BC$

Группа 8-1, 2 пара.

ТЧ-4: цифирки.

1. Можно ли в числе 5678943210 переставить цифры так чтобы получилось число, делящееся на а) 225; б) 48; в) 33?

2. Пусть N — наименьшее натуральное число с суммой цифр 500. Какова сумма цифр числа $4N$?

3. Найдите все пары цифр (a, b), такие, что число $\overline{20112011a2011b3032}$ делится на 396.

4. К числу 20112012201320142015 требуется приписать справа четыре цифры (не обязательно различные) так, чтобы получившееся число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. Коля написал число из одних троек. Всегда ли Кирилл может написать число, состоящее из одних четверок, которое делится на колино число?

6. Чему равна сумма всех 5-значных чисел, в каждом из которых цифры 1, 2, 3, 6, 8 встречаются по разу?

7. В десятичной записи натурального числа N переставили цифры. Оказалось, что при этом число уменьшилось в 3 раза. Докажите, что N делится на 27.

8. Докажите, что существует число-палиндром, которое делится на $9 \cdot 2^{2024}$.

9. Сумма цифр натурального числа n равна 10. Может ли сумма цифр числа n^2 равняться
а) 94? б) 109? в) 100?

10. а) Существует ли точный квадрат, в десятичной записи которого ровно 2024 цифры?

б) Существует ли натуральное число, в десятичной записи квадрата которого имеется десять двоек подряд?

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 8-1, 2 пара.

Клетчатая комбинаторика 2. Оценки.

0. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в квадрате 8×8, чтобы в каждом уголке из трёх клеток была хотя бы одна отмеченная клетка?

1. Каждая клетка доски 5×5 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Никакие две чёрные клетки не соприкасаются ни стороной, ни углом. Какое наибольшее количество чёрных клеток может быть на доске?

2. Какое наименьшее число клеток на доске 7×7 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:

а) в любом квадратике 2×2;

б) в любом уголке из трёх клеточек?

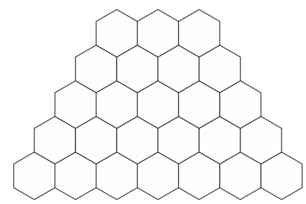
3. Какое минимальное число прямоугольников 1×2 клеток нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?

4. Псевдоладья — фигура, которая бьет как ладья, но только клетки своего цвета при шахматной раскраске. Псевдоладьи бьют сквозь друг друга. Какое максимальное количество псевдоладей можно расставить на доске 7×7 так, чтобы они не били друг друга?

5. Какое минимальное число королей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они били все клетки?

6. Какое наименьшее число клеток на доске 8×8 нужно закрасить, чтобы в каждом уголке из четырех клеток была закрашенная клетка?

7. Пчелы сели на шестиугольные соты. В каждом шестиугольнике не больше одной пчелы. Для любой пчелы ровно в одном соседнем шестиугольнике сидит пчела. Какое наибольшее количество пчел могло быть?



8. Квадрат 11×11 разрезали на квадраты 2×2 и уголки из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов при этом могло получиться?

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производилось решение выданных ранее задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 3 пара.

ТЧ-5: добавка на повторить.

1. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - x = y^2 + 3y$.

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

3. При каких натуральных n дробь $\dfrac{n^3 - n^2 - 3n}{n^2 - n + 3}$ сократима?

4. Даны 6 четырехзначных чисел, взаимно простых в совокупности. Докажите, что из них можно выбрать 5 чисел, взаимно простых в совокупности.

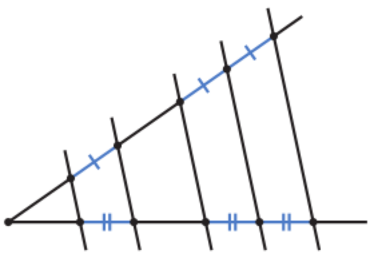
Группа 8-1, 1 пара.

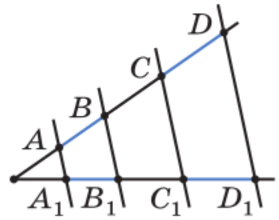
6. Теорема Фалеса. Теория и упражнения. 14 января

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной его стороне между ними лежат равные отрезки, то соответствующие им отрезки на другой стороне угла тоже будут равны.

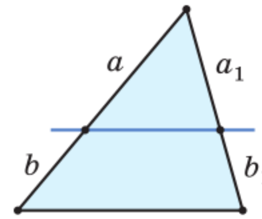
Теорема о пропорциональных отрезках[1]**.** Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки между ними на каждой его стороне относятся одинаково.

Теорема о пропорциональных отрезках в треугольника. Если прямая, параллельная основанию треугольника, пересекает его стороны, то она делит их в одном отношении.





