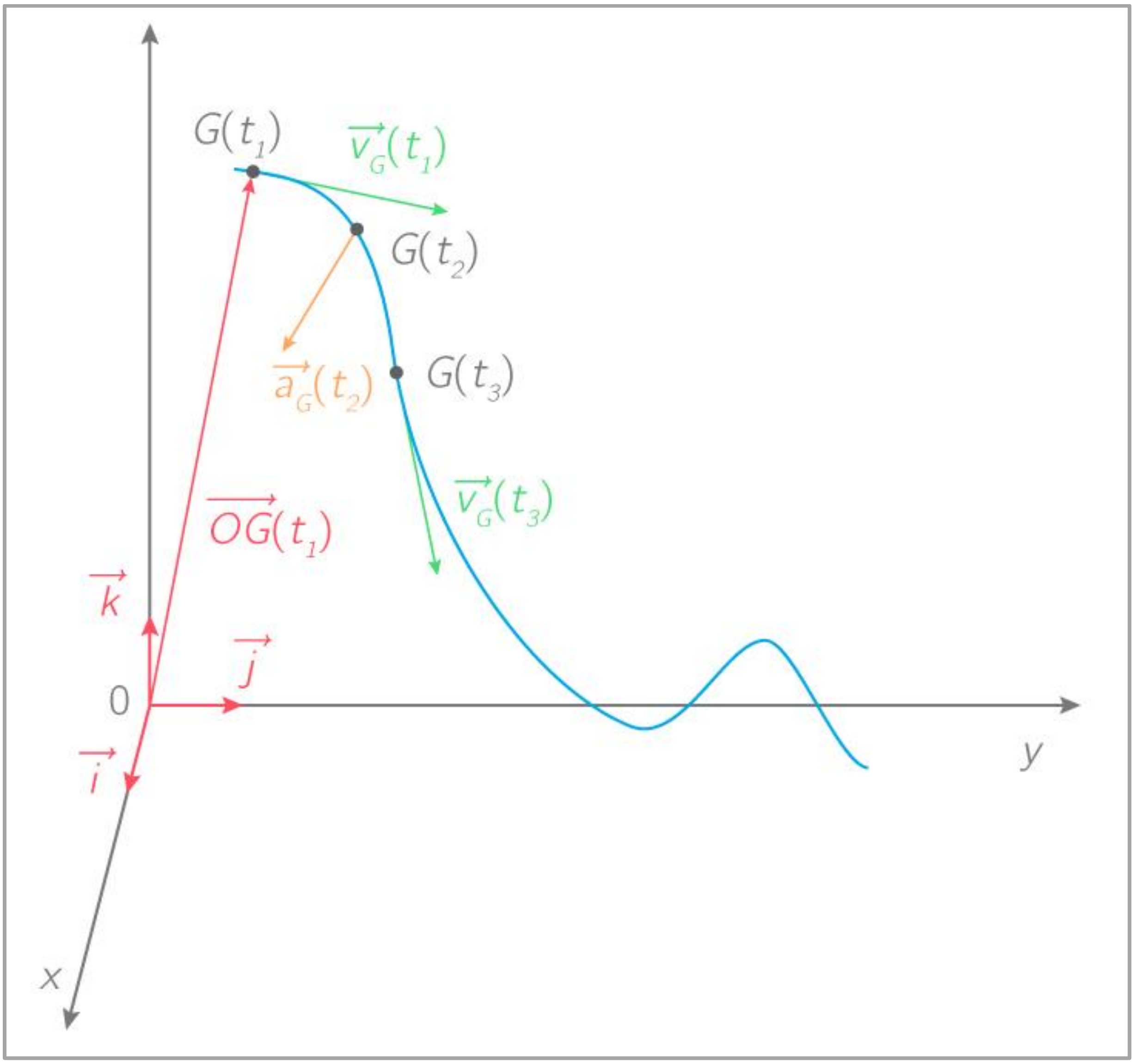
CM – Introduction à la Dynamique

Chapitre 2 : Dynamique du point matériel



I- Principes fondamentaux :

1) *Principe d'inertie (Première loi de Newton) :*

Un point matériel « isolé » est un point matériel sur lequel ne s'exerce aucune force (ou action mécanique) :

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}} = \mathbf{0}}$$

Il existe au moins un référentiel dans lequel un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme. Un tel référentiel est dit « galiléen » (du nom de Galileo Galilei, aussi surnommé Galilée (1564 – 1642)).

2) *Principe fondamental de la Dynamique (Seconde loi de Newton) :*

On se place dans un référentiel galiléen. Soit $\vec{F}(t)$ la résultante des forces (donc la somme vectorielle de toutes les forces) agissant sur le point M. Le Principe fondamental de la Dynamique énonce que la résultante est égale au produit de la masse m du point M multipliée par son accélération $\vec{a}(t)$:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t}) = \sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t})}$$

Exemple – Chute libre d'un objet :

On considère un objet quelconque de masse m en chute libre, c'est-à-dire lâché d'une hauteur quelconque sans vitesse initiale.

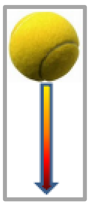


Figure 1 - Illustration de la situation

La seule force agissant sur l'objet est le poids $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}$ (avec $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur terrestre, où $\boldsymbol{g} = \mathbf{9.81}\ \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{s}^{-2}$).

En appliquant le Principe fondamental de la Dynamique, on obtient :

$$\vec{F} = \vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

L'accélération d'un objet en chute libre ne dépend donc pas de sa masse mais uniquement de l'accélération de pesanteur. Ce résultat théorique est vérifié expérimentalement.

Exemple – Pendule dans un train :

On considère un pendule composé d'une masse m attachée à un fil subissant une force de tension $\vec{T}$, le tout subissant l'accélération du train par rapport à la Terre $\overrightarrow{a_{train}}$. Le pendule subit aussi son propre poids $\vec{P}$.

