Январская математическая программа 2024. Дистанционный отборочный тур. 7 класс.

1.1. Сколько существует трёхзначных чисел, каждая цифра которого не равна 7 и 8?

Ответ. 448

1.2. Сколько существует четырёхзначных чисел, каждая цифра которого не равна 5, 6 и 9?

Ответ. 2058

1.3. Сколько существует трёхзначных чисел, каждая цифра которого не равна 5 и 9?

Ответ. 448

1.4. Сколько существует четырёхзначных чисел, каждая цифра которого не равна 5, 7 и 9?

Ответ. 2058

Решение первого варианта. На первом месте может быть любая из оставшихся 7 цифр (кроме $0, 7, 8$). Далее любая из 8 и на 2м, и на 3м местах. Итого $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$.

2.1. В ящике лежат 5 разных шаров и 10 разных кубиков. Сколькими способами можно выбрать три предмета, среди которых есть хотя бы один кубик?

Ответ. 445

2.2. В ящике лежат 4 разных шаров и 11 разных кубиков. Сколькими способами можно выбрать три предмета, среди которых есть хотя бы один шар?

Ответ. 290

2.3. В ящике лежат 4 разных шаров и 10 разных кубиков. Сколькими способами можно выбрать три предмета, среди которых есть хотя бы один кубик?

Ответ. 360

2.4. В ящике лежат 5 разных шаров и 11 разных кубиков. Сколькими способами можно выбрать три предмета, среди которых есть хотя бы один шар?

Ответ. 395

Решение первого варианта. Если кубик 1 — он выбирается 10ю способами, то 2 шара можно выбрать $5 \cdot 4/2 = 10$ способами, итого $10 \cdot 10 = 100$. Если кубиков 2 — их выбрать можно $10 \cdot 9/2 = 45$ способами, то 5ю способами выбирается 1 шар, итого $5 \cdot 45 = 225$. 3 кубика можно выбрать $10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$ способами. Итого $100 + 225 + 120 = 445$.

3.1. В графе степень одной вершины 3, двух вершин 2, пяти вершин степени 5. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ. 16

3.2. В графе степень одной вершины 6, двух вершин 5, пяти вершин степень 4. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ. 18

3.3. В графе степень двух вершин 7, трёх вершин 5, пяти вершин степень 3. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ. 22

3.4. В графе степень двух вершин 4, трёх вершин 3, пяти вершин степень 7. Сколько рёбер в этом графе?

Ответ. 26

Решение первого варианта. Найдем сумму степеней вершин: $3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 32$. Ребер в 2 раза меньше, то есть 16.

4.1. В графе 11 вершин, 25 рёбер. Степень всех вершин 4 или 5. Сколько вершин степени 4?

Ответ. 5

4.2. В графе 8 вершин, 17 рёбер. Степень всех вершин 4 или 5. Сколько вершин степени 5?

Ответ. 2

4.3. В графе 10 вершин, 28 рёбер. Степень всех вершин 5 или 6. Сколько вершин степени 5?

Ответ. 4

4.4. В графе 13 вершин, 50 рёбер. Степень всех вершин 7 или 8. Сколько вершин степени 8?

Ответ. 9

Решение первого варианта. Пусть все 11 вершин степени 4. Тогда сумма степеней $11 \cdot 4 = 44$. Так как ребер 25, то сумма степеней вершин $25 \cdot 2 = 50$. От 44 не хватает 6. Заменим 6 вершин степени 4 на степень 5, получим требуемое. Осталось 5 вершин степени 4, что и является ответом.

5.1. Сколько различных натуральных чисел можно получить вычеркиванием цифр в числе 111123? Надо обязательно вычеркнуть хоть одну цифру, но не все.

Ответ. 18

5.2. Сколько различных натуральных чисел можно получить вычеркиванием цифр в числе 455567? Надо обязательно вычеркнуть хоть одну цифру, но не все.

Ответ. 30

5.3. Сколько различных натуральных чисел можно получить вычеркиванием цифр в числе 349992? Надо обязательно вычеркнуть хоть одну цифру, но не все.

