

Разнобой

1. Даны 2024 различных натуральных числа a_k , меньших n и расположенных в порядке возрастания. При каком наибольшем n можно гарантировать, что по крайней мере для одной пары i и j выполняется соотношение $a_1 + a_i = a_j$? (Равенство $i = 1$ возможно).
2. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон четырёхугольника. Доказать, что этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.
3. Саша и Коля играют в следующую игру. Имеется известный обоим игрокам список пятибуквенных слов в алфавите, состоящем из трёх букв А, В, С. На первом ходу Саша называет одну из букв алфавита, а Коля пишет на доске отличную от названной букву этого же алфавита. В следующие ходы данная операция повторяется: Саша называет какую-либо букву, а Коля дописывает справа от уже написанных букв букву, отличную от названной. Игра продолжается до тех пор, пока Коля не составит на доске слово из пяти букв. Коля выигрывает, если это слово окажется в упомянутом выше списке, в противном случае выигрывает Саша. Каково наибольшее количество слов в списке, если известно, что Саша имеет выигрышную стратегию?
4. Дано множество S из нескольких последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S , отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S ?
5. По граням n -мерного куба $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ из вершины $O(0, 0, \dots, 0)$ в вершину $E(1, 1, \dots, 1)$ ползёт n -мерный муравей. Указать для него кратчайший маршрут и вычислить его длину для
(а) $n = 4$, (б) любого $n > 4$.

(Гранью n -мерного куба мы называем множество всех таких точек этого куба, у которых одна из координат постоянна и равна либо 0, либо 1).

6. Четыре гномика одновременно начинают движение на плоскости по прямолинейным маршрутам с постоянной скоростью. У каждого гномика своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой лучи, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будут находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвёртый гномики также встретятся?