CM – Introduction à la Dynamique

Introduction

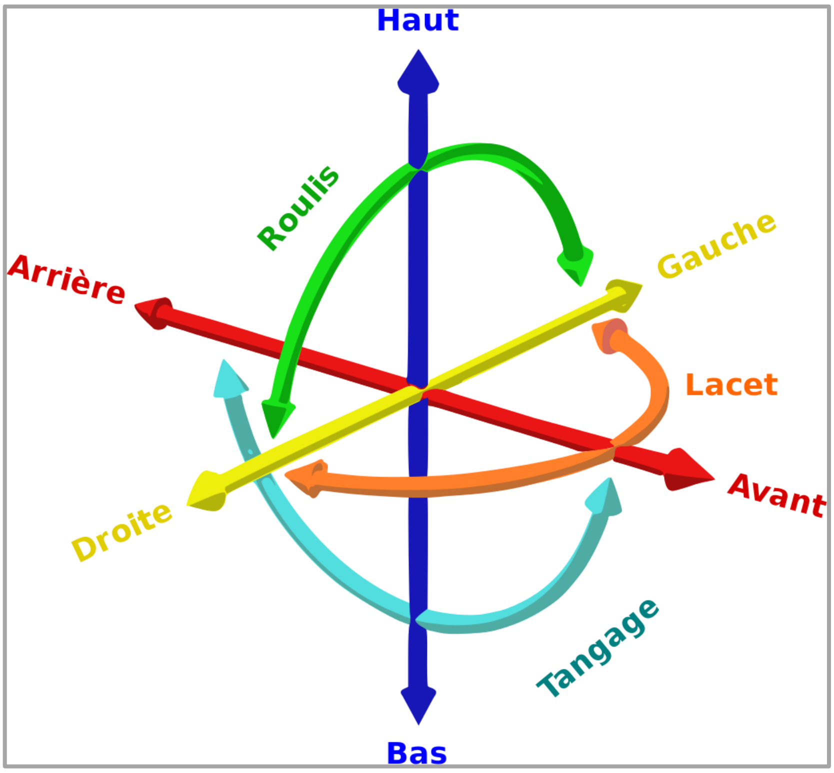
Isaac Newton (1642 – 1727) est un savant complet et reconnu, d'abord en Optique en énonçant la théorie de la couleur, permettant de décomposer la lumière blanche en un spectre visible, et en construisant un télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave qui portera son nom.

Figure 1 - Télescope de Newton

Mais il est surtout reconnu pour avoir fondé la Mécanique classique, établi la théorie de la gravitation universelle et énoncé son Principe Fondamental de la Dynamique. Pour cela, il a créé le calcul infinitésimal en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716).

La Mécanique du point, qui sera la base de ce cours, s'étendra à d'autres domaines comme la Mécanique du solide (lié aux objets solides non ponctuels, établissant la notion d'équilibre et étudiant les forces et couples de forces), la Mécanique des fluides (lié aux liquides et gaz, comme par exemple dans l'étude de la portance d'un avion), la Mécanique des milieux continus (servant pour la déformation des solides par exemple), la Mécanique quantique (permettant d'étudier la structure interne des atomes et molécules), la Relativité restreinte (utilisée en Physique des particules) ou la Relativité générale (utilisée en Cosmologie et dans l'étude d'étoiles denses).

Chapitre 1 : Cinématique



La Cinématique a pour objet de décrire les mouvements de corps sans les relier à leurs causes (rebond d'une balle de tennis, ricochet d'une pierre sur l'eau, rotation de la Lune sur son orbite autour de la Terre, etc…). Seule la trajectoire de ces corps sera étudiée sans réfléchir sur les forces mises en jeu pour l'obtenir.

I- Définitions :

Un « point matériel » est un objet dont les dimensions sont suffisamment petites pour pouvoir être négligées dans l'étude du mouvement. Par exemple, la Lune peut être assimilée à un point matériel lorsqu'on étudie son orbite car elle est considérée comme suffisamment petite par rapport à la taille de la Terre et de la zone étudiée.

Un point matériel peut être défini à toutes les échelles, à la fois atomique et moléculaire (une molécule d'eau mesure en longueur $\mathbf{2.5}$ Å (Angström), soir $\mathbf{2.5} \times \mathbf{10^{-10}}\ \boldsymbol{m}$ sachant qu'un verre d'eau contient environ $\mathbf{10^{23}}$ molécules) comme macroscopique (la galaxie d'Andromède a un rayon de $\mathbf{25}\ \boldsymbol{kpc}$ (kiloparsec), soit environ $\mathbf{7.7} \times \mathbf{10^{20}}\ \boldsymbol{m}$).

Un « événement » est défini par l'instant et le lieu où il se produit. En d'autres termes, c'est une position spatiale décrite à un temps donné. Pour cela, il faut définir un repère de temps et d'espace, permettant de définir un référentiel.

II- Référentiel :

1) Repère de temps :

L'irréversibilité des phénomènes physiques entraîne une orientation de l'axe de temps du passé vers le futur. Cet axe constitue un « repère des temps ». L'origine de cet axe des temps peut être choisie arbitrairement.

L'unité de temps du Système International (S. I.) est la seconde (s) et est définie de la façon suivante : « *Une seconde est la durée de* $\mathbf{9\ 192\ 631\ 770}$ *périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.* ». C'est la base du fonctionnement d'une horloge atomique. Newton a défini le temps comme étant universel, disant : « *L'intervalle de temps qui sépare deux événements donnés aura la même valeur dans tous les référentiels.* » Ce principe sera abandonné par la théorie de la Relativité restreinte mais il est vérifié dès lors que la vitesse des objets étudiés est faible devant celle de la lumière c.

