Группа 7-2, 1 пара.

1. Серия для семиклассников, выданная на первом занятии январской математической смены, состоит из 7 задач. Из 16 ребят каждый сдал больше половины серии. Докажите, что какую-то задачу решило не менее 10 человек.

2. Найдите последнюю цифру числа a) 7^{49} b) 7^{7^7}.

3. Одним взмахом меча Богатырь И. Муромец может отсечь З. Горынычу одну голову или сразу 10 голов (конечно, если их было не меньше 10). Однако, если после отсечения осталось чётное число голов, то число голов сразу же удваивается. Изначально, у З. Горыныча 444 головы. Может ли Богатырь отрубить З. Горынычу все его головы?

4. Вова забыл номер телефона ($8\,931\star\star\star\star\star\star\star$) своей девушки Маши, но помнит, что дальше в нем были только девятки и двойки, причем двоек было больше, чем девяток. Также он вспомнил, что номер (как 11-значное число) делился на три и на четыре. Помогите Вове вспомнить номер Маши.

5. Ы и Ь — только такие две буквы есть в алфавите некоторого племени. Каждая конечная последовательность из этих букв является словом и что-то да значит. От замен следующих буквосочетаний в словах смысл слова не меняется: ЫЫЬ $\Leftrightarrow$ ЬЬ, ЬЫЫ $\Leftrightarrow$ ЫЬЫ, ЬЫЬ $\Leftrightarrow$ ЫЬ, ЬЬЬ $\Leftrightarrow$ ЫЫ (замену можно делать в любом месте слова). Обязательно ли смысл у слов ЫЬЫ и ЬЫЬ одинаков?

6. Могут ли все три числа a, b, c быть меньше -1, если известно, что

$$ab + a + b = c?$$

7. Гриша вычислил сумму первых 2024 чисел из ряда $9, 99, 999, \ldots$. Сколько различных цифр содержит результат?

8. Олег лёг спать в 10 вечера и завел будильник (со стрелками и циферблатом на 12 делений) на 7 утра. Ночью в некоторый момент будильник, до этого работавший исправно, сломался, и его стрелки пошли в обратную сторону (с прежней скоростью). Тем не менее, утром будильник прозвенел точно в положенное время. Во сколько сломался будильник?

9. Докажите, что из чисел $x + y - 2z$, $x + z - 2y$, $y + z - 2x$ хотя бы одно неотрицательно.

10. Острова A, B и C расположены в океане так, что расстояния от A до B и от B до C — по 50 км, а от A до C — 70 км. Одновременно из A в C отправилась яхта, а из C в B — катер, оба со скоростью 10 км/ч. Через два часа яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 20 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно.

11. Максим отметил несколько клеток в квадрате 12×12 так, что в любом a) прямоугольнике 1×3; b) L–тетрамино есть отмеченная клетка. Какое наименьшее число клеток мог отметить Максим?

(!). Проверьте свою наблюдательность. В условиях задач скрыто некоторое *послание*. Какое?

Группа 7-2, 2 пара.

8. Олег лёг спать в 10 вечера и завел будильник (со стрелками и циферблатом на 12 делений) на 7 утра. Ночью в некоторый момент будильник, до этого работавший исправно, сломался, и его стрелки пошли в обратную сторону (с прежней скоростью). Тем не менее, утром будильник прозвенел точно в положенное время. Во сколько сломался будильник?

9. Докажите, что из чисел $x + y - 2z$, $x + z - 2y$, $y + z - 2x$ хотя бы одно неотрицательно.

10. Острова A, B и C расположены в океане так, что расстояния от A до B и от B до C — по 50 км, а от A до C — 70 км. Одновременно из A в C отправилась яхта, а из C в B — катер, оба со скоростью 10 км/ч. Через два часа яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 20 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно.

11. Максим отметил несколько клеток в квадрате 12×12 так, что в любом a) прямоугольнике 1×3; b) L–тетрамино есть отмеченная клетка. Какое наименьшее число клеток мог отметить Максим?

(!). Проверьте свою наблюдательность. В условиях задач скрыто некоторое *послание*. Какое?

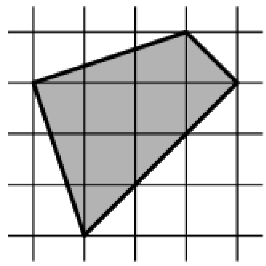
Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач.

Группа 7-2, 1 пара.

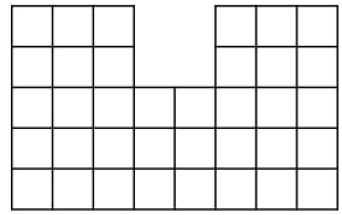
Первый и второй признаки равенства треугольников.

1а.



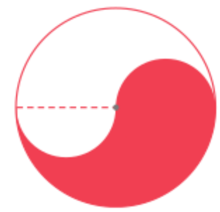
Разрежьте четырехугольник на 4 равные части.

1б.



Разрежьте на три части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат 6×6.

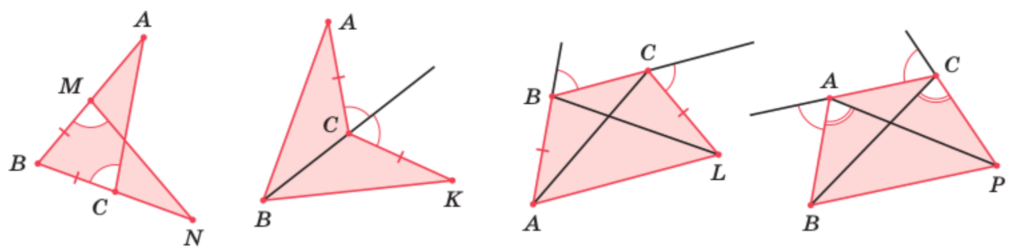
1в.



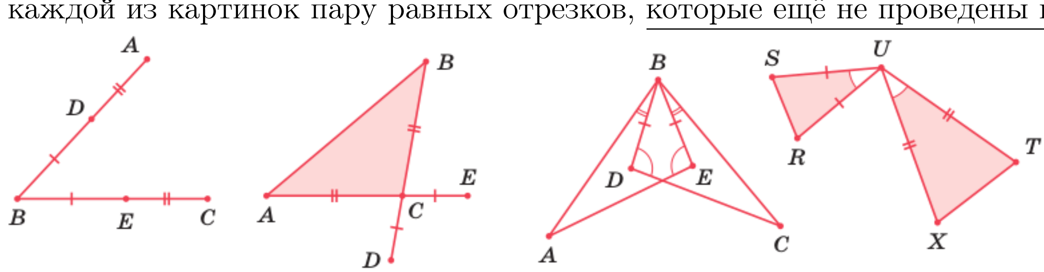
Разрежьте инь на две равные части

---

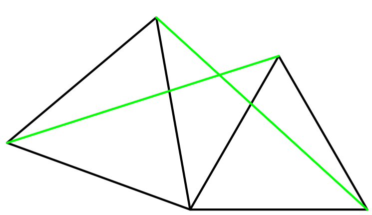
2. Найдите на каждой из картинок ниже хотя бы одну пару равных треугольников.



3. Найдите на каждой из картинок пару равных отрезков, <u>которые ещё не проведены на чертеже</u>.

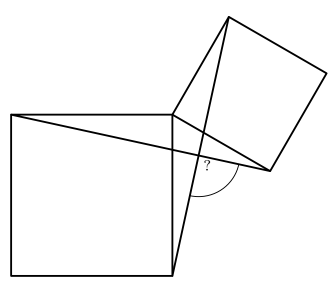


4.



