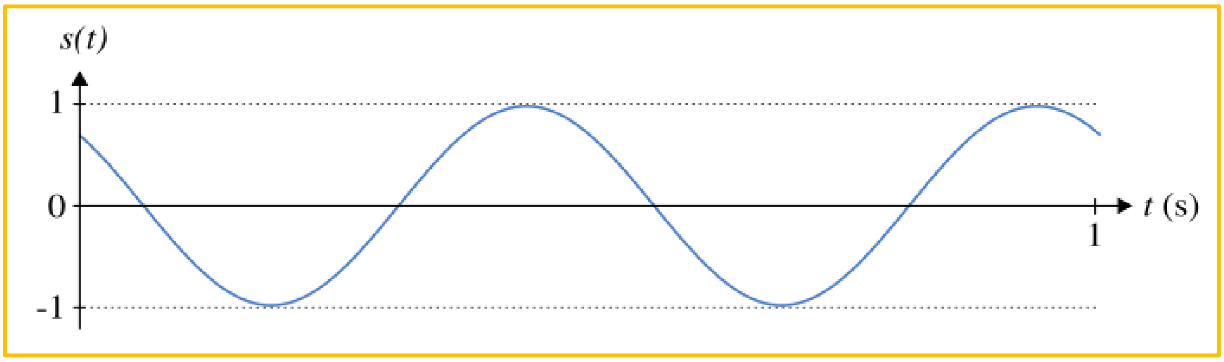
CM – Bases de l'Electricité

Chapitre 2 : Régime sinusoïdal permanent



I- Généralités :

1) *Signal sinusoïdal :*

Un signal sinusoïdal s est un signal dont la valeur instantanée $s(t)$, observée à un endroit précis, est une fonction sinusoïdale du temps :

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = S_{max}\sin(\omega t + \varphi_0)}}$$

(avec S_{max} ou $\hat{S}$ l'amplitude du signal, ω la pulsation du signal (en radians par seconde ($\boldsymbol{rad \cdot s^{-1}}$)) et φ_0 la phase à l'origine (en radians ($\boldsymbol{rad}$))).

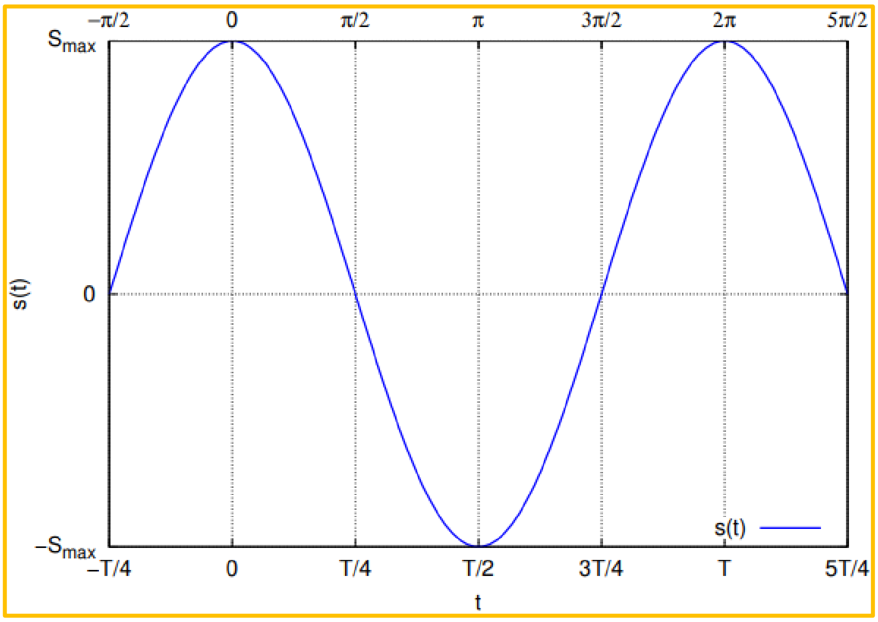


Figure 1 - Evolution temporelle d'un signal sinusoïdal

Sur ce graphique, le signal sinusoïdal possède une phase à l'origine de $\frac{\pi}{2}$. En effet, l'amplitude S_{max} du signal est maximale au temps $\boldsymbol{t = 0}$, donc la valeur instantanée à ce temps vaut $\boldsymbol{s(t) = S_{max}}$. Cela implique que le sinus du signal vaut $\mathbf{1}$ et on en déduit la phase associée :

$$\boldsymbol{\sin(\omega \times 0 - \varphi_0) = 1 \Leftrightarrow \sin(\varphi_0) = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}}}$$

Graphiquement, la phase se lit en prenant l'écart entre la position où le signal s'annule et où il est maximal (la valeur instantanée possédant un sinus, il serait nul au temps $\boldsymbol{t = 0}$ sans phase).

2) Grandeurs utiles :

La pulsation ω d'un signal est proportionnel à la fréquence f (en Hertz ($\boldsymbol{Hz}$)) de ce signal d'un facteur $\boldsymbol{2\pi}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega = 2\pi f}}$$

La fréquence est l'inverse d'une période T (motif du signal qui se répète en un temps t, en secondes ($\boldsymbol{s}$)) :

$$\boxed{\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}}$$

La valeur moyenne U_{moy} ou $\langle u \rangle$ du signal correspond à son intégrale sur le temps multipliée par l'inverse de sa période :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt}}$$

(dans le cas d'un signal sinusoïdal pur, sa valeur moyenne est nulle puisqu'elle oscille de façon régulière entre les valeurs négatives et positives). La valeur efficace U_{eff} ou U correspond à la racine carrée de la valeur moyenne :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt}}}$$

(dans le cas d'un signal sinusoïdal pur, sa valeur efficace vaut $\boldsymbol{U_{eff}} = \frac{\boldsymbol{U_{max}}}{\sqrt{2}}$).

Sur un multimètre, on peut mesurer la valeur moyenne d'un signal en le mettant en position DC (Courant Continu). Pour mesurer la valeur efficace, on le met en position AC (Courant Alternatif).

3) Déphasage :

En présence de deux sinusoïdes de même fréquence, il est possible de définir le « déphasage » comme la différence entre les phases respectives des signaux. Un déphasage est toujours défini par rapport à un signal de référence. On prend le cas de trois signaux $s_1(t)$, $s_2(t)$ et $s_3(t)$ d'amplitude identique S_{max} mais de phases différentes φ_1, φ_2 et φ_3 :

$$\boxed{\boldsymbol{s_1(t) = S_{max}\sin(\omega t + \varphi_1)}} \;;\; \boxed{\boldsymbol{s_2(t) = S_{max}\sin(\omega t + \varphi_2)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{s_1(t) = S_{max}\sin(\omega t + \varphi_3)}}$$

On prendra comme référence des phases le signal $s_1(t)$, donc on considérera que sa phase est nulle ($\boldsymbol{\varphi_1 = 0}$).