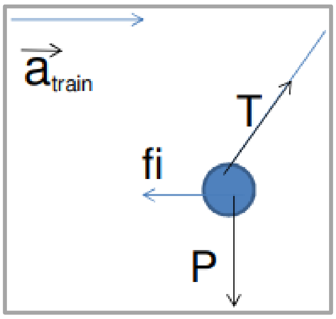


Figure 2 - Schéma de la situation

Dans le repère fixe lié à un quai de gare quelconque où le train passe à côté, on peut appliquer le Principe fondamental de la Dynamique :

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{F}(t) \Leftrightarrow \boxed{m\,\overrightarrow{a_{train}} = \vec{P} + \vec{T}}$$

Cependant, le train étant mobile par rapport au quai, on peut définir un repère mobile lié au train. Dans ce cas, en plus du poids $\vec{P}$ et de la tension du fil $\vec{T}$, le pendule subit une troisième force $\overrightarrow{f_i} = m\,\overrightarrow{a_{train}}$ équivalente à la formule du Principe fondamental de la Dynamique, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{T} + \overrightarrow{f_i} = 0}$$

L'unité de masse du Système International est le kilogramme (kg). Il est défini de la façon suivante : « *Un kilogramme correspond à la masse d'un cylindre de platine iridié conservé au Bureau International des Poids et Mesures (à Sèvres en France).* » (il en existe plusieurs partout dans le monde en réalité).

Figure 3 - Photographie du cylindre de platine iridié définissant le kilogramme

Cette définition dépend donc d'un objet physique réel contrairement à d'autres unités, ce qui n'est pas forcément une bonne chose du fait que l'objet peut varier en masse avec le temps. Il a donc été décidé de la changer en 2018 pour être établie en fonction de la constante de Planck $\boldsymbol{h = 6.626 \times 10^{-34}\, J \cdot s}$ (du nom de Max Planck (1858 – 1947)).

L'unité de force est le Newton ($\boldsymbol{N}$), correspondant au produit d'une masse par une accélération ($\boldsymbol{1\, N = 1\, kg \cdot m \cdot s^{-2}}$).

3) Quantité de mouvement :

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un corps est une quantité vectorielle produit de la masse m du corps par son vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{p} = m\,\vec{v}}}$$

Elle intervient notamment dans les chocs ou dans la propulsion à réaction de fusées ou machines spatiales. Une propriété remarquable est qu'il est possible de la dériver temporellement, ce qui donne :

$$\boxed{\boldsymbol{\dot{\vec{p}} = m\,\dot{\vec{v}} = m\,\vec{a} = \vec{F}}}$$

(ceci n'est valable que si la masse est constante). On retombe sur une nouvelle formulation du Principe fondamental de la Dynamique où la résultante des forces $\vec{F}$ est égale à la dérivée temporelle de la quantité de mouvement $\vec{p}$. Cette relation se généralisera lorsque la masse m du corps étudié varie (par exemple pour une fusée) ou en Relativité.

4) Principe de l'action et de la réaction (Troisième loi de Newton) :

Si un point matériel A exerce une force sur un point matériel B, notée $\overrightarrow{F_{A\to B}}$, alors réciproquement le point B exerce sur A une force de norme et de direction équivalente mais de sens opposé, notée $\overrightarrow{F_{B\to A}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{A}}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}}}}$$

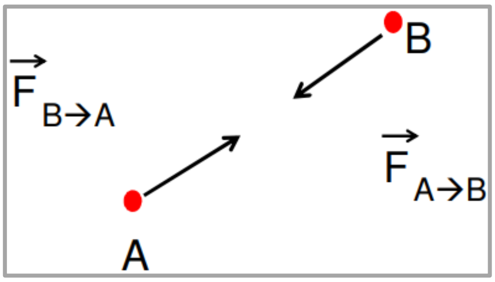


Figure 4 - Schéma du principe de l'action et de la réaction

En conséquence, les forces internes exercées par une partie d'un système sur une autre partie s'annulent deux à deux.

5) Exemples :

a) Déplacement d'une caisse sur un chariot :

On considère une caisse posée sur un chariot et poussée horizontalement par un opérateur, le tout repéré en base cartésienne. Quatre forces sont mises en jeu : la force exercée par l'opérateur $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{opérateur}}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{opérateur}}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$, la force de pesanteur subie par la caisse $\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{pesanteur}}} = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{pesanteur}}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ et les deux forces exercées par les roues $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} = \boldsymbol{F_1}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} = \boldsymbol{F_2}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ opposées à la force de pesanteur (les trois dernières forces suivent le principe de l'action et de la réaction).

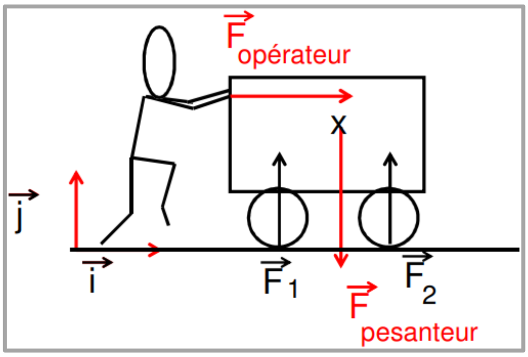


Figure 5 - Schéma de la situation

Le bilan des forces donne pour ce système :

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{F_{opérateur}} + \overrightarrow{F_{pesanteur}} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = F_{opérateur}\,\vec{\imath} + \left(F_1 + F_2 - F_{pesanteur}\right)\vec{\jmath}}$$

Afin d'appliquer le Principe fondamental de la Dynamique, on projette toujours les vecteurs sur les axes (on rappelle que le vecteur unitaire $\vec{\imath}$ suit l'axe x et le vecteur unitaire $\vec{\jmath}$ suit l'axe y). On a alors :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{m\,\ddot{x} = F_{opérateur}} \\ \boxed{m\,\ddot{y} = F_1 + F_2 - F_{pesanteur}} \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement vertical ($\boldsymbol{y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0}$), ce qui implique que :

$$\boxed{F_1 + F_2 - F_{pesanteur} = 0}$$

Le sol compense donc exactement la pesanteur terrestre. L'équation de l'accélération suivant x vaut alors :

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{F_{opérateur}}{m}}$$

Le mouvement étant uniquement horizontal, on peut remonter à la vitesse $v(t)$ et à la position $x(t)$ par intégration temporelle (on considérera que la force de l'opérateur est constante) :

$$v(t) = \int \ddot{x}\,dt = \dot{x} = \int \frac{F_{opérateur}}{m}\,dt = \frac{F_{opérateur}}{m}\int dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v(t) = \frac{F_{opérateur}}{m}t + v_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\frac{F_{opérateur}}{m}t + v_0\right)dt = \frac{F_{opérateur}}{m}\int t\,dt + v_0\int dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = \frac{F_{opérateur}}{2m}t^2 + v_0 t + x_0}$$

(avec x_0 et v_0 les constantes d'intégrations correspondant à la position et la vitesse initiale du système).

b) Chute libre dans un champ de pesanteur :

On considère une pomme de masse m tombant en chute libre dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ suivant x et des positions initiales en $\boldsymbol{x_0 = 0}$ et en $\boldsymbol{y_0 = 1.5\ m}$.

