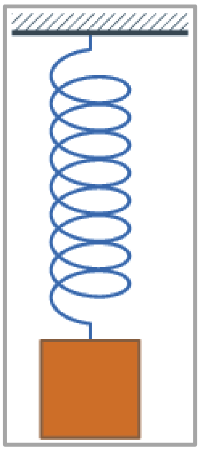
CM – Introduction à la Dynamique

Chapitre 3 – Application aux oscillateurs



I- Exemple du pendule pesant :

Le pendule pesant est d'une grande importance dans la Physique. Il a servi comme mesure de temps par le passé et a eu de nombreuses autres utilisations dans l'Histoire des Sciences.

Il est modélisé comme une barre rigide sans masse de longueur h fixé à un point O et dont est accroché à l'autre extrémité une masse m. Il oscille suivant l'angle $\theta(t)$ formé par la tige avec la masse et l'axe vertical passant par O. La masse subit le poids $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$.

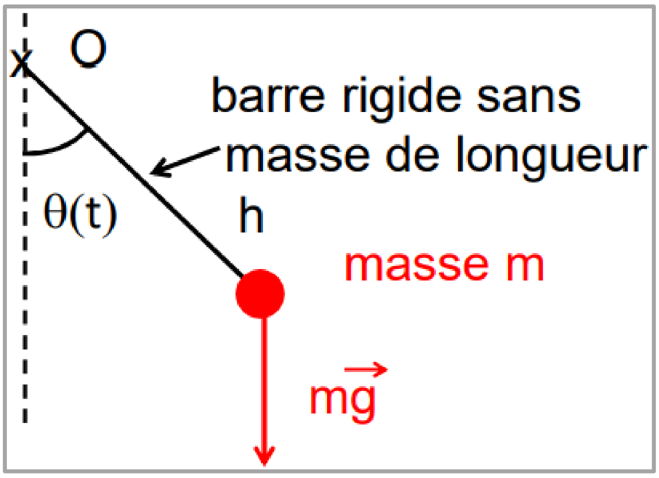


Figure 1 - Représentation schématique d'un pendule pesant

À l'état initial, on lâche le pendule sans vitesse initiale et avec un angle θ_0. Le but est d'obtenir les équations de son mouvement. On peut les obtenir via trois méthodes différentes : le Principe Fondamental de la Dynamique, le théorème de l'énergie mécanique et le théorème du moment cinétique.

1) *Equation de la Dynamique :*

a) Par l'utilisation du Principe Fondamental de la Dynamique :

Le système étudié est la masse m. Les deux forces agissant sur le système sont le poids $\vec{P}$ et la tension de la barre $\vec{T}$ qui est une force centrale de centre O. Le choix du système de coordonnées est important, car il va conditionner la simplicité de résolution du problème. On commence par étudier le problème avec les coordonnées cartésiennes.

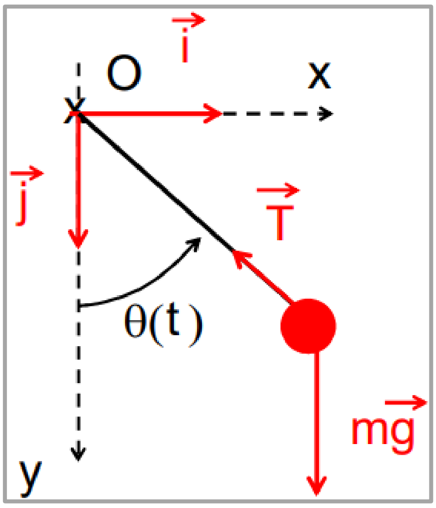


Figure 2 - Schéma de la situation en prenant les coordonnées cartésiennes

Dans ce repère, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$, le poids s'écrit $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{\jmath}$ et la tension du fil s'écrit $\vec{T} = -T\cos\theta\,\vec{\imath} - T\sin\theta\,\vec{\jmath}$. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{m\ddot{x} = -T\sin\theta} \\ \boxed{m\ddot{y} = mg - T\cos\theta} \end{cases}$$

L'utilisation de ce repère risque d'être assez complexe pour établir l'équation de la Dynamique. On essaie maintenant avec les coordonnées polaires.

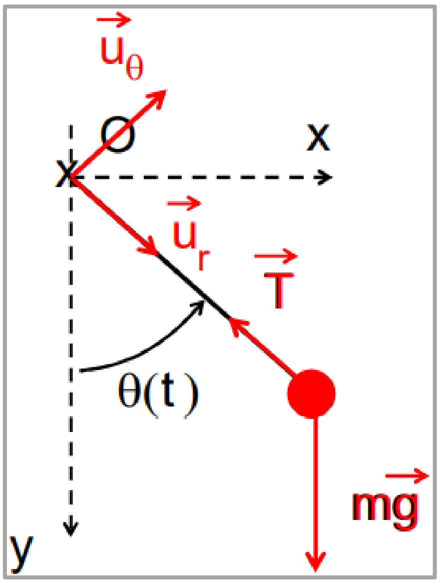


Figure 3 - Schéma de la situation en prenant les coordonnées polaires

Dans ce repère, le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = h\,\overrightarrow{u_r}$, le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = h\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$, le vecteur accélération s'écrit $\vec{a} = -h\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + h\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$, le poids s'écrit $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$ et la tension du fil s'écrit $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{mh\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta} \\ \boxed{mh\ddot{\theta} = -mg\sin\theta} \end{cases}$$

Il n'y a aucun mouvement selon $\overrightarrow{u_r}$ puisque le fil est considéré inextensible (du fait que c'est une barre rigide). On regarde alors l'équation selon $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$mh\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{h}\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\sin\theta = 0}$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique, une équation différentielle du second ordre non linéaire.

On prendra en conditions initiales qu'à $\boldsymbol{t = 0}$, l'angle de lâcher est $\boldsymbol{\theta(t = 0) = \theta_0}$.

b) Par l'utilisation de l'énergie mécanique :

Le système est considéré comme sans frottements donc l'énergie mécanique est constante au cours du temps ($\boldsymbol{E_m = cste}$ ou $\boldsymbol{E_m(\theta = \theta_0) = E_m(\theta = 0)}$), avec $E_m(\theta_0)$ l'énergie mécanique initiale notée E_m^i et $E_m(0)$ l'énergie mécanique pour un pendule à sa position verticale).

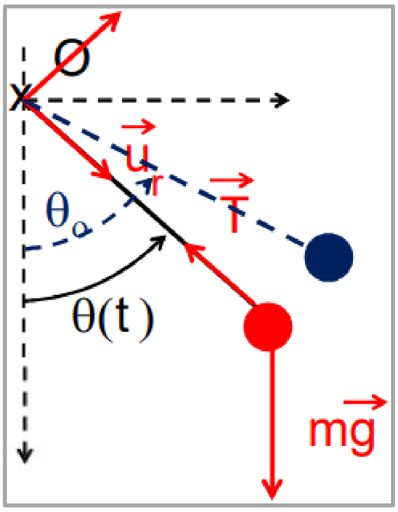


Figure 4 - Schéma de la situation à deux positions temporelles (donc deux positions angulaires) différentes

On prend l'origine des altitudes au point le plus bas de la trajectoire, donc au point où la masse du pendule est à la position verticale. L'altitude a est définie comme la différence entre la longueur du pendule h et la longueur projetée du pendule à une position donnée sur la verticale : $\boldsymbol{a = h - h\cos\theta = h(1 - \cos\theta)}$.