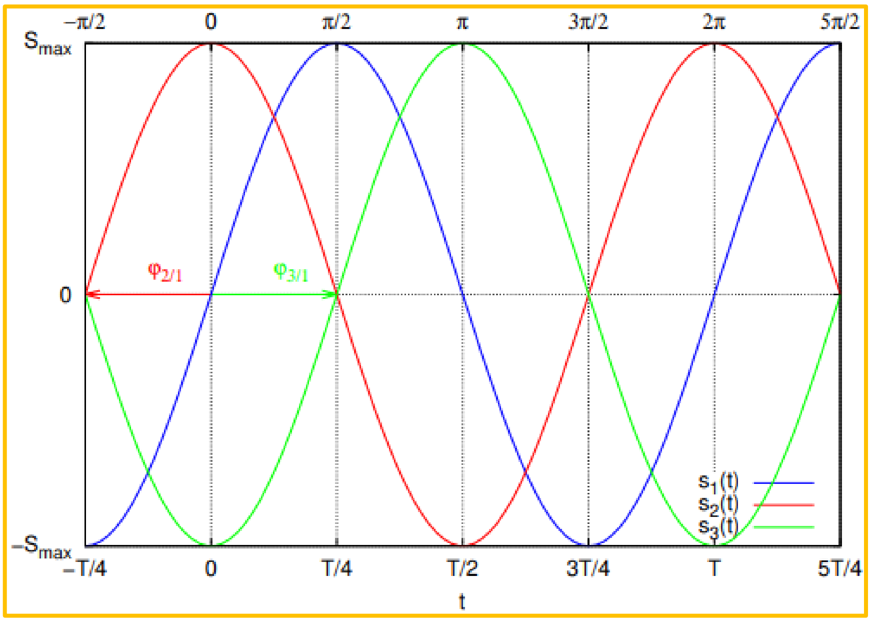


Figure 2 - Evolution temporelle des trois signaux pris en exemple

On peut lire graphiquement que les phases φ_2 et φ_3 valent respectivement $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Le déphasage $\varphi_{2/1}$ entre le signal $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et le déphasage $\varphi_{3/1}$ entre le signal $s_1(t)$ et $s_3(t)$ valent :

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{\varphi_{3/1} = \varphi_3 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}}}$$

Si le temps défile de gauche à droite, aller vers la gauche (« à rebrousse-temps ») signifie que le signal vers lequel on se dirige est en avance par rapport à l'autre signal et aller vers la droite signifie que le signal vers lequel on se dirige est en retard. Dans ce cas, le signal $s_2(t)$ est en avance sur $s_1(t)$ et le signal $s_3(t)$ est en retard sur $s_3(t)$.

Dans le cas du déphasage entre $s_1(t)$ et $s_2(t)$, on dit que les signaux sont en quadrature de phase avant ($\boldsymbol{\varphi_{2/1}} = \frac{\pi}{2}$) et dans le cas du déphasage entre $s_1(t)$ et $s_3(t)$, on dit que les signaux sont en quadrature de phase arrière ($\boldsymbol{\varphi_{3/1}} = -\frac{\pi}{2}$). Dans le cas où le déphasage vaut $\boldsymbol{\pi}$, on dit que les signaux sont en opposition de phase.

4) Méthodes de calcul ou d'analyses :

Pour calculer des courants et des tensions en régime sinusoïdal permanent, il existe trois méthodes :

- La méthode temporelle par résolution d'équations différentielles. Elles deviennent rapidement complexes à résoudre au fur et à mesure que l'on complexifie le circuit étudié.
- La représentation de Fresnel, qui permet une représentation graphique des grandeurs $u(t)$ et $i(t)$ en leur associant un vecteur. À partir des lois de Kirchhoff, on construit graphiquement la solution recherchée.

- L'utilisation des nombres complexes en association à une sinusoïde $y(t)$. Le nombre complexe correspondant $\underline{Y}$ peut être définit par son module Y et son argument θ, tel que $\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{e^{i\theta}}$.

II- Représentation de Fresnel :

1) Principe :

On suppose une sinusoïde de forme $\boldsymbol{s(t) = S_{max} \sin(\omega t + \varphi)}$. On associe à la sinusoïde un vecteur tournant $\vec{S}$, de norme S_{max} et d'angle α, suivant son évolution sur un cercle trigonométrique. Le vecteur tourne dans le sens trigonométrique à la vitesse ω (qui est la pulsation mais aussi la vitesse angulaire) et, à chaque instant :

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = S_{max} \sin(\omega t + \varphi) = S_{max} \sin(\alpha)}}$$

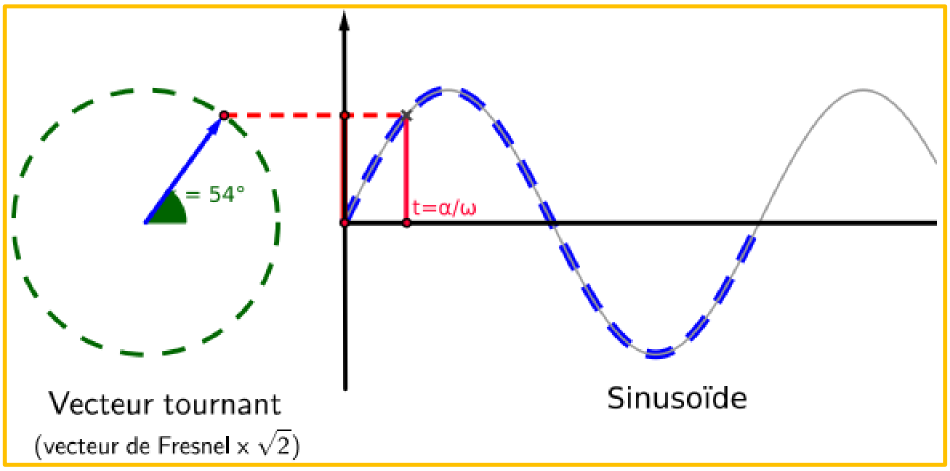


Figure 3 - Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

On prend le cas de deux signaux différents de tension $u(t)$ et de courant $i(t)$. Généralement, on fixe un repère des phases, qui suit l'axe horizontal de la sinusoïde, en prenant l'un des deux vecteurs de Fresnel comme référence (on prendra ici le vecteur de tension $\vec{U}$ qui représente le signal $u(t)$, donc il représenta une valeur de phase nulle et l'instant $\boldsymbol{t = 0}$). On place le vecteur de courant $\vec{I}$ et on peut connaître facilement si le courant $i(t)$ est en avance (phase négative ou si le vecteur $\vec{I}$ se rapproche de $\vec{U}$) ou en retard (phase positive ou si le vecteur $\vec{I}$ s'éloigne de $\vec{U}$) en regardant l'angle α formé entre les deux.