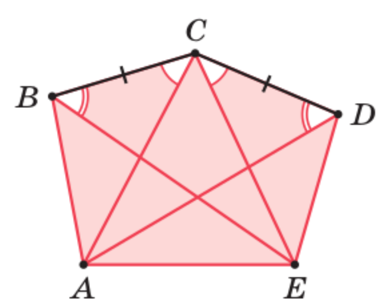
У треугольников все стороны и все углы равны. Доказать, что зеленые отрезки равны.

5.



На рисунке два квадрата. Найдите угол между двумя отрезками.

6.



Доказать $AB = ED$

7. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $CD = DA$. Точки K и L расположены на отрезках AB и BC таким образом, что $BK = 2AK$, $BL = 2CL$. Точки M и N — середины отрезков CD и DA соответственно. Докажите, что отрезки KM и LN равны.

8. Биссектрисы углов A и C выпуклого равностороннего пятиугольника $ABCDE$ (т.е. $AB = BC = CD = DE = EA$) пересекаются в точке F. Оказалось, что точка F лежит внутри пятиугольника. Докажите, что $EF = FD$.

Группа 7-2, 1 пара.

Первый и второй признаки равенства треугольников+.

9. Дан угол с вершиной O. На одной стороне лежат точки A и B, а на другой — C и D, причем $OA = OC$ и $AB = CD$. Отрезки AD и BC пересекаются в точке X. Докажите, что OX — биссектриса угла.

10. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = DE, AE = CD$, $\angle A = \angle D = 75°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 105°$, $\angle E = 135°$. Найдите величину угла $\angle ACE$.

11. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. На стороне AB отмечена точка D, на стороне AC — точка E, а на продолжении отрезка BC за точку C — точка F. Известно, что $AD = AE, BD = DE$ и $CE = CF$. Докажите, что $BF = EF$.

12. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E. На луче CE отмечена точка H такая, что $\angle AHC = 90°$. Лучи AH и CB пересекаются в точке M. Луч ME пересекает отрезок AD в точке K. Известно, что $\angle CEK = 70°$. Найдите величину угла ECK.

Группа 7-2, 2 пара.

В этой серии, если не указан размер шахматной доски, речь идет о доске 8×8.

0. Какое наибольшее число небьющих друг друга ладей можно расставить на шахматной доске?

1. В квадрате 10×10 отмечено несколько клеток так, что нет двух соседних a) по стороне; b) по стороне или углу; c) по углу. Какое наибольшее число клеток могло быть отмечено?

2. Решите пункт a); b); c) предыдущей задачи для квадрата 9×9.

3. Какое наибольшее число не бьющих друг друга a) слонов; b) коней можно расставить на шахматной доске?

4. В некоторых клетках шахматной доски расположены прожекторы, которые светят в одном из четырех направлений. В каждой клетки расположено не более одного прожектора. Известно, что ни один прожектор не освещен никаким другим. Какое наибольшее число прожекторов может стоять на доске?

5. Фирма «Александр и К» специализируется на изготовлении «досок с дыркой»: это клетчатая доска 300×300, в которой вырезана по клеточкам дырка в виде прямоугольника, не выходящая на границу доски. К каждой такой доске прикреплена бирка с указанием максимального количества не бьющих друг друга ладей, которое можно расставить на этой доске. (Считается, что ладьи не бьют сквозь дырку.) К юбилею фирмы было решено изготовить доску с самым большим числом на бирке. Чему равно это число?

В предыдущих сериях

11b. Максим отметил несколько клеток в квадрате 12×12 так, что в любом L–тетрамино есть отмеченная клетка. Какое наименьшее число клеток мог отметить Максим?

Группа 7-2, 3 пара.

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Обратите внимание — в каждой формуле в одной части есть скобки, а в другой нет!

Упражнение: Разложите на множители
а) $x^2 + 4xy + 4y^2$;
б) $9x^2z - 4y^2z$;
в) $a^4 - b^4$.

0. Выведите формулы для $(a+b+c)^2$ и $(a-b+c)^2$.
1. Какое слагаемое надо дописать к выражению
а) $x^2 + 8xy$;
б) $x^2 + xy$;
в) $a^2 + 4a^4$, чтобы получился квадрат суммы?
2. Разложите на множители:
а) $n^4 - 2n^2 + 1$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$;
в) $x^4 - 5x^2 + 4$.
3. Решите в а) натуральных; б) целых числах уравнение $x^2 + xy = 46$.
4. Докажите, что число делится на 24: а) $n^3 - n$ при нечетном n; б) $(n^2 + 3n + 1)^2 - 1$ при любом натуральном n.
5. Существует правило для быстрого возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Нужно убрать эту пятерку, умножить остаток на следующее натуральное числа и приписать после результата 25. Например, $75^2 = (7 \cdot 8)25 = 5625$. Докажите это правило.
6. Пусть a, b — два последовательных числа, c — их произведение. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ — квадрат некоторого нечётного числа.
7. Вычислите $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \ldots (1 - \frac{1}{225})$.
8. Докажите, что числа а) $2^{64} + 2^{33} + 1$; б) $2^{10} + 5^{12}$ — составные.

Группа 7-2, 1 пара.

1. Про каждое из следующих чисел скажите, является ли оно простым: 0, 1, 12, 13, 17, 97, 899, 43 825 539 123, 621 212 229, 100020001. Обоснуйте каждый свой ответ.

2. В ряд выписаны числа от 1 до 25. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

3. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1,2,3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырех углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2024?

4. Может ли число, десятичная запись которого состоит из 2024 нулей, 2024 единиц и 2024 двоек, быть точным квадратом?

5. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

6. При каких n, число 2^n оканчивается на четыре одинаковые цифры?

7. Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^7}}$

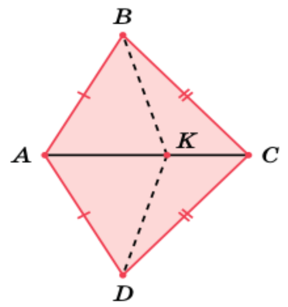
8. У числа 2^{2024} нашли сумму его цифр, у результата снова нашли сумму цифр и так далее. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

9. При каких натуральных n число $(n+1)!$ делится на $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$?

Группа 7-2, 2 пара.

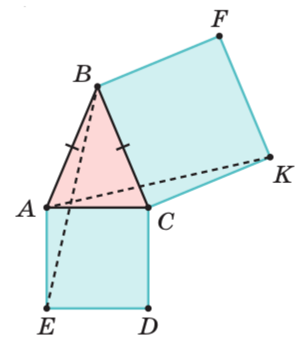
Третий признак равенства треугольников. Равнобедренный треугольник.

1.



(!) $BK = KD$

2.



на чертеже — квадраты

(!) $BE = AK$

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $BC = CD$ и $\angle ABC = \angle ADC$. Докажите, что $AB = AD$.

4. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и K, отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Оказалось, что $AO = OC$ и $MO = OK$. Докажите, что $AB = BC$.

5. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно $AB = DE$, $BC = CD$ и $\angle ABC = \angle CDE$. Докажите, что $AD = BE$.

Группа 7-2, 3 пара.

6. Какое наибольшее число не бьющих друг друга королей можно расставить на шахматной доске?

7. Из доски 5×5 вырезали одну клетку. Остаток удалось разрезать на доминошки. Какая клетка могла быть вырезана?

8. На шахматной доске расставили несколько не бьющих друг друга королей. При этом нельзя добавить короля так, чтобы он не бил ни одного из поставленных ранее. Какое наименьшее число королей могло быть расставлено на доске?