2) Repère d'espace :

a) Définition :

Un repère d'espace est défini par une origine O fixe dans le référentiel et par un système d'axes (Ox, Oy, Oz) en coordonnées cartésiennes. On associe une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ à ce repère. Les trois axes forment un trièdre direct. Il permet à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Le repère est dit « orthonormé » car les trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux et sont unitaires, c'est-à-dire que leur norme vaut $\mathbf{1}$, formant un cube unité de côté équivalent.

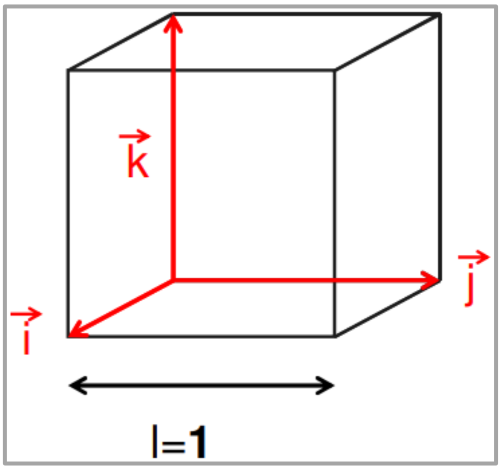


Figure 2 - Représentation d'une base orthonormée directe en coordonnées cartésiennes et visualisation du cube unité

L'ordre des vecteurs unitaires se retrouve grâce aux règles des trois doigts de la main droite et du tire-bouchon :

- Dans le premier cas, on place le pouce de la main droite suivant le vecteur $\vec{\imath}$, l'index suivant le vecteur $\vec{\jmath}$ et le majeur suivant le vecteur $\vec{k}$.

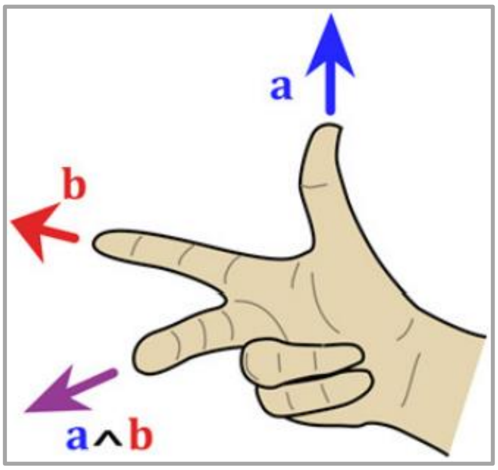


Figure 3 - Illustration de la règle des trois doigts

- Dans le second cas, on se sert du plan formé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ comme le manche d'un tire-bouchon qui va s'enfoncer en suivant le vecteur $\vec{k}$.

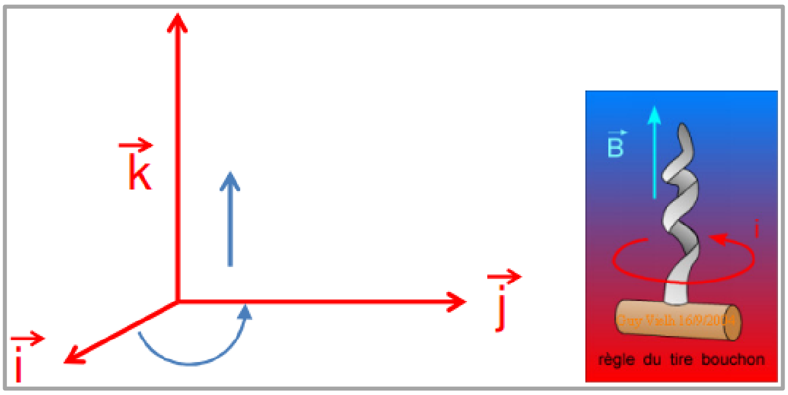


Figure 4 - Illustration de la règle du tire-bouchon (ou du tournevis)

On représente la position d'un point M dans l'espace via cette base grâce au vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{A}$ tracé entre l'origine O du repère cartésien et le point M.

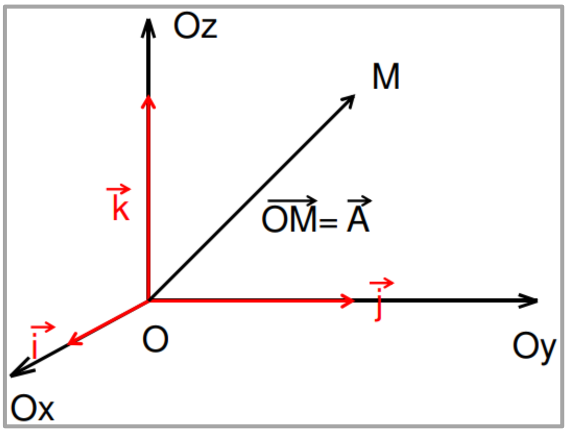


Figure 5 - Représentation du vecteur position d'un point M *dans la base cartésienne*

b) Rappels de calcul vectoriel :

Un vecteur $\vec{A}$ est représenté dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ comme la somme de chaque composante du vecteur suivant le vecteur unitaire multiplié par ce dit vecteur :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A_x}\, \vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{A_y}\, \vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{A_z}\, \vec{\boldsymbol{k}}}$$

(avec (A_x, A_y, A_z) les coordonnées du vecteur $\vec{A}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$).

Un vecteur peut être projeté sur un axe ou un plan, et cela toujours de façon perpendiculaire à celui-ci. Par exemple, on peut projeter le vecteur $\vec{A}$ sur le plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, ce qui donne le vecteur $\overrightarrow{OH}$ (avec H le projeté du point M sur le plan $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$), qui contient les composantes A_x et A_y du vecteur $\vec{A}$ ($\overrightarrow{\boldsymbol{OH}} = \boldsymbol{A_x}\, \vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{A_y}\, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$). Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ correspond à la distance vectorielle entre le point M et le point H selon le vecteur unitaire $\vec{k}$, donc contient sa composante A_z ($\overrightarrow{\boldsymbol{HM}} = \boldsymbol{A_z}\, \vec{\boldsymbol{k}}$).