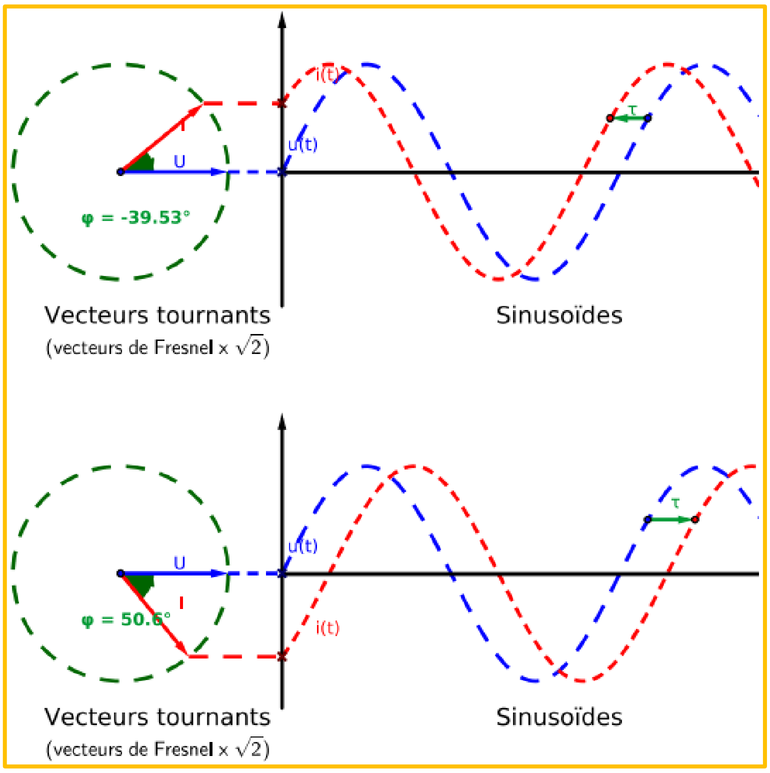


Figure 4 - Vecteurs de Fresnel des sinusoïdes de tension (pris en référence) et de courant, montrant l'avance (en haut) ou le retard (en bas) du courant sur la tension

2) Exercice d'application :

On considère un nœud E reliant trois branches de courants entrants respectifs i_1, i_2 et i_3 et un courant sortant i. Les courants ont comme valeurs respectives $\boldsymbol{i_1(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, $\boldsymbol{i_2(t) = I_{max}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}$ et $\boldsymbol{i_3(t) = I_{max}\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)}$. Le but est d'obtenir le courant $i(t)$ en passant par la représentation de Fresnel des différents courants présents.

On peut commencer par écrire la loi des nœuds au point E :

$$\boxed{\boldsymbol{i_1 + i_2 + i_3 = i}}$$

Ensuite, on associe à chaque courant son vecteur de Fresnel associé $\vec{I_1}$, $\vec{I_2}$ et $\vec{I_3}$ (en prenant en compte que l'on choisit $\vec{I_1}$ comme référence des phases, donc positionné à l'horizontale). Cela donne la représentation suivante :

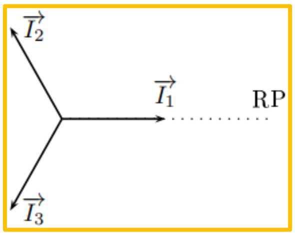


Figure 5 - Représentation de Fresnel des courants entrants

(où $\vec{I_2}$ a un angle de $\frac{2\pi}{3}$ avec $\vec{I_1}$ et $\vec{I_3}$ a un angle de $\frac{4\pi}{3}$ avec $\vec{I_1}$). De la loi des nœuds, en remplaçant les formes sinusoïdales classiques des courants par leurs représentations de Fresnel, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{I_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{I_2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{I_3}} = \vec{\boldsymbol{I}}}$$

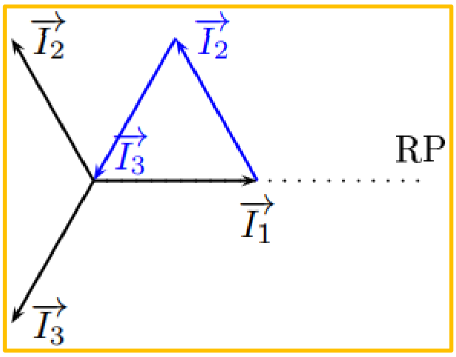


Figure 6 - Addition vectorielle des vecteurs courants de Fresnel

On remarque alors que la somme vectorielle des courants est nulle ($\overrightarrow{\boldsymbol{I_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{I_2}} + \overrightarrow{\boldsymbol{I_3}} = \vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{0}}$), ce qui permet de déduire que le courant sinusoïdal de sortie i est nul ($\vec{\boldsymbol{I}} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$).

3) Lois de comportement :

a) Résistance :

On représente graphiquement l'évolution du courant $i(t)$ et de la tension $u_R(t)$ en régime sinusoïdal d'une résistance.

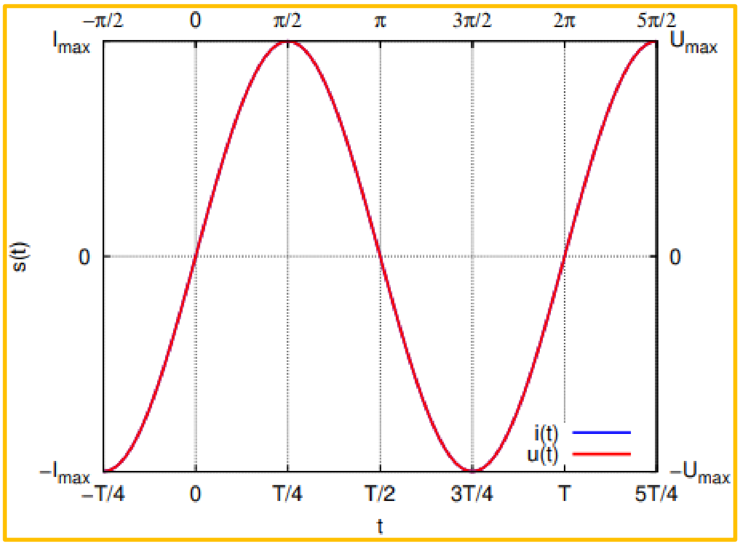


Figure 7 - Evolution temporelle du courant et de la tension pour une résistance en régime sinusoïdal

On remarque que les deux variables sont en phase, donc on peut les représenter sur un diagramme de Fresnel comme étant tous les deux alignés sur le repère des phases.

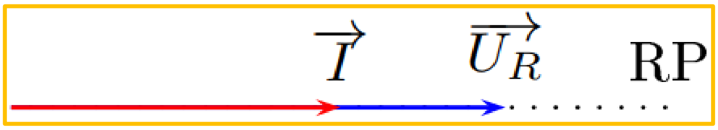


Figure 8 - Diagramme de Fresnel d'une résistance en régime sinusoïdal

Si on écrit $\boldsymbol{i(t) = I_{max} \sin(\omega t)}$, alors on en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{u_R(t) = R\, i(t) = RI_{max} \sin(\omega t) = U_{R_{max}} \sin(\omega t)}}$$

b) Inductance (ou bobine) :

On représente graphiquement l'évolution du courant $i(t)$ et de la tension $u_L(t)$ en régime sinusoïdal d'une inductance.

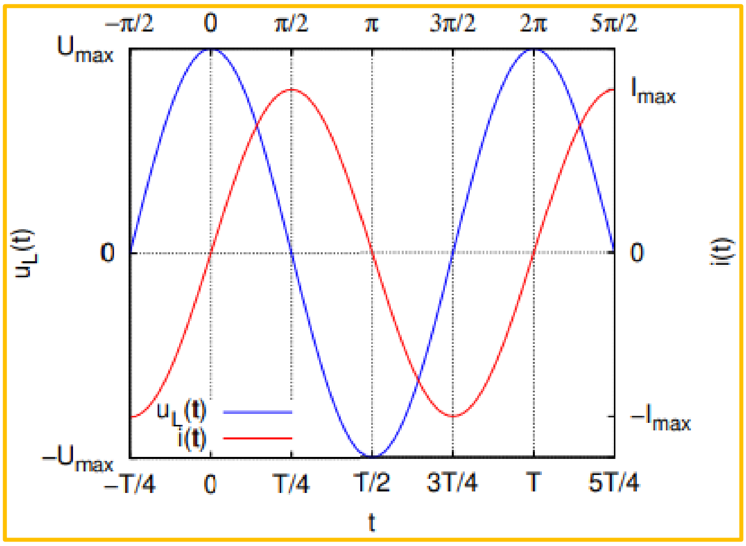


Figure 9 - Evolution temporelle du courant et de la tension pour une inductance en régime sinusoïdal

On remarque que les deux variables sont en quadrature de phase ($\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$), donc on peut les représenter sur un diagramme de Fresnel avec un angle de $\mathbf{90°}$ entre les deux.