9. Из доски 5×5 вырезали одну клетку. Остаток удалось разрезать на прямоугольники 1×3. Какая клетка могла быть вырезана?

10. Клетчатый квадрат удалось разбить на L-тетрамино. Докажите, что данный квадрат можно двумя другими способами разбить на L-тетрамино так, чтобы никакие два из этих трех разбиений не содержали одной и той же L-тетрамино.

Группа 7-2, 1 пара.

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

0. Без прямого подсчёта вычислите $\frac{61^3-39^3}{22} + 61 \cdot 39$.

1. Известно что $a+b=3$ и $ab=-6$. Найдите а) a^2+b^2; б) a^3+b^3.

2. Решите в натуральных числах уравнение

а) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$

б) $xy+x+y+1=82$

в) $2xy+x+2y=119$

г) Найдите все прямоугольники с натуральными сторонами, у которых площадь втрое больше периметра.

3. Разложите на множители $x^3+y^3+6x^2+9y^2+12x+27y+35$.

4. Пусть x — некоторое положительное число, что $x+\frac{1}{x}=3$. Найдите а) $x^2+\frac{1}{x^2}$; б) $x^3+\frac{1}{x^3}$; в) докажите, что $x^n+\frac{1}{x^n}$ — целое при всех натуральных n.

5. Решите в целых числах уравнение $x^2=y^2+2y+9$.

Группа 7-2, 2 пара.

1. В клетчатом квадрате, разрезая по границам клеток, прорезали квадратную дырку поменьше. Оставшаяся фигура состоит из 244 единичных клеток. Найдите длины сторон квадрата и дырки.

2. Найдите все двузначные числа, квадрат которых оканчивается теми же двумя цифрами, что и исходное число.

3. Вячеслава и Мирона попросили вычислить какую-нибудь степень двойки и выписать результаты на доске. После того, как они это сделали, могло ли оказаться, что числа отличаются только перестановкой цифр?

4. Найдите все числа вида $\overline{aabb}$, которые являются квадратами натуральных чисел.

5. $n^2 + 1$ – десятизначное число. Докажите, что среди его цифр есть одинаковые.

6. Первую цифру шестизначного числа перенесли в конец. Докажите, что если исходное число делилось на семь, то и новое число тоже делится на семь.

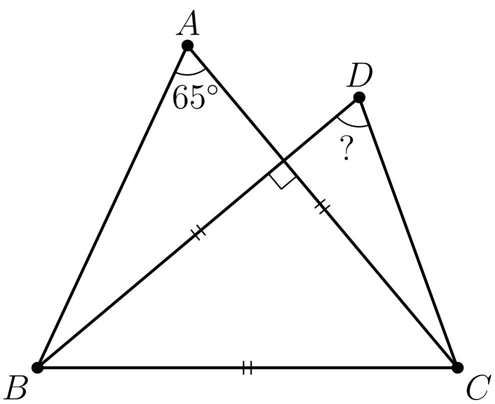
Группа 7-2, 3 пара.

Считаем уголки.

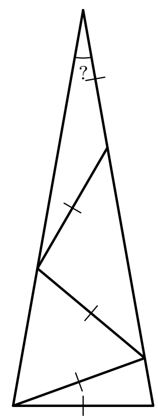
1. В треугольнике ABC углы при вершинах A и B равны 60° и 80° соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекались в точке I. Найдите $\angle BIC$.

2. В треугольнике PQR угол P равен α. Высоты, проведенные из вершин Q и R пересекаются в точке H. Найдите угол QHR (выразите ответ через α).

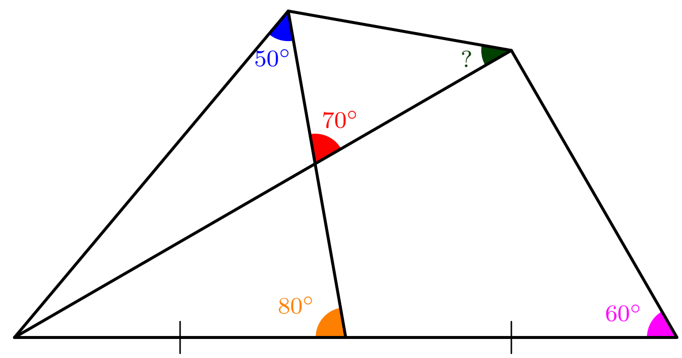
3.



4.



5.



6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны отрезки AB, AC и AD. Докажите, что $\angle BAC = 2\angle BDC$.

7. В треугольнике ABC угол C равен 60°. На лучах AC и BC отмечены точки P и Q так, что $AP = BQ = AB$. Докажите, что прямая PQ проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

Группа 7-2, 1 пара.

11. Ожерелье составлено из 22 бусин красного и синего цвета. Известно, что среди них a) нет двух соседних бусин красного цвета; b) нет бусины, обе соседние для которой — красные. Какое наибольшее число бусин красных бусин может быть в этом ожерелье?

12. На доске 3×3 стоит в углах 4 коня — черные в верхней строчке, белые — в нижней. Можно ли получить расстановку, в которой a) черные кони снизу, а белые сверху; b) черные кони стоят в углах на одной главной диагонали, а белые — на другой.

Группа 7-2, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

Группа 7-2, 3 пара.

1a. Найдите семизначное число, все цифры которого различны и которое делится на каждое из них.
1b. Существует ли такое восьмизначное число?
2. Доказать, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на две нечётные цифры.
3. Является ли число 2024! точным квадратом? Точным кубом?

Группа 7-2, 1 пара.

Дорешиваем неразобранное.

1. Точки D, E и F выбраны на сторонах AC, AB и CB треугольника ABC. Оказалось, что $AD = DE = FE = EB$ и $AE = CD = DF = FB$. Докажите, что $CF = EB$.

2. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle MAB = \angle MAD = 20^\circ$ и $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$. Найдите углы CDM и MDA.

3. Биссектриса угла C равнобедренного треугольника ABC пересекает его боковую сторону AB в точке D. Точка E на боковой стороне BC выбрана так, что $AC + AD = CE$. Докажите, что $CD = DE$.

Группа 7-2, 2 пара.

Делимость и остатки

Упражнение: 1. Можем ли мы утверждать, что:
a) если a делится на 4 и на 3, то a делится на 12;
b) если a делится на 4 и на 6, то a делится на 24;
c) если a – чётное, то $3a$ делится на 6;
d) если $5a$ делится на 3, то a делится на 3;
e) если $15a$ делится на 6, то a делится на 6.
2. Можем ли мы утверждать, что:
a) если a делится на 4, а b делится на 6, то ab делится на 24;
b) если a делится на 9, а b делится на 10, то ab делится на 90;
c) если a делится на 4 и a делится на 6, то a делится на 24;
d) если a делится на 9 и a делится на 10, то a делится на 90;
e) если ab делится на 24, а b делится на 6, то a делится на 4.

1. Докажите, что: a) если a^2 делится на 3, то a делится на 3; b) если a^2 делится на 3, то a^2 делится на 9.

2. Докажите, что: а) если a делится на n, b делится на m, то ab делится на nm; б) если a делится на n и на m, причем n и m общих делителей не имеют, то a делится на nm.

3. Можно ли расфасовать 2024 кг картошки в мешки по 14 и 35 кг?

4. Представьте какое-нибудь число в виде суммы семи его различных делителей.

5. Может ли сумма квадратов пяти последовательных целых чисел быть точным квадратом?

6. Пусть x, y, z — натуральные числа, причем $x^2 + y^2 = z^2$. а) Докажите, что x или y кратно 4; б) Докажите, что x, y или z кратно 5;

7. Сумма трех целых чисел, являющихся точными квадратами, кратна 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых кратна 9.