$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1$

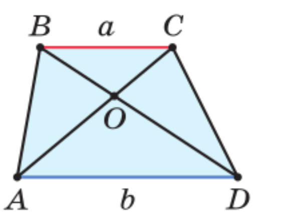


$a : b = a_1 : b_1$

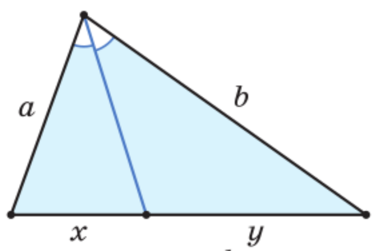
Свойство диагоналей трапеции. Диагонали трапеции точкой пересечения делятся на отрезки, пропорциональные её основаниям.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

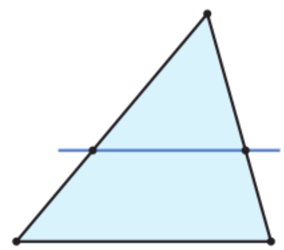
Теорема, обратная теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике. Если прямая делит две стороны треугольника в одном отношении, считая от их общей вершины, то эта прямая параллельна третьей стороне треугольника.



$CO : AO = BO : DO = a : b$

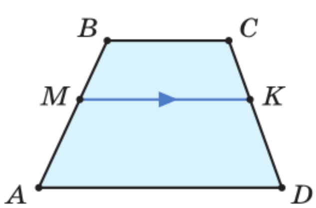


$x : y = a : b$



Комментарий. Оставьте Джованни Чеву, Менелая Александрийского и Генри ван Обеля в покое.

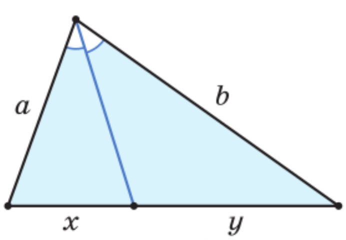
1.



$AD \parallel BC$, $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{DK}{KC}$

(!) $MK \parallel AD$

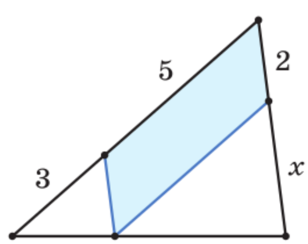
2.



$x + y = c$

(?) $x =?$ (через a, b, c)

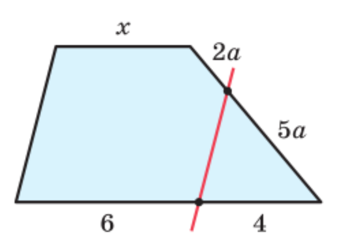
3.



на чертеже параллелограмм

(?) $x =?$

4.



на чертеже трапеция; красная прямая $\parallel$ боковой стороне

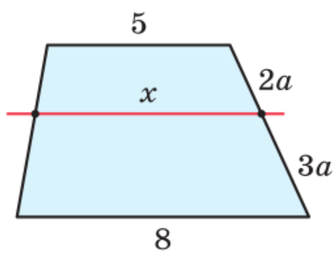
(?) $x =?$

---

[1] такие названия — правильные, но куча народу (и я в том числе) всё называют теоремой Фалеса

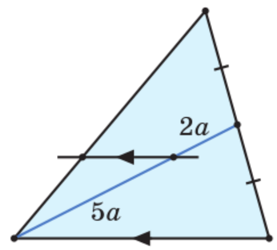
Группа 8-1, 1 пара.

5.



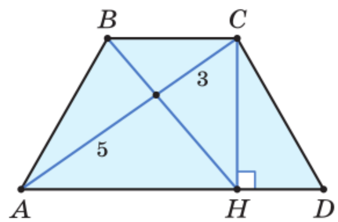
на чертеже трапеция
(?) $x =$?

6.



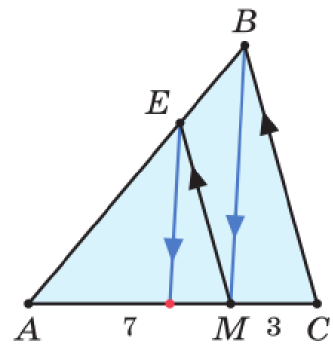
(?) в каком отношении прямая делит сторону

7.



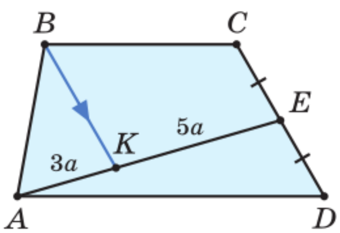
на чертеже трапеция
(?) $AD : BC =$?

8.



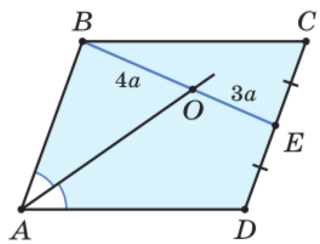
(?) в каком отношении прямая делит сторону AC

9.



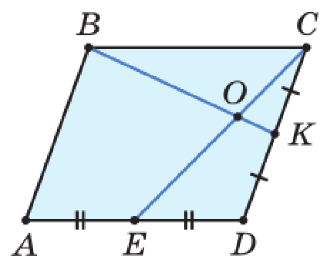
на чертеже трапеция
(?) $AD : BC =$?

10.



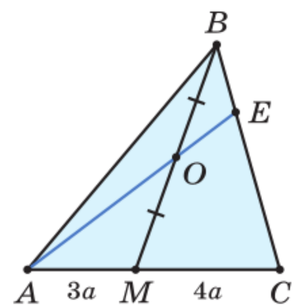
на чертеже параллелограмм
(?) $AD : AB =$?