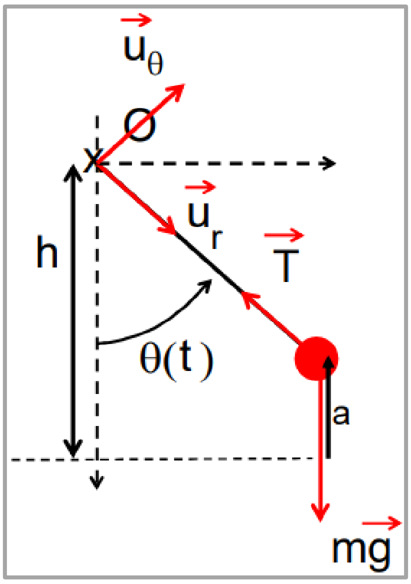


Figure 5 - Représentation de l'origine des altitudes

On peut connaître l'énergie mécanique initiale E_m^i en additionnant l'énergie cinétique ($\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} m h^2 \dot{\theta}^2}$) et potentielle du système ($\boldsymbol{E_p = mga = mgh(1-\cos\theta)}$), la tension n'étant pas une force conservative) :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2} m h^2 \dot{\theta}^2 + mgh(1-\cos\theta) = E_m^i}}$$

L'énergie mécanique étant constante au cours du temps, cela implique que sa dérivée temporelle est nulle, soit :

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m h^2 \dot{\theta}^2 + mgh(1-\cos\theta)\right) = 0 \Leftrightarrow m h^2 \ddot{\theta} + mgh\sin\theta = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\sin\theta = 0}}$$

c) Par l'utilisation du théorème du moment cinétique :

Le moment cinétique s'écrit, en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{L_O}(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t) = h\,\overrightarrow{u_r} \wedge mh\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\boldsymbol{= mh^2\dot{\theta}(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}) = mh^2\dot{\theta}\,\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\dot{\overrightarrow{L_O}}(t) = mh^2\ddot{\theta}\,\vec{k}}}$$

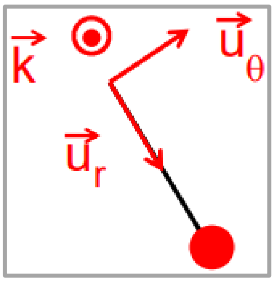


Figure 6 - Représentation des vecteurs unitaires pour visualiser l'orientation du moment cinétique

En appliquant le théorème du moment cinétique, on obtient alors (en sachant que la résultante des forces vaut $\boldsymbol{\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) - T\,\overrightarrow{u_r}}$) :

$$\boldsymbol{\dot{\overrightarrow{L_O}}(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{T}}$$

$$\boldsymbol{= h\,\overrightarrow{u_r} \wedge mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) + h\,\overrightarrow{u_r} \wedge (-T)\,\overrightarrow{u_r}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{L_O}}(t) = -mgh\sin\theta\,\vec{k}}$$

En égalisant les deux termes obtenus, on trouve finalement :

$$\dot{\overrightarrow{L_O}}(t) = -mgh\sin\theta\,\vec{k} = mh^2\ddot{\theta}\,\vec{k} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{h}\sin\theta = 0}$$

2) *Interprétation graphique :*

On peut représenter la trajectoire possible du pendule dans le cas où il peut faire un tour sur lui-même, ce qui donne un cercle centré en O de rayon h. L'altitude est définie par le rapport $\boldsymbol{a} = \frac{E_p}{mg}$.

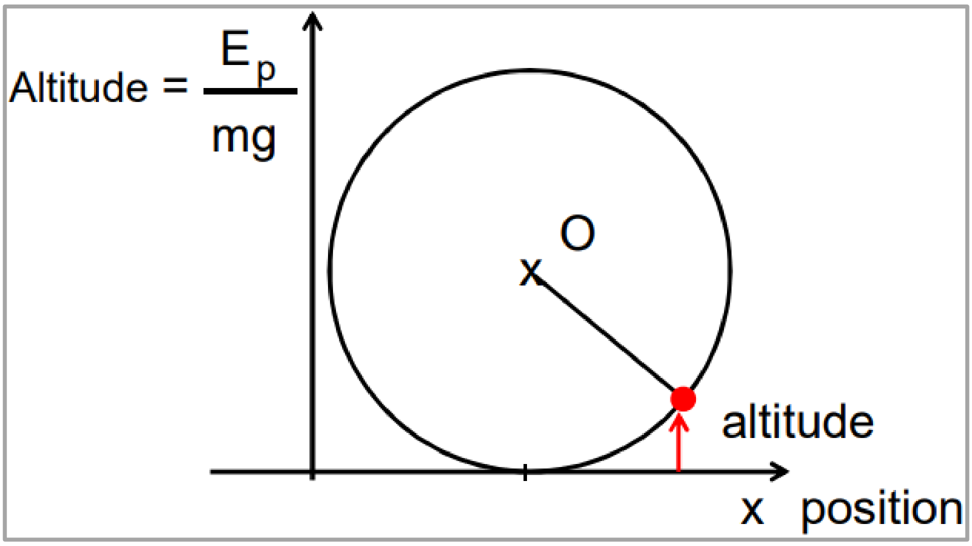


Figure 7 - Représentation de la trajectoire possible d'un pendule s'il pouvait faire un tour complet

On considère que le pendule est lâché d'une altitude donnée sans vitesse initiale, donc il ne possède aucune énergie cinétique initiale E_c^i. Par définition de l'énergie mécanique, à cette position et dans cette situation, l'énergie mécanique initiale E_m^i est égale à l'énergie potentielle initiale E_p^i ($\boldsymbol{E_m^i = E_p^i}$). Par extension, au point le plus bas de la trajectoire du pendule, l'altitude a est nulle donc l'énergie potentielle E_p en ce point est nulle. De ce fait, l'énergie mécanique E_m en ce point est égale à l'énergie cinétique E_c ($\boldsymbol{E_m = E_c}$) et la vitesse du pendule en ce point sera maximale. Dans des conditions sans frottements, le pendule remonte à la position opposée de celle du lâcher initial, permettant de tracer une droite qui délimite l'énergie mécanique initiale E_m^i que possède le pendule. Entre ces deux positions et la position verticale, il est possible de connaître qualitativement l'énergie cinétique E_c du pendule en regardant la différence d'altitude entre la position de la masse et la limite d'énergie mécanique E_m, pareil pour l'énergie potentielle E_p entre la position de la masse et la position verticale.