8. Докажите, что разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа.

9. Волшебная поварёшка может класть пельмени только в количестве 1, 15 или 50. Как-то раз на тарелку положили пельмени, воспользовавшись этой поварешкой несколько раз, а потом убрали с тарелки часть пельменей, использовав ту же поварешку на один раз больше, чем накладывая. Какое наименьшее число пельменей могло остаться на тарелке?

Группа 7-2, 3 пара.

Игры.

0. Вася и Петя играют в увлекательную игру: по очереди кладут одинаковые пятирублевые монеты на круглый стол. Монеты не должны налегать друг на друга или вылезать за край стола. Проигрывает тот, кому некуда класть монету. Первым ходит Вася. Как он должен играть, чтобы заведомо выиграть?

1. Двое играют в игру. Имеется две кучки по 100 камней в каждой. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие части; проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу, как бы ни играл соперник?

2. На окружности через равные расстояния отмечено чёрным **а)** 100 **б)** 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди делают ходы, начинает Петя. За один ход можно перекрасить в красный цвет либо одну, либо две соседние черные точки (точки являются соседними, если между ними нет ни черных, ни красных точек). Выигрывает тот, после чьего хода все отмеченные точки станут красными. Кто выигрывает при правильной игре?

3. а) На тарелке лежит 99 пирожных. За ход можно съесть одно или два пирожных. Яша и Никита ходят по очереди, первым ходит Яша. Съевший последнее пирожное выигрывает, а проигравший оплачивает пирушку. Докажите, что Никита может выиграть независимо от действий Яши.

б) А кто сможет выиграть при правильной игре, если на тарелке сначала лежит 100 пирожных?

4. Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из **а)** 2024 **б)** 2023 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила 2024 кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась “полоса” из зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте, вдоль всей стены. Мешатель пытается помешать этому. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

5. По кругу записаны числа 1, 2, 3, 4 именно в таком порядке. Каждым ходом первый игрок прибавляет по 1 к двум соседним числам, а второй игрок меняет местами любые два соседних числа. Первый хочет, чтобы все числа на окружности стали равными, а второй стремится ему помешать. Сможет ли первый добиться своей цели?

Группа 7-2, 1 пара.

13. Можно ли обойти шахматным конем все клетки доски 9×9 по разу, вернувшись в стартовую клетку?

14. На одной из кочек клетчатого болота сидит лягушонок, который умеет прыгать только по диагоналям прямоугольников a) 1×2; b) 1×3. Верно ли, что кузнечик может допрыгать от любой точки до любой другой.

15. Какое наибольшее число прямоугольников 1×4 можно вырезать из доски 10×10?

16. Клетчатый квадрат удалось разрезать на L-тетрамино. Докажите, что сторона квадрата делится на 4.

В предыдущих сериях

10. Клетчатый квадрат удалось разбить на L-тетрамино. Докажите, что данный квадрат можно двумя другими способами разбить на L-тетрамино так, чтобы никакие два из этих трех разбиений не содержали одной и той же L-тетрамино.

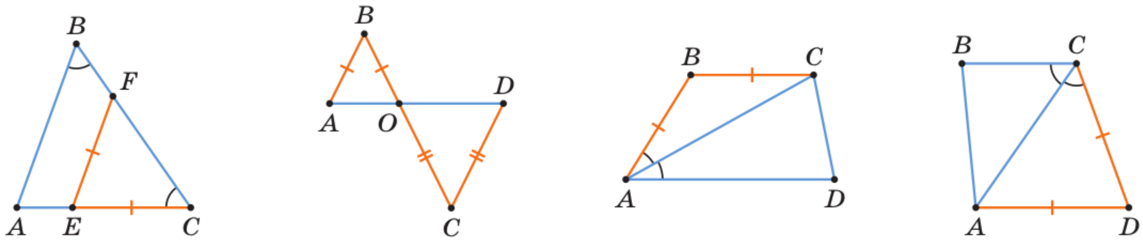
11b. Ожерелье составлено из 22 бусин красного и синего цвета. Известно, что среди них нет бусины, обе соседние для которой — красные. Какое наибольшее число бусин красных бусин может быть в этом ожерелье?

12b. На доске 3×3 стоит в углах 4 коня — черные в верхней строчке, белые — в нижней. Можно ли получить расстановку, в которой черные кони стоят в углах на одной главной диагонали, а белые — на другой.

Группа 7-2, 2 пара.

Параллельность.

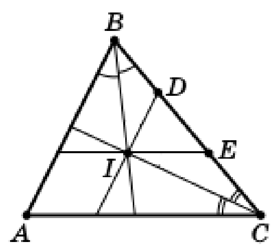
1. Найдите параллельные прямые на каждом из рисунков и докажите их параллельность.



2. Точка F на биссектрисе BD треугольника ABC такова, что $AF = AD$. Прямая, проходящая через F параллельно AC пересекает сторону BC в точке E. Докажите, что $AB = BE$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $AB = BC$ и $AD = DC$. Докажите, что если $AB \parallel CD$, то $BC \parallel AD$.

4. Известно, что $DI \parallel AB$ и $IE \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle IDE$ равен длине отрезка BC.



Группа 7-2, 3 пара.

Делимость и остатки – продолжение

1. У натурального числа n есть два различных делителя a и b таких, что $(a-1)(b+2) = n-2$. Докажите, что $2n$ – квадрат натурального числа.

2. Решите в целых числах уравнение $15x - 11y = 1$.

3. Найдите остаток от деления на 15 числа, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 – остаток 1.

4. Решите в целых числах уравнение $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = m^2$.

5. Решите в целых числах уравнение $19x^2 + 84y^2 = 1984$.

6. Имеется 37 коробок массой 35 кг каждая и 19 коробок массой 59 кг каждая. Все эти коробки поровну раскладывают по двум контейнерам. Найдите минимально возможную разницу общей массы коробок в этих контейнерах.

Группа 7-2, 1 пара.

Игры-2.

6. Дана шахматная доска 8×8. Алиса и Вера играют в следующую игру: каждая своим ходом ставит коня на некоторую пустую клетку доски, которую не бьет ни один из уже стоящих на доске коней. Начинает Алиса. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. Два игрока по очереди двигают ее вверх или вправо (на любое число клеток). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

8. Петя и Вася выписывают 30-значное число, используя только цифры **а)** 1, 2, 3, 4, 5; **б)** 1, 2, 3, 7, 8. Первую цифру пишет Петя, вторую — Вася, третью — Петя и так далее. Вася хочет в итоге получить число, делящееся на 9. Сумеет ли Петя этому помешать?

9. На доске написано число 4. Саша и Маша ходят по очереди, начинает Саша. За один ход разрешается прибавить к числу на доске любое меньшее него натуральное число. Выигрывает та, кто первой получит на доске число 2023. Кто выигрывает при правильной игре?

10. По кругу стоят 99 мисок, в каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота — Лёня и Миша. Они ходят по очереди (начинает Лёня), и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски из соседних мисок. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов имеет выигрышную стратегию?

Группа 7-2, 2 пара.

17. Гирлянда состоит из 17 лампочек, расположенных на ней последовательно в ряд. При каждом нажатии на кнопку какие-то две соседние (не обязательно каждый раз одни и те же) лампочки гирлянды меняют свое состояние (гаснут, если горели, и наоборот). Изначально все лампочки горели. Докажите, что сколько бы раз на кнопку ни нажать, хотя бы одна лампочка будет гореть.

18. В квадрате a) 4×4; b) 9×9 угловая клетка — черная, а остальные — белые. За ход разрешается перекрасить одну строчку или один столбец. Докажите, что нельзя все клетки сделать одинаковыми.