11.



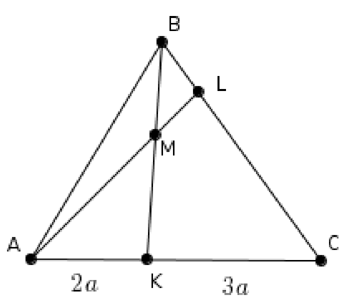
на чертеже параллелограмм
(?) $CO : OE =$?

12.



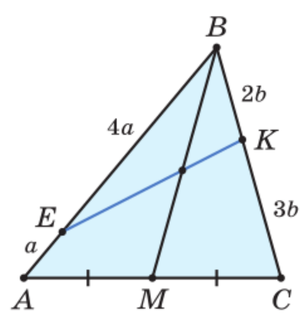
(?) $BE : EC =$?

13.



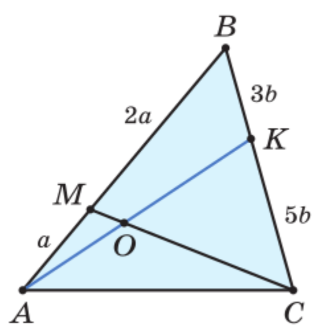
$BM : MK = 3 : 4$
(?) $BL : LC =$?

14.



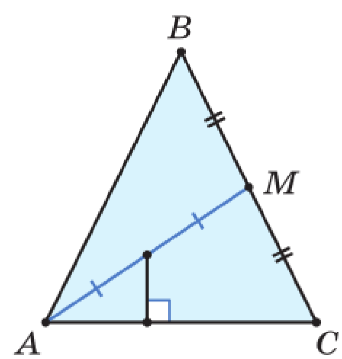
(?) в каком отношении BM делит EK

15.



(?) $AO : OK =$?

16.



$AB = BC$
(?) в каком отнощении перпендикуляр делит AC

Группа 8-1, 2 пара.

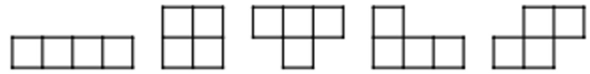
На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 8-1, 3 пара.

Клетчатая комбинаторика 3. Раскраски.

0. Можно ли разрезать доску 6×6 на: а) четырехклеточные фигуры типа Т; б) четырехклеточные фигуры типа Г; в) прямоугольники 1×4?

1. Прямоугольник какой наименьшей площади можно разрезать на указанные фигуры, чтобы каждая фигура была хотя бы одна?



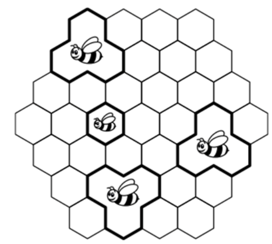
2. Можно ли разрезать квадрат 6×6 на 11 прямоугольников 1×3 и один трехклеточный уголок?

3. Можно ли разрезать квадрат 8×8 на 15 прямоугольников 1×4 и один уголок из 4 клеток?

4. Квадрат 11×11 разрезали на четырехклеточные фигуры типа Z и квадратики 1×1. Какое наименьшее количество квадратов 1×1 могло получиться?

5. Можно ли разрезать доску 11×11 на горизонтальные прямоугольники 1×2 и вертикальные прямоугольники 1×3?

6. Тринадцать пчел — одна маленькая и 12 больших живут в сотах из 37 ячеек. Каждая большая пчела занимает 3 попарно соседних ячейки, а маленькая пчела занимает ровно 1 ячейку как показано на рисунке. В каких ячейках может находиться маленькая пчелка?



7. В 17 клетках квадрата 5×5 стоят черепашки. За один ход каждая черепашка передвигается в соседнюю по стороне клетку, соблюдая два правила: две черепашки никогда не встают в одну клетку и, если черепашка в какой-то ход передвигалась по горизонтали, то в следующий ход она передвигается по вертикали, и наоборот. Может ли процесс продолжаться сколь угодно долго?

8. Из 32 прямоугольников 1×2 сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по 8 прямоугольников красной, синей, желтой и зеленой красками так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общий участок границы (ненулевой длины), были окрашены различно.

Группа 8-1, 1 пара.

Алгебра-1.

Формулы сокращенного умножения и разложение на множители

1. Два различных числа x и y таковы, что $x^2 - 2024x = y^2 - 2024y$. Найдите сумму чисел x и y.

2. Найдите все натуральные x и y такие, что $3x + 7y = xy + 1$.

3. Решите уравнение $\dfrac{a^{33}+1}{a^{11}-a^{22}+a^{33}} = \dfrac{2049}{2048}$

4. Известно, что $a + b = 5$, $ab = 2$. Найдите значение выражения $a^5 + b^5$.

5. В трёх клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трёх разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трёх исходных чисел (какими бы они ни были).

6. Найдите все такие натуральные x, y и простые p, что выполняется равенство: a) $x^4 + x^2 + 1 = p$; b) $x^3 + 3xy(x + y) + 2y^3 = p^2$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых многочлен $x^8 + nx^4 + 1$ раскладывается в произведение двух многочленов четвёртой степени с целыми коэффициентами.

