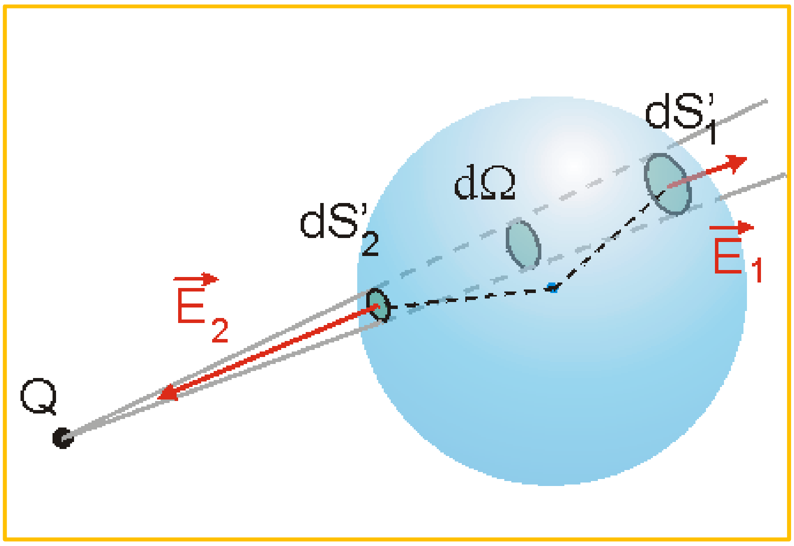
CM – Bases de l'Electricité

Chapitre 4 : Electrostatique – Partie 2



I- Distribution de charges :

1) Distribution discrète :

La distribution de charges discrètes a été étudiée dans le chapitre précédent. On peut néanmoins rappeler que les champs électriques $\vec{E_i}$ et les potentiels électriques V_i s'additionnent pour donner un champ électrique $\vec{E}$ total et un potentiel électrique V total.

2) Distribution continue linéique :

On considère une courbe (Γ) portant la charge q uniformément répartie sur la longueur L. On peut définir la densité linéique de charges λ (en Coulomb par mètre ($\boldsymbol{C \cdot m^{-1}}$)) :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda = \frac{q}{L}}}$$

Chaque élément de longueur dl porte une charge infinitésimale $\boldsymbol{dq = \lambda\, dl}$, assimilable à une charge ponctuelle.

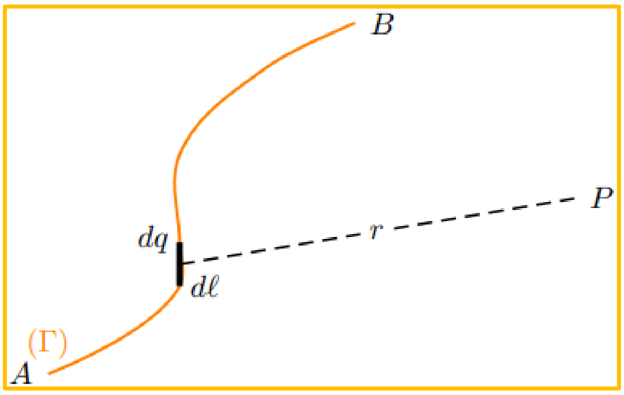


Figure 1 - Représentation d'une distribution continue linéique de charges

La charge élémentaire dq induit un champ élémentaire $d\vec{E}$ et un potentiel élémentaire dV tels que :

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{r^2} \vec{u}}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{dV = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{r}}}$$

Pour connaître le champ électrique total $\vec{E}$ et le potentiel électrique total V créés par toutes les charges élémentaires dq, on peut intégrer suivant dl le long de la courbe (Γ) :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda\, dl}{r^2} \vec{u}}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda\, dl}{r}}}$$

3) Distribution continue surfacique :

On considère une surface S portant la charge q uniformément répartie. On peut définir la densité surfacique de charges σ (en Coulomb par mètre carré ($\boldsymbol{C \cdot m^{-2}}$)) :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{q}{S}}}$$

Chaque élément de surface dS porte une charge infinitésimale $\boldsymbol{dq = \sigma\, dS = \sigma\, dx\, dy}$, assimilable à une charge ponctuelle.