19. В клетке a) $b2$; b) $b1$ доски 4×4 стоит минус, а в остальных плюс. Можно ли, меняя знаки на противоположные в строках, столбцах или на диагоналях (включая одноклеточные), получить все плюсы?

20. На окружности стоят 11 плюсов и один минус. За ход можно одновременно поменять a) 3; b) 4 подряд идущих знака. Докажите, что нельзя получить расстановку, в которой минус сдвинут на одну позицию по часовой стрелке, а остальные 11 знаков — плюсы.

В предыдущих сериях

10. Клетчатый квадрат удалось разбить на L-тетрамино. Докажите, что данный квадрат можно двумя другими способами разбить на L-тетрамино так, чтобы никакие два из этих трех разбиений не содержали одной и той же L-тетрамино.

14. На одной из кочек клетчатого болота сидит лягушонок, который умеет прыгать только по диагоналям прямоугольников a) 1×2; b) 1×3. Верно ли, что кузнечик может допрыгать от любой точки до любой другой.

15. Какое наибольшее число прямоугольников 1×4 можно вырезать из доски 10×10?

16. Клетчатый квадрат удалось разрезать на L-тетрамино. Докажите, что сторона квадрата делится на 4.

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 7-2, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 7-2, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 7-2, 1 пара.

Вводим переменные. Начало

0. У Тимофея есть несколько шариков — поровну каждого из двух цветов. Затем три шарика одного из цветов он перекрасил в другой цвет, после чего шариков одного цвета стало в два раза больше. Сколько всего шариков было?

1. У Маши и Пети есть поровну коробок и шариков. Маша попробовала в каждую свою коробку положить по одному шарику, но одной коробки не хватило. Петя попробовал в каждую коробку положить по два шарика, но одна коробка оказалась пустой. Сколько у каждого было коробок и шариков?

2. Бельчонок и Крольчонок играют в шахматы. В некоторый момент у Бельчонка осталось в 2 раза меньше фигур, чем у Крольчонка, и одновременно их было в 5 раз меньше, чем незанятых клеток на доске. Сколько фигур Крольчонка было на данный момент съедено?

3. В каждую клетку таблицы 4×4 записали по натуральному числу. Могло ли получиться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а в каждом следующем столбце — на 3 больше, чем в предыдущем?

4. Дана клетчатая таблица 3×3, в каждой клетке которой записали целое число. Во второй строке сумма чисел на 1 больше, чем в 1й, и на 1 меньше, чем в 3й. Во втором столбце сумма чисел в 4 раза больше 1го и в 4 раза меньше 3го. Докажите, что во 2й строке сумма чисел делится на 7.

5. По кругу лежат 50 шариков — синие, белые и красные, причем синих шариков хотя бы 2. Известно, что между любыми двумя ближайшими синими шарами лежит ровно столько красных шаров, сколько всего белых шаров в круге. Сколько всего красных шаров может быть в круге?

6. Все натуральные числа от 1 до 2024 выписали в ряд в некотором порядке. После этого для каждой пары соседних чисел посчитали среднее арифметическое и эти средние сложили. Какая наименьшая сумма могла получиться?

7. Петя выписал на доску в ряд 2024 числа. Каждое из выписанных чисел, за исключением двух крайних, равно сумме двух соседних. Вася посчитал сумму первых 100 чисел и получил 0, Маша посчитала сумму первых 200 чисел и получила 3. Чему равна сумма всех выписанных чисел?

Группа 7-2, 2 пара.

1. В остроугольном треугольнике один из углов равен 45°. Докажите, что напротив этого угла лежит наименьшая сторона треугольника.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Докажите, что $AB > AL$.

3. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ равны стороне BC и пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle AED > 60^\circ$.

4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D = 60^\circ$ и $AD = AB + CD$. Докажите, что из отрезков AB, BC и CD можно сложить треугольник.

5. На стороне AB треугольника ABC нашлась такая точка D, что $AB = CD$. В треугольнике BCD проведена биссектриса DE. Докажите, что из отрезков AD, BE и EC можно сложить треугольник.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM. Точка D на стороне BC отмечена так, что $\angle BMD = 90^\circ$. Докажите, что $AB > BD$.

7. На катете AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка D так, что $\angle CAD = \angle BCD$. Докажите, что $AB + BD > AC$.

Группа 7-2, 1 пара.

Разложение числа на простые множители

Упражнение:

Пусть p и q – различные простые числа. Сколько делителей у числа:

а) pq;

б) $p^2 \cdot q$;

в) $p^2 \cdot q^2$;

г) $p^n \cdot q^m$.

1. Количество натуральных делителей некоторого числа нечётно. Докажите, что это число – полный квадрат.

2. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего члена. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

3. Найдите наименьшее натуральное число, такое, что и сумма, и произведение его цифр равны 2016.

4. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее

а) ровно 2017 делителей;

б) ровно 2021 делитель.

5. Дано число 2024!

а) При каком наименьшем натуральном n оно не делится на n^n?

б) При каком наибольшем натуральном n оно делится на n^n?

6. Сколько существует троек натуральны чисел x, y, z, для которых $2^{32} \cdot 3^{37} \cdot 5^7 = 18^x \cdot 45^y \cdot 12^z$?

7. Натуральные числа a и b, причём $a < 1000$, таковы, что a^{21} делится на b^{10}. Докажите, что a^2 делится на b.

Группа 7-2, 2 пара.

Постоянство и полупостоянство

1. Тимофей выписал на доску числа $1, 2, 3, \dots, 19, 20$. Михаил за одну операцию стирает какие-то два числа a и b и вместо них записывает число

a) $a + b - 1$;

b) ab;

c) $(a + 1)(b + 1) - 1$.

Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

2. Неутомимый Тимофей выписал на доску числа $110, 220, 330$. Михаил вместо чисел a, b записывает $2a - b$ и $2b - a$. Можно ли на каком-то этапе получить

a) $100, 200, 400$;

b) $105, 225, 330$?

c) те же числа?

3. Тимофей снова что-то пишет на доске. На этот раз он записал числа $4, 5, 6$. А Михаил снова что-то стирает - за ход берет любые два числа a, b и вместо них пишет

a) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;

b) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$.

Могут ли в какой-то момент на доске быть одновременно выписаны числа $7, 8, 9$?

4. Изначально на доске записаны 10 последовательных натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа на доске (обозначим их a и b) и заменить их на числа $a^2 - 2023b^2$ и ab. После нескольких таких операций на доске не осталось ни одного из исходных чисел. Могли ли там опять оказаться 10 последовательных натуральных чисел (записанных в некотором порядке)?

Группа 7-2, 3 пара.

1. Две деревни расположены по разные стороны от прямолинейного шоссе. Где на этом шоссе нужно построить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от нее до деревень была минимальной?

2. Докажите, что a) сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его противоположных сторон; b) меньше его периметра.

3. Метровую палку распилили на 99 частей, каждая длиннее 1 сантиметра. Докажите, что из любых трех кусочков можно сложить треугольник.

4. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = AE$. Докажите, что из отрезков BC, CD и BE можно сложить треугольник.

6. Длины трех сторон выпуклого пятиугольника равны 1, а длины четырех его диагоналей равны 2. Докажите, что две оставшиеся диагонали имеют одинаковую длину.

Группа 7-2, 1 пара.

Графы и двойные подсчёты

1. В рыцарском турнире 11 участников. Может ли быть так, что каждый рыцарь бился ровно с пятью другими?