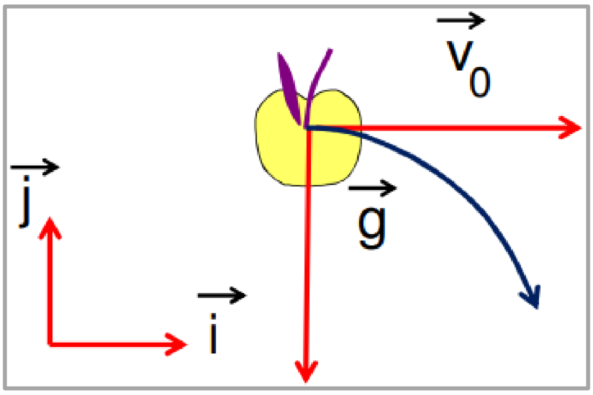


Figure 6 - Schéma de la situation

La seule force agissant sur le système est le poids $\vec{P}$, donc le Principe fondamental de la Dynamique donne en projetant les différents vecteurs sur les axes :

$$\boldsymbol{\vec{F} = \vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{x} = 0} \\ \boxed{\ddot{y} = -g} \end{cases}}$$

Le déplacement du système se faisant sur les deux axes, on intègre temporellement chaque équation pour obtenir les vitesses et les positions sur chaque composante :

$$\boldsymbol{\begin{cases} \boxed{v_x(t) = \dot{x}(t) = \int 0\,dt = v_0} \\ \boxed{v_y(t) = \dot{y}(t) = \int -g\,dt = -gt} \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x(t) = \int v_0\,dt = v_0 t + x_0 = v_0 t} \\ \boxed{y(t) = \int -gt\,dt = -g\frac{t^2}{2} + y_0} \end{cases}}$$

(avec v_0 la composante de la vitesse initiale selon x, étant nulle selon y).

De ces deux équations, on peut en tirer l'équation de la trajectoire, ce qui donne :

$$\boldsymbol{x(t) = v_0 t \Leftrightarrow \boxed{t(x) = \frac{x}{v_0}} \Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + y_0}}$$

C'est l'équation d'une trajectoire parabolique.

II- Energie, puissance et travail :

1) Objectifs :

Les deux buts de cette partie sont de chercher les quantités qui restent constantes au cours du mouvement de l'objet (on parle alors d'une intégrale première) et de déterminer leurs variations lorsqu'elles ne sont pas constantes.

Par exemple, si le point matériel étudié est isolé (que la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle), la quantité de mouvement $\vec{p}$ est une constante du mouvement ($\boldsymbol{\dot{\vec{p}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = cste}$). Si le point n'est pas isolé, $\vec{p}$ n'est plus une constante du mouvement et sa dérivée temporelle est égale à $\vec{F}$ ($\boldsymbol{\dot{\vec{p}} = \vec{F}}$).

Les grandeurs importantes en Mécanique sont la quantité de mouvement $\vec{p}$, les énergies cinétique E_c, potentielle E_p, mécanique $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p}$, et le moment cinétique $\vec{L}$.

2) Energie cinétique :

On définit l'énergie cinétique E_c d'un corps de masse m à une vitesse $\vec{v}$ comme :

$$\boxed{\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mv^2}}$$

Il existe un lien entre l'énergie cinétique et la quantité de mouvement. En effet, si on dérive temporellement l'énergie cinétique, on obtient :

$$\boldsymbol{\dot{E}_c = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}m\,2\left(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}\right) = \vec{v}\cdot m\dot{\vec{v}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\dot{E}_c = \vec{v}\cdot\dot{\vec{p}}}}$$

(avec $\boldsymbol{v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}}$ et $\boldsymbol{\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 2(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}$). En conséquence, si la quantité de mouvement est conservée ($\boldsymbol{\dot{\vec{p}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = cste}$) alors l'énergie cinétique est aussi conservée ($\boldsymbol{\dot{E}_c = \vec{v} \cdot 0 = 0 \Rightarrow E_c = cste}$). Dans ce cas, puisque l'énergie cinétique E_c est constante, alors le module de la vitesse $\|\vec{v}\|$ est aussi constant, induisant que le mouvement du point correspondant est uniforme. Cependant, l'inverse n'est pas vrai car la quantité de mouvement $\vec{p}$ est relié au module de la vitesse et à son orientation (c'est une grandeur vectorielle) tandis que l'énergie cinétique E_c n'est reliée qu'au module de vitesse (c'est une grandeur scalaire).

L'unité de l'énergie cinétique, tout comme toute énergie, s'exprime en Joule ($\boldsymbol{J}$, du nom de James Prescott Joule (1818 – 1889)) dans le Système International, où $\boldsymbol{1\,J = 1\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$.

3) Travail d'une force :

On définit le travail élémentaire d'une force dW_F lors d'un déplacement élémentaire (ou infinitésimal) du point matériel $d\overrightarrow{OM}$ par :

$$\boxed{\boldsymbol{dW_F = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}}$$

C'est une grandeur scalaire et non vectorielle, équivalente à une énergie. Si $\vec{F}$ est la résultante des forces $\vec{F_\iota}$, on peut définir pour chaque force son travail élémentaire ($\boldsymbol{dW_{F_i} = \vec{F_\iota} \cdot d\overrightarrow{OM}}$). On a alors :

$$\boxed{\boldsymbol{dW_F = \sum_i dW_{F_i} = \sum_i \vec{F_\iota} \cdot d\overrightarrow{OM}}}$$

4) Puissance d'une force :

Le travail d'une force est l'énergie fournie par cette force lors d'un déplacement du point matériel M. La puissance de cette force $\vec{P}$ est la dérivée temporelle de son travail dW_F :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{P} = \frac{dW_F}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}}$$

(en considérant que la force est constante au cours du temps). C'est aussi une grandeur scalaire car étant le résultat du produit scalaire de deux vecteurs, la force et la vitesse.

