

Группа 7-2, 3 пара.**Письменная олимпиада.**

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK . На стороне AB отмечена точка L так, что $KL \parallel BC$. Докажите, что $AL = KL$.

2. Из трех попарно различных ненулевых цифр составили всевозможные трехзначные числа с неповторяющимися цифрами и их сложили. Может ли получившаяся сумма быть точным квадратом?

3. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько ладей так, что каждая пустая клетка под боем хотя бы одной из них. Какое наименьшее число ладей могло быть расставлено?

4. На плоскости проведена одна прямая. Двое по очереди начинают проводить по одной прямой. Нельзя проводить одну и ту же прямую дважды. Игра заканчивается после того, как на плоскости будет проведено 2023 прямых, включая изначальную. Затем подсчитывается количество областей, на которые поделена плоскость проведёнными прямыми. Если их нечётно, то выигрывает первый, иначе — второй. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

5. Известно, что $x + y + z = 2$. Докажите, что

$$(xy + z - 1)(yz + x - 1)(xz + y - 1) \geq 0.$$