2. Граф Скуратов любит охотиться. Каждый раз, когда граф едет на охоту, он берет с собой одну гончую и одного ретривера. Граф помнит, что каждая гончая была на охоте ровно с семью ретриверами, а каждый ретривер — с тремя гончими. Сколько всего собак у графа Скуратова, если всего на псарне больше 15, но меньше 23 мест, а других собак, кроме гончих и ретриверов, граф не любит?

3. В школе в день Святого Валентина мальчики дарили валентинки девочкам, и наоборот. Каждый мальчик подарил пяти девочкам валентинки с признанием в любви. Девочки же оказались гораздо скромнее: каждая подарила валентинки с признанием в любви всего четырём мальчикам. Пять школьников (три Валентины и два Валентина) получили поровну валентинок, а все остальные школьники по две валентинки. Докажите, что мальчиков и девочек в школе поровну.

4. Десять мальчиков и десять девочек участвовали в турнире по шахматам. Каждый из участников сыграл по одной партии с каждым другим, ничьих не было, а за победу давалось одно очко. Организаторы турнира подарили каждой девочке цветок за каждую её победу над мальчиком. Могло ли оказаться, что все мальчики набрали одинаковое количество очков, а у всех девочек букеты одинакового размера?

5. Девятнадцать мальчиков 4Я класса договорились написать девочкам валентинки. Они договорились, что все мальчики напишут одинаковое количество валентинок, а каждый мальчик будет писать валентинки разным девочкам. После того как все валентинки были написаны и отправлены, некоторые мальчики осознали, что до 14 февраля ещё почти месяц, а значит, валентинки отправлять ещё рано. Тогда каждый мальчик, осознавший этот печальный факт, написал каждой девочке, которой он отправлял валентинку, ещё одно письмо: «Извини, это не тебе». В итоге каждая девочка получила три письма (валентинки или «Это не тебе»). Каких мальчиков больше — осознавших свою ошибку, или остальных?

6. В компании пять эльфов, пять гномов и один хоббит. У каждого эльфа по семь знакомых в этой компании, а у каждого гнома по два. Сколько знакомых в этой компании у хоббита?

Группа 7-2, 2 пара.

Основная теорема арифметики

1. Леша выбрал три различные десятичные цифры и записал с их помощью всевозможные трёхзначные числа (напомним, с цифры 0 число начинаться не может!). Сумма записанных чисел оказалась равна 3376. Определите, какие именно цифры выбрал Леша.

2. Найдите количество решений уравнения $xy = 2016x + 2016y$

а) в натуральных числах; б) в целых числах.

3. Что останется в знаменателе дроби $\dfrac{2024!}{3^{2024}}$, если сократить её до несократимой?

4. У некоторого натурального числа ровно 2021 делитель. Докажите, что оно не может делиться на 2024.

5. Докажите, что квадрат любого простого числа, кроме 2 и 3, дает остаток 1 при делении на 24.

6. Найдите все такие простые числа p, что простыми окажутся также и числа:

а) $11p - 7$

б) $p + 10$ и $p + 14$;

в) $2p^2 - 9$ и $2p^2 + 9$;

г) $p^3 - 6$ и $p^3 + 6$.

Группа 7-3, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

Группа 7-2, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».

Группа 7-2, 2 пара.

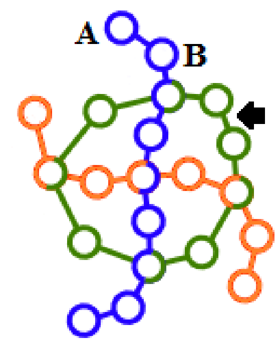
Больше графов!

1. На турнир собрались 16 шахматистов. Они договорились, что каждые двое сыграют не более одной партии. Может ли оказаться, что в некоторый момент все они сыграли разное количество партий (т.е. никакие двое не сыграли одинаковое количество партий)?

2. В школе 380 детей. Каждый мальчик дружит с 5 мальчиками и 10 девочками из этой школы, а каждая девочка — с 9 мальчиками и 6 девочками из этой школы. Кого больше в классе — мальчиков или девочек, и На сколько?

3. В стране живёт миллион человек, причём каждый знаком хотя бы с одним жителем. После опросов сложилась парадоксальная ситуация: более 90% населения признались, что верят в деда Мороза, однако каждый житель может утверждать, что среди его знакомых менее 10% верят в деда Мороза. Могло ли такое быть?

4. Метро города N состоит из трех линий, его схема изображена на рисунке. За минуту каждый поезд проезжает ровно один перегон между станциями. Оказавшись на конечной станции, поезд мгновенно разворачивается и начинает движение в обратную сторону, а на каждой станции с пересадкой обязательно меняет линию движения. Известно, что поезд начал свое движение на станции A, а закончил через 2016 минут на станции B. Докажите, что он побывал на перегоне, отмеченном стрелкой.



5. На костюмированном балу присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.

6. В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства взаимные.

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 7-2, 1 пара.

Комбинаторика сочетаний

Определение: Числом сочетаний из n по k (пишется: C_n^k) называется количество способов выбрать k-элементое подмножество из n-элементного множества (напомним, что в множествах элементы стоят без учёта порядка). Оно равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Разминка 1. Сколько существует пятизначных чисел: a) всего; b) не содержащих 0 в записи; c) содержащих хотя бы один 0; d) содержащих ровно один ноль в записи?

Разминка 2. Сколько существует способов переставить буквы в слове: a) «монета»; b) «колесо»; c) «карабас»; d) «обороноспособность»?

1. На левой верхней клетке доски 11×16 стоит хромая ладья. За один ход она может шагнуть на одну клетку вправо или на одну клетку вниз. Серёжа пишет в каждой клетке, сколькими способами хромая ладья может прийти в эту клетку. Докажите, что число в правом нижнем углу равно количеству способов переставить буквы в выражении $aaa \dots abb \dots b$ (10 букв a, 15 букв b).

2. На кружок пришли 25 детей. Но они плохо себя вели, и десятерых пришлось выгнать. Сколькими способами это можно сделать, если:

a) детей выгоняют по очереди, фамилия выгнанного заносится в список (т.е. порядок выгона важен)?

b) детей выгоняют одновременно (т.е. порядок выгона неважен)?

3. a) В классе n детей. Из них нужно выбрать команду, состоящую из k детей, а команде нужен капитан. Сколькими способами можно выбрать команду с капитаном?

b) Докажите, что $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$.

4. a) В классе n детей. Сколькими способами можно выбрать группу детей и отправить эту группу дежурить? Группа может не содержать ни одного ребёнка, а может состоять и из всех детей.

b) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \dots C_n^n = 2^n$.

5. У Пети есть 15 пустяков, а у Васи — 20 пустяков. Петя и Вася решили обменяться тремя пустяками (т.е. Петя отдаёт Васе три своих пустяка, а Вася Пете — три своих). Сколькими способами это можно сделать?

6. Сколькими способами 22 человека можно поделить на две футбольные команды по 11 человек?

7. На окружности нарисованы 2024 точки. Петя сосчитал количество способов провести три отрезка так, чтобы никакие два из них не имели общих точек (даже концов). Докажите, что количество способов сделать это делится на 5.

Группа 7-2, 2 пара.

1. На вечеринке присутствуют 47 человек, из которых n мужчин. У каждой женщины спросили, сколько из присутствующих мужчин она знает. Первая ответила, что 16, вторая — 17, третья — 18, $\ldots$, последняя — n. Сколько мужчин на вечеринке?

2. Молодой специалист согласился работать с условием, что после года работы он получит MacBook и 2000 долларов, но по истечении 8 месяцев уволился и при пропорциональном расчёте получил MacBook и 900 долларов. Сколько стоит MacBook?

