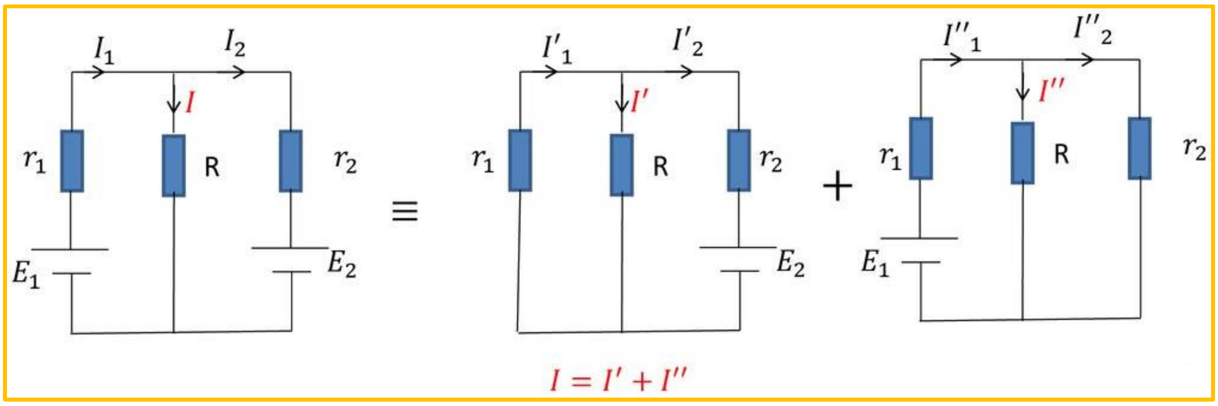
CM – Bases de l’Electricité

Chapitre 0.2 : Théorèmes et schémas équivalents



I- Théorème de superposition :

D’un point de vue épistémologique, le principe de superposition permet d’utiliser une démarche de type « analyse » et « synthèse » : on découpe un problème en sous-problèmes indépendants puis on étudie chaque sous-problème afin de les sommer pour obtenir la solution du problème originel.

Dans le cas des circuits électriques composés exclusivement d’éléments linéaires (résistances, condensateurs, inductances, générateurs de tension ou de courant indépendants), la réponse (courant, tension) dans une branche est égale à la somme des réponses pour chaque générateur indépendant pris de façon isolée, en passivant tous les autres générateurs indépendants.

Passiver un générateur de tension idéal correspond à le remplacer par un court-circuit (un fil), passiver un générateur de courant idéal correspond à le remplacer par un circuit ouvert.

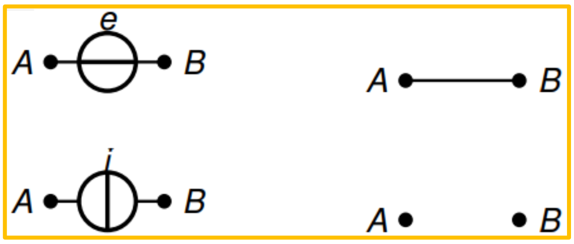


Figure 1 - Générateurs de tension et de courant parfaits avant passivation (à gauche) et après passivation (à droite)

Exemple :

On considère un circuit composé de deux générateurs de tension parfaits E_1 et E_2 associés en série chacun à deux résistances R_1 et R_2, formant deux branches distinctes reliées en parallèle à une troisième qui contient une résistance R_3 dont on cherche la tension U_3 et le courant I_3.

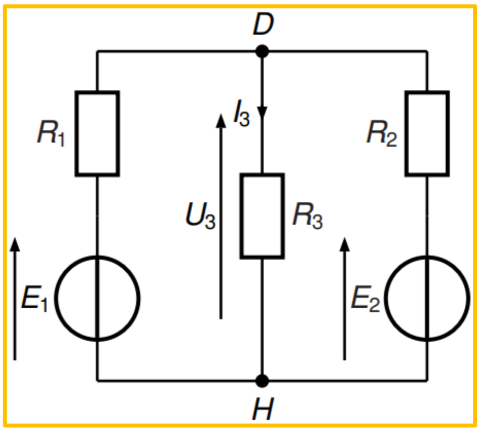


Figure 2 - Schéma d'un circuit quelconque à deux générateurs de tension parfaits

Pour résoudre ce problème, on utilise le théorème de superposition. On commence par passiver E_2 et on cherche la tension U_{31} et le courant I_{31} dues à E_1 seule.