Par définition du produit scalaire, on peut réécrire la formule de la puissance comme :

$$\boxed{\vec{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F\, v \cos\theta}$$

(avec θ l'angle entre les deux vecteurs). L'unité de la puissance est le Watt ($\boldsymbol{W}$, du nom de James Watt (1736 – 1819)) ou le Joule par seconde ($\boldsymbol{J \cdot s^{-1}}$).

5) Lien entre la puissance et l'énergie cinétique :

On connait la dérivée temporelle de l'énergie cinétique ($\dot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \dot{\vec{\boldsymbol{p}}}$). Or, on connaît aussi la dérivée temporelle de la quantité de mouvement ($\dot{\vec{\boldsymbol{p}}} = \vec{\boldsymbol{F}}$). En injectant la seconde relation dans la première, on obtient :

$$\boxed{\dot{E}_c = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{P}}$$

La variation d'énergie cinétique $\dot{E}_c$ est donc reliée à la puissance $\vec{P}$ de la résultante des forces $\vec{F}$. Il existe trois cas possibles concernant le résultat de cette équation :

- Si le produit scalaire entre la force et la vitesse est positif ($\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} > \boldsymbol{0}$), l'énergie cinétique (et donc la vitesse) augmente avec le temps : on dit que la puissance est « motrice ».
- Si le produit scalaire entre la force et la vitesse est négatif ($\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} < \boldsymbol{0}$), l'énergie cinétique (et donc la vitesse) diminue avec le temps : on dit que la puissance est « résistante ».
- Si le produit scalaire entre la force et la vitesse est nul ($\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0}$), la force est perpendiculaire à la vitesse : le mouvement est uniforme.

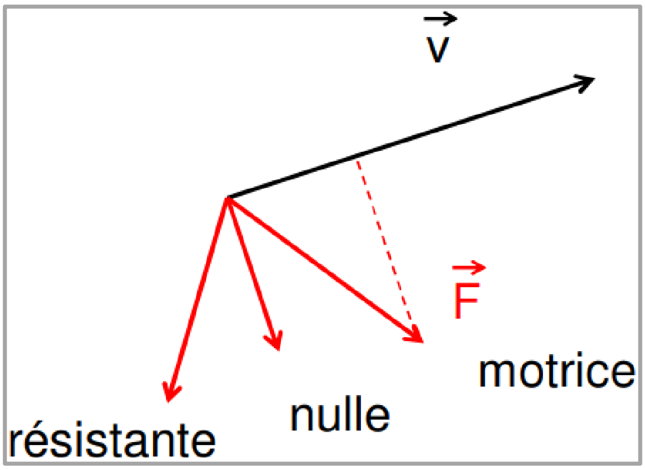


Figure 7 - Illustration des orientations des vecteurs vitesse et force pour une puissance motrice, nulle et résistante

6) *Théorème de l'énergie cinétique :*

On considère un corps suivant un trajet quelconque à une vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{F}$. On prend le corps à deux temps t_1 et t_2, donc avec deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{F}$ différents, donc avec deux énergies cinétiques $E_c(t_1)$ et $E_c(t_2)$ différentes.

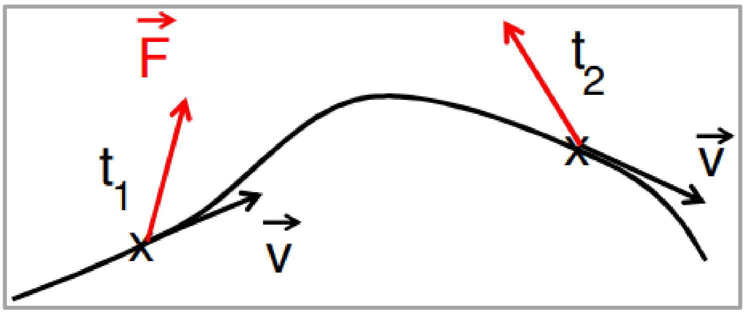


Figure 8 - Schéma de la situation

Cela correspond donc à faire l'intégrale de la variation temporelle d'énergie cinétique entre les deux temps t_1 et t_2, qui s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_c\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt = W_F}}$$

(car $\boldsymbol{\int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_c\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dE_c = E_c(t_2) - E_c(t_1)}$ et avec $\boldsymbol{W_F = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\, dt}$ le travail de la résultante des forces $\vec{F}$ sur la trajectoire). Ce résultat est celui du théorème de l'énergie cinétique, qui est énoncé de la façon suivante : « *Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux points de la trajectoire est égale au travail de la résultante des forces entre ces points.* ».

Exercice – Vitesse de chute libre d'un champ de pesanteur :

On considère une pomme de masse m lâchée d'une hauteur h sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. Le système suit la variation de position $\Delta\overrightarrow{OM}$ verticale dirigée vers le bas.

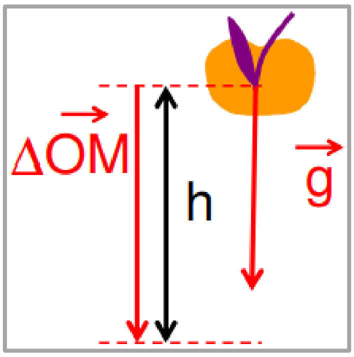


Figure 9 - Schéma de la situation

On cherche à connaître la vitesse $\vec{v}$ atteinte par la pomme après avoir chuté de la hauteur h. Le système passe par deux états : l'état initial $\mathbf{1}$ où on lâche la pomme sans vitesse initiale, donc sans énergie cinétique ($\overrightarrow{v_0} = \vec{0} \Rightarrow E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$) ; l'état initial $\mathbf{2}$ se trouvant à la fin de la hauteur h, donc ayant une énergie cinétique du fait de la chute ($E_{c_2} = \frac{1}{2}mv^2$). Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\boxed{E_{c_2} - E_{c_1} = W_F}$$