3. Алина переходит речку по железнодорожному мосту. Когда она прошла 3/5 длины моста, показался поезд, который едет прямо ей навстречу. Чтобы не попасть под поезд, Алине хватает времени ровно для того, чтобы пробежать по мосту в любую сторону. Алина бегает со скоростью 25 км/ч. Поезд движется с постоянной скоростью. С какой?

4. Амир тяжелее Ильнура на 8 кг, а Данияр тяжелее Булата на 4 кг. Сумма весов самого тяжелого и легкого на 2 кг меньше, чем сумма весов остальных двух. Все четверо весят всего 250 кг. Сколько килограммов весит Амир?

5. На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок тойота, хонда, шкода, а также машины других марок. Известно, что не хонд в полтора раза больше, чем не красных машин; не шкод в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не тойот вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что тойот не меньше, чем хонд и шкод вместе.

Группа 7-2, 3 пара.

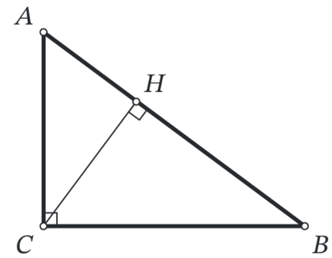
Прямоугольные треугольники.

0a. Прямоугольные треугольники равны по катету и гипотенузе.

0b. В прямоугольном треугольнике катет напротив угла 30° в 2 раза меньше гипотенузы.

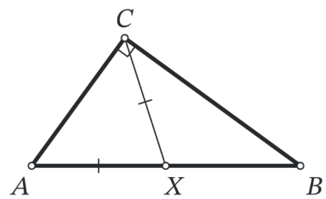
0c. Треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда его медиана равна половине стороны, к которой проведена.

1a.



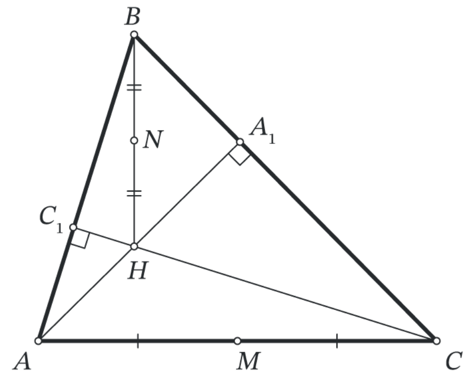
$\angle A = 60^\circ$. Найдите AH и BH, если $AB = 10$.

1b.



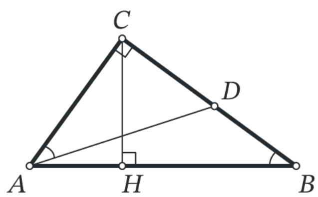
Докажите, что CX - медиана.

1c.



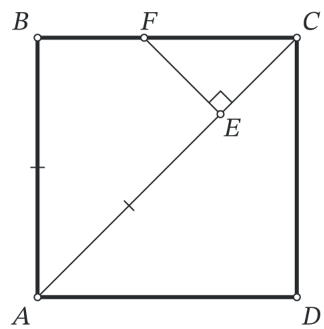
Докажите, что MN перпендикулярен A_1C_1.

2a.



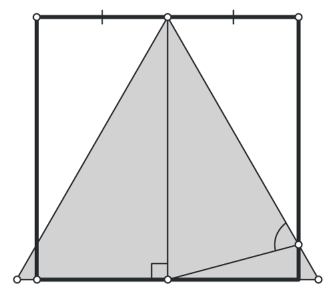
Докажите, что CH делит отрезок AD пополам.

2b.



$ABCD$ - квадрат, $AB = AE$. $\angle AFC$-?

2c.



На рисунке квадрат и правильный треугольник. Найдите отмеченный угол.

3. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. $\angle BAC = 55^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle CAD = 22^\circ$, $\angle ACD = 68^\circ$. M — середина AC. Найдите $\angle DBM$.

4. Тимофей нарисовал прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, Михаил расположил на его сторонах AC, AB, BC соответственно точки A_1, B_1, C_1, причем $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$. Также оказалось, что оба прямоугольных треугольника равнобедренные. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

Группа 7-2, 1 пара.

НОД и НОК

1. Докажите, что НОД$(a;b) =$ НОД$(a-kb;b)$, где k — любое целое число.

2. В банк можно положить за один раз 120 руб. или снять 300 руб. На счету есть 1000 руб., а других денег нет. Какую наибольшую сумму можно снять за несколько раз?

3. Может ли наименьшее общее кратное двух чисел равняться их сумме?

4. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ — несократима ни при каких натуральных n.

5. Верно ли, что все простые числа при делении на 30 дают остатки, не являющиеся составными?

6. Найдите натуральные числа x и y, для которых: а) сумма равна 168, а НОД равен 24; б) $7x = 11y$, НОД$(x;y) = 45$.

7. Найдите все пары натуральных чисел $(a;b)$, для которых

$$\text{НОК}(a;b) - \text{НОД}(a;b) = \frac{ab}{5}.$$

Группа 7-2, 2 пара.

Паскальник Бинома

1. a) Мы хотим написать n-буквенное слово, содержащее только символы a и b. Сколькими способами это можно сделать?

b) Сколько из этих способов будут содержать ровно k символов a и $n-k$ символов b?

2. (Бином Ньютона) Докажите общую формулу $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

3. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

4. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots \pm C_n^n = 0$.

5. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$.

6. Докажите, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$ равно... Чему?

7. Докажите, что $C_n^k = C_{n-k}^0 C_k^0 + C_{n-k}^1 C_k^1 + C_{n-k}^2 C_k^2 + \dots$

8. a) Сколькими способами можно переставить буквы в слове МАТЕМАТИКА?

b) Найдите коэффициент при слагаемом $M^2 A^3 T^2 E^1 P^0 И^1 K^1$ в выражении $(M + A + T + E + P + И + K)^{10}$.

Группа 7-2, 3 пара.

1. Удав прополз мимо Мартышки за полминуты, а мимо бревна длиной 9 метров (считая с момента, когда голова Удава поравнялась с началом бревна, до момента, когда хвост Удава минует конец бревна) — за минуту. Найдите длину и скорость удава.

2. Если Осел будет идти к Шреку пешком, а обратно полетит на Драконихе, то всего на дорогу он потратит 1,5 ч. Если же он полетит на Драконихе и туда, и обратно, то весь путь у него занимает 30 мин. Сколько времени топать Ослу, если Дракониха останется дома?

3. Буратино и Мальвина вышли из своих домиков навстречу друг другу и встретились через 3 минуты. Через какое время Мальвина придет к дому Буратино, если скорость Буратино в три раза больше скорости Мальвины?

4. Попугай и Мартышка соревнуются в беге. Попугай не услышал сигнал старта и выбежал позже Мартышки на 2 минуты. Через какое время он догонит Мартышку, если его скорость в два раза больше скорости Мартышки?

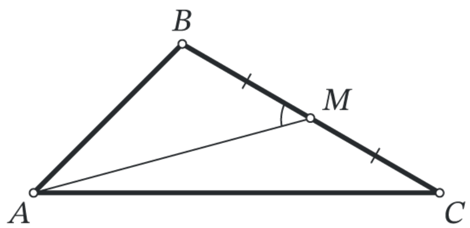
5. Шрек и Осел вышли одновременно друг к другу в гости. Каждый из них идет с постоянной скоростью. Через 25 минут они встретились и, поздоровавшись, пошли дальше. Добравшись до домика друга, и убедившись, что того дома нет, оба повернули обратно. Когда произойдет вторая встреча, если Шрек и Осел идут с равными скоростями?