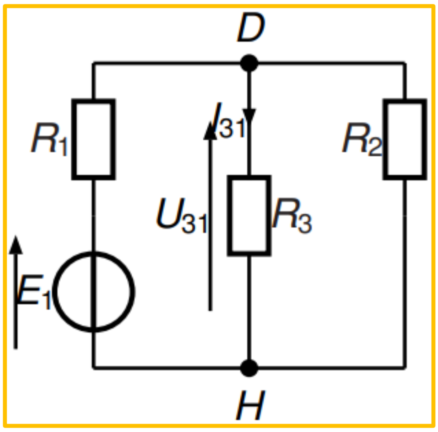


Figure 3 - Schéma précédent avec le générateur E_2 passivé

Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle, on peut donc les remplacer par une résistance équivalente R_{eq} qui vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{R_{eq} = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}}$$

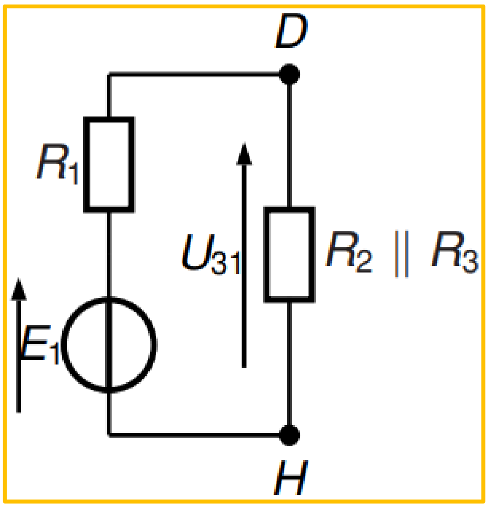


Figure 4 - Schéma précédent avec la résistance équivalente $R_2 \parallel R_3$

La tension U_{31} est la tension aux bornes de la résistance équivalente qui est en série avec R_1. On peut utiliser la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{31} = E_1 \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = E_1 \frac{\frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}}}$$

Le courant I_{31} est le courant qui traverse la résistance R_3. On peut utiliser la loi d'Ohm associée à cette résistance :

$$\boldsymbol{U_{31} = R_3\, I_{31} \Leftrightarrow I_{31} = \frac{U_{31}}{R_3} = \frac{E_1 \frac{\frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}}{R_3}}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \boxed{I_{31} = E_1 \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}}}$$

On continue en passivant E_1 et on cherche la tension U_{32} et le courant I_{32} dues à E_2 seule.

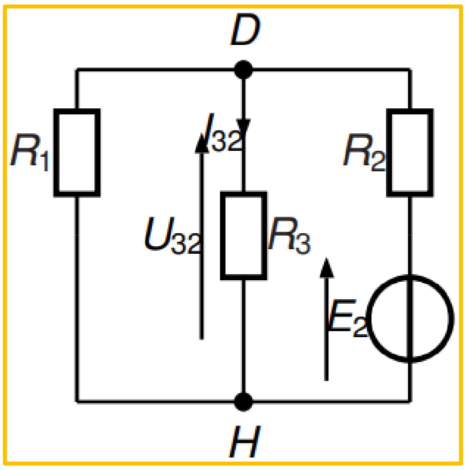


Figure 5 - Schéma précédent avec le générateur E_1 passivé

Les résistances R_1 et R_3 sont en parallèle, on peut donc les remplacer par une résistance équivalente R_{eq} qui vaut :

$$\boxed{R_{eq} = R_1 \parallel R_3 = \frac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}$$

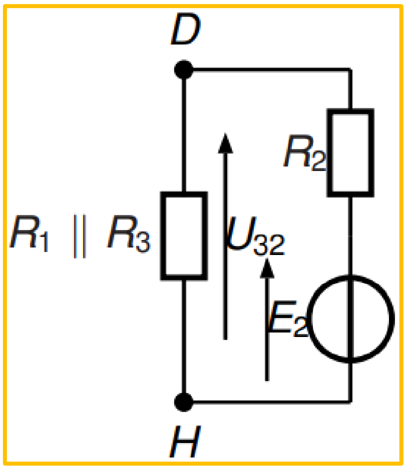


Figure 6 - Schéma précédent avec la résistance équivalente $R_1 \parallel R_3$

La tension U_{32} est la tension aux bornes de la résistance équivalente qui est en série avec R_2. On peut utiliser la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{U_{32} = E_2 \frac{R_1 \parallel R_3}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} = E_2 \frac{\dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}}$$

Le courant I_{32} est le courant qui traverse la résistance R_3. On peut utiliser la loi d'Ohm associée à cette résistance :

$$\boldsymbol{U_{32} = R_3\, I_{32} \Leftrightarrow I_{32} = \frac{U_{32}}{R_3} = \frac{E_2 \dfrac{\dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}}{R_3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{I_{32} = E_2 \frac{\dfrac{R_1}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}}}$$