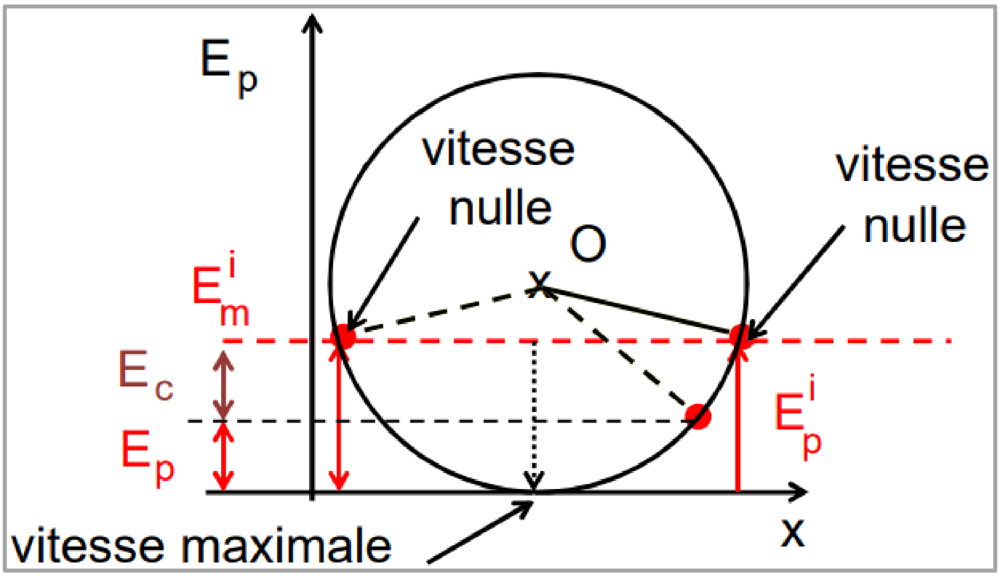


Figure 8 - Représentation des différentes énergies (mécanique, cinétique et potentielle) pour le pendule

En conclusion, il y a un échange entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système au cours du temps (ceci est toujours vrai en l'absence de frottements). Le maximum d'énergie potentielle (une altitude a maximale) correspond au minimum d'énergie cinétique (une vitesse v maximale), de même qu'un maximum d'énergie cinétique (une vitesse v minimale) correspond au maximum d'énergie potentielle (une altitude a maximale). Dans le cas où le niveau d'énergie mécanique initial E_m^i est supérieur à l'altitude a la plus haute atteignable par le pendule (donc à son énergie potentielle maximale), cela implique que l'énergie cinétique au sommet de la trajectoire du pendule est non nulle (on ne peut pas avoir plus d'énergie potentielle, donc le surplus apparaît d'une autre manière). Le pendule, dans ce cas, fait un tour complet.

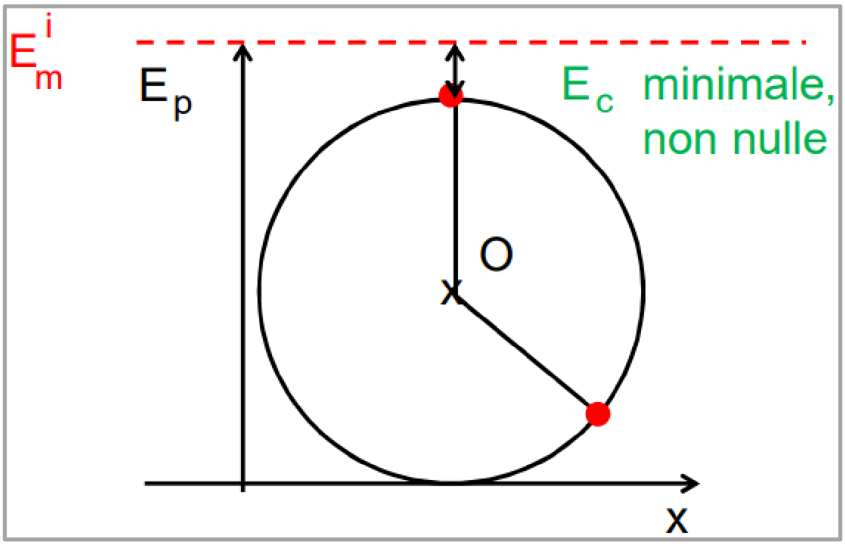


Figure 9 - Représentation des énergies pour un pendule lancé avec une vitesse initiale non nulle

Dans le cas d'un lâcher sans vitesse initiale, le niveau d'énergie mécanique initial E_m^i est au sommet de la trajectoire, donc l'énergie cinétique initiale E_c^i est nulle et la vitesse v est nulle au sommet.

II- Généralisation à un mouvement quelconque, en l'absence de frottement :

On considère une trajectoire quelconque d'un corps qui possède une énergie mécanique initiale E_m^i. Cette énergie délimite les positions possibles que le corps peut avoir sur sa trajectoire, en plus de pouvoir définir qualitativement l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du corps en chaque point. Les minima de la trajectoire correspondent à des endroits où la vitesse v est maximale.

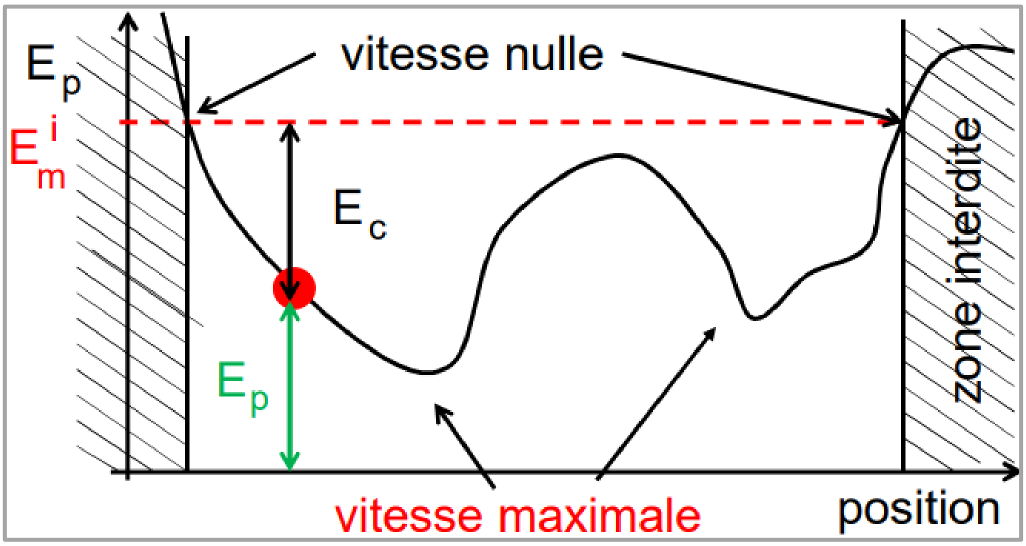


Figure 10 - Trajectoire quelconque délimitée en position par l'énergie mécanique initiale qu'elle possède

En reprenant la même trajectoire mais en prenant une valeur d'énergie mécanique initiale plus basse, on peut se retrouver à avoir deux domaines de position où le corps peut se déplacer, possédant chacun sa vitesse maximale.

