# Барицентрические координаты

Пусть фиксирован треугольник $ABC$. *Барицентрическими координатами* точки $P$ называется тройка чисел $(x_p : y_p : z_p)$ такая, что точка $P$ является центром масс системы $(A, x_p)$, $(B, y_p)$, $(C, z_p)$. Для фиксированной точки $P$ эти координаты определены с точностью до пропорциональности, то есть их можно домножить на любое ненулевое число, и они останутся барицентрическими координатами той же точки. Будем называть барицентрические координаты точки *нормированными*, если $x_p + y_p + z_p = 1$.

Для любой точки плоскости барицентрические координаты существуют — для точки $P$ подойдёт тройка $(S_{PBC} : S_{PAC} : S_{PAB})$, где площади ориентированные.

### Три точки на одной прямой

Точки $P, Q, R$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда барицентрические координаты одной из точек (пусть $P$) — это линейная комбинация барицентрических координат двух других точек, то есть найдутся такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что

$$(x_p : y_p : z_p) = \lambda(x_q : y_q : z_q) + \mu(x_r : y_r : z_r).$$

Если координаты точек нормированные, то $\mu = 1 - \lambda$ и в этом случае можно выразить отношения: $\overrightarrow{QP} : \overrightarrow{PR} = (1 - \lambda) : \lambda$.

Часто (но не всегда) явно искать $\lambda$ и $\mu$ не очень приятно. Чтобы этого не делать, нам потребуется понятие *определителя порядка* 3:

$$\begin{vmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \end{vmatrix} = x_p y_q z_r + x_r y_p z_q + x_q y_r z_p - x_p y_r z_q - x_q y_p z_r - x_r y_q z_p =$$

$$= x_p(y_q z_r - y_r z_q) - y_p(x_q z_r - x_r z_q) + z_p(x_q y_r - x_r y_q).$$

Известный факт про определитель — одна тройка чисел является линейной комбинацией двух других тогда и только тогда, когда определитель равен 0.

### Уравнение прямой

Если в определитель вместо координат одной из точек подставить $(x : y : z)$, то получим уравнение прямой, то есть прямая $QR$ задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

где значения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ можно взять из формулы выше. И обратно, уравнение $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ задаёт прямую, если хотя бы один из коэффициентов не равен 0. Исключение составляет уравнение $x + y + z = 0$, которое задаёт бесконечно удалённую прямую.

Доказывать, что три прямые $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0$, $i = 1, 2, 3$ пересекаются в одной точке, можно проверив, что составленный из коэффициентов определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Если у точки пересечения двух прямых сумма координат равна 0, то эта точка бесконечно удалённая, то есть прямые параллельны.

**1.** Найдите барицентрические координаты
**(а)** середины малой дуги $BC$ окружности $(ABC)$;
**(б)** середины дуги $BAC$ окружности $(ABC)$;
**(в)** проекции вершины $C$ на биссектрису угла $B$;
**(г)** точки, изогонально сопряжённой точке с координатами $(x_0 : y_0 : z_0)$;
**(д)** точки пересечения касательных к $(ABC)$ в точках $B$ и $C$.

**2.** Окружность с центром $I$, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $BC$ в точке $A_1$. Докажите, что точка $I$ лежит на отрезке, соединяющем середины отрезков $AA_1$ и $BC$.

**3.** Окружность с центром $I$, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$, $B_1$ соответственно. Медиана $AM$ треугольника пересекает $B_1C_1$ в точке $P$. Докажите, что $IP \perp BC$.

**4.** **Задача 255.** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$ и $B_1$ соответственно, вневписанная окружность касается стороны $AC$ и продолжением стороны $AB$ в точках $B_2$ и $C_2$ соответственно. Докажите, что прямые $B_1C_1$ и $B_2C_2$, биссектриса угла $B$ и средняя линия, параллельная $AB$ пересекаются в одной точке.

**5.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $I$, $X$ — середина $B_1C_1$, $Y$ — точка пересечения касательных к окружности $(ABC)$, проведённых в точках $B$ и $C$. Докажите, что точки $X$, $I$ и $Y$ лежат на одной прямой.

**6.** Пусть $DEF$ — серединный треугольник треугольника $ABC$, точки $I_a$, $I_b$, $I_c$ — центры вневписанных окружностей. Докажите, что прямые $DI_a$, $EI_b$ и $FI_c$ пересекаются в одной точке. Найдите координаты этой точки.

**7.** В треугольнике $ABC$ симедианы, проведённые из вершин $B$ и $C$ пересекают стороны $AC$ и $AB$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Точки $P$ и $Q$ — середины отрезков $BD$ и $CE$ соответственно. Докажите, что $\angle PCB = \angle QBC$.

**8.** Центр $I$ вписанной окружности отразили относительно сторон $BC$, $CA$, $AB$ треугольника $ABC$ — получили точки $X$, $Y$, $Z$. Докажите, что прямые $AX$, $BY$ и $CZ$, пересекаются в точке, которая лежит на прямой, проходящей через $I$ параллельно прямой Эйлера треугольника $ABC$.