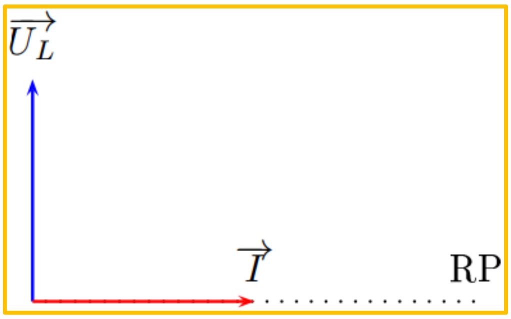


Figure 10 - Diagramme de Fresnel d'une inductance en régime sinusoïdal

Si on prend le courant comme repère des phases, la tension est en avance sur le courant (car la tension fait un angle positif avec le courant). Inversement, si on prend la tension comme repère des phases, le courant est en retard sur la tension (car le courant fait un angle négatif avec la tension). Si on écrit $\boldsymbol{i(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, alors on en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\omega I_{max}\cos(\omega t) = U_{L_{max}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

(car $\boldsymbol{\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$).

c) Condensateur :

On représente graphiquement l'évolution du courant $i(t)$ et de la tension $u_L(t)$ en régime sinusoïdal d'une inductance.

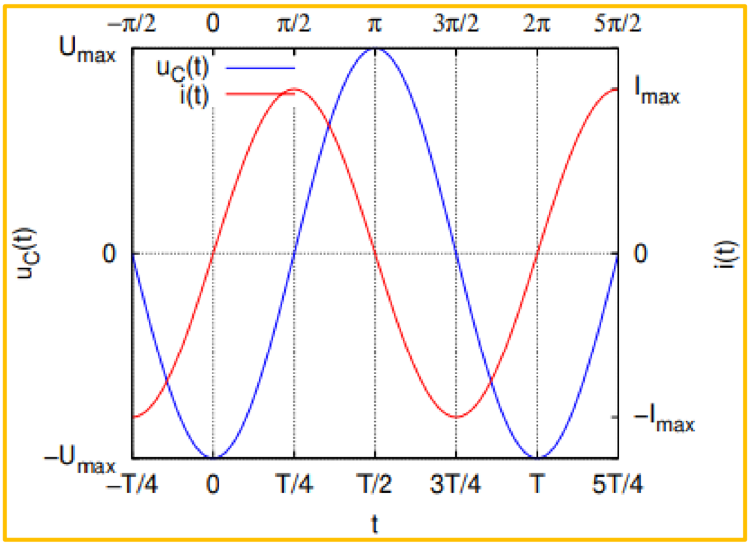


Figure 11 - Evolution temporelle du courant et de la tension pour un condensateur en régime sinusoïdal

On remarque que les deux variables sont en quadrature de phase ($\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{2}}$), donc on peut les représenter sur un diagramme de Fresnel avec un angle de $\mathbf{90°}$ entre les deux.

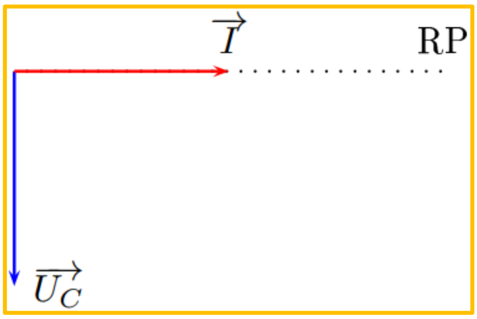


Figure 12 - Diagramme de Fresnel d'un condensateur en régime sinusoïdal

Si on prend le courant comme repère des phases, la tension est en retard sur le courant (car la tension fait un angle négatif avec le courant). Inversement, si on prend la tension comme repère des phases, le courant est en avance sur la tension (car le courant fait un angle positif avec la tension). Si on écrit $\boldsymbol{i(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, alors on en déduit :

$$\boldsymbol{i(t) = C\frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C}\int I_{max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\,dt = -\frac{I_{max}}{C\omega}\cos(\omega t)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{u_C(t) = U_{C_{max}}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}}$$

(car $\boldsymbol{-\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$).

4) Exemple – Circuit RLC série :

On prend le cas d'un circuit RLC branché en série, le tout alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $u_t(t)$. Un courant $\boldsymbol{i(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$ circule dans tout le circuit.

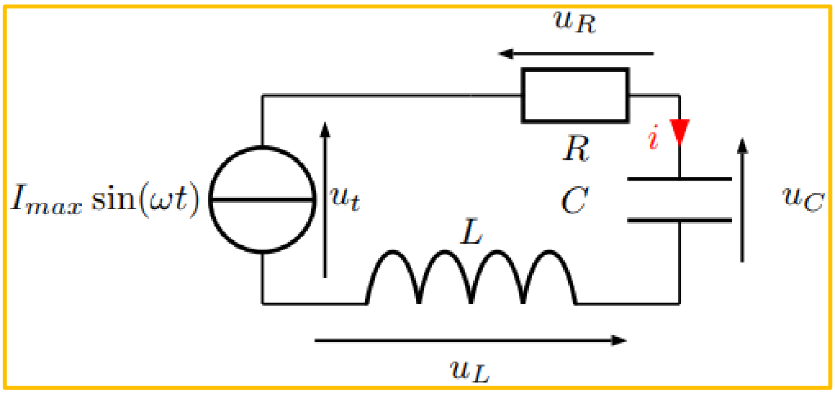


Figure 13 - Schéma d'un circuit RLC

Grâce à la représentation de Fresnel, il est possible de calculer la tension $u_t(t)$ sans à passer par la méthode temporelle (résolution d'équations différentielles). Pour cela, on place le vecteur de courant $\vec{I}$ en repère des phases et on applique la loi des mailles au circuit pour en construire le diagramme de Fresnel correspondant :

$$\boldsymbol{u_t = u_R + u_L + u_C \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{U_t} = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L} + \overrightarrow{U_C}}}$$