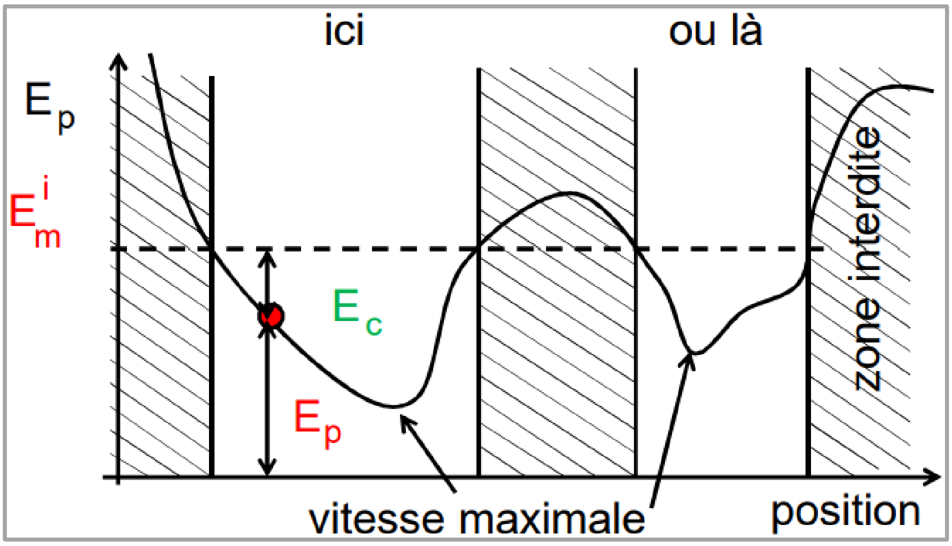


Figure 11 - Situation précédente avec une énergie mécanique initiale plus basse

Dans le cas du pendule pesant et en reprenant la même représentation que précédemment en regardant l'évolution selon l'angle θ de l'énergie potentielle ($\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{mgh}(\mathbf{1} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta})$). Le maximum d'énergie potentielle vaut $\boldsymbol{E_p^{max}} = \boldsymbol{mgh}(\mathbf{1} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{mgh}\big(\mathbf{1} - (-\mathbf{1})\big) = \mathbf{2}\boldsymbol{mgh}$. En fonction de la valeur d'énergie mécanique initiale selon la valeur d'énergie potentielle maximale, on observe trois cas différents :

- Si $\boldsymbol{E_m^i} < \mathbf{2}\boldsymbol{mgh}$, alors la trajectoire est fermée, bloquant le système entre deux positions d'angle θ_0 et $-\theta_0$:

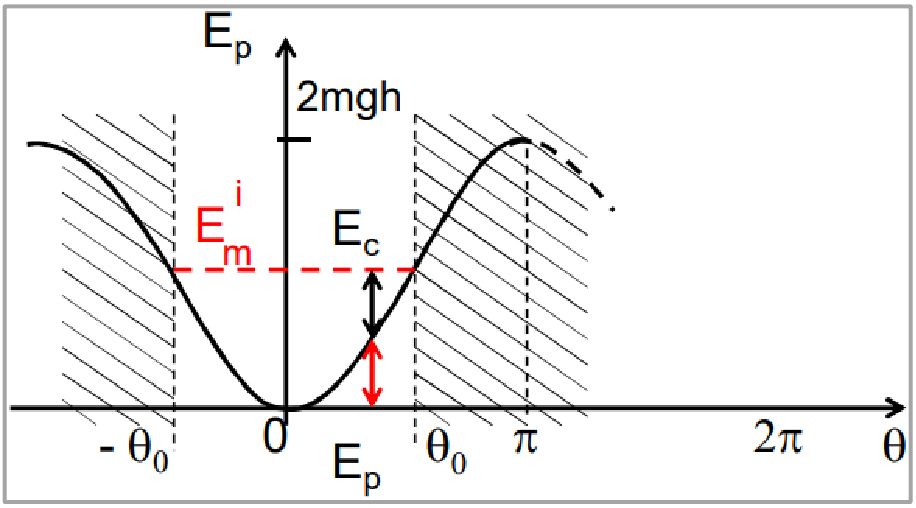


Figure 12 - Représentation de la trajectoire fermée d'un pendule pesant

- Si $\boldsymbol{E_m^i} = \mathbf{2}\boldsymbol{mgh}$, alors on est dans le cas marginal où la trajectoire atteint à ses bords un équilibre instable et où il ne suffirait que d'une légère impulsion d'un côté ou de l'autre au système pour le faire basculer :

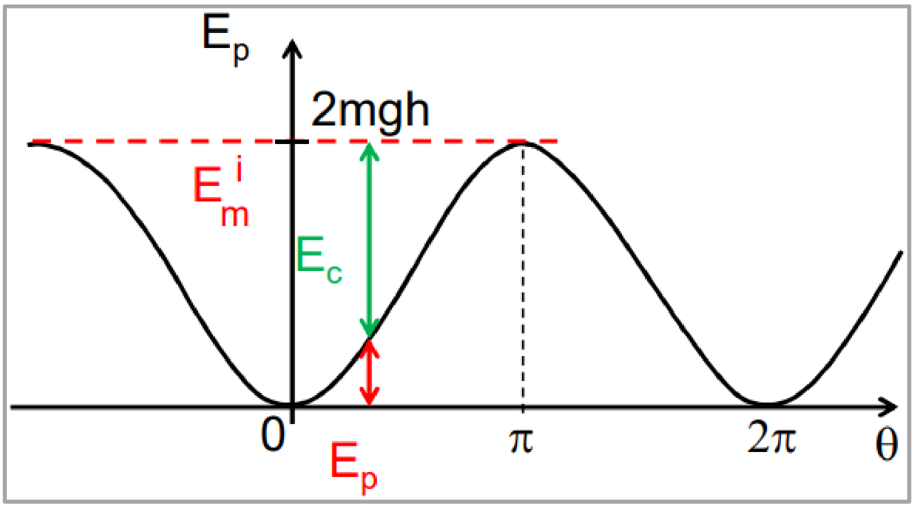


Figure 13 - Représentation du cas marginal d'un pendule pesant

- Si $\boldsymbol{E_m^i > 2mgh}$, alors la trajectoire est ouverte, le pendule continuant de faire des tours complets sans s'arrêter :

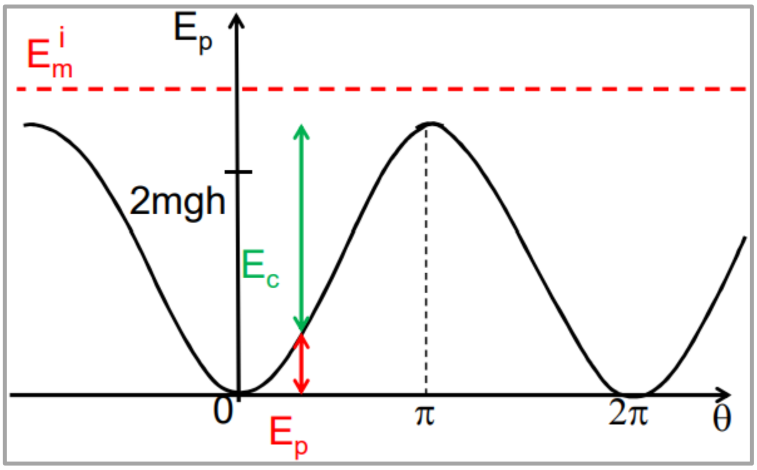


Figure 14 - Représentation de la trajectoire ouverte d'un pendule pesant

III- L'oscillateur harmonique à une dimension :

1) Définition :

L'oscillateur harmonique à une dimension est un modèle générique d'oscillateurs correspondant à un point matériel piégé dans un puits de potentiel parabolique.