La solution finale est donc la somme des solutions des sous-problèmes qui ont été résolus, soit :

$$\boxed{\boldsymbol{U_3 = U_{31} + U_{32} = E_1 \frac{\dfrac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \dfrac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}} + E_2 \frac{\dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_3 = I_{31} + I_{32} = E_1 \frac{\dfrac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \dfrac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}} + E_2 \frac{\dfrac{R_1}{R_1 + R_3}}{R_2 + \dfrac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}}}}$$

II- Théorème de Thévenin :

1) Point de fonctionnement d'un dipôle :

L'association d'un générateur réel (E_0, R_0) (composé ici d'un générateur de tension parfait associé en série avec une résistance) et d'une charge R_{ch} (une résistance quelconque) fixe le point de fonctionnement du circuit.

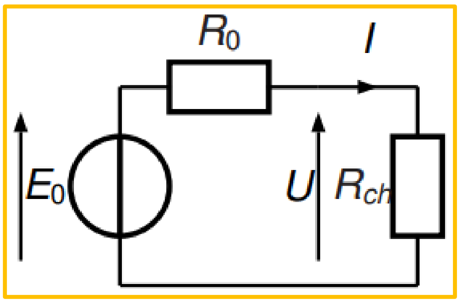


Figure 7 - Schéma de la situation décrite

Le point de fonctionnement est déterminé par l'intersection des caractéristiques du générateur réel et de la charge. La tension E_0 est la « force électromotrice » $(f.e.m.)$ à vide (pour un courant nul), R_0 est la résistance interne du générateur.

Les équations régissant le générateur et la charge sont :

$$\boxed{U = E_0 - R_0\, I}\ ;\ \boxed{U = R_{ch}\, I}$$

Le point de fonctionnement est alors défini par :

$$U = E_0 - R_0\, I = R_{ch}\, I \Leftrightarrow E_0 = R_0\, I + R_{ch}\, I \Leftrightarrow E_0 = (R_0 + R_{ch})I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{E_0}{R_0 + R_{ch}}}$$

$$\boxed{U = E_0 \frac{R_{ch}}{R_0 + R_{ch}}}$$

(la seconde formule provient du pont diviseur de tension). Graphiquement parlant, si on trace l'évolution de la tension U aux bornes de la charge en fonction du courant I qui la parcourt, le point de fonctionnement est le point de croisement entre les deux équations qui régissent le générateur et la charge.

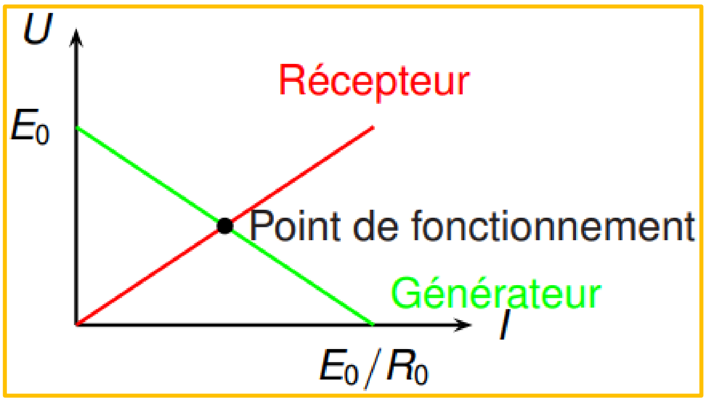


Figure 8 - Evolution des équations du générateur et du récepteur et point de fonctionnement

2) Enoncé du théorème de Thévenin :

Le théorème de Thévenin a été énoncé par Léon Charles Thévenin (1857 – 1926). Il stipule que tout circuit linéaire vu entre deux points A et B peut être modélisé par un générateur de tension parfait E_{th} et une résistance interne R_{th} branchés en série. Ces deux composants forment le « générateur équivalent de Thévenin ».