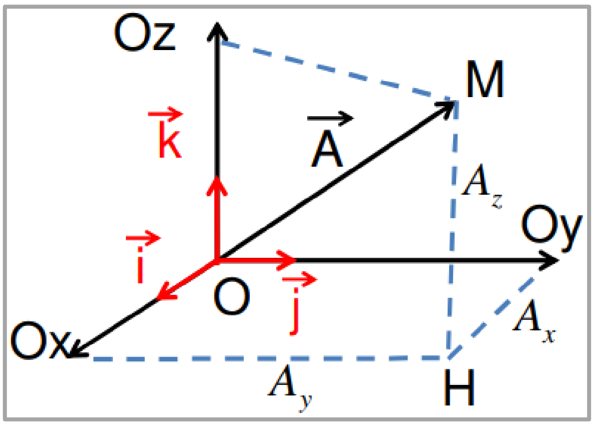


Figure 6 - Représentation des différentes projections possibles du vecteur $\vec{A}$

Ainsi, on peut de nouveau obtenir le vecteur $\vec{A}$ en additionnant les deux vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HM}$, ce qu'on appelle la relation de Chasles (du nom de Michel Chasles (1793 – 1880)) :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{A} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}}}$$

(on additionne les vecteurs de telle sorte que la dernière lettre du premier vecteur est identique à la première lettre du second vecteur).

Le produit scalaire entre deux vecteurs est défini comme la somme des produits de chaque composante de même axe entre elles :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z}}$$

Ce calcul est valable dans n'importe quelle base orthonormée. De ce fait, le produit scalaire entre le vecteur $\vec{A}$ et un des vecteurs unitaires de la base orthonormée donne la composante suivant ce vecteur (puisque la composante du vecteur unitaire est simplement $\mathbf{1}$) :

$$\boxed{\boldsymbol{A_x = \vec{A} \cdot \vec{\imath} = \vec{\imath} \cdot \vec{A}}}\;;\;\boxed{\boldsymbol{A_y = \vec{A} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{A}}}\;;\;\boxed{\boldsymbol{A_z = \vec{A} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{A}}}$$

La norme d'un vecteur, notée $\|\vec{A}\|^2$, est la somme des carrés des composantes du vecteur $\vec{A}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\|\vec{A}\|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

On remarque que cela correspond au produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ avec lui-même :

$$\boxed{\boldsymbol{\|\vec{A}\|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}}}$$

En mettant la norme à la racine carrée, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{\|\vec{A}\|^2} = \|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = A > 0}}$$

La norme est donc positive et correspond à la distance entre les deux points aux extrémités du vecteur $\vec{A}$.

c) Unité de la distance :

L'unité de longueur du Système International est le mètre (m) et est définie de la façon suivante : « *Un mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en* $\frac{1}{299\,792\,458}$*ème de seconde.* »

3) *Référentiel :*

Un référentiel est un ensemble du repère de temps et du repère d'espace. Le choix du référentiel dépend du problème étudié, en voici quelques exemples :

- Le référentiel de Copernic (du nom de Nicolas Copernic (1473 – 1543)) ou référentiel héliocentrique, ayant comme origine le centre du Soleil et prenant trois axes dirigés vers trois étoiles considérées fixes (car elles se déplaçant dans le temps mais, en termes de perspective, elles ne se déplacent quasiment pas ou peu).
- Le référentiel géocentrique, ayant comme origine le centre de la Terre et prenant trois axes dirigés vers trois étoiles considérées fixes.
- Le référentiel terrestre local, ayant comme origine un point sur un lieu terrestre (souvent le centre de la Terre) et prenant trois axes liés à la Terre (latitudes et longitudes par exemple).
- Le référentiel du laboratoire, ayant comme origine un point appartenant au laboratoire et prenant trois axes liés au laboratoire.

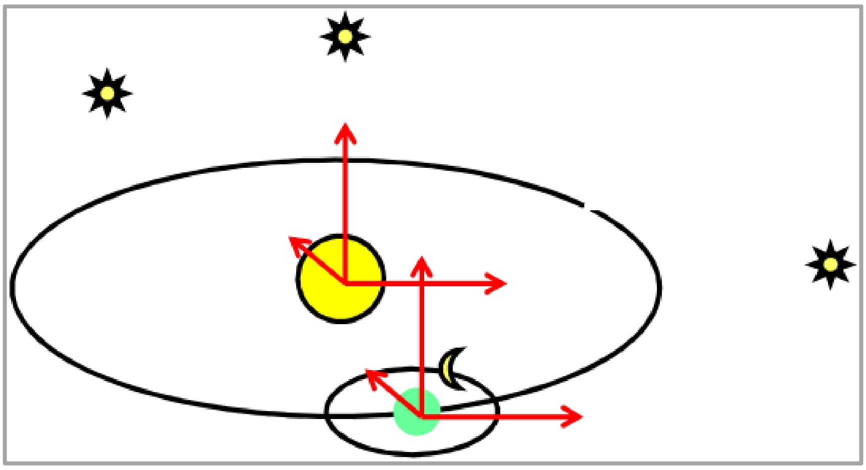


Figure 7 - Schématisation des repères de Copernic et géocentrique

III- Les grandeurs cinématiques :

1) Le vecteur position :

On reprend la base orthonormée directe en coordonnées cartésiennes où l'on prend un point M situé à un endroit donné et à un temps t donné, noté $M(t)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ lié à ce point dépend donc aussi du temps mais est défini de la même manière que dans le cas sans considérer le temps :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}}$$