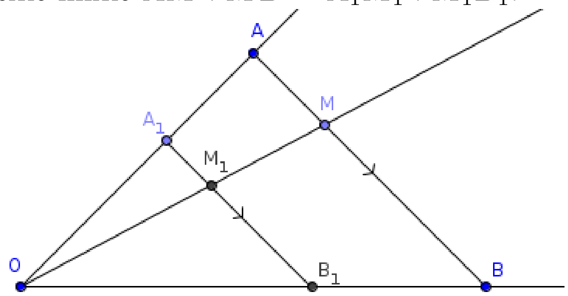
Группа 8-1, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 8-1, 3 пара.

7. Теорема Фалеса. Задачи. 15 января

Ещё одна картинка. На чертеже ниже $AM : MB = A_1M_1 : M_1B_1$.



1. Докажите, что в трапеции середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

2. Биссектриса угла B пересекает медиану CM треугольника ABC в точке K. Прямая, проходящая через точку C параллельно AK пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $AD = BC$.

3. На сторонах AB и BC четырехугольника $ABCD$ отметили точки T и S так, что $TS \parallel AC$. Прямые, проходящие через T параллельно AD и через S параллельно CD пересекаются в точке X. Докажите, что точки B, X и D лежат на одной прямой.

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяли точки K и E так, что прямые AE и CK параллельны. Докажите, что прямые BE и DK тоже параллельны.

5. Через точку P на стороне AC треугольника ABC проведена прямая, параллельная медиане AM, которая пересекает сторону BC в точке E, и прямая, параллельная медиане CN, которая пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что медианы AM и CN разбивают отрезок EF на три равные части.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $AA_1 = CC_1$. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P, а прямая DP пересекает прямую BC в точке M. Докажите, что $CM = CD$.

7. В треугольнике ABC точки M и N лежат на стороне AC, причём N — внутренняя точка отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

Группа 8-1, 1 пара.

Процессы. Постоянное свойство.

0. а) На доске написаны числа 1, 2, ..., 101. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них сумму этих чисел. Какое число останется на доске последним?
б) На доске написаны числа 1, 2, ..., 102. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Может ли через несколько действий оказаться, что все числа на доске стали нулями?

1. На столе стоит 22 стакана, ровно половина из них вверх дном. Можно ли все поставить стаканы вниз дном, если разрешается переворачивать за один ход ровно 4 стакана?

2. На доске написан набор 2023, 2024, 2025. Каждую секунду набор чисел (a, b, c) заменяется на $(a + b - c, a + c - b, b + c - a)$. Может ли когда-нибудь получиться набор 2021, 2023, 2026?

3. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит плюс или минус. Разрешается поменять на противоположные знаки во всех клетках строки или столбца. Можно ли действую таким образом, получить таблицу из одних минусов, если исходное расположение знаков было следующим:
а) В 3 угловых клетках плюсы, в остальных минусы?
б) В угловых клетках плюсы, в остальных минусы?

4. На доске написаны числа: 45, 12, 15 и 75. Вместо пары чисел можно написать их НОК и НОД. Могут ли в какой-то момент на доске оказаться числа: а) 9, 15, 180 и 25; б) 3, 15, 15 и 180?

5. На доске написаны числа от 1 до 20.
а) Заменяем (x, y) на $3x + 5y$. Может ли в конце остаться 2023?
б) Заменяем (x, y) на $4(x + y)$. Может ли в конце остаться 2024?
в) Заменяем (x, y) на $x + y + 5xy$. Может ли в конце остаться 2024?

6. В правильном пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Можно ли перекрасить все точки в красный цвет, если разрешено делать операцию: поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный?

7. 10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу — синие. Разрешены две операции:
1) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд;
2) перевернуть четыре фишки, расположенные в двух парах соседних фишек, между которыми одна фишка.
Удастся ли через несколько операций перевернуть все фишки синей стороной вверх?

8. По окружности расставлены числа: 11 чисел 1 и одно число –1. За один ход разрешается изменять знак в любых трех подряд идущих числах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число –1 стало соседним с исходным?

9. Клетки прямоугольной таблицы 14×15 покрашены в три цвета: синий, красный, зеленый. За один ход можно выбрать три клетки, образующие уголок, и одновременно перекрасить их следующим образом: синие клетки — в красный цвет, красные — в зеленый, зеленые — в синий. Всегда ли можно такими действиями сделать таблицу одноцветной?

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производилось решение выданных ранее задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 3 пара.

Алгебра-2.

Разнобой по неравенствам

1. Пусть a, b, c, $d \geqslant 0$, причём $c + d \leqslant a$, $c + d \leqslant b$. Докажите, что $ad + bc \leqslant ab$.

2. Известно, что $a > b > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} < \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$$

3. Действительные числа a, b и c таковы, что $ab - 1 < a - b$ и $ac - 1 < a - c$. Докажите, что $bc + 1 > b + c$.

4. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 < b$, $b^2 < c$, $c^2 < a$. Докажите, что все три числа a, b и c меньше 1.