(avec W_F le travail de la résultante des forces $\vec{F}$). Ici, la seule force agissant sur le système est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ qui est constante, donc son travail W_P vaut :

$$\boxed{W_P = \int_1^2 dW_P = \int_1^2 \vec{P} \cdot d\overrightarrow{OM} = mg \cdot \Delta\overrightarrow{OM} = mgh}$$

Ainsi, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Leftrightarrow v^2 = 2gh$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

7) *Energie potentielle :*

a) Force conservative :

Une force est dite « conservative » si :

- La puissance de la force est nulle ($\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$). Comme exemples de cas de forces à puissance nulle, il y a le champ magnétique (car la force est perpendiculaire à la vitesse), la réaction du sol sans frottements (car elle est verticale pour un mouvement horizontal) et la tension d'un fil inextensible (car la vitesse de la masse est orthogonale au fil).
- La force dérive d'un potentiel. On suppose qu'il existe une fonction qui ne dépend explicitement que des coordonnées x, y et z, notée $E_p(x, y, z)$, appelée « énergie potentielle » :

$$\boxed{dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz}$$

On avait défini le travail élémentaire d'une force dW_F comme :

$$\boxed{\boldsymbol{dW_F = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = F_x dx + F_y dx + F_z dx}}$$

En posant $\boldsymbol{dE_p} = -\boldsymbol{dW_F}$ (signé négativement car du point de vue de l'observateur), on obtient par identification :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = -F_x dx - F_y dx - F_z dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -F_x - F_y - F_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla} E_p}$$

(avec l'opérateur gradient $\vec{\nabla}$ composé des dérivées partielles spatiales selon x, y et z). On dit alors que la force $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle E_p.

b) Remarques :

On a supposé qu'il existe une fonction E_p uniquement des variables d'espace (x, y, z). Ce n'est pas toujours le cas. Certaines forces ne dérivent pas d'un potentiel.

L'énergie potentielle E_p est définie à une constante additive près.

La relation supposée implique que, si on fait la dérivée de la formule :

$$\boxed{\frac{dE_p}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} = -\vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}}$$

(dans le cas où la force est constante au cours du temps).

c) Exemples de forces conservatives :

Voici quelques exemples de forces conservatives :

- La pesanteur terrestre : On considère un corps en chute libre. On choisit une base cartésienne avec son origine au sol et le vecteur unitaire $\vec{k}$ dirigé vers lui. La seule force agissant sur le système est le poids $\boldsymbol{\vec{P} = mg\,\vec{k}}$.

La force dérivant d'un potentiel, on peut écrire :

$$\vec{P} = -\vec{\nabla}E_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{dE_p}{dz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dE_p}{dz} = -mg}$$

On obtient l'énergie potentielle E_p par intégration, ce qui donne :

$$\int \frac{dE_p}{dz} = -\int mg \Leftrightarrow \int dE_p = -mg \int dz$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_p = -mgz + C}$$

(avec z correspondant à l'altitude et C une constante d'intégration). Puisque l'origine est au sol ($\boldsymbol{z = 0}$ donc l'énergie potentielle en ce point est nulle), on peut obtenir la valeur de la constante d'intégration C en calculant l'énergie potentielle à ce point :

$$E_p(z = 0) = -mg \times 0 + C = 0 \Leftrightarrow \boxed{C = 0}$$

L'énergie potentielle dans ce cas est finalement :

$$\boxed{E_p = -mgz}$$

Si l'origine de la base cartésienne est positionnée à la hauteur h où est lâchée le corps, la solution de l'énergie potentielle est la même excepté que la constante d'intégration C sera différente (puisqu'on dit qu'à $\boldsymbol{z = h}$, l'énergie potentielle est nulle) :

$$E_p(z = h) = -mgh + C = 0 \Leftrightarrow \boxed{C = mgh}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -mgz + mgh}$$

- La force de rappel du ressort : On considère un ressort de longueur à vide l_0 (sans masse accrochée) accroché de façon horizontale. On l'étire horizontalement d'une longueur $\boldsymbol{x = l - l_0}$ (avec l la longueur d'élongation du ressort) en exerçant une force $\overrightarrow{F_{opérateur}}$ opposée à la force de rappel du ressort $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{ressort}}} = \boldsymbol{-Kx\,\vec{\imath}}$ (avec K la raideur du ressort). On prend une base cartésienne dont l'origine O est située à l'extrémité non accrochée du ressort à vide.

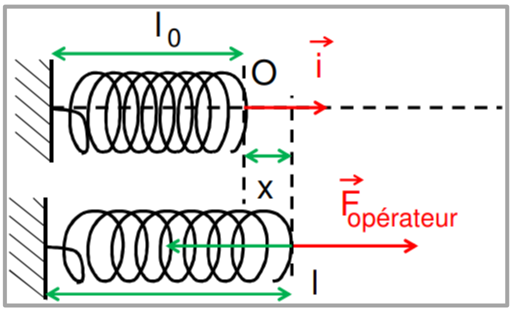


Figure 10 - Schéma de la situation

La force dérivant d'un potentiel, on peut écrire :

$$\overrightarrow{F_{ressort}} = -\vec{\nabla} E_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -Kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{dE_p}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dE_p}{dx} = -Kx}$$

Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dE_p}{dx} = -\int Kx \Leftrightarrow \int dE_p = -K \int x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_p = -\frac{K}{2} x^2 + C}$$

(avec x l'élongation horizontale du ressort). Le choix de l'origine permet d'avoir $\boldsymbol{x = 0}$, ce qui donne une constante d'intégration nulle et on obtient finalement :

$$\boxed{E_p = -\frac{K}{2} x^2}$$

- La force électrostatique ou la force de gravitation : On considère deux charges q_1 et q_2 (deux corps massiques m_1 et m_2) dont on place une base polaire avec l'origine placée à l'infini et la distance r entre les deux dirige le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_r}$. La première applique une force de Coulomb (force de gravitation) sur la seconde $\overrightarrow{F_{2\to 1}^C} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1\, q_2}{r^2} \overrightarrow{u_r}$ ($\overrightarrow{F_{2\to 1}^G} = G \frac{m_1\, m_2}{r^2} \overrightarrow{u_r}$).