Ответ. 30

5.4. Сколько различных натуральных чисел можно получить вычеркиванием цифр в числе 377776? Надо обязательно вычеркнуть хоть одну цифру, но не все.

Ответ. 18

Решение первого варианта. Из одних единиц можно составить 4 разных числа, из единиц и двойки тоже 4, как и из единиц и тройки, и 3 числа можно получить, если вычеркивать только единицы. Без единиц есть 2, 3 и 23. Итого 18.
Второе решение: у нас есть число 111123, после вычеркивания останется от 0 до 4 единиц, затем 0 или 1 двойка, затем 0 или 1 тройка. Итого $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ вариантов, но в них входит вариант когда зачеркнули все и вариант когда ничего не зачеркнули. Вычитаем эти два варианта, получаем ответ 18.

6.1. Если на доске написаны числа x и y, то можно дописать их сумму и разность. Изначально на доске написано число 2024 и 6. Какие числа большие 20, но меньше 30 можно получить с помощью таких операций?

Ответ. 22, 24, 26, 28

6.2. Если на доске написаны числа x и y, то можно дописать их сумму и разность. Изначально на доске написано число 2024 и 6. Какие числа большие 25, но меньше 35 можно получить с помощью таких операций?

Ответ. 26, 28, 30, 32, 34

6.3. Если на доске написаны числа x и y, то можно дописать их сумму и разность. Изначально на доске написано число 2024 и 6. Какие числа большие 30, но меньше 40 можно получить с помощью таких операций?

Ответ. 32, 34, 36, 38

6.4. Если на доске написаны числа x и y, то можно дописать их сумму и разность. Изначально на доске написано число 2024 и 6. Какие числа большие 35, но меньше 45 можно получить с помощью таких операций?

Ответ. 36, 38, 40, 42, 44

Решение первого варианта. Очевидно, что можно получать только четные числа, покажем, что все четные числа в этом промежутке можно получить. 2022 кратно 6 (делится на 2 и на 3), значит, можно получить число 2: $2024 - 2022 = 2$. А, значит, вычитая двойку и любое чётное.

7.1. По прямой дороге едут два автомобиля. Один со скоростью 87 км/час, а второй со скоростью 63 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они могут находиться за 20 минут до своей встречи? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 50 или 8

7.2. По прямой дороге едут два автомобиля. Один со скоростью 84 км/час, а второй со скоростью 66 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они могут находиться за 20 минут до своей встречи? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 50 или 6

7.3. По прямой дороге едут два автомобиля. Один со скоростью 87 км/час, а второй со скоростью 63 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они могут находиться за 40 минут до своей встречи? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 100 или 16

7.4. По прямой дороге едут два автомобиля. Один со скоростью 84 км/час, а второй со скоростью 66 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они могут находиться за 40 минут до своей встречи? Укажите все возможные варианты ответа.

Ответ. 100 или 12

Решение первого варианта. Если произошла встреча, то автомобили сближались — есть два варианта, движение навстречу и один автомобиль догоняет другого. Двигаясь навстречу, скорость сближения $87 + 63 = 150$ км в час, за 20 мин до встречи $150 : 3 = 50$ км в час. Иначе скорость сближения $87 - 63 = 24$ км в час, за 20 мин до встречи будет 8 км в час.

8.1. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых сумма цифр равна 3?

Ответ. 10

8.2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма цифр равна 3?

Ответ. 15

8.3. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых сумма цифр равна 3?

Ответ. 10

8.4. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма цифр равна 3?

Ответ. 15

Решение первого варианта. Перечислим их все: 1200, 1020, 1002, 1110, 1101, 1011, 2100, 2010, 2001, 3000.

9.1. Если в ряд выписать числа от n до $n+601$, то будет выписано 2023 цифры. Каково наибольшее возможное значение числа n?

Ответ. 615

9.2. Если в ряд выписать числа от n до $n+603$, то будет выписано 2023 цифры. Каково наибольшее возможное значение числа n?

Ответ. 607

9.3. Если в ряд выписать числа от n до $n+605$, то будет выписано 2023 цифры. Каково наибольшее возможное значение числа n?