5. a, b, $c > 0$ и $abc = 1$. Известно, что $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что ровно одно из чисел a, b, c больше 1.

6. Сумма нескольких положительных чисел равна 1. Докажите, что одно из чисел не меньше суммы квадратов остальных.

7. Пусть $x, y > 0$. Через S обозначим наименьшее из чисел x, $\frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{x}$. Какое максимальное значение может принимать величина S?

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 2 пара.

Алгебра-3.

Маленькая добавочка для всех

1. Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Решите уравнение $x^2+10y^2-6xy+4y+4=0$.

Для тех, кто всё решил.

3. Докажите, что для произвольных чисел a и b выполняется неравенство $a^2+ab+b^2>3(a+b-1)$.

4. Докажите, что если действительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то сумма каких-то двух из них равна нулю.

Группа 8-1, 3 пара.

Клетки и процессы.

1. Маша нарисовала на асфальте поле для игры в классики и пронумеровала клетки числами от 1 до 12 как на рисунке. Сначала Маша прыгнула в клетку 1, а каждый следующий прыжок делала на соседнюю по стороне клетку, завершив в клетке 12. Оказалось, что на клетке 1 Маша стояла 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 11 — 11 раз. Сколько раз Маша побывала на клетке 12?

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12

2. Волшебные семена морковки работают следующим образом: если посадить семечко в одну клетку, то вырастает по морковке в этой клетке и во всех соседних с ней по сторонам клетках. Огород представляет собой прямоугольник 2×7 клеток, как показано на рисунке. В клетках написано, сколько морковок в них выросло. Найдите, сколько морковок в клетке со знаком «?»?

10	7	7	6	8	15	10
7	11	?	5	9	12	9

3. В таблице 8×9 одна клетка покрашена в чёрный цвет. Разрешается перекрашивать все клетки в любом кресте (объединение любой строки и любого столбца) кроме клетки пересечения в противоположный цвет. Можно ли такими операциями покрасить все клетки в белый цвет?

4. Куб размером $3 \times 3 \times 3$ разбит на 27 единичных кубиков, занумерованных в произвольном порядке числами от 1 до 27. В каждом из 27 столбиков $1 \times 1 \times 3$ подсчитывается сумма номеров кубиков. Какое наибольшее количество нечётных сумм может оказаться?

5. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном углу — квадрат 1×1. Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Анна — большой квадрат, а Борис — маленький, первой ходит Анна. Анна выигрывает, если квадрат Бориса окажется на клетке, накрытой квадратом Анны. Может ли Анна выиграть независимо от игры Бориса?

6. Фигура *заяц* может ходить на одну клетку вверх по любой диагонали или на клетку вниз по вертикали. За какое наименьшее число ходов заяц сможет обойти все поля доски 5×5 и вернуться на исходное поле?

7. Фигура *ежик* может ходить на одну клетку вправо, вниз или по диагонали влево-вверх. Ежик прошел все клетки доски 7×7 по одному разу, начиная с некоторой клетки. Мог ли он начать движение в клетке четвертой строки пятого столбца?

Группа 8-1, 1 пара.

Алгебра-4.
Неравенство о средних.

0. Неравенство $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ выполнено для произвольных чисел a и b.
0. Неравенство о средних для двух чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{ для } a, b \geqslant 0.$$

(Выведем из предыдущего пункта)
1. Докажите и запомните важное неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$ для $a, b \geqslant 0$.
2. Докажите и запомните важное неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$.
3. Докажите неравенство $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$, $(a,\ b,\ c>0)$.
4. Докажите неравенство $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geqslant 6\$,(\mathrm{a,b,c}>0).\$$
5. Вспомнив подходящую формулу из разбора, докажите неравенство: $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ и выведите из него неравенство о средних для трёх чисел:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

6. Докажите неравенство $6abc \leqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \leqslant 2(a^3+ +b^3+c^3)$, $(a,\ b,\ c>0)$.
7. Докажите неравенство $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc$,
8. Дано $a+b \geqslant 1$. Докажите, что $a^4+b^4 \geqslant 1/8$. (Принимаем решение только с использованием неравенства о средних)

Для тех, кто сделал первые 8.

9*. Для положительных a, b, c докажите неравенство $abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.
10.** Для положительных a, b, c докажите неравенство $(a+\frac{1}{b}-1)(b+\frac{1}{c}-1)(c+\frac{1}{a}-1) \leqslant \left(\frac{1+abc}{2\sqrt{abc}}\right)^3$.

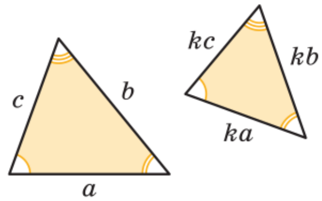
Группа 8-1, 2 пара.

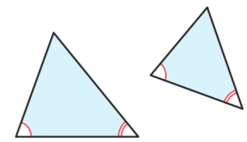
На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 8-1, 3 пара.

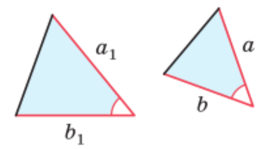
8. Подобие. 19 января

Определение. Два треугольника *подобны*, если углы одного из них соответственно равны углам другого, а их соответствующие стороны пропорциональны.