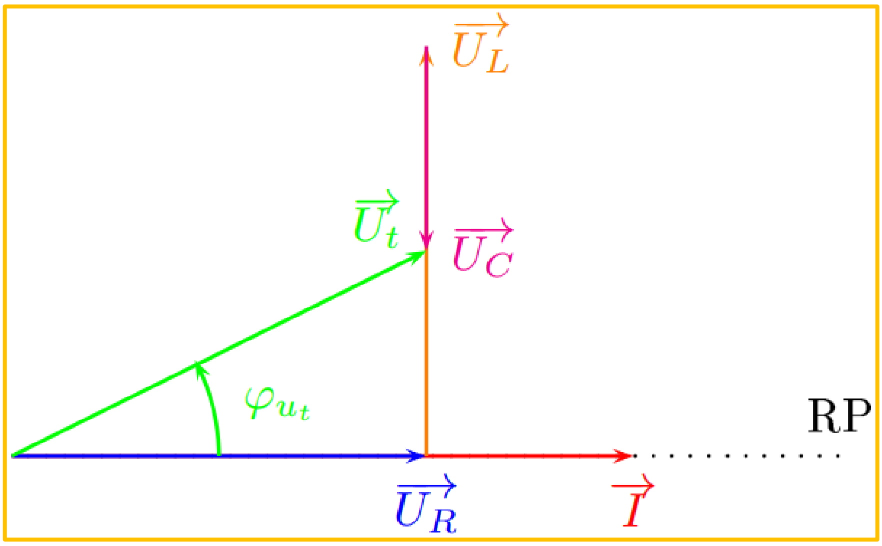
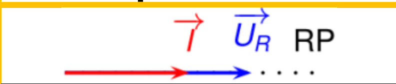
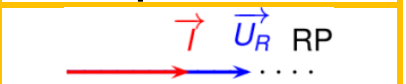
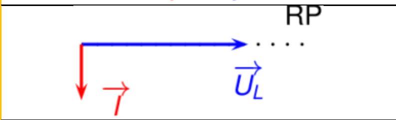
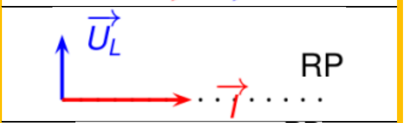
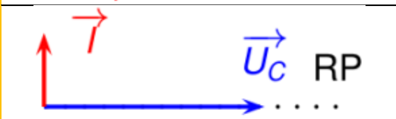
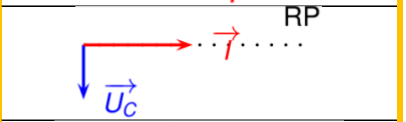
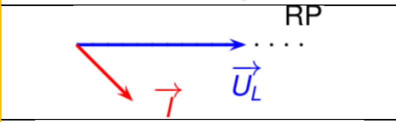
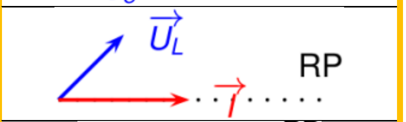
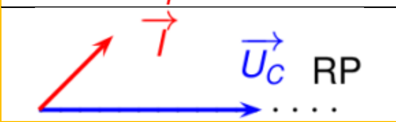
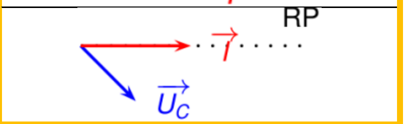


Figure 14 - Diagramme de Fresnel du circuit RLC et tension du générateur correspondante

La norme du vecteur de tension du générateur $\overrightarrow{U_t}$ donne son amplitude maximale et l'angle qu'il forme avec le repère des phases donne sa phase à l'origine φ_{u_t}.

5) Bilan :

Dans le tableau ci-dessous, on représente les différents diagrammes de Fresnel pour chaque élément ou couple d'éléments résistifs, dans les cas où le courant et la tension sont chacune le repère de phase :

Elément résistif	**$\vec{U}$ en repère des phases**	**$\vec{I}$ en repère des phases**
Résistance		
Inductance		
Condensateur		
Circuit résistif – inductif (RL)		
Circuit résistif – capacitif (RC)		

III- Les nombres complexes en Electricité :

En Electricité, les nombres complexes permettent de simplifier l'écriture de grandeurs électriques, notamment si on veut les mettre sous forme de vecteurs.

On suppose que l'on a un courant de la forme $\boldsymbol{i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)}$. On peut alors définir une grandeur complexe associée qui vaut :

$$\boxed{\underline{i}(t) = \hat{I}\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{I}(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi))}$$

(avec j l'unité imaginaire, que l'on note en Mathématiques i, respectant l'égalité $\boldsymbol{j^2 = -1}$, et où $i(t)$ serait la « partie réelle » de la grandeur complexe $\underline{i}(t)$ ($\boldsymbol{i(t) = Re\left(\underline{i}(t)\right)}$)). On peut aussi l'écrire :

$$\boxed{\underline{i}(t) = \hat{I}\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \hat{I}\, e^{j\varphi} e^{j\omega t}}$$

(où $\boldsymbol{\hat{I}\, e^{j\varphi} = \underline{I}}$ est l'amplitude complexe). Dans un circuit électrique alimenté par un seul générateur, tous les signaux (courants, tensions) sont à la même fréquence, donc à la même pulsation ω. L'amplitude complexe contient toutes les informations nécessaires et le terme $e^{j\omega t}$ est donc utile pour les calculs. On ne se sert donc que de l'amplitude complexe. Dans le cas où le courant serait de la forme $\boldsymbol{i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi)}$, on pourrait appliquer le même raisonnement en posant que :

$$\boxed{i(t) = -j\, Im\left(\underline{i}(t)\right)}$$

L'amplitude complexe serait identique.

Un nombre complexe $\underline{Y}$ permet de représenter un vecteur $\vec{Y}$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$, partant de l'origine et allant jusqu'à la valeur donnée. Le plan se décompose en deux axes : l'axe réel horizontal $\Re$ et l'axe imaginaire vertical $\Im$.

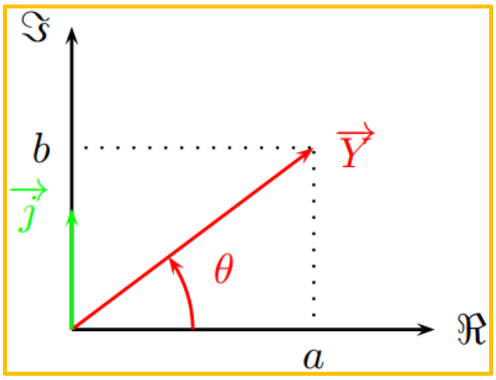


Figure 15 - Représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe

Un nombre complexe peut avoir trois notations différentes :

- Classique avec une somme des termes réel et imaginaire : $\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{jb}$
- Sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus : $\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y}(\cos\boldsymbol{\theta} + \sin\boldsymbol{\theta})$
- Sous forme exponentielle : $\underline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\theta}}$

(avec Y le module de $\underline{Y}$ ($\boldsymbol{Y} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$), θ l'argument de $\underline{Y}$ ($\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\Im(\underline{Y})}{\Re(\underline{Y})}$), a la partie réelle (valeur sur l'axe $\Re$) de $\underline{Y}$ ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Y}\cos\boldsymbol{\theta}$) et b la partie imaginaire (valeur sur l'axe $\Im$) de $\underline{Y}$ ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Y}\sin\boldsymbol{\theta}$)). Si on compare avec les vecteurs de Fresnel, le module Y correspond à l'amplitude de $y(t)$ et l'argument θ est sa phase :

$$\boxed{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Y}\sin(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\theta})}$$

Par défaut, le module d'une grandeur électrique exprimée par un nombre complexe est toujours l'amplitude de cette grandeur. Cependant, on peut lui affecter la valeur efficace au lieu de l'amplitude pour certains calculs (on ne veut calculer que des valeurs efficaces). Si on le fait, il faut nécessairement que toutes les modules des autres grandeurs électriques soient aussi des valeurs efficaces. Cela correspond mieux aux valeurs numériques affichées par un multimètre en mode AC. Dans le cas du courant, avec l'amplitude, elle vaut en temporel $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{max}}\sin(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\theta})$, correspondant à un vecteur de Fresnel $\vec{I}$ de longueur I_{max} et faisant un angle θ avec le repère des phases, et correspondant à la valeur complexe $\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{max}}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\theta}}$; avec la valeur efficace, elle vaut en temporel $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{eff}}\sqrt{\boldsymbol{2}}\sin(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\theta})$, correspondant à un vecteur de Fresnel $\vec{I}$ de longueur I_{eff} et faisant un angle θ avec le repère des phases, et correspondant à la valeur complexe $\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{eff}}\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\theta}}$.