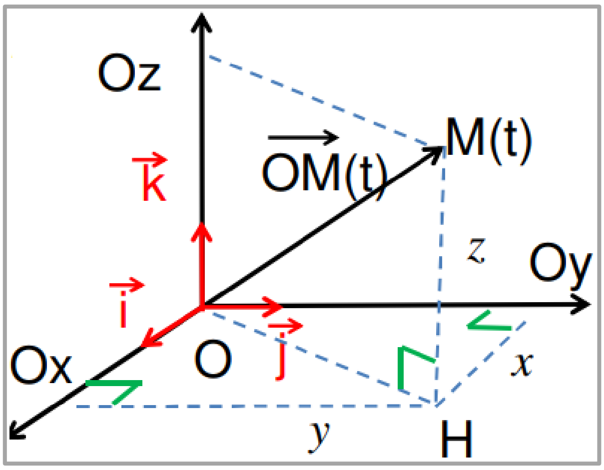


Figure 8 - Représentation du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$

Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtiennent en faisant le produit scalaire entre le vecteur et chaque vecteur unitaire de la base :

$$\boxed{\boldsymbol{x(t)} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{y(t)} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{z(t)} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}}}$$

On peut alors définir la trajectoire d'un objet comme l'ensemble des positions qu'il prend au cours de son évolution temporelle (dans le temps).

2) Le vecteur vitesse :

On considère une voiture qui se déplace le long d'une route. On repère la position du véhicule aux temps t et $t + \Delta t$ par les vecteurs positions $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$.

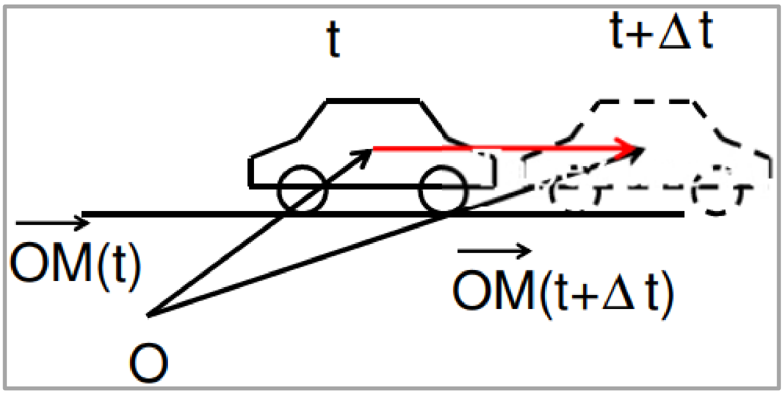


Figure 9 - Schéma de la situation

La variation du vecteur position $\Delta\overrightarrow{OM}$ entre les deux temps permet de définir le vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}) - \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{v}}\,\Delta\boldsymbol{t}}$$

Si on divise la relation précédente par Δt et que l'on fait tendre la variation temporelle vers $\mathbf{0}$, on obtient la relation de dérivation du vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta \boldsymbol{t}\to\mathbf{0}} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}) - \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t})}{\Delta\boldsymbol{t}}}$$

On peut alors écrire le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ comme la dérivée temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}(\boldsymbol{t})}$$

Par convention, le point au-dessus du vecteur désigne une dérivée temporelle. En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \dot{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{k}}}$$

On peut faire deux remarques sur le vecteur vitesse :

- Si le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est constant, sa direction l'est aussi. Cela signifie que le vecteur vitesse définit la vitesse d'un corps dans une trajectoire rectiligne. Pour un point en rotation autour de la Terre, la direction de la vitesse change même si sa norme est constante car la trajectoire du point est constante, donc le vecteur vitesse lui-même n'est pas constant (c'est une trajectoire circulaire).
- La composante sur n'importe quel axe du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est comprise entre $-c$ et c, avec c la vitesse de la lumière car aucun objet ne peut la dépasser.

3) Le vecteur accélération :

De la même manière que le vecteur vitesse exprime la variation de position d'un corps, le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ exprime la variation de vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\overrightarrow{OM}}(t)}$$

(avec $\ddot{\overrightarrow{OM}}(t)$ la dérivée temporelle seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$). En coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'écrit :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}}$$

4) Unités :

L'unité de la vitesse est le mètre par seconde ($\boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$). Un marcheur va à une vitesse d'environ $\mathbf{1.5}\ \boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$, un coureur olympique à environ $\mathbf{10}\ \boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$ et la vitesse du son est d'environ $\mathbf{340}\ \boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$.

L'unité de l'accélération est le mètre par seconde carrée ($\boldsymbol{m \cdot s^{-2}}$). L'accélération de la pesanteur terrestre vaut $\boldsymbol{g} \approx \mathbf{9.81}\ \boldsymbol{m \cdot s^{-2}}$, ce qui équivaut à $\mathbf{1}\boldsymbol{G}$ (une fois la pesanteur terrestre).

IV- Equation de la trajectoire :

Obtenir l'équation de la trajectoire, c'est donner une relation entre les coordonnées de l'espace, c'est-à-dire d'éliminer le temps.

On prend l'exemple d'un corps qui possède les vecteurs position $\overrightarrow{OM}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ suivants :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} b\,t \\ -a\,t \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire une équation qui permet d'obtenir l'évolution de la coordonnée y en fonction de la coordonnée x, soit $y(x)$, on prend l'égalité $x(t)$ et on isole le terme de temps t pour obtenir l'évolution du temps en fonction de la coordonnée x, soit $t(x)$:

$$\boldsymbol{x(t) = b\ t \Leftrightarrow \boxed{t(x) = \frac{x}{b}}}$$

En injectant cette nouvelle équation dans $y(t)$, on obtient finalement l'équation de la trajectoire $y(x)$:

$$\boldsymbol{y(t) = -a\ t \Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{a}{b}x}}$$

L'équation de la trajectoire obtenue décrit un mouvement rectiligne uniforme : la vitesse est constante au cours du temps mais l'accélération est nulle.