Ответ. 599

9.4. Если в ряд выписать числа от n до $n+607$, то будет выписано 2023 цифры. Каково наибольшее возможное значение числа n?

Ответ. 591

Решение первого варианта. Всего выписано 602 числа, так как цифр вышло 2023, то число n не может быть четырехзначным, иначе цифр выписано много, с другой стороны $n + 601$ должно быть четырёхзначным, иначе выписано цифр слишком мало. Значит, n трехзначное. $602 \cdot 3 = 1806$, то есть 217 чисел четырехзначные, а остальные 385 трехзначные, получаем $n = 615$.

10.1. Коты и собаки играли в шахматы. Известно, что было сыграно 100 партий, при этом, все коты сыграли по 3 партии с собаками, а каждая собака сыграла с 4 котами. Остальные партии были сыграны между животными одного вида. Какое наименьшее количество таких партий могло быть?

Ответ. 4

10.2. Коты и собаки играли в шахматы. Известно, что было сыграно 123 партии, при этом, все коты сыграли по 5 партий с собаками, а каждая собака сыграла с 4 котами. Остальные партии были сыграны между животными одного вида. Какое наименьшее количество таких партий могло быть?

Ответ. 3

10.3. Коты и собаки играли в шахматы. Известно, что было сыграно 110 партий, при этом, все коты сыграли по 3 партии с собаками, а каждая собака сыграла с 5 котами. Остальные партии были сыграны между животными одного вида. Какое наименьшее количество таких партий могло быть?

Ответ. 5

10.4. Коты и собаки играли в шахматы. Известно, что было сыграно 128 партий, при этом, все коты сыграли по 6 партий с собаками. А каждая собака сыграла с 7 котами. Остальные партии были сыграны между животными одного вида. Какое наименьшее количество таких партий могло быть?

Ответ. 2

Решение первого варианта. Пусть котов k, собак s. Игр между котов с собаками, с одной стороны, $3k$, с другой - $4s$. Итого $3k = 4s$. Котов к собакам как $4 : 3$. Если котов $4x$, то собак $3x$. Итого партий между ними максимум $12x$. Ближайшее кратное 12 к 100 число - 96. Значит, оставшиеся 4 игры были сыграны между животными одного вида.

11.1. В таблице 2023×1000 расставили некоторые целые числа. Оказалось, что во всех 2023 столбцах сумма либо 10 либо 11. А во всех 1000 строках все суммы одинаковые. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице?

Ответ. 21000, 22000

11.2. В таблице 2023×1000 расставили некоторые целые числа. Оказалось, что во всех 2023 столбцах сумма либо 20 либо 21. А во всех 1000 строках все суммы одинаковые. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице?

Ответ. 41000, 42000

11.3. В таблице 2023×1000 расставили некоторые целые числа. Оказалось, что во всех 2023 столбцах сумма либо 15 либо 16. А во всех 1000 строках все суммы одинаковые. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице?

Ответ. 31000, 32000

11.4. В таблице 2023×1000 расставили некоторые целые числа. Оказалось, что во всех 2023 столбцах сумма либо 25 либо 26. А во всех 1000 строках все суммы одинаковые. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице?

Ответ. 51000, 52000

Решение первого варианта. Сумма всех чисел кратна 1000 (во всех 1000 строках сумма одинаковая). Пусть во всех 2023 строках сумма 10, получаем 20230 сумму. Или во всех 2023 строках возьмем сумму 11, получим 22253. Кратных 1000 от 20230 до 22253 — два числа, 21000 и 22000.

12.1. По кругу выписывают числа 1, 2, 3, ..., 11, потом стирают 1 пишут 12, стирают 2 пишут 13 и так далее по кругу. Какое число было первым выписано на месте, где в итоге оказалось выписано число 2023?

Ответ. 10

12.2. По кругу выписывают числа 1, 2, 3, ..., 13, потом стирают 1 пишут 12, стирают 2 пишут 13 и так далее по кругу. Какое число было первым выписано на месте, где в итоге оказалось выписано число 2023?