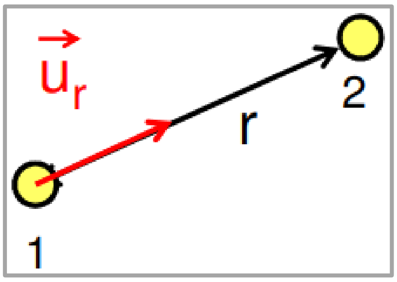


Figure 11 - Schéma de la situation

En posant $K = -\frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0} = Gm_1\, m_2$, on peut obtenir une force générique qui correspond à la fois à la force de Coulomb et la force de gravitation ($\overrightarrow{F_{2\to 1}} = \frac{K}{r^2} \overrightarrow{u_r}$).

La force dérivant d'un potentiel, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F_{2\to1}}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{E_p} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r^2}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{dE_p}}{\boldsymbol{dr}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{dE_p}}{\boldsymbol{dr}} = -\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r^2}}}$$

Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{\boldsymbol{dE_p}}{\boldsymbol{dr}} = -\int \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r^2}} \Leftrightarrow \int \boldsymbol{dE_p} = -\boldsymbol{K}\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r^2}}\boldsymbol{dr}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{E_p} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C}}$$

Le choix de l'origine permet d'avoir $\frac{1}{r} = \mathbf{0}$ donc la constante d'intégration sera nulle et on obtient finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{E_p} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r}}}$$

Ici, la distance r correspond au calcul :

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \sqrt{(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})^2 + (\boldsymbol{y_1} - \boldsymbol{y_2})^2 + (\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2})^2}}$$

(avec x_1, y_1 et z_1 les positions selon les trois coordonnées de l'espace cartésien du premier point). Pour calculer la force agissant sur le premier point, il faut calculer le gradient par rapport à ce point :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_{2\to1}}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla_1}}\boldsymbol{E_p} = -\frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial x_1}}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial y_1}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial z_1}}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

On a alors pour le second point :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_{1\to2}}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla_2}}\boldsymbol{E_p} = -\frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial x_2}}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial y_2}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\boldsymbol{\partial E_p}}{\boldsymbol{\partial z_2}}\vec{\boldsymbol{k}}}$$

On retrouve bien la troisième loi de Newton.

- La force magnétique : On considère une particule chargée q à une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ orienté perpendiculairement à son mouvement. La particule subit la force magnétique de Laplace $\overrightarrow{\boldsymbol{F_L}} = \boldsymbol{q}\,\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$.

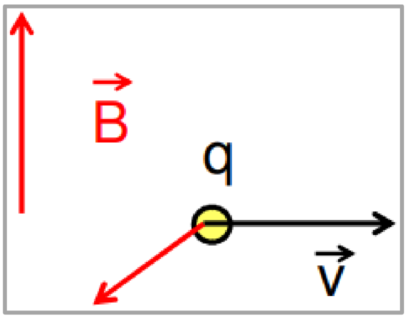


Figure 12 - Schéma de la situation

La force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$ est, par définition du produit vectoriel, orthogonale à la vitesse $\vec{v}$ et au champ magnétique $\vec{B}$ ($\overrightarrow{\boldsymbol{F_L}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$), elle ne dérive donc pas d'un potentiel, mais elle est « conservative ».

Généralement, les interactions fondamentales de la Physique sont conservatives.

d) Exemples de forces non-conservatives :

Les forces non-conservatives sont généralement les forces de frottement fluide (visqueux) et solide :

- Frottement visqueux : On considère la chute d'une bille dans une colonne d'eau, gagnant une vitesse $\vec{v}$ au cours de son mouvement mais subissant une force de frottement visqueux $\overrightarrow{\boldsymbol{F_{visc}}} = -\boldsymbol{k}\,\vec{\boldsymbol{v}}$ dirigée dans le sens opposé.

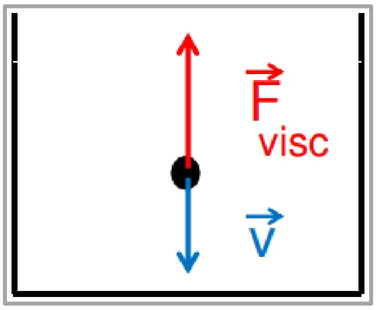


Figure 13 - Schéma de la situation

La force de frottement visqueux dépend explicitement de la vitesse, ce qui implique notamment que sa puissance est non nulle ($\boldsymbol{P} = \overrightarrow{\boldsymbol{F_{visc}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{v}^2 \neq \boldsymbol{0}$). Elle ne peut donc pas s'écrire comme le gradient d'un potentiel qui ne dépend que de la position.

- Frottement solide : On considère un solide en déplacement sur le sol d'une vitesse $\vec{v}$, subissant son poids apparent $\vec{N}$ et une force de friction solide

$\overrightarrow{F_{friction}} = -\mu N\,\vec{i}$ (avec N la valeur du poids apparent et μ le coefficient de frottement qui dépend du matériau).

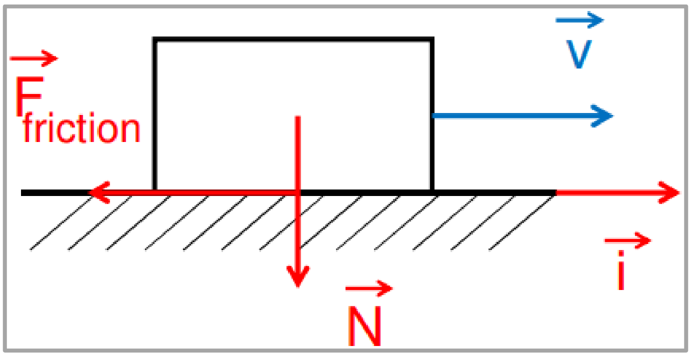


Figure 14 - Schéma de la situation

Cette force est non conservative car son sens dépend de la vitesse (par ailleurs, elle est toujours opposée à la vitesse).

e) Travail d'une force dérivant d'un potentiel :