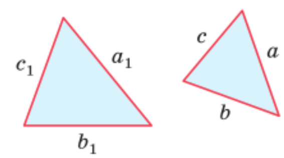




Первый признак подобия треугольников. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

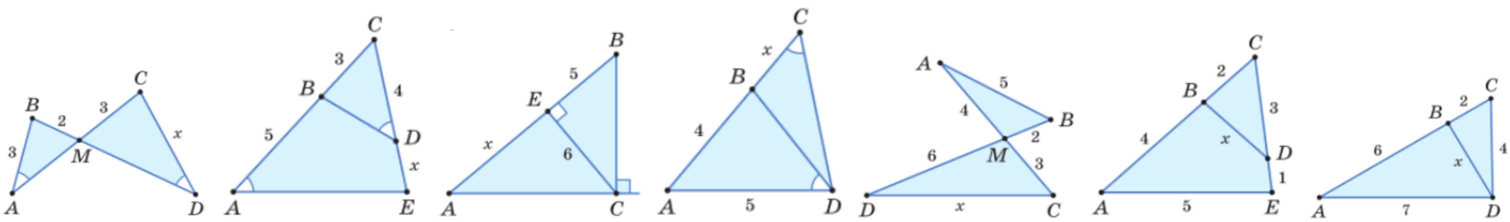


Второй признак подобия треугольников. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами в треугольниках равны, то такие треугольники подобны.

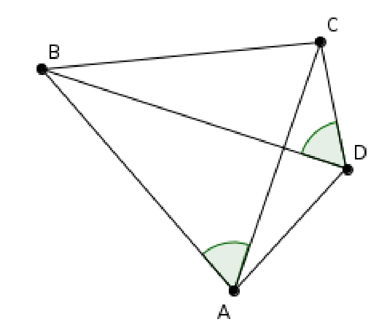


Третий признак подобия треугольников. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

1. Найдите x на каждом из чертежей ниже.



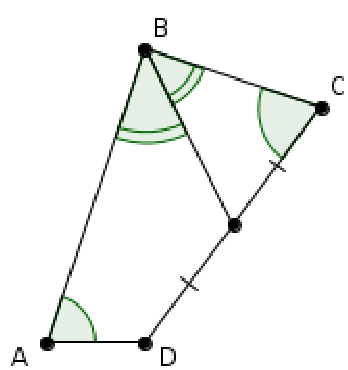
2.



(!) $\angle BCA = \angle BDA$

критериями вписанности пользоваться нельзя 😈

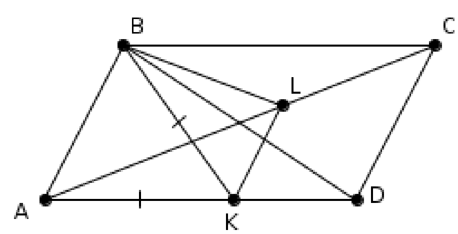
3.



$CD = 3AD$

(?) $AB : BC = ?$

4.



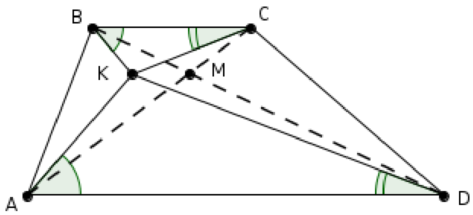
$ABCD$ — параллелограмм

$KL \parallel AB$

(!) $\angle KBL = \angle ADB$

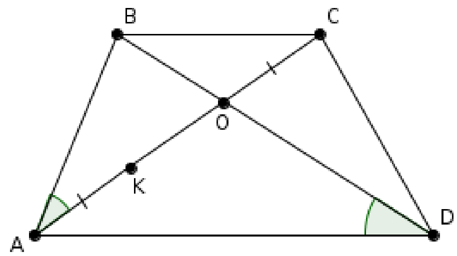
Группа 8-1, 3 пара.

5.



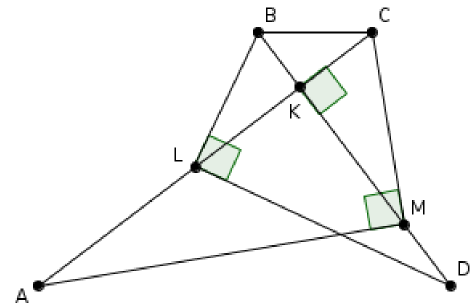
$AD \parallel BC$
(!) $MK \parallel AD$

6.



$AD \parallel BC$
(!) $\angle ABK = \angle BDC$

7.



$AD \parallel BC$
(!) $\angle BLC = \angle BMC$

Группа 8-1, 1 пара.

Процессы. Монотонная величина.

0. На доске числа от 1 до 20. Каждую минуту выбирают какие-то два из них x и y, и заменяют их на числа $x-5$ и $y+4$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

1. а) В клетках таблицы 100×100 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше, чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет не меньше, чем минусов.