Ответ. 8

12.3. По кругу выписывают числа 1, 2, 3, ..., 11, потом стирают 1 пишут 12, стирают 2 пишут 13 и так далее по кругу. Какое число было первым выписано на месте, где в итоге оказалось выписано число 2025?

Ответ. 1

12.4. По кругу выписывают числа 1, 2, 3, ..., 13, потом стирают 1 пишут 12, стирают 2 пишут 13 и так далее по кругу. Какое число было первым выписано на месте, где в итоге оказалось выписано число 2025?

Ответ. 10

Решение первого варианта. Когда мы стираем число, то вместо него мы пишем число на 11 больше того, которое было. Таким образом остаток числа не меняется. Так как число 2023 дает остаток 10 при делении на 11, то исходное число было 10.

13.1. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 23?

Ответ. 18

13.2. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 26?

Ответ. 21

13.3. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 17?

Ответ. 12

13.4. Марк учится в школе с понедельника по пятницу. Известно, что на каждой перемене он съедает одну шоколадку. Сколько было съедено за неделю шоколадок, если уроков было 19?

Ответ. 14

Решение первого варианта. Будем называть *перерывом на дом* промежуток между последним уроком одного дня и первым уроком следующего дня. Заметим, что перемен и перерывов на сон в любом случае ровно 22, так как после каждого урока, кроме последнего из 23, он есть. Заметим, что перерывов на сон ровно 4, поэтому перемен было $22 - 4 = 18$.

14.1. Какое наименьшее число клеток надо отметить в прямоугольнике 13×23 чтобы в каждом прямоугольнике 1×2 (и горизонтальном и вертикальном) было не менее одной отмеченной клетки?

Ответ. 149

14.2. Какое наименьшее число клеток надо отметить в прямоугольнике 11×25 чтобы в каждом прямоугольнике 1×2 (и горизонтальном и вертикальном) было не менее одной отмеченной клетки?

Ответ. 137

14.3. Какое наименьшее число клеток надо отметить в прямоугольнике 15×17 чтобы в каждом прямоугольнике 1×2 (и горизонтальном и вертикальном) было не менее одной отмеченной клетки?

Ответ. 127

14.4. Какое наименьшее число клеток надо отметить в прямоугольнике 21×29 чтобы в каждом прямоугольнике 1×2 (и горизонтальном и вертикальном) было не менее одной отмеченной клетки?

Ответ. 304

Решение первого варианта. Прямоугольник состоит из 299 клеток и разбивается на 149 прямоугольников 1×2, значит, ответ не менее 149 — в каждом прямоугольнике должна быть хотя бы одна отмеченная клетка. Пример — шахматная раскраска, при которой в углах будут неотмеченные клетки.

15.1. На доске написаны 100 чисел. Оказалось, что сумма любых двух чисел равна 10 или 11. Чему может быть равна сумма всех написанных на доске чисел?

Ответ. 500, 501

15.2. На доске написаны 100 чисел. Оказалось, что сумма любых двух чисел равна 12 или 13. Чему может быть равна сумма всех написанных на доске чисел?

Ответ. 600, 601

15.3. На доске написаны 102 чисел. Оказалось, что сумма любых двух чисел равна 10 или 11. Чему может быть равна сумма всех написанных на доске чисел?

Ответ. 510, 511

15.4. На доске написаны 102 чисел. Оказалось, что сумма любых двух чисел равна 12 или 13. Чему может быть равна сумма всех написанных на доске чисел?

Ответ. 612, 613

Решение первого варианта. Упорядочим числа по неубыванию $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{100}$. Сумма двух самых больших не более 11, значит, a_2 не превышает 5. Сумма двух самых маленьких не меньше 10, значит, a_{99} не меньше 5 (иначе сумма будет не более 9). Т.о. $a_2 = a_3 = \cdots = a_{99} = 5$. Меньше 5 ни одно из чисел быть не может (иначе найдется сумма менее 10). Сумма оставшегося самого большого числа с 5 равна 10 или 11, поэтому самое большое число равно 5 или 6. Откуда имеем два возможных ответа $500, 501$.