6. Пролетая вдоль дороги на Драконихе, Осел увидел Шрека, который шёл в противоположную сторону. Он тут же попросил Дракониху спуститься, на это им потребовалось 12 секунд, а после побежал за своим другом. Через сколько секунд Осел догонит Шрека, если он бежит в 2 раза быстрее огра, и в 15 раз медленнее Драконихи?

Группа 7-2, 1 пара.

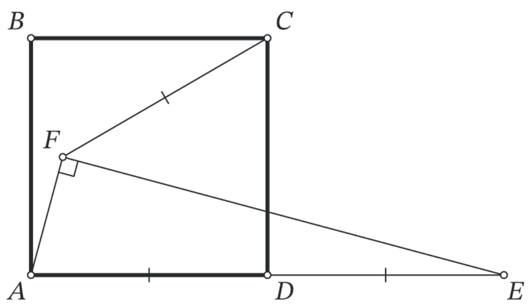
Дополняем чертеж

0a.



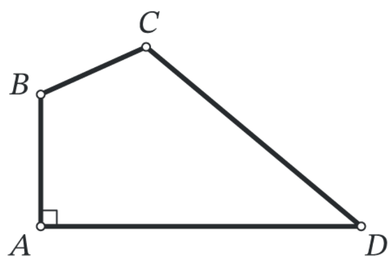
$\angle A = 45°, \angle C = 30°$.Найдите отмеченный угол. **Указание:** проведите высоту BH.

1a.



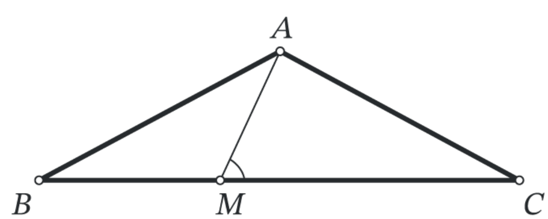
$ABCD$ - квадрат. $\angle AEF$ - ?.

2a.



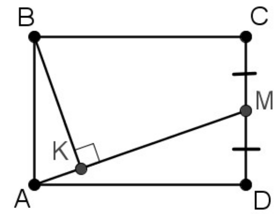
$\angle A = 90°, \angle B = 120°, \angle D = 30°$. $BC = 5, AB = 7. CD-?$

3a.



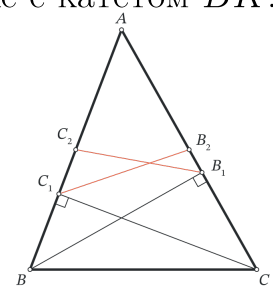
$BA = AC, AM = 3, BM = 7, \angle AMC = 60°$. $BC-?$

0b.



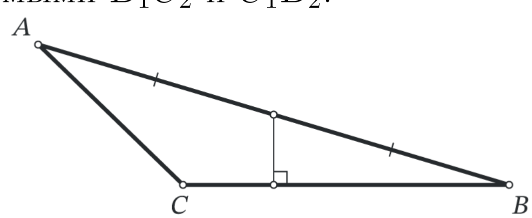
Докажите, что $CK = CB$. **Указание:** C можно рассматривать как середину гипотенузы в треугольнике с катетом BK.

1b.



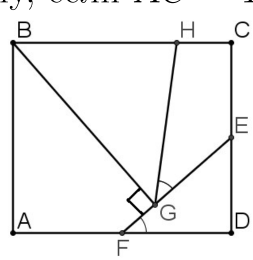
B_2 и C_2 - середины сторон AC и AB, $\angle A = 43°$. Найдите угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2.

2b.



$\angle C = 150°$. Из середины AB опустили перпендикуляр. Найдите его длину, если $AC = 1$.

3b.



$ABCD$ - прямоугольник. E, F - середины сторон, BG перп. FE. $BH : HC-?$

4. Дан треугольник ABC с тупым углом B. Через точку B провели прямые, перпендикулярные AB и BC, которые поделили AC на три равные части. Найдите углы треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A - \angle B = 120$. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной из C, в два раза больше длины высоты, проведенной также из C.

6. В равнобедренном треугольнике из вершины при основании провели высоту и биссектрису, причем их длины относятся как $1 : 2$. Найдите углы исходного треугольника.

Группа 7-2, 2 пара.

Разнобой по ТЧ

Упражнение:

1. Может ли наименьшее общее кратное трёх чисел равняться их сумме?

2. Пусть p — простое число. Сколько существует чисел

а) меньших, чем p, и взаимно простых с ним?

б) меньших, чем p^2, и взаимно простых с ним?

1. На сколько нулей оканчивается число 2024! ?

2. На какие натуральные числа может быть сокращена дробь $\dfrac{5n+7}{2n+4}$, где n — натуральное число?

3. Верно ли, что все простые числа при делении на 60 дают остатки, не являющиеся составными?

4. Докажите, что среди чисел вида $7^m + 7^n$ нет ни одного квадрата целого числа, но есть бесконечно много кубов целых чисел.

5. Десятичная запись произведения некоторых 25 натуральных чисел заканчивается на 25. Докажите, что среди них всегда можно выбрать такие три числа, запись произведения которых тоже заканчивается на 25.

6. Взяты натуральные числа от 301 до 400 включительно. Какое максимальное количество из них можно отметить так, чтобы сумма любых двух отмеченных чисел оказалась кратной 6?

7. Найдите все пары натуральных чисел, НОД которых равен 24, а сумма — 288.

8. Имеется 37 коробок массой 35 кг каждая и 19 коробок массой 59 кг каждая. И снова коробки раскладывают по двум контейнерам, но теперь в произвольном количестве. Какова в этом случае минимально возможная разница суммарных масс коробок в контейнерах?

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 7-2, 1 пара.

1. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

2. В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

3. Один газ в сосуде A содержал 21% кислорода, второй газ в сосуде B содержал 5% кислорода. Масса первого газа в сосуде A была больше массы второго газа в сосуде B на 300 г. Перегородку между сосудами убрали так, что газы перемешались и получившийся третий газ теперь содержит 14,6% кислорода. Найдите массу третьего газа.

4. Во сколько раз больше должен быть объём 5-процентного раствора кислоты, чем объём 10-процентного раствора той же кислоты, чтобы при смешивании получить 7-процентный раствор?

5. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

6. От двух кусков сплавов (с различным содержанием свинца) массой в 6 и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы каждого из отрезанных кусков?

7. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

8. Имеются два сосуда емкостью 1 л и 2 л. Из содержимого приготовили 0,5 л смеси, содержащей 40% яблочного сока, и 2,5 л смеси, содержащей 88% яблочного сока. Каково процентное содержание яблочного сока в сосудах?

Группа 7-2, 2 пара.

Добавка

1. Дан треугольник ABC с тупым углом B. Через точку B провели прямые, перпендикулярные AB и BC, которые поделили AC на три равные части. Найдите углы треугольника ABC.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A - \angle B = 120$. Докажите, что длина биссектрисы, проведенной из C, в два раза больше длины высоты, проведенной также из C.

3. В равнобедренном треугольнике из вершины при основании провели высоту и биссектрису, причем их длины относятся как $1 : 2$. Найдите углы исходного треугольника.

4. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 и CC_1. Через середину стороны AB провели перпендикуляр к ней, который пересек AA_1 в точке M. Докажите, что BM перпендикулярна какой-то медиане треугольника CC_1B.

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Теория чисел».

Группа 7-2, 1 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Комбинаторика».

Группа 7-2, 2 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Алгебра».

Группа 7-2, 3 пара.

На паре производился разбор ранее выданных задач по теме «Геометрия».