б) В клетках таблицы 100×100 расставлены действительные числа. Если в каком-то ряду сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

2. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

3. Сначала на плоскости нарисовано несколько точек. За ход две точки соединяют кривой линией, не пересекающей ранее проведенных линий, а на середину линии ставят еще одну точку. Нельзя проводить линию из точки, откуда уже идут три линии. Докажите, что рано или поздно процесс закончится.

4. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных натуральных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.

5. Фигура *полуконь* ходит как обычный конь, только в четырех направлениях: вверх-влево, вверх-вправо, вправо-вверх и вправо-вниз. Докажите, что с какой бы клетки доски 100×100 он ни начал, полуконь сможет сделать лишь конечное число ходов.

6. По окружности расставлены 2024 действительных числа. Если 4 последовательно стоящих числа a, b, c, d таковы, что $(a-d)(b-c)>0$, то числа b и c разрешается поменять местами. Докажите, что такие перестановки можно выполнить лишь конечное число раз.

7. 100 учеников 8 класса посадили по одному в клетки квадрата 10×10. Каждую минуту ученик, хотя бы два соседа по сторонам которого решают задачи, тоже начинает решать задачи. В самом начале занятия ровно 9 человек стали решать задачи. Могло ли в конце урока оказаться, что все дети решают задачи? Начав решать задачи, уже невозможно остановиться.

8. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера $a\times b$ дать либо ковёр размера $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}$, либо два ковра размеров $c\times b$ и $\frac{a}{c}\times b$ (при каждом таком обмене число c клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1 , а другая — короче 1. Не обманывает ли он?

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 3 пара.

Алгебра-5.
Огрубление неравенств.

Это мы разберем, чтобы понять идею.

0. Даны положительные числа a, b. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Это надо решить самим.

1. Даны положительные числа a, b и c. Докажите, что:

$$\left(\frac{1}{b+c}\right)^2+\left(\frac{1}{c+a}\right)^2+\left(\frac{1}{a+b}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

2. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство:

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{1}{xy}.$$

3. Докажите, что при любых положительных a, b, c и d верно неравенство:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2.$$

4. Докажите, что для всех положительных чисел справедливо неравенство:

$$\frac{a^2}{3a^2+b^2+2ac}+\frac{b^2}{3b^2+c^2+2ab}+\frac{c^2}{3c^2+a^2+2bc}\leqslant\frac{1}{2}.$$

5. Докажите, что при любых неотрицательных a, b, c справедливо неравенство:

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}\geqslant\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}.$$

6. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство:

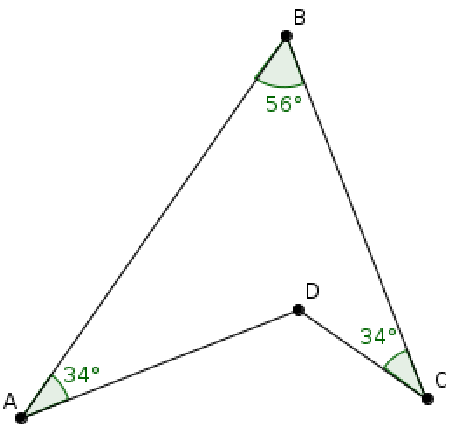
$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{b+a}}>\sqrt{a+b+c}.$$

Группа 8-1, 1 пара.

9. Ортоцентр. 21 января

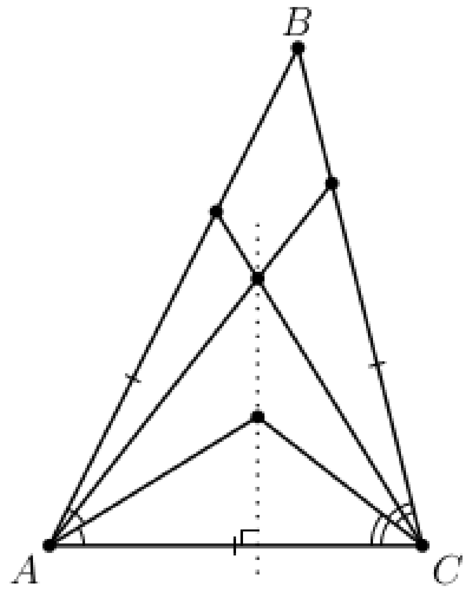
Теорема. Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется *ортоцентром* треугольника.

1.



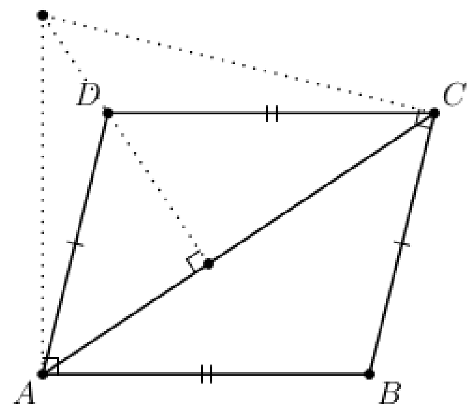
(!) $BD \perp AC$

2.