La loi des nœuds et la loi des mailles restent valables en complexe, à condition de transformer toutes les grandeurs électriques en conséquence

1) *Exemple de calcul :*

On reprend l'exemple du nœud E reliant trois courants d'entrée $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{max}}\sin(\boldsymbol{\omega t})$, $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{max}}\sin\left(\boldsymbol{\omega t} + \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{3}}\right)$ et $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{max}}\sin\left(\boldsymbol{\omega t} + \frac{\boldsymbol{4\pi}}{\boldsymbol{3}}\right)$ et un courant de sortie i que l'on souhaite déterminer via l'utilisation des nombres complexe. La loi des nœuds donne $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{i}$.

On associe à chaque courant un nombre complexe correspondant $\underline{I_1}$, $\underline{I_2}$ et $\underline{I_3}$, qui valent alors :

$$\boxed{\underline{I_1} = I_{max}\, e^{j\times 0} = I_{max}}$$

$$\boxed{\underline{I_2} = I_{max}\, e^{j\frac{2\pi}{3}} = I_{max}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\boxed{\underline{I_3} = I_{max}\, e^{j\frac{4\pi}{3}} = I_{max}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

On peut finalement calculer la valeur du courant de sortie i en complexe via la loi des nœuds :

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = I_{max} + I_{max}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + I_{max}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(I_{max} - \frac{1}{2}I_{max} - \frac{1}{2}I_{max}\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_{max} - \frac{\sqrt{3}}{2}I_{max}\right) = 0 + 0j$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) = 0}$$

On retrouve le même résultat que dans l'exemple précédent.

2) Notion d'impédances :

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle comme :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

(avec $\underline{Z}$ en Ohms (Ω), donc équivalent à la résistance R d'une résistance classique).

En prenant des signaux de courant $\boldsymbol{i(t) = I_{max}\sin(\omega t + \theta_i)}$ et de tension $\boldsymbol{u(t) = U_{max}\sin(\omega t + \theta_u)}$, après passage en complexe ($\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I_{max}\, e^{j\theta_i}}$ et $\underline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U_{max}\, e^{j\theta_u}}$), on obtient :

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{Z}} = \frac{U_{max}\, e^{i\theta_u}}{I_{max}\, e^{i\theta_i}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}\, e^{j(\theta_u - \theta_i)}}$$

En posant $\boldsymbol{Z} = \frac{U_{max}}{I_{max}}$ et $\boldsymbol{\theta = \theta_u - \theta_i}$, on obtient $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z\, e^{j\theta}}$ qui est bien un nombre complexe.

a) Impédance d'une résistance :

En temporel, si le courant traversant une résistance est $\boldsymbol{i_R(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, sa tension vaut $\boldsymbol{u_R(t) = RI_{max}\sin(\omega t) = U_{R_{max}}\sin(\omega t)}$. En complexe, on a alors :

$$\underline{\boldsymbol{I_R}} = I_{max}\, e^{j\times 0} = I_{max}\ ;\ \underline{\boldsymbol{U_R}} = R\underline{\boldsymbol{I_R}} = RI_{max}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\boldsymbol{Z_R}} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{I_R}} = \frac{RI_{max}}{I_{max}} = R}$$

L'impédance d'une résistance est un réel pur de valeur $\boldsymbol{R}$.

b) Impédance d'une résistance :

En temporel, si le courant traversant une inductance est $\boldsymbol{i_L(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, sa tension vaut $\boldsymbol{u_L(t) = L\omega I_{max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L_{max}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$. En complexe, on a alors :

$$\underline{\boldsymbol{I_L}} = I_{max}\, e^{j\times 0} = I_{max}\ ;\ \underline{\boldsymbol{U_L}} = L\omega I_{max}\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\boldsymbol{Z_L}} = \frac{\underline{U_L}}{\underline{I_L}} = \frac{L\omega I_{max}\, e^{j\frac{\pi}{2}}}{I_{max}} = L\omega\, e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega}$$

L'impédance d'une inductance est un imaginaire pur de valeur $\boldsymbol{L\omega}$.

c) Impédance d'une résistance :

En temporel, si le courant traversant un condensateur est $\boldsymbol{i_C(t) = I_{max}\sin(\omega t)}$, sa tension vaut $\boldsymbol{u_C(t) = \frac{I_{max}}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{C_{max}}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$. En complexe, on a alors :

$$\underline{\boldsymbol{I_C}} = \boldsymbol{I_{max}\, e^{j\times 0} = I_{max}} \;;\; \underline{\boldsymbol{U_C}} = \boldsymbol{\frac{I_{max}}{C\omega}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\boldsymbol{Z_C}} = \boldsymbol{\frac{\underline{U_C}}{\underline{I_C}} = \frac{I_{max}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}}{I_{max}C\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}}}$$

(car $\boldsymbol{\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j}$). L'impédance d'une inductance est un imaginaire pur de valeur $\boldsymbol{\frac{-1}{C\omega}}$.

3) *Règles schématiques :*

a) Représentation schématique en grandeur complexe :

Lorsque l'on représente un circuit quelconque sous forme schématique en complexe, toutes les grandeurs électriques (courants, tensions) s'écrivent en nombres complexes et les dipôles sont remplacés par le symbole de l'impédance (symbole général d'un dipôle) avec son impédance complexe.

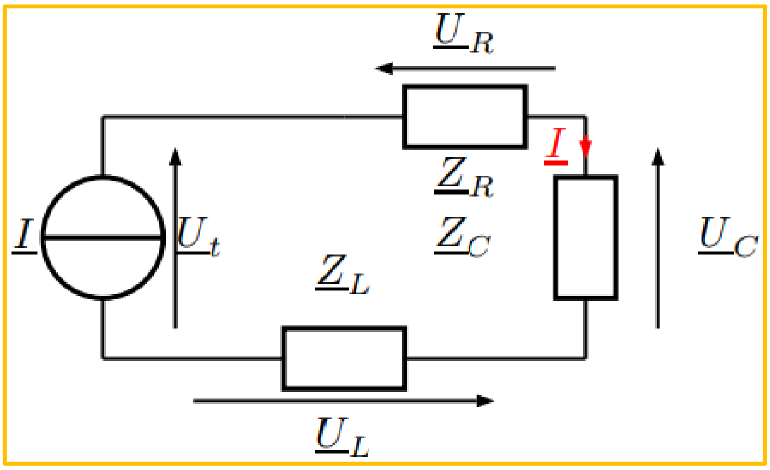


Figure 16 - Représentation schématique d'un circuit électrique avec des grandeurs complexes

b) Règles sur les associations d'impédances en série et en parallèle, ponts diviseurs et les théorèmes en complexe :

Les impédances s'associent de la même manière que des résistances réelles, que cela soit en série ou en parallèle, suivant les règles suivantes :

$$\boxed{\underline{Z_{eq}} = \sum_{k=1}^{nb\,Z\,série} \underline{Z_k}} \; ; \; \boxed{\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \sum_{k=1}^{nb\,Z\,parallèle} \frac{1}{\underline{Z_k}}}$$

De même, les ponts diviseurs de courant et de tension, le théorème de superposition et les théorèmes de Thévenin et Norton sont identiques en complexe, tant que toutes les grandeurs utilisées le sont.