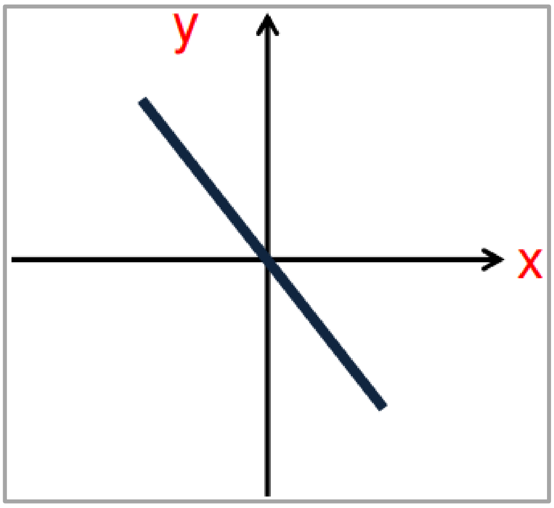


Figure 10 - Evolution graphique de l'équation de la trajectoire d'un mouvement rectiligne uniforme

On prend maintenant un second exemple de mouvement de corps, avec des vecteurs à valeurs différentes :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} b\ t \\ -\dfrac{a\ t^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} b \\ -a\ t \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

En reprenant la méthode précédente, l'équation de la trajectoire de ce corps est :

$$\boldsymbol{x(t) = b\,t \Leftrightarrow \boxed{t(x) = \frac{x}{b}}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow y(t) = -\frac{a\,t^2}{2} \Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{a}{2b^2}x^2}}$$

L'équation de la trajectoire obtenue décrit un mouvement uniformément accéléré vers le bas (car la composante selon y de l'accélération est non nulle et, surtout, négative).

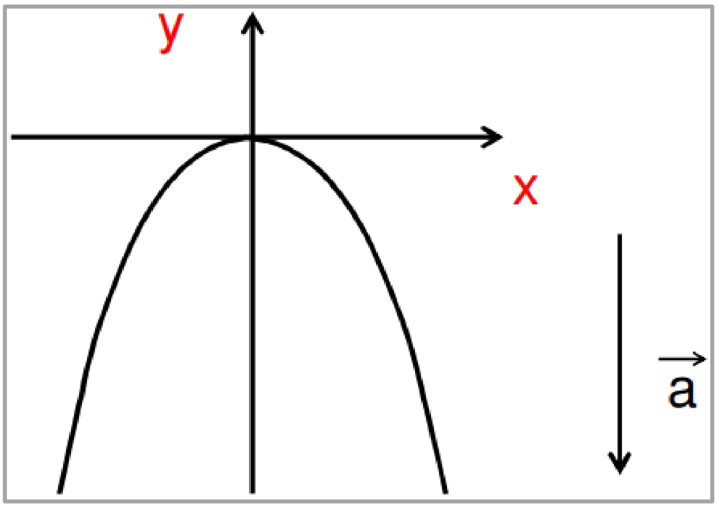


Figure 11 - Evolution graphique d'un mouvement uniformément accéléré vers le bas (avec la direction du vecteur accélération)

V- Autres systèmes de coordonnées :

Pour les mouvements de rotation autour d'un pour ou d'un axe, on utilisera plutôt les coordonnées polaires (à deux dimension) ou les coordonnées cylindriques (à trois dimensions).

1) *Mouvement dans un plan – Coordonnées polaires :*

Les coordonnées polaires n'utilisent pas les composantes projetées sur deux axes fixes mais la distance entre l'origine du repère O et l'angle $\theta(t)$ formé par la droite entre le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ avec l'axe x au cours du temps.

Ce repère a comme particularité de ne pas être fixe mais mobile (puisque l'angle de rotation dépend du temps t), tournant autour de l'origine. On définit alors les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}(t)$ suivant le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{u_\theta}(t)$ orthogonal au premier dans le sens direct.

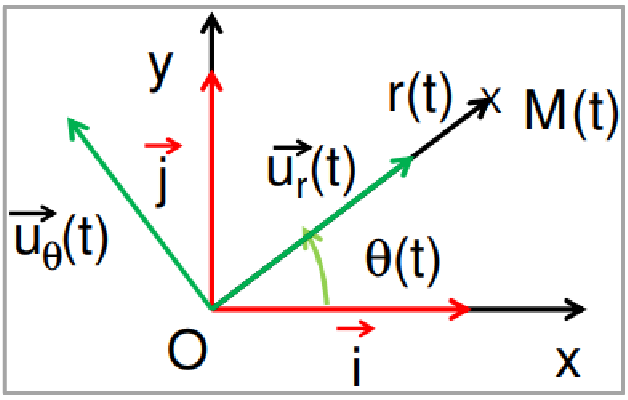


Figure 12 – Représentation du vecteur position dans la base polaire

On définit alors le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans cette base comme :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t})}$$

(avec $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right\|$ la norme du vecteur position). On peut aussi écrire le vecteur position sous sa forme colonne :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}},\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}}$$

(on met en indice le couple de vecteurs unitaires pour indiquer que l'on note le vecteur dans la base choisie). En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{\theta}\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\theta}\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}}$$

En projetant les vecteurs de la base polaire $\left(\overrightarrow{u_r}(t), \overrightarrow{u_\theta}(t)\right)$ sur les vecteurs de la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on obtient leurs coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) = \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + \sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}}\ ;\ \boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t}) = -\sin\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \cos\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}}$$