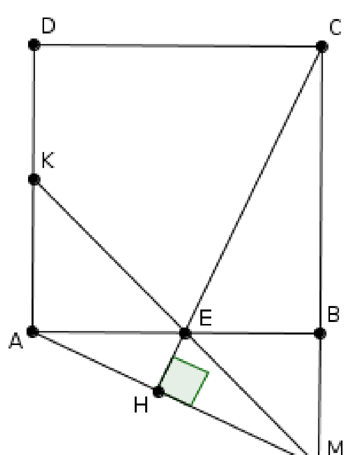
(!) пунктирная прямая перпендикулярна AC

3.



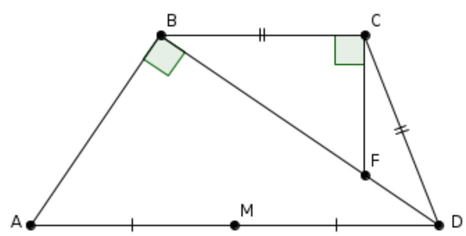
$ABCD$ — параллелограмм
(!) пунктирные прямые пересекаются в одной точке

4.



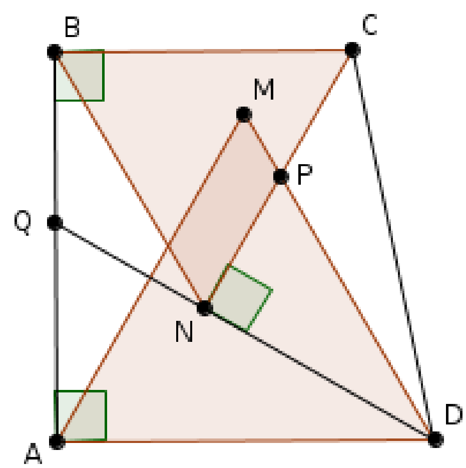
$ABCD$ — квадрат
(!) $AE = AK$

5.



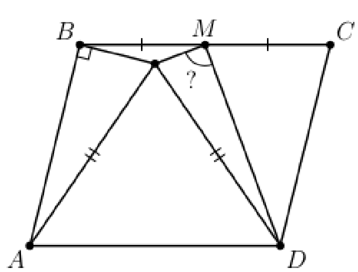
$AD \parallel BC$
(!) $MF \perp CD$

6.



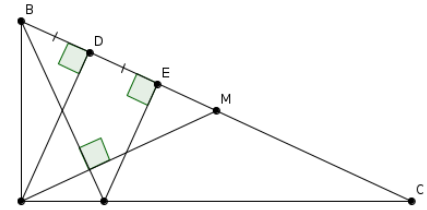
BCN, ADN — равносторонние
(!) $PQ \perp CD$

7.



$ABCD$ — параллелограмм
(?) найти угол, отмеченный «?»

8.



$BM = MC$
(!) $\angle A = 90°$

Группа 8-1, 2 пара.

Алгебра-6.
Транснеравенство.

1. Транснеравенство для двух чисел. Известно, что $a \leqslant b$, $x \leqslant y$. Докажите, что $ay+bx \leqslant ax+by$.

2. Транснеравенство для трёх чисел. Известно, что $a \leqslant b \leqslant c$, $x \leqslant y \leqslant z$. Докажите, что $az+by+cx \leqslant ay+bx+cz \leqslant ax+by+cz$.

Используя транснеравенство, докажите:

3. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

4. $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a} \geqslant a+b+c$ для положительных a, b и c.

5. $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \geqslant \dfrac{a+b+c}{2}$ для положительных a, b и c.

6. а) $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$ для положительных a, b и c.
б) $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$ для положительных a, b и c.

7. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$ для положительных a, b и c.

8. а) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc$;
б) $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geqslant 0$, где a, b и c – стороны треугольника (в обоих пунктах).

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 8-1, 1 пара.

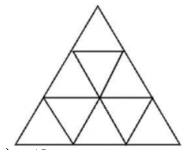
На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

Группа 8-1, 2 пара.

Клетки и процессы 2.

1. Клетки квадрата 5×5 покрашены в шахматном порядке так, что центральная клетка — черная. Можно ли закрыть все черные клетки неперекрывающимися уголками из трех клеток, не выходящими за границы квадрата?

2. Из 10 вершин 9 красных, а одна синяя. За ход разрешается поменять цвета на противоположные в любом маленьком треугольнике. Можно ли сделать все вершины синими? Ответьте для каждого первоначального положения синей вершины.



3. На доске записаны 10 различных целых чисел (не обязательно положительных). За один ход можно заменить два различных числа одинаковой чётности на два равных с той же суммой. Может ли процесс продолжаться бесконечно?

4. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

5. Имеется 20 карточек, на которых написаны числа от 0 до 9, каждое по 2 раза. Можно ли выложить эти карточки таким образом, чтобы между карточками, на которых написано число i, было i карточек (то есть карты с 0 будут соседними, между картами с 1 будет 1 карта и так далее).

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 8-1, 1 пара.

На паре производилась консультация к последующей зачётной работе.

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производилась консультация к последующей зачётной работе.

Группа 8-1, 3 пара.

На паре производилась консультация к последующей зачётной работе.

Группа 8-1, 2 пара.

На паре производился разбор заданий зачётной работы, показ зачётных работ, а также апелляция участников смены по её результатам.

Группа 8-1, 3 пара.

На паре обсуждались математические вопросы, оставшиеся у участников программы к преподавателям.