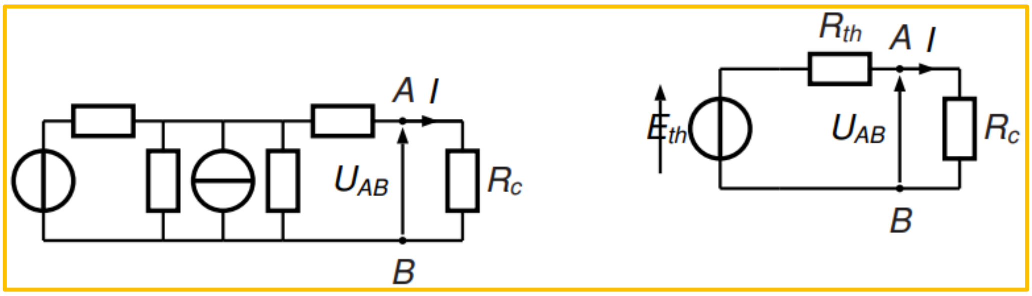


Figure 9 - Circuit quelconque (à gauche) et circuit équivalent après utilisation du théorème de Thévenin (à droite)

Vu des bornes A et B, les deux circuits sont équivalents. Pour trouver E_{th} et R_{th}, on commence par débrancher la charge R_c du circuit (s'il y en a une) et on détermine la tension U_{AB} à vide (on peut considérer que l'on remplace la charge par un voltmètre) entre les deux bornes.

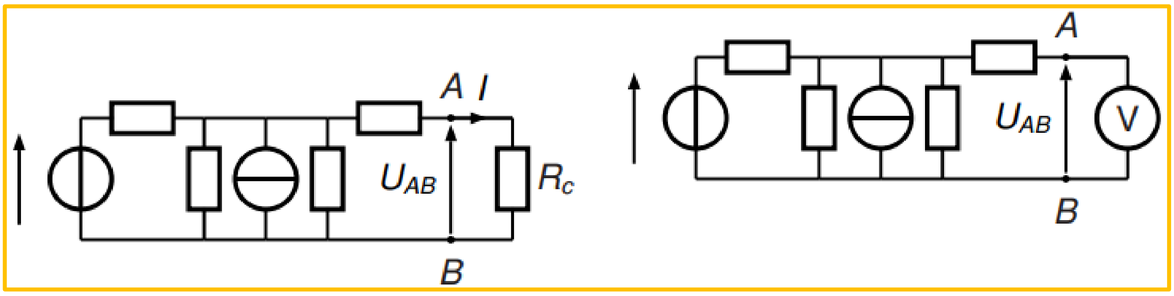


Figure 10 - Remplacement de la charge R_c par un voltmètre pour mesurer la tension U_{AB} à vide

Une fois que la tension U_{AB} est déterminée, on pose qu'elle correspond à la tension du générateur équivalent de Thévenin E_{th} :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{th} = U_{AB}}}$$

Ensuite, on passive tous les générateurs et on détermine la résistance équivalente R_{AB} vu des bornes A et B (on ne compte pas la charge dans le calcul).

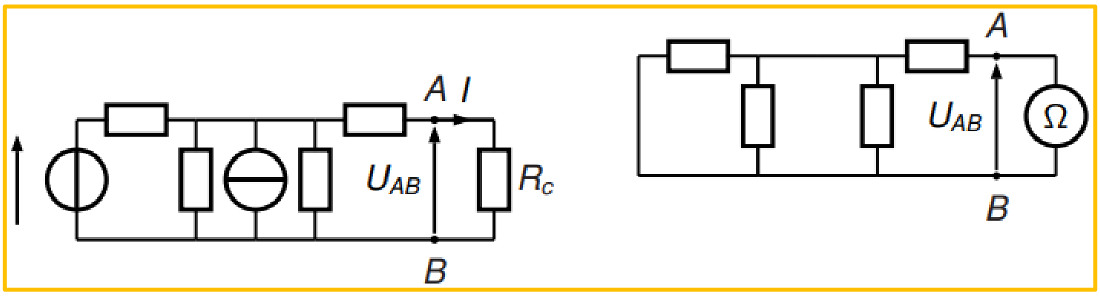


Figure 11 - Générateurs du circuit passivés et calcul de la résistance équivalente R_{AB}

Une fois que la résistance équivalente R_{AB} est déterminée, on pose qu'elle correspond à la résistance interne du générateur équivalent de Thévenin R_{th} :

$$\boxed{\boldsymbol{R_{th} = R_{AB}}}$$

On peut alors remplacer le circuit complexe par son équivalent. Le point de fonctionnement peut être très facilement déterminé pour n'importe quelle charge.

III- Théorème de Norton :

Le théorème de Norton a été énoncé par Edward Lawry Norton (1898 – 1983). Il stipule que tout circuit linéaire vu entre deux points A et B peut être modélisé par un générateur de courant parfait I_n et une résistance interne R_n branchés en parallèle. Ces deux composants forment le « générateur équivalent de Norton ».