IV- Puissance en régime sinusoïdal :

1) Différentes puissances :

Pour un dipôle linéaire quelconque, s'il est alimenté en sinusoïdal, on peut calculer sa puissance instantanée $p(t)$ en faisant le produit de sa tension $u(t)$ et de son courant $i(t)$ (où l'on prend les valeurs efficaces pour les deux) :

$$\boldsymbol{p(t) = u(t)\ i(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)\ \ I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\boldsymbol{= 2UI\sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i)}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2}{2}UI(\cos(\omega t + \varphi_u + \omega t + \varphi_i) + \cos(\omega t + \varphi_u - \omega t - \varphi_i))}$$

$$\boldsymbol{= UI(\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i))}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{p(t) = UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + UI\cos(\varphi)}}$$

(avec $\boldsymbol{UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}$ la puissance fluctuante et $\boldsymbol{UI\cos(\varphi)}$ la puissance moyenne, avec $\boldsymbol{\varphi = \varphi_u - \varphi_i}$ le déphasage de la tension par rapport au courant).

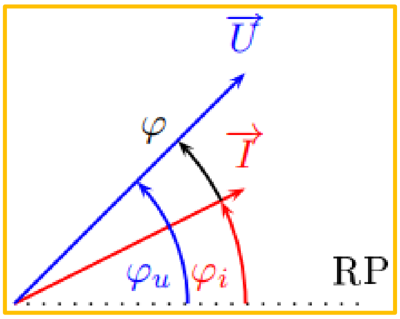


Figure 17 - Représentation de Fresnel du déphasage entre courant et tension pour le calcul de la puissance instantanée

On définit trois autres puissances par ces calculs :

- La puissance active P :

$$\boxed{\boldsymbol{P = UI\cos\varphi}}$$

(exprimée en Watts ($\boldsymbol{W}$)). Cette puissance s'apparente à la partie réelle d'un nombre complexe. Elle correspond à la puissance transformée dans un dispositif électrique en puissance mécanique, électrique, etc…

- La puissance réactive Q :

$$\boxed{\boldsymbol{Q = UI\sin\varphi}}$$

(exprimée en Volt-Ampère Réactif ($\boldsymbol{VAR}$)). Cette puissance s'apparente à la partie imaginaire d'un nombre complexe. Elle n'a pas de sens physique, mais elle représente la puissance qui fluctue alternativement du générateur au récepteur.

- La puissance apparente S :

$$\boxed{\boldsymbol{S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}}}$$

(exprimée en Volt-Ampère ($\boldsymbol{VA}$)). Cette puissance s'apparente au module d'un nombre complexe. Elle aussi n'a pas de sens physique, mais elle permet de dimensionner des composants électriques (section d'un câble par exemple).

Des différentes puissances, on peut imaginer une puissance complexe $\underline{S}$ où la puissance active P serait la partie réelle, la puissance réactive Q serait la partie imaginaire, la puissance apparente S serait son module et le déphasage φ serait son argument. On peut l'écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\underline{S} = UI\,e^{i\varphi} = \underline{U}\,\underline{I}^*}}$$

(avec $\underline{U}$ la tension complexe et $\underline{I}^*$ le conjugué de l'intensité complexe).

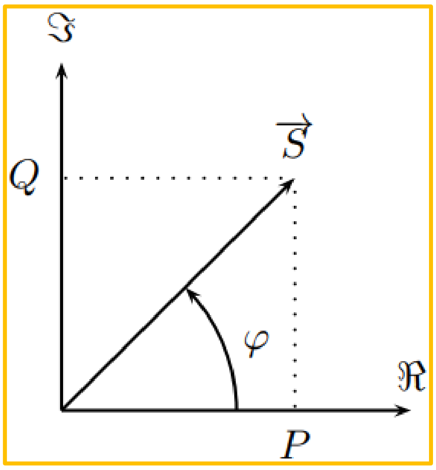


Figure 18 - Représentation complexe des différentes puissances citées

On définit le « facteur de puissance » $\boldsymbol{\cos\varphi}$ comme la part de puissance active P dans la puissance apparente S, valeur comprise entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$. Si le déphasage φ est négatif, le dipôle est plutôt capacitif et le courant i est en avance sur la tension u. SI le déphasage est positif, le dipôle est plutôt inductif et le courant est en retard sur la tension. Dans la vie réelle, EDF impose à ses clients d'avoir un facteur de puissance supérieur ou égal à $\mathbf{0.93}$ pour ne pas facturer la puissance réactive Q.

2) Puissances dans les différents dipôles classiques :

a) Puissance dans une résistance :

On représente graphiquement le courant, la tension et la puissance instantanée d'une résistance.

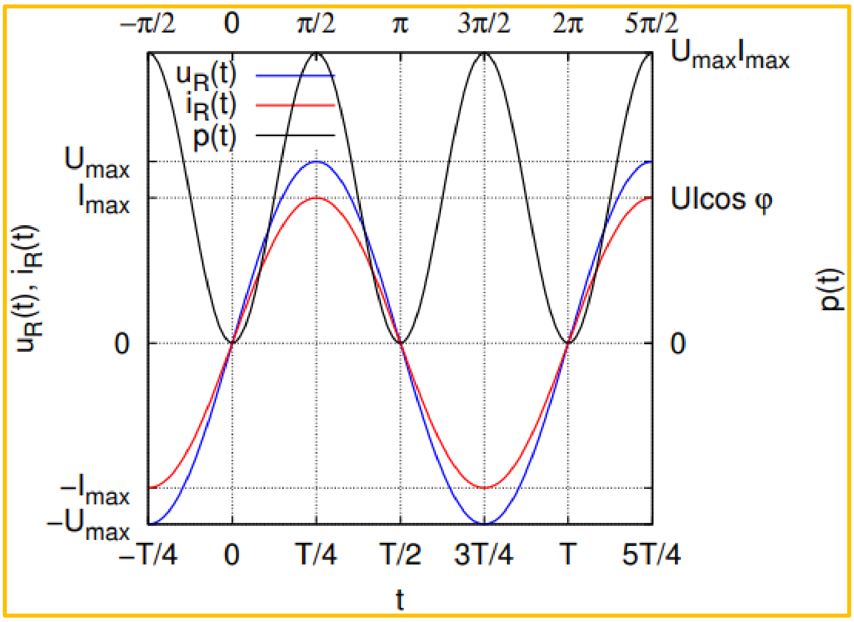


Figure 19 - Evolution temporelle du courant de la tension et de la puissance instantanée dans une résistance

Ici, le courant et la tension sont en phase, donc le déphasage est nul ($\varphi = 0$). Le bilan des puissances donne :

$$\boxed{P = U_R I_R \cos 0 = U_R I_R = R I_R^2} \; ; \; \boxed{Q = U_R I_R \sin 0 = 0}$$

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P}$$

Une résistance consomme donc de la puissance active uniquement.

b) Puissance dans une inductance :

On représente graphiquement le courant, la tension et la puissance instantanée d'une inductance.