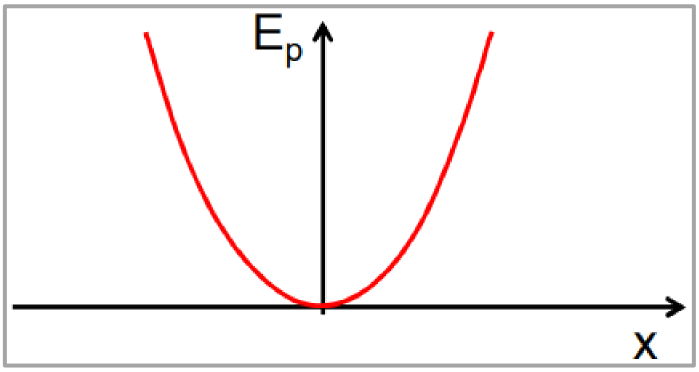


Figure 15 - Représentation graphique d'un oscillateur harmonique à une dimension

L'équation qui décrit mathématiquement la courbe représentée est :

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2}}$$

(avec ω_0 la pulsation du système qui a la dimension de l'inverse d'un temps ($\boldsymbol{s^{-1}}$)).

2) Equation de la Dynamique :

L'énergie mécanique E_m du système vaut, dans ce cas :

$$\boxed{\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2}}$$

Il y a conservation de l'énergie mécanique en l'absence de frottements, donc la dérivée temporelle de l'énergie vaut :

$$\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + m\omega_0^2 x\dot{x} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}}$$

On retrouve l'équation déterminée précédemment.

3) Exemples d'oscillateurs harmoniques à une dimension :

a) Le pendule pesant dans la limite $\boldsymbol{\theta \approx 0}$:

On considère un pendule qui réalise de petites oscillations ($\boldsymbol{\theta \approx 0}$). Si on prend la représentation du pendule selon l'angle avec l'énergie potentielle E_p, l'intersection de la trajectoire du pendule avec la parabole de l'oscillateur harmonique à une dimension définit l'énergie mécanique initiale E_m^i du système.

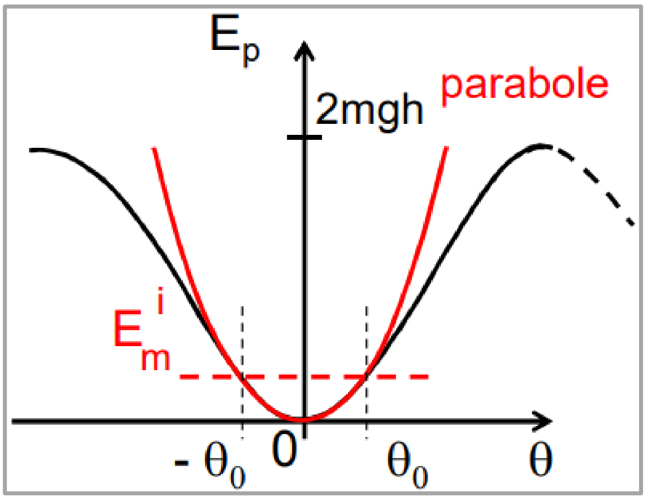


Figure 16 - Schéma de la situation

L'équation de la Dynamique dans ce cas vaut :

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) + \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} \sin \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}}$$

Puisque l'angle θ est petit, on peut réaliser un développement limité sur le sinus de l'équation, permettant d'écrire $\sin \boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}$. On obtient finalement :

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) + \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de variable θ et de pulsation $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}}}$ (qui vaut dimensionnellement l'inverse d'un temps puisque qu'on fait la racine carrée du rapport d'une accélération ($\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{s}^{-2}$) sur une distance ($\boldsymbol{m}$), donc on a bien $[\boldsymbol{\omega_0}] = \sqrt{\frac{[\boldsymbol{m}]\cdot[\boldsymbol{s}^{-2}]}{[\boldsymbol{m}]}} = \sqrt{[\boldsymbol{s}^{-2}]} = [\boldsymbol{s}^{-1}]$).

Un pendule célèbre ayant été utilisé est le pendule de Foucault (du nom de Léon Foucault 1819 – 1868)), qui permet de mettre en évidence la rotation de la Terre sur elle-même par des moyens uniquement terrestres. La première démonstration fut faite en 1851 au Panthéon à Paris.

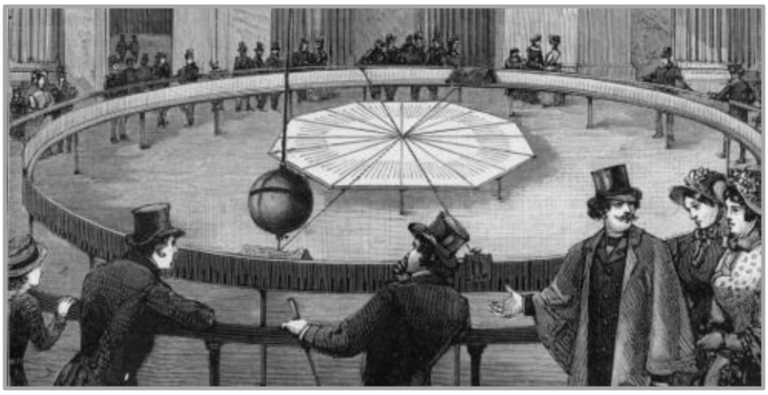


Figure 17 - Pendule de Foucault

b) Le ressort :

On considère une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort considéré sans masse, de longueur à vide (sans masse accrochée) l_0 et accroché à son autre extrémité à une surface verticale (suivant l'axe x). La masse subit trois forces : le poids $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}}$, la réaction $\vec{R}$ opposée au poids et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_{ressort}}$.

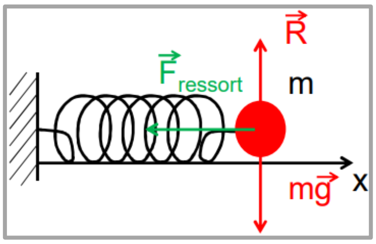


Figure 18 - Schéma de la situation

À un instant t, on tire le ressort à la longueur l. L'élongation totale du ressort durant ce temps t vaut $\boldsymbol{x = l - l_0}$. La force de rappel s'oppose à l'élongation du ressort et en est proportionnelle, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ressort}}} = -\boldsymbol{K x}\, \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}}$$

(avec K la raideur du ressort, qui est le rapport d'une force (en $\boldsymbol{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$) sur une longueur (en $\boldsymbol{m}$), donc qui est dimensionnellement une masse divisée par un temps au carré ($[\boldsymbol{K}] = \frac{[\boldsymbol{kg}]\cdot[\boldsymbol{m}]\cdot[\boldsymbol{s^{-2}}]}{[\boldsymbol{m}]} = [\boldsymbol{kg}] \cdot [\boldsymbol{s^{-2}}]$)). On écrit l'équation de la Dynamique en projetant selon Ox le Principe Fondamental de la Dynamique (on ne projette pas selon Oy car il n'y a pas de mouvement dû au poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ qui s'opposent), ce qui donne :

$$\boldsymbol{m\ddot{x} = F_{ressort,x} = -Kx \Leftrightarrow} \boxed{\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0}}$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{m}}}$ (qui vaut bien l'inverse d'un temps car $[\boldsymbol{\omega_0}] = \sqrt{\frac{[\boldsymbol{kg}]\cdot[\boldsymbol{s^{-2}}]}{[\boldsymbol{kg}]}} = \sqrt{[\boldsymbol{s^{-2}}]} = [\boldsymbol{s^{-1}}]$).