Ces vecteurs dépendant du temps, lorsque l'on voudra calculer la vitesse $\vec{v}(t)$, il faudra aussi les dériver. De même, l'angle $\theta(t)$ dépend du temps donc il devra aussi être dérivé. On rappelle que la dérivée d'une fonction composée de sinus et de cosinus vaut :

$$\boxed{(\cos\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))' = -\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\sin\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}\ ;\ \boxed{(\sin\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))' = -\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\cos\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}$$

On a alors pour les vecteurs $\overrightarrow{u_r}(t)$ et $\overrightarrow{u_\theta}(t)$:

$$\overrightarrow{u_r}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}} \Rightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta(t) \\ \dot{\theta}\cos\theta(t) \end{pmatrix}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t)}$$

$$\overrightarrow{u_\theta}(t) = \begin{pmatrix} \sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}} \Rightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta(t) \\ -\dot{\theta}\sin\theta(t) \end{pmatrix}_{\vec{\imath},\vec{\jmath}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}(t)}$$

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ étant le produit de deux termes dépendant du temps, sa dérivée temporelle implique d'utiliser la formule de dérivation d'un produit de fonctions :

$$\boxed{\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)}$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans la base polaire :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\overrightarrow{OM}}(t) = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r}(t) + r(t)\,\dot{\overrightarrow{u_r}}(t) = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r}(t) + r(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t)}$$

De même, le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ dans la base polaire vaut :

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r}(t) + \dot{r}(t)\,\dot{\overrightarrow{u_r}}(t) + \dot{r}(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t) + r(t)\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t) + r(t)\,\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}}(t)$$

$$= \ddot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r}(t) + \dot{r}(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t) + \dot{r}(t)\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t) + r(t)\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}(t) + r(t)\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \big(\ddot{r}(t) - r(t)\,\dot{\theta}^2\big)\overrightarrow{u_r}(t) + \big(2\dot{r}(t)\,\dot{\theta} + r(t)\,\ddot{\theta}\big)}$$

Ce système de coordonnées permet d'étudier les cas de mouvements circulaires. On regarde d'abord le cas du mouvement circulaire uniforme (avec le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de norme constante mais pas constant en lui-même car il est tangent en tout point de la trajectoire) d'un corps au point M donc le cercle formé est de rayon R constant.

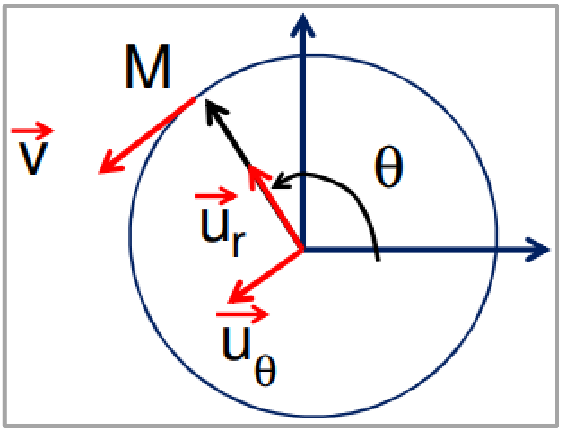


Figure 13 - Schéma de la situation

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ vaut alors $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t})$. Puisque R est constant, sa dérivée est nulle et cela simplifie l'écriture du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\boldsymbol{R}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t})}$$

La norme du vecteur vitesse étant constante ($\boldsymbol{v} = \|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\boldsymbol{R}^2\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \boldsymbol{0}} = \boldsymbol{R}\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{cste}$), cela signifie que le terme $\dot{\theta}$, que l'on peut définir comme la « vitesse angulaire » (ou « pulsation », en radians par seconde ($\boldsymbol{rad}\cdot\boldsymbol{s}^{-1}$)) ω est aussi constante. Le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ aura aussi son écriture simplifiée :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\omega}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}\,\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}^2\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) = -\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t})}$$

(car $\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{R}^2\,\boldsymbol{\omega}^2}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}^2$). L'accélération est dite « centripète » car elle est dirigée vers l'origine O.

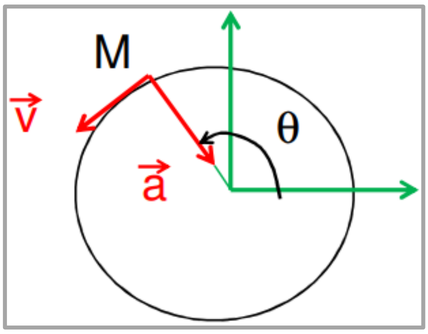


Figure 14 - Vitesse et accélération d'un mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme (donc de norme de vitesse v non constante et de vitesse angulaire ω non constante), les vecteurs position et vitesse sont inchangés ($\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t})$ et $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t})$) mais le vecteur accélération sera différent puisque la vitesse angulaire n'est pas constante :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{t})\,\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}^2(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{R}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t})}$$

Dans ce cas, l'accélération n'est pas centripète.

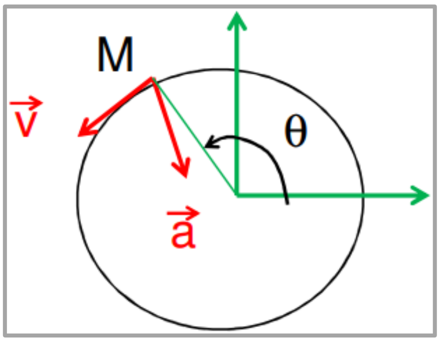


Figure 15 - Vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire non uniforme

2) Coordonnées cylindriques :

Les coordonnées cylindriques sont une combinaison des coordonnées polaires sur le plan $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de la coordonnée cartésienne suivant $\vec{k}$. C'est donc un système de coordonnées en trois dimensions, composé des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{k}$.