Le travail W_{F_i} d'une force $\vec{F_i}$ qui dérive d'un potentiel est la différence entre les énergies potentielle initiale $E_{p,i}^{initiale}$ et finale $E_{p,i}^{finale}$:

$$\boxed{W_{F_i} = E_{p,i}^{initiale} - E_{p,i}^{finale}}$$

En effet, par définition du travail et de la dérivée de l'énergie potentielle ($\dot{E}_p = \frac{dE_p}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$) :

$$W_{F_i} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F_i}(t) \cdot \vec{v}(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_{p,i}}{dt}\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dE_{p,i} = -\left(E_{p,i}(t_2) - E_{p,i}(t_1)\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_{F_i} = E_{p,i}(t_1) - E_{p,i}(t_2)}$$

f) Définition de l'énergie potentielle d'un point matériel :

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\boldsymbol{F_c}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{nc}}}$ la résultante des forces, composée de la résultante des forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$ et de la résultante des forces non-conservatives $\overrightarrow{F_{nc}}$. Puisqu'une force conservative dérive d'un potentiel ($\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{E_p}$) et que la résultante des forces conservatives est la somme des forces conservatives s'appliquant sur le point matériel considéré ($\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}} = \sum_i \overrightarrow{\boldsymbol{F_{c,\iota}}}$), alors l'énergie potentielle du point est la somme des énergies potentielles dont dérivent les forces conservatives qui y agissent :

$$\boxed{\boldsymbol{E_p} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{E_{p,i}}}$$

Si la force est de puissance nulle, elle n'intervient pas dans la somme.

g) Equilibre et stabilité :

On considère un paysage quelconque composé de collines, vallées et montagnes. On prend une boule que l'on peut poser à certains endroits du paysage. La seule force exercée sur cette boule est le poids $\overrightarrow{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\overrightarrow{\boldsymbol{g}}$, donc elle dérive d'une énergie potentielle de pesanteur $\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{mgh}$, dépendant de la hauteur h où se trouve le système.

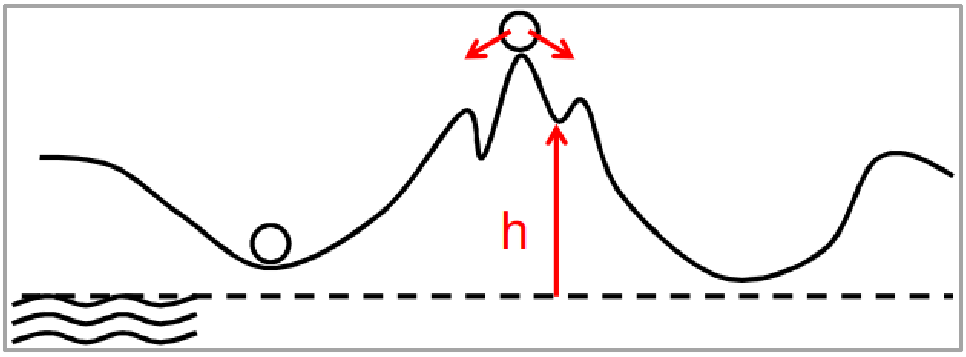


Figure 15 - Schéma de la situation

Les extrema d'énergie potentielle sont les endroits où le gradient de l'énergie potentielle est nul, cela correspond donc à une résultante des forces conservatives nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{E_p} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_c}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{E_p} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}}$$

Les extrema d'énergie potentielle (maxima et minima) sont des positions d'équilibre : si le système est placé avec une vitesse nulle sur un extremum, il doit y rester. Une position d'équilibre est stable si elle est insensible à des petites perturbations. Les maximas sont instables, les minima sont stables.

Pour connaître la position d'un extrema, dans un cas à une dimension, on calcule sa dérivée spatiale dans le cas où elle est nulle :

$$\boxed{\frac{dE_p}{dx} = E'_p(x) = 0}$$

En calculant ensuite sa dérivée spatiale seconde $\frac{d^2E_p}{dx^2} = E''_p(x)$ au point donné, on peut connaître sa nature : maximum si $E''_p(x) < 0$ et minimum si $E''_p(x) > 0$.

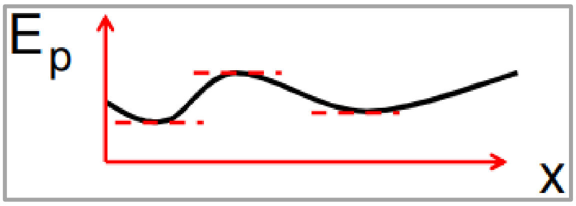


Figure 16 - Position spatiale en une dimension des extrema d'énergie potentielle

8) Energie mécanique :

On connaît la dérivée temporelle de l'énergie cinétique $\dot{E}_c = \vec{v} \cdot \vec{F}$ (avec $\vec{F} = \vec{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}$ la résultante des forces sur le point mobile). En développant, on obtient :

$$\dot{E}_c = \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_c + F_{nc}} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_c} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_{nc}} = -\dot{E}_p + \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_{nc}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(E_c \dot{+} E_p\right) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_{nc}}}$$

L'énergie mécanique E_m est la somme de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_i E_{p,i}}$$

Le théorème de l'énergie mécanique est défini par l'équation précédente :

$$\boxed{\dot{E_m} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{F_{nc}}}$$

(avec $\overrightarrow{F_{nc}}$ la résultante des forces non-conservatives qui agissent sur le point matériel). Cela correspond à la puissance des forces non-conservatives.

La variation d'énergie mécanique entre deux points de la trajectoire est égale au travail des forces non-conservatives entre ces deux mêmes points :

$$\boxed{\boldsymbol{E_m(t_2) - E_m(t_1) = W_{F_{nc}}}}$$

Dans un référentiel galiléen, si aucune force non-conservative n'agit sur le système (le point matériel), son énergie mécanique est conservée : l'énergie globale de l'univers est conservée.

Exercice – Vitesse de chute dans un champ de pesanteur :

On considère une pomme en chute libre, lâchée sans vitesse initiale à une altitude initiale h. Le repère orthonormé est dirigé de telle sorte que le vecteur unitaire $\vec{j}$ soit dans le sens opposé de l'accélération de pesanteur terrestre et son origine est à l'autre bout de la hauteur h où se situe la pomme.