On peut aussi prendre le cas du même ressort mais accroché de façon verticale, la masse m ne subissant que le poids $\vec{P}$ et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_{ressort}}$.

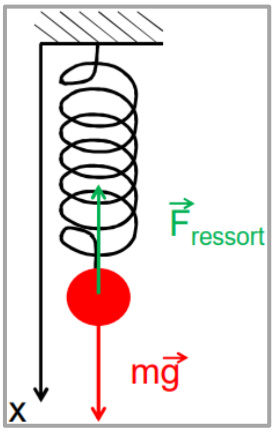


Figure 19 - Schéma de la situation en vertical

Naturellement, le ressort s'allonge du fait de la masse accrochée à une longueur d'équilibre l_e. Pour la définir, on sait qu'à l'équilibre, les deux forces exercées sur la masse $\vec{P}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ressort}}} = -\boldsymbol{Kx}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} = -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} - \boldsymbol{l_0})\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$ s'opposent parfaitement, donc leur somme est nulle :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ressort}}} + \vec{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Leftrightarrow -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} - \boldsymbol{l_0}) + \boldsymbol{mg} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{l_e} = \boldsymbol{l_0} + \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{K}}}$$

On regarde les oscillations autour de l'équilibre après avoir tiré sur la masse et l'avoir lâchée. On choisit l'origine à la position d'équilibre $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ et à $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x_0}$.

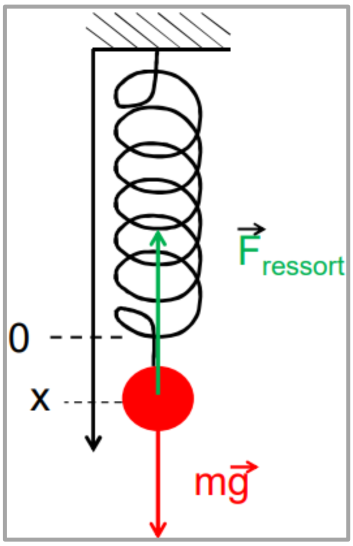


Figure 20 - Elongation du ressort après avoir tiré sur la masse

À l'instant t, le ressort à une longueur l. Après projection sur l'axe Ox, la force de rappel du ressort s'écrit $\boldsymbol{F_{ressort}} = -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l_0})$ et $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l_e} + \boldsymbol{x}$. On obtient donc :

$$\boxed{\boldsymbol{F_{ressort}} = -\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{l_0}) = -\boldsymbol{Kx} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} - \boldsymbol{l_0})}$$

On écrit de nouveau l'équation de la Dynamique en projetant selon Ox, ce qui donne :

$$\boldsymbol{m\ddot{x}} = \boldsymbol{F_{ressort,x}} = -\boldsymbol{Kx} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} - \boldsymbol{l_0}) + \boldsymbol{mg} = -\boldsymbol{Kx}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

(avec $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{l_e} - \boldsymbol{l_0}) + \boldsymbol{mg} = \boldsymbol{0}$ car cela correspond à la condition d'équilibre). C'est de nouveau l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{m}}}$.

4) Résolution de l'équation de la Dynamique :

L'équation de la Dynamique est une équation différentielle linéaire du second ordre ($\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$). La solution générale de ce genre d'équation est :

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)}$$

En effet, si on calcule la dérivée temporelle seconde de cette solution, on obtient :

$$\boxed{\ddot{x} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t) - B\omega_0^2\cos(\omega_0 t) = -\omega_0^2\, x(t)}$$

On a bien la même forme avec la solution générale. Les coefficients A et B sont déterminés par les conditions initiales. Si on lâche la masse sans vitesse initiale au temps $t = 0$, on a :

$$\dot{x}(0) = A\omega_0\cos(\omega_0 \times 0) - B\omega_0\sin(\omega_0 \times 0) = A\omega_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = 0}$$

En considérant que la position du système au temps $t = 0$ vaut x_0, on obtient finalement :

$$x(0) = B\cos(\omega_0 \times 0) = B = x_0 \Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

La trajectoire suit donc l'évolution d'un cosinus au cours du temps, démarrant à $x(0) = x_0$ et de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La fréquence équivalente vaut donc $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

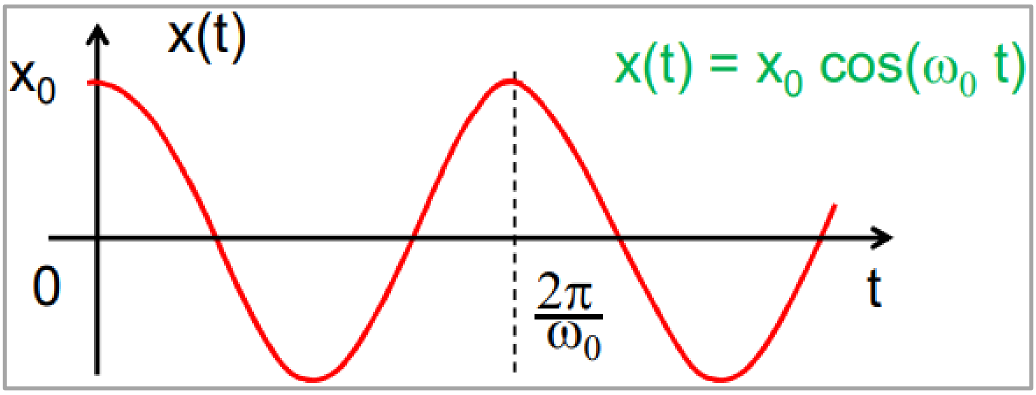


Figure 21 - Représentation temporelle de la trajectoire du système de l'oscillateur harmonique

5) *Etude énergétique :*

Grâce à la valeur obtenue pour la trajectoire, on peut connaître les valeurs d'énergie cinétique E_c, d'énergie potentielle E_p et d'énergie mécanique E_m du système :

$$\boxed{\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{E_p = \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 = \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E_m = \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{m\omega_0^2}{2}x_0^2}}$$

L'énergie mécanique est donc une constante du temps. Si on trace l'évolution des différentes énergies au cours du temps, on remarque que les énergies potentielle E_p et cinétique E_c oscillent en opposition (si l'une est maximale, l'autre est minimale et inversement) et sont encadrées par la valeur d'énergie mécanique E_m.