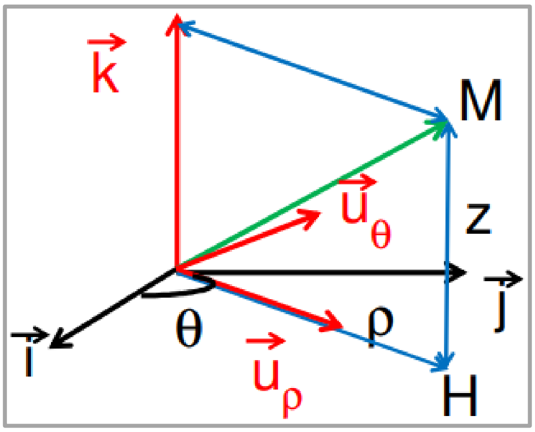


Figure 16 - Représentation des coordonnées cylindriques

Si on définit le point H qui est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtient par la relation de Chasles avec les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{OH}} = \boldsymbol{\rho}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}(\boldsymbol{t})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{HM}} = \boldsymbol{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OH}} + \overrightarrow{\boldsymbol{HM}} = \boldsymbol{\rho}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}}$$

Ainsi, les vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ auront la même valeur qu'en coordonnées polaires, excepté qu'on doit rajouter le terme $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{k}}$ qui sera dérivé à chaque fois :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \dot{\boldsymbol{\rho}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{\rho}\,\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}}(\boldsymbol{t}) + \dot{\boldsymbol{z}}\,\vec{\boldsymbol{k}}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \left(\ddot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\,\dot{\boldsymbol{\theta}}^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}(\boldsymbol{t}) + \left(2\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})\,\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})\,\ddot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \ddot{\boldsymbol{z}}\,\vec{\boldsymbol{k}}}$$

Dans le cas du mouvement circulaire et en coordonnées cylindriques, dont la rotation se passe à la hauteur $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, on définit le vecteur $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}\,\vec{\boldsymbol{k}}$ qui est constant du mouvement. Sachant que le vecteur vitesse vaut $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{t})\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}(\boldsymbol{t})$, on peut aussi le définir comme :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{t}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t})}$$

L'opération mathématique utilisée est le produit vectoriel, permettant d'obtenir un nouveau vecteur à partir de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}}$$

Une des propriétés du produit vectoriel est que le vecteur obtenu est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. L'écriture du calcul pouvant être assez difficile à se rappeler, on peut utiliser un moyen mnémotechnique qui consiste à calculer le déterminant d'une matrice comprenant les différents vecteurs et composantes ordonnés par colonne :

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & A_x & B_x \\ \vec{\jmath} & A_y & B_y \\ \vec{k} & A_z & B_z \end{vmatrix} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_z & B_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & A_y \end{vmatrix}}$$

En regardant les produits vectoriels entre les vecteurs unitaires de la base cartésienne, on a :

$$\boxed{\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0} \; ; \quad \boxed{\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = \vec{k}} \quad \boxed{\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = \vec{\imath}} \quad \boxed{\vec{k} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\imath} \wedge \vec{k} = \vec{\jmath}}$$

On remarque que deux vecteurs parallèles entre eux ont un produit vectoriel nul et que le produit vectoriel est anticommutatif, c'est-à-dire que commuter deux vecteurs dans l'opération implique d'ajouter un signe négatif devant :

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}}$$

Si on reprend le produit vectoriel pour la vitesse, on obtient bien la valeur classique :

$$\vec{v}(t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 - \omega(t) \times 0 \\ R\,\omega(t) - 0 \times 0 \\ 0 \times 0 - 0 \times R \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\,\omega(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}, \vec{k})} = R\,\omega(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

3) Coordonnées intrinsèques (ou curvilignes) :

On considère un point $M(t)$ qui suit une trajectoire quelconque. Dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ de ce point est $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$. En prenant un point M_0 qui sert de point d'origine sur la trajectoire, on définit l'abscisse curviligne $s(t)$ comme la distance entre les points M_0 et $M(t)$ suivant la trajectoire, dont on prend l'orientation allant de M_0 à $M(t)$.

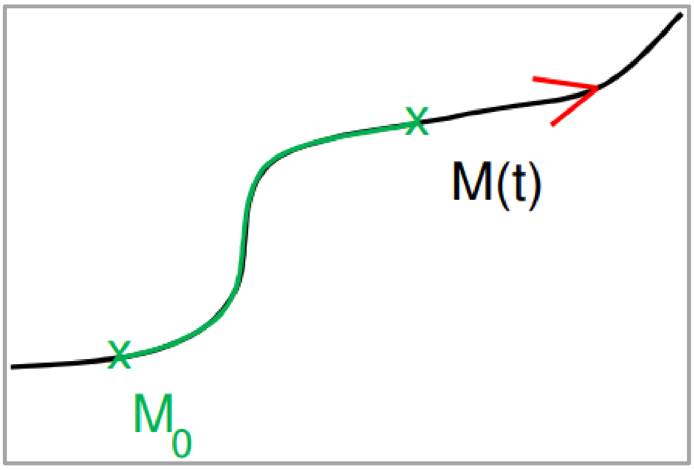


Figure 17 - Représentation de l'abscisse curviligne sur une trajectoire quelconque et son orientation

On peut aussi définir le vecteur unitaire tangentiel $\vec{T}$ au point $M(t)$, tangent à la trajectoire et dont le sens est donné par l'orientation précédente.