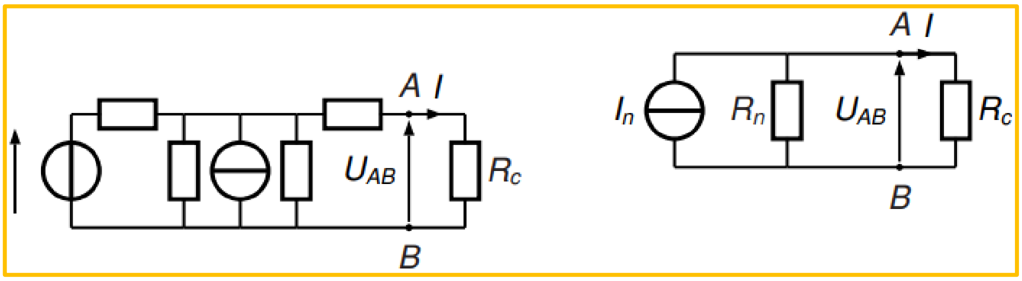


Figure 12 - Circuit quelconque (à gauche) et circuit équivalent après utilisation du théorème de Norton (à droite)

Vu des bornes A et B, les deux circuits sont équivalents. Pour trouver I_n et I_n, on commence par débrancher la charge R_c du circuit (s'il y en a une) et on détermine le courant I_{AB} en faisant un court-circuit entre les deux bornes.

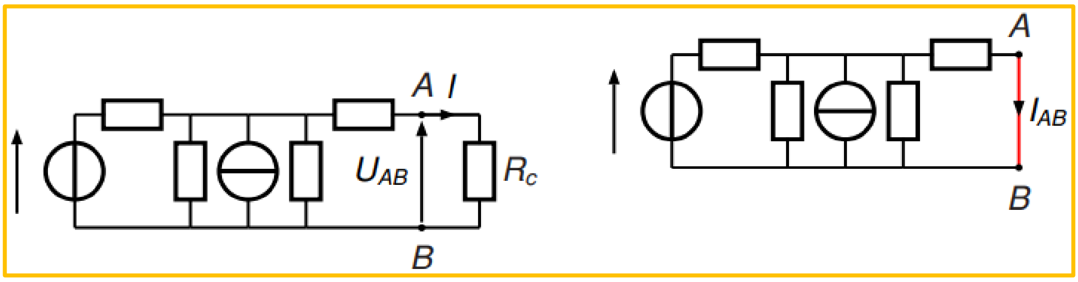


Figure 13 - Création d'un court-circuit après avoir débranché la charge R_c pour mesurer le courant I_{AB}

Une fois que le courant I_{AB} est déterminée, on pose qu'il correspond au courant du générateur équivalent de Norton I_n :

$$\boxed{\boldsymbol{I_n = I_{AB}}}$$

Ensuite, on passive tous les générateurs et on détermine la résistance équivalente R_{AB} vu des bornes A et B (on ne compte pas la charge dans le calcul).

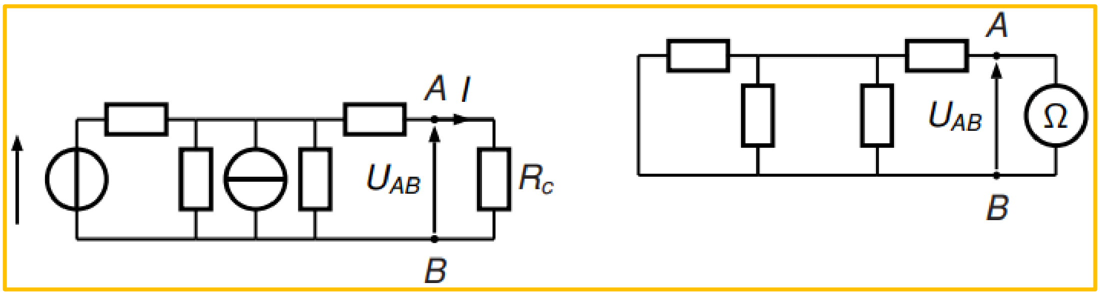


Figure 14 - Générateurs du circuit passivés et calcul de la résistance équivalente R_{AB}

Une fois que la résistance équivalente R_{AB} est déterminée, on pose qu'elle correspond à la résistance interne du générateur équivalent de Norton R_n :

$$\boxed{\boldsymbol{R_n = R_{AB}}}$$

On peut alors remplacer le circuit complexe par son équivalent. Le point de fonctionnement de la charge peut être très facilement déterminé.

IV- Equivalence Thévenin – Norton :

Les deux théorèmes permettent de créer des générateurs équivalents qui donnent les mêmes résultats. Ainsi, on peut passer de l'un à l'autre par les relations :

$$\boxed{\boldsymbol{R_{th} = R_n}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{U_{th} = R_n \, I_n}}$$