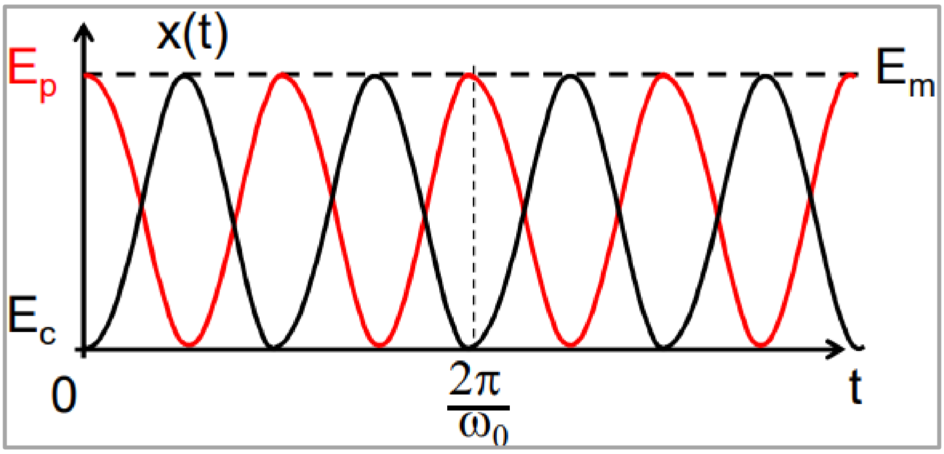


Figure 22 - Evolution des différentes énergies au cours du temps

6) *Effets d'un amortissement visqueux :*

On considère le cas du ressort vertical, excepté que sa masse m est dans une cuve contenant un fluide visqueux (huile, glycérine, etc…). En oscillant, le système subit, en plus du poids $\boldsymbol{\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{\imath}}$ et de la force de rappel du ressort $\boldsymbol{\overrightarrow{F_{ressort}} = -K(l_e - l_0)\,\vec{\imath}}$, une force de frottement visqueux $\boldsymbol{\overrightarrow{F_{visc}} = -k_{visc}\vec{v} = -k_{visc}\dot{x}\,\vec{\imath}}$ (avec k_{visc} le coefficient de viscosité du fluide amortisseur et la force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse du système).

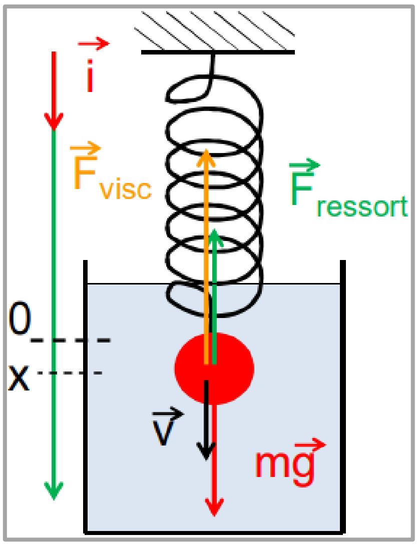


Figure 23 - Schéma de la situation

a) Equation de la Dynamique :

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique suivant l'axe Ox, on obtient :

$$m\ddot{x} = F_{ressort} + mg - F_{visc} = -Kx - K(l_e - l_0) + mg - k_{visc}\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} = -k_{visc}\dot{x} - Kx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k_{visc}}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

(on rappelle la condition d'équilibre $K(l_e - l_0) + mg = 0$, puis on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $2\alpha = \frac{k_{visc}}{m}$). C'est aussi une équation différentielle du second ordre linéaire, mais avec la présence d'une dérivée temporelle simple en plus.

b) Résolution :

Pour résoudre cette équation ($\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$), on sait que la solution est de la forme :

$$\boxed{x(t) = e^{ct}}$$

(avec c qui peut être éventuellement un nombre complexe).

En injectant cette solution dans l'équation de la Dynamique, on obtient :

$$(\ddot{e^{ct}}) + 2\alpha(\dot{e^{ct}}) + \omega_0^2 e^{ct} = 0 \Leftrightarrow c^2 e^{ct} + 2\alpha c e^{ct} + \omega_0^2 e^{ct} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c^2 + 2\alpha c + \omega_0^2 = 0}$$

C'est l'équation caractéristique associée à l'équation de la Dynamique. On cherche les racines de cette équation, donc on calcule son discriminant Δ :

$$\boxed{\Delta = 4\alpha^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)}$$

On obtient alors trois cas possibles pour la valeur du discriminant, donnant trois cas possibles de comportement du système :

- Si $\alpha > \omega_0$, le discriminant est positif ($\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right) > 0$) et l'équation caractéristique admet deux racines réelles :

$$\boxed{c_1 = -\alpha + \beta} \; ; \; \boxed{c_2 = -\alpha - \beta}$$

(avec $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ et $c_1, c_2 < 0$). La solution dans ce cas est de la forme :

$$\boxed{x(t) = Ae^{c_1 t} + Be^{c_2 t} = e^{-\alpha t}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right)}$$

On obtient donc une solution comportant une exponentielle décroissante, donc les valeurs de la trajectoire vont décroître vers 0 quand t augmente : il n'y a pas d'oscillations. On appelle ce cas le « régime apériodique » : le frottement est tellement important que le mouvement est sur-amorti.

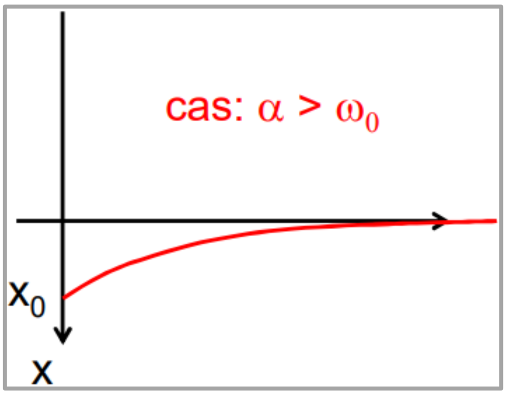


Figure 24 - Evolution de la trajectoire en fonction du temps pour le régime apériodique

On peut déterminer les constantes A et B de la solution grâce aux conditions initiales, où on pose $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, soit :

$$x(0) = Ae^{c_1 \times 0} + Be^{c_2 \times 0} = A + B = x_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = x_0 - B}$$

$$\dot{x}(0) = Ac_1e^{c_1\times 0} + Bc_2e^{c_2\times 0} = A(-\alpha+\beta) + B(-\alpha-\beta)$$
$$= (x_0 - B)(-\alpha+\beta) + B(-\alpha-\beta)$$
$$= x_0(-\alpha+\beta) + B\alpha - B\beta - B\alpha - B\beta$$
$$= x_0(-\alpha+\beta) - 2B\beta = 0 \Leftrightarrow x_0(-\alpha+\beta) = 2B\beta$$
$$\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{x_0(-\alpha+\beta)}{2\beta}}$$
$$\Rightarrow A = x_0 - \frac{x_0(-\alpha+\beta)}{2\beta} = \frac{x_0 2\beta + x_0\alpha - x_0\beta}{2\beta}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{A = \frac{x_0(\alpha+\beta)}{2\beta}}$$
$$\Rightarrow x(t) = e^{-\alpha t}\left(\frac{x_0(\alpha+\beta)}{2\beta}e^{\beta t} + \frac{x_0(-\alpha+\beta)}{2\beta}e^{-\beta t}\right)$$
$$= x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}e^{\beta t} + \frac{-\alpha+\beta}{2\beta}e^{-\beta t}\right)$$
$$= x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{\beta}{2\beta}\left(e^{\beta t} + e^{-\beta t}\right) + \frac{\alpha}{2\beta}\left(e^{\beta t} - e^{-\beta t}\right)\right)$$
$$= x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0e^{-\alpha t}\left(\cosh(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sinh(\beta t)\right)}$$

(avec $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$).