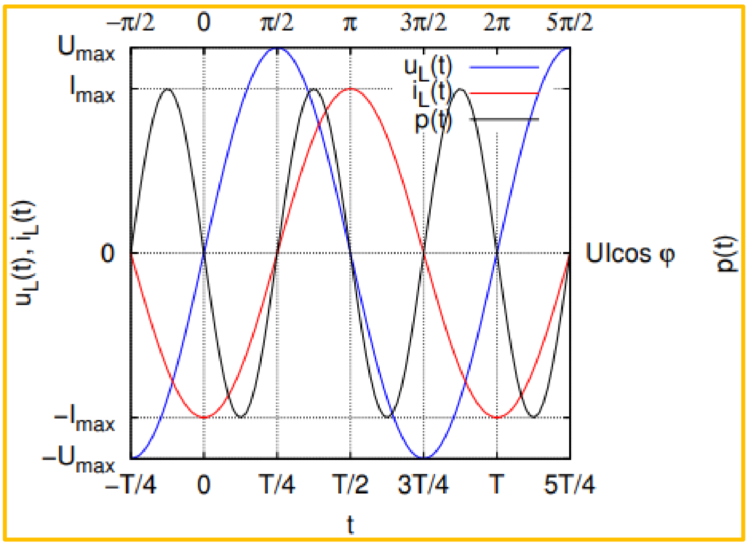


Figure 20 - Evolution temporelle du courant, de la tension et de la puissance instantanée dans une inductance

Ici, la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant, donc le déphasage vaut $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Le bilan des puissances donne :

$$\boxed{P = U_L I_L \cos\frac{\pi}{2} = 0} \; ; \; \boxed{Q = U_L I_L \sin\frac{\pi}{2} = U_L I_L = L\omega I_L^2}$$

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = Q}$$

Une inductance consomme donc de la puissance réactive uniquement.

c) Puissance dans un condensateur :

On représente graphiquement le courant, la tension et la puissance instantanée d'un condensateur.

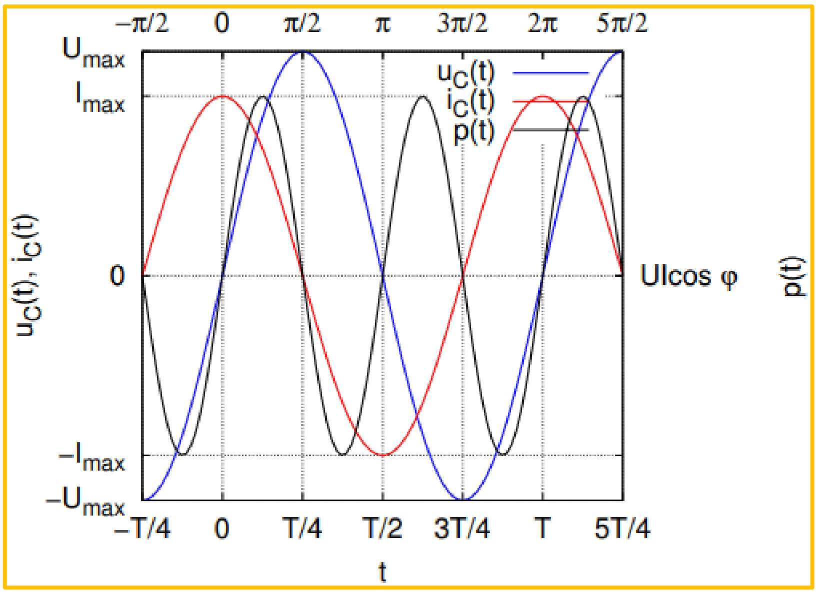


Figure 21 - Evolution temporelle du courant, de la tension et de la puissance instantanée dans un condensateur

Ici, la tension est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant, donc le déphasage vaut $\boldsymbol{\varphi} = -\frac{\pi}{2}$. Le bilan des puissances donne :

$$\boldsymbol{P = U_C I_C \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$\boldsymbol{Q = U_C I_C \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -U_C I_C = -C\omega U_C^2} \quad ; \quad \boldsymbol{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = |Q|}$$

Un condensateur consomme donc de la puissance réactive uniquement.

3) *Méthode de Boucherot :*

La méthode de Boucherot (du nom de Paul Boucherot (1869 – 1943)) est une méthode simple et rapide pour dimensionner des appareils électriques. Elle consiste à faire un bilan des puissances mises en jeu dans un circuit électrique afin d'en faire la somme. Dans le cas d'un circuit électrique quelconque composé d'impédances $\underline{Z_k}$ (avec $\boldsymbol{k = 1, \dots, n}$), la puissance active totale P_t, la puissance réactive totale Q_t et la puissance apparente totale S_t valent respectivement :

$$\boldsymbol{P_t = \sum_{k=1}^{n} P_k} \quad ; \quad \boldsymbol{Q_t = \sum_{k=1}^{n} Q_k} \quad ; \quad \boldsymbol{S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}}$$

On prend l'exemple d'un atelier de couture possédant $\mathbf{20}$ machines à coudre industrielles, chacune ayant les indications suivantes : $\boldsymbol{P = 500\ W}$, $\boldsymbol{\cos\varphi = 0.8\ AR}$, $\boldsymbol{U = 230\ V}$, $\boldsymbol{f = 50\ Hz}$. Les puissances totales valent alors :

$$\boxed{\boldsymbol{P_t = 20 \times P = 20 \times 500 = 10\ kW}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_t = \frac{P_t}{\cos\varphi} = \frac{10\ 000}{0.8} = 12.5\ kVA}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q_t = \sqrt{S_t^2 - Q_t^2} = \sqrt{12\ 500^2 - 10\ 000^2} = 7.5\ kVAR}}$$

Dans la réalité, on cherche à annuler la puissance réactive totale Q_t pour éviter des paiements supplémentaires en coûts d'électricité. Vu que le facteur de puissance est positif, les machines à coudre ont un comportement plutôt inductif, donc il suffit de placer autant de condensateurs en parallèle pour annuler la puissance, ce qui donne :

$$\boldsymbol{Q_t + 20Q_C = 0 \Rightarrow \boxed{Q_t - 20C\omega U^2 = 0}}$$

On peut en déduire la capacité de chaque condensateur afin d'avoir une puissance réactive nulle :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \frac{Q_t}{20\omega U^2} = \frac{7\ 500}{20 \times 2\pi \times 50 \times 230^2} = 5189\ \mu F}}$$

Le courant total du système valait $\boldsymbol{I_t = \frac{S_t}{U} = \frac{12\ 500}{230} = 54.4\ A}$ sans les condensateurs et le courant totale avec les condensateurs vaut $\boldsymbol{I_t' = \frac{S_t'}{U} = \frac{P_t}{U} = \frac{10\ 000}{230} = 43.5\ A}$. Le courant total avec les condensateurs est plus faible que le courant total sans, donc il faudra un câble moins gros pour transporter le courant.