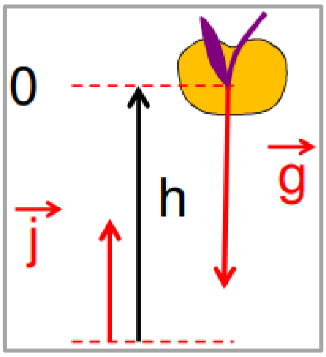


Figure 17 - Schéma de la situation

À l'état initial, l'énergie cinétique $E_c^{initiale}$ est nulle car la vitesse $\vec{v}$ est nulle donc l'énergie mécanique $E_m^{initiale}$ est égale à l'énergie potentielle $\boldsymbol{E_p^{initiale} = mgh}$. À l'état final, l'énergie potentielle E_p^{finale} est nulle car la hauteur h est nulle donc l'énergie mécanique E_m^{finale} est égale à l'énergie cinétique $\boldsymbol{E_c^{finale} = \frac{1}{2}mv_h^2}$ (avec v_h la vitesse de l'objet à la hauteur h). Par le théorème de l'énergie mécanique, la différence d'énergie mécanique entre l'état initial et final est égale au travail des forces non-conservatives $W_{F_{nc}}$, or la seule force agissant sur le système est conservative, donc le travail est nul, ce qui donne :

$$\boldsymbol{E_m^{finale} - E_m^{initiale} = W_{F_{nc}} = 0 \Leftrightarrow E_m^{finale} = E_m^{initiale} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_h^2 = mgh}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{v_h = \sqrt{2gh}}}$$

Dans le cas où la pomme possède une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, le terme d'énergie cinétique initiale n'est plus nul et on a finalement :

$$\boldsymbol{E_m^{finale} = E_m^{initiale} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_h^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{v_h^2 - v_0^2 = 2gh}}$$

La conservation de l'énergie mécanique permet d'avoir le module de la vitesse $\overrightarrow{v_h}$ à la hauteur h mais pas son orientation.

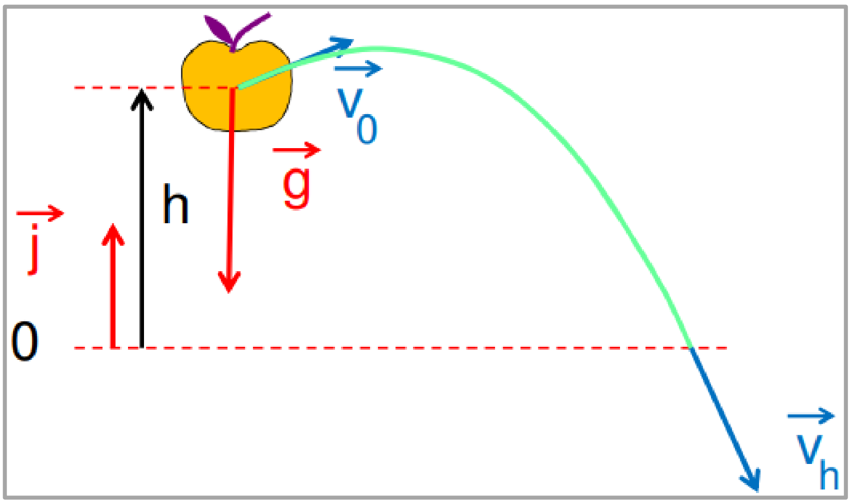


Figure 18 - Trajectoire du système étudié et vitesse initiale et à la hauteur h

III- Moment cinétique :

1) Définition :

Le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O dans un référentiel donné est défini par :

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{L_O}(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t)}}$$

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}(t)$ est perpendiculaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et au vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Il est donc perpendiculaire sur le plan contenant les deux autres vecteurs.

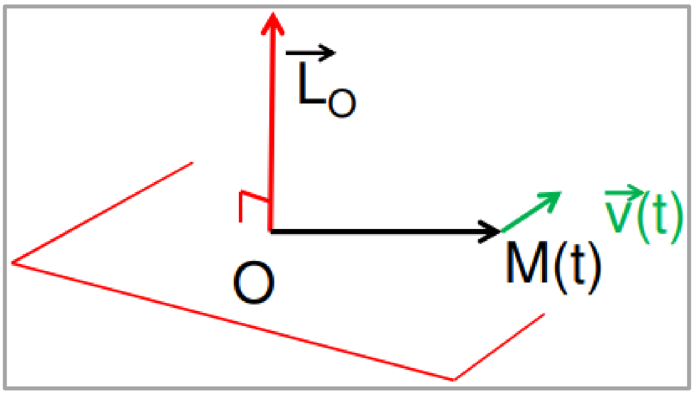


Figure 19 - Représentation vectorielle du moment cinétique et orthogonalité avec le plan contenant les vecteurs position et vitesse

2) Théorème du moment cinétique :

En dérivant temporellement le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}(t)$, on obtient :

$$\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{L_O}}}(\boldsymbol{t}) = \left(\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t})\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}(\boldsymbol{t}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) \wedge \boldsymbol{m}\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}(\boldsymbol{t})$$

$$= \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{L_O}}}(\boldsymbol{t}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) \wedge \vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})}$$

(avec $\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})$ la résultante des forces).

3) Conservation du moment cinétique :

Il y a conservation du moment cinétique ($\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{L_O}}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{0}}$) si :

- La résultante des forces est nulle ($\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t}) = \vec{\boldsymbol{0}}$).
- La résultante des forces est dirigée suivant le vecteur position, ce qui est le cas pour tout mouvement dit « à force centrale » avec O le centre de force.

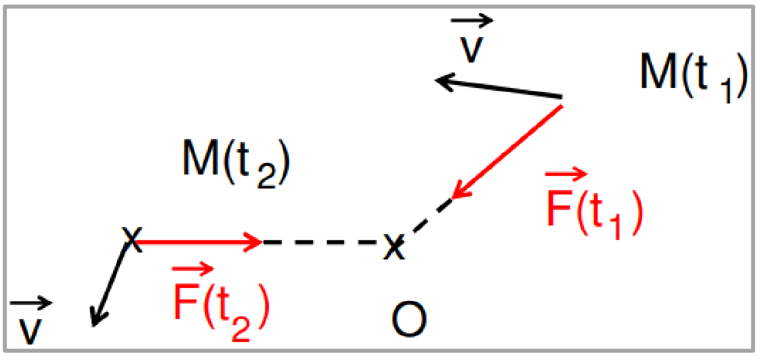


Figure 20 - Représentation d'un mouvement à force centrale