- Si $\alpha < \omega_0$, le discriminant est négatif ($\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right) < 0$) et l'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$\boxed{c_1 = -\alpha + i\omega}\ ;\ \boxed{c_2 = -\alpha - i\omega}$$

(avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0$). La solution dans ce cas est de la forme :

$$\boxed{x(t) = Ae^{c_1 t} + Be^{c_2 t} = e^{-\alpha t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\right)}$$

On peut déterminer les constantes A et B de la solution grâce aux conditions initiales, où on pose $\boldsymbol{x(0)=x_0}$ et $\boldsymbol{\dot{x}(0)=0}$, soit :

$$\boldsymbol{x(0)=Ae^{c_1\times 0}+Be^{c_2\times 0}=A+B=x_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A=x_0-B}}$$

$$\boldsymbol{\dot{x}(0)=Ac_1e^{c_1\times 0}+Bc_2e^{c_2\times 0}=A(-\alpha+i\omega)+B(-\alpha-i\omega)}$$

$$\boldsymbol{=(x_0-B)(-\alpha+i\omega)+B(-\alpha-i\omega)}$$

$$\boldsymbol{=x_0(-\alpha+i\omega)+B\alpha-Bi\omega-B\alpha-Bi\omega}$$

$$\boldsymbol{=x_0(-\alpha+i\omega)-2Bi\omega=0\Leftrightarrow x_0(-\alpha+i\omega)=2Bi\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{B=\frac{x_0(-\alpha+i\omega)}{2i\omega}}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A=x_0-\frac{x_0(-\alpha+i\omega)}{2i\omega}=\frac{x_0 2i\omega+x_0\alpha-x_0 i\omega}{2i\omega}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{A=\frac{x_0(\alpha+i\omega)}{2i\omega}}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow x(t)=e^{-\alpha t}\left(\frac{x_0(\alpha+i\omega)}{2i\omega}e^{i\omega t}+\frac{x_0(-\alpha+i\omega)}{2i\omega}e^{-i\omega t}\right)}$$

$$\boldsymbol{=x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha+i\omega}{2i\omega}e^{i\omega t}+\frac{-\alpha+i\omega}{2i\omega}e^{-i\omega t}\right)}$$

$$\boldsymbol{=x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{i\omega}{2i\omega}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)+\frac{\alpha}{2i\omega}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{=x_0e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}+\frac{\alpha}{\omega}\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x(t)=x_0e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t)+\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t)\right)}}$$

(avec $\boldsymbol{\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$ et $\boldsymbol{\sin x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2i}}$). On obtient des oscillations de pulsation ω qui sont amorties de façon exponentielle (du fait de l'exponentielle décroissante présente). On appelle ce cas le « régime pseudopériodique », qui est sous-amorti. Si on regarde l'évolution de la trajectoire en fonction du temps, elle est comprise dans une enveloppe qui possède la forme d'une exponentielle décroissante $\boldsymbol{\pm x_0e^{-\alpha t}}$ dans laquelle elle oscille jusqu'à être nulle.

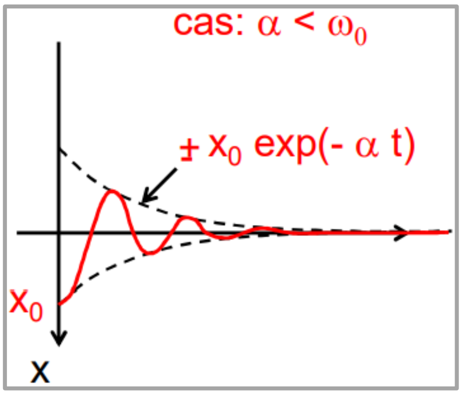


Figure 25 - Evolution de la trajectoire en fonction du temps pour le régime pseudopériodique et représentation de l'enveloppe exponentielle

On peut aussi définir le décrément logarithmique δ qui représente la perte d'amplitude au bout d'une période T entre les deux positions x_1 et x_2 équivalentes et qui peut s'exprimer en fonction des données du problème :

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{x_1(t)}{x_2(t+T)}\right) = \alpha T}$$

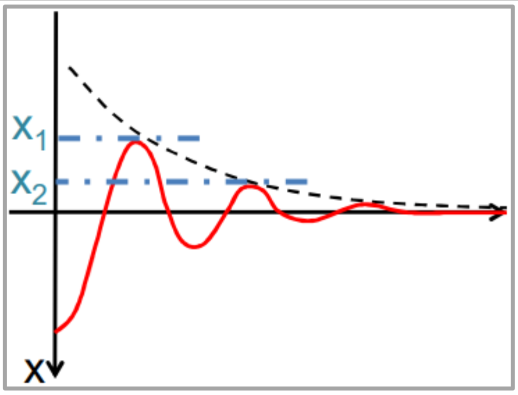


Figure 26 - Représentation des positions utilisées pour le calcul du décrément logarithmique

- Si $\alpha = \omega_0$, le discriminant est nul (($\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) = 0$) et l'équation caractéristique admet une racine double :

$$\boxed{c = -\alpha}$$

La solution dans ce cas est de la forme :

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(A + Bt)}$$

On peut déterminer les constantes A et B de la solution grâce aux conditions initiales, où on pose $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, soit :

$$x(0) = e^{-\alpha\times 0}(A + B\times 0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = x_0}$$

$$\dot{x}(0) = -A\alpha e^{-\alpha\times 0} + Be^{-\alpha\times 0} - (B\times 0)\alpha e^{-\alpha\times 0}$$
$$= -\alpha A + B = -\alpha x_0 + B = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = \alpha x_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(x_0 + \alpha x_0 t) = e^{-\alpha t}\big(x_0(1 + \alpha t)\big)}$$

On obtient des oscillations suivant une forte décroissante exponentielle (plus forte qu'en régime apériodique puisqu'il n'y a pas d'autres exponentielles dans le calcul). On appelle ce cas le « régime critique », qui correspond au retour optimal vers l'équilibre : le système va s'arrêter le plus rapidement possible.

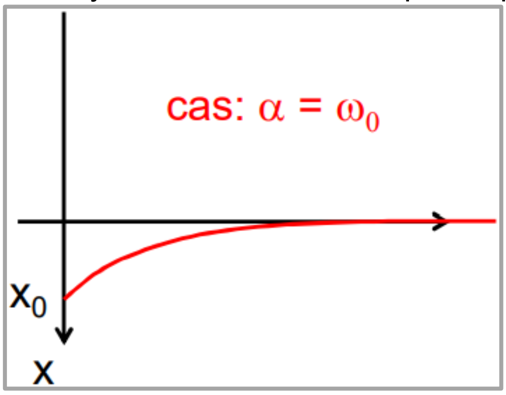


Figure 27 - Evolution de la trajectoire en fonction du temps pour le régime critique

En prenant le cas d'un amortisseur de voiture, si on considère qu'une voiture est construite pour transporter quatre passagers de $70\,kg$, on est en régime critique, permettant de revenir au plus vite à l'équilibre. Si on a moins de passagers, le retour est plus lent et si on en a moins, les oscillations sont amorties.