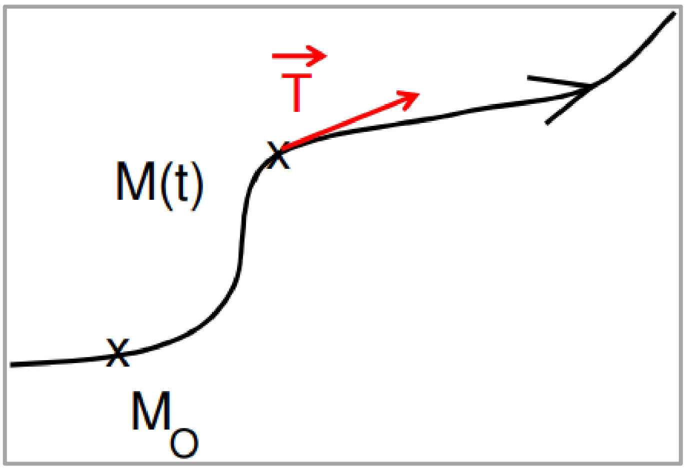


Figure 18 - Représentation du vecteur unitaire tangentiel

L'abscisse curviligne $s(t)$ est l'équation horaire du mouvement (équation qui dépend du temps). Elle est définie par :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}\vec{\boldsymbol{T}}}$$

(car de façon générale, la vitesse est tangente en tout point de la trajectoire, donc de l'abscisse curviligne, et $\vec{\boldsymbol{T}} = \frac{\vec{v}}{v}$ car il est unitaire). En pratique, cela veut dire que la dérivée temporelle de l'abscisse curviligne $\dot{s}$ vaut la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\boxed{\dot{s} = \|\vec{v}\| = v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Son signe dépend de l'orientation, positif si le produit scalaire entre le vecteur vitesse et le vecteur tangentiel est positif ($\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{T}} > \mathbf{0}$) et négatif sinon ($\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{T}} < \mathbf{0}$). On peut préciser que les deux vecteurs sont colinéaires (parallèles).

Pour repérer un point $M(t)$ en coordonnées intrinsèques, on utilise le « trièdre de Frenet » (du nom de Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)), permettant d'associer au vecteur tangentiel $\vec{T}$ deux autres vecteurs normés pour créer une base orthonormée directe : le vecteur unitaire normal $\vec{N}$ perpendiculaire à $\vec{T}$ dans le même plan et le vecteur binormal $\vec{B}$ perpendiculaire sur le plan formé par $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Au voisinage d'un point $M(t)$, on peut assimiler la trajectoire à un petit arc de cercle contenu dans un plan, ici celui des vecteurs $\vec{N}$ et $\vec{T}$. Le cercle complet, appelé « cercle osculateur » au point $M(t)$, de centre de courbure C et de rayon R (aussi appelé « rayon de courbure » en $M(t)$) a comme particularités que $\vec{T}$ en est tangent en $M(t)$ et que $\vec{N}$ est logiquement dirigé vers C.

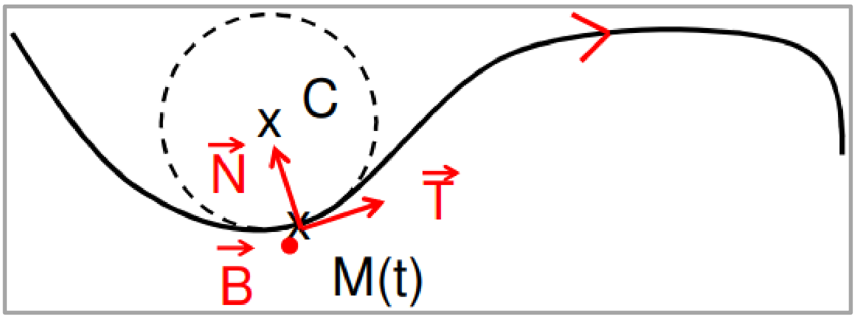


Figure 19 - Représentation du cercle osculateur au point M(t) *et orientations des différents vecteurs du trièdre de Frenet*

L'accélération $\vec{a}(t)$ dans un cas quelconque dépend à la fois d'une accélération tangentielle à la trajectoire a_t suivant $\vec{T}$ et d'une accélération normale a_n suivant $\vec{N}$ qui est de la même forme que l'accélération dans un mouvement circulaire uniforme :

$$\boxed{\vec{a}(t) = a_t \vec{T} + a_n \vec{N} = \dot{v}(t)\,\vec{T} + \frac{v^2(t)}{R_c(t)} \vec{N}}$$

(avec $R_c(t)$ le rayon de courbure). Les composantes a_t et a_n sont calculables par les formules suivantes :

$$\boxed{a_t = \frac{\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)}{\vec{v}(t)}} \; ; \; \boxed{a_n = \frac{\|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)\|}{\|\vec{v}(t)\|}}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon R, l'orientation de la trajectoire suit le mouvement de la base orthonormée polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, donc le trièdre de Frenet est orienté tel que $\vec{\boldsymbol{T}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}$, $\vec{\boldsymbol{N}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ et $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{k}}$. Il n'y a aucune composante tangentielle à l'accélération $\vec{a}(t)$ donc seule la composante normale reste, donnant l'accélération classique dans un mouvement circulaire uniforme :

$$\boxed{\boldsymbol{a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R}}}$$

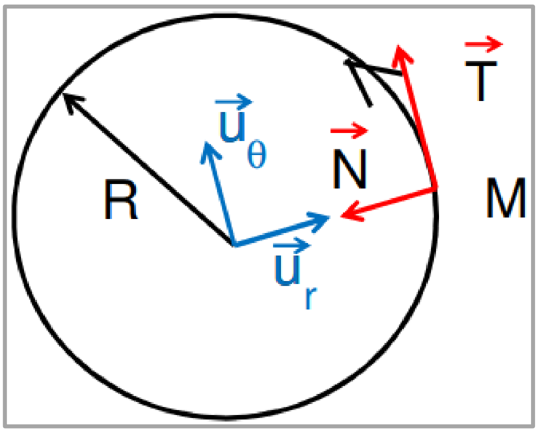


Figure 20 - Mouvement circulaire uniforme avec base orthonormée polaire et intrinsèque