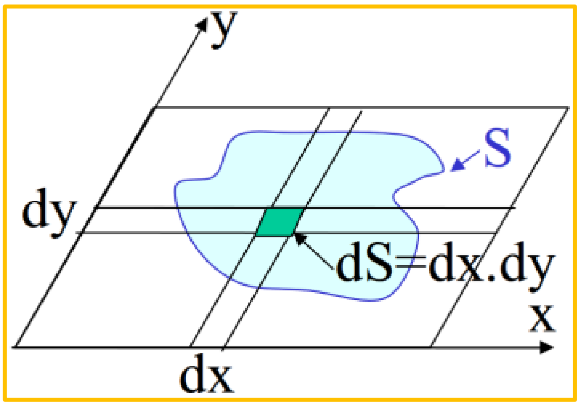


Figure 2 - Représentation d'une distribution continue surfacique de charges

La charge élémentaire dq induit un champ élémentaire $d\vec{E}$ et un potentiel élémentaire dV tels que :

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r^2}\vec{u}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{dV = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r}}}$$

Pour connaître le champ électrique total $\vec{E}$ et le potentiel électrique total V créés par toutes les charges élémentaires dq, on intègre sur tous les éléments de surface dS de la surface S :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, dS}{r^2}\vec{u}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, dS}{r}}}$$

4) Distribution continue volumique :

On considère un volume τ portant la charge q uniformément répartie. On peut définir la densité volumique de charges ρ (en Coulomb par mètre cube ($\boldsymbol{C \cdot m^{-3}}$)) :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{q}{S}}}$$

Chaque élément de volume $d\tau$ porte une charge infinitésimale $\boldsymbol{dq = \rho\, d\tau = \sigma\, dx\, dy\, dz}$, assimilable à une charge ponctuelle.

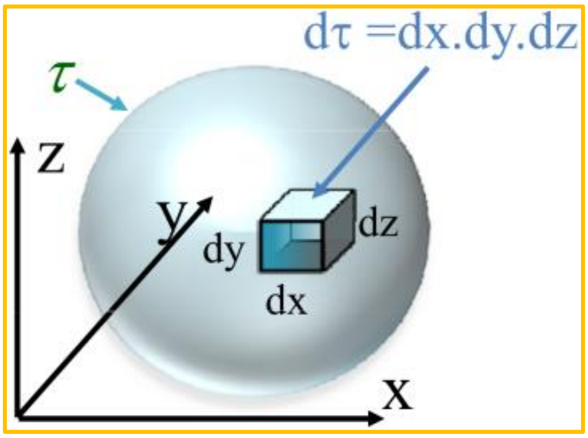


Figure 3 - Représentation d'une distribution continue volumique de charges

La charge élémentaire dq induit un champ élémentaire $d\vec{E}$ et un potentiel élémentaire dV tels que :

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\tau}{r^2}\vec{u}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{dV = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\rho\, d\tau}{r}}}$$

Pour connaître le champ électrique total $\vec{E}$ et le potentiel électrique total V créés par toutes les charges élémentaires dq, on intègre sur tous les éléments de volume $d\tau$ du volume τ :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho\, d\tau}{r^2}\vec{u}}}\ ;\ \boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\iiint_\tau \frac{\rho\, d\tau}{r}}}$$

II- Symétries et invariances :

1) Utilisation des symétries :

Pour des objets chargés de géométries quelconques, les intégrales linéiques, surfaciques et volumiques s'avèrent difficiles, voire impossible à calculer analytiquement. Cependant, si pour une géométrie quelconque les distributions de charge présentent des symétries ou des invariances, les calculs peuvent grandement se simplifier. Pour cela, on applique le principe de symétrie de Pierre Curie (1859 - 1906) : « *Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets.* ». En Electrostatique, la cause est la distribution de charges et les effets sont le potentiel électrique et le champ électrique.

2) Symétries :

a) Symétrie plane :

Une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan Π si, en prenant deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à ce plan, il vérifie :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(P_1) = \rho(P_2)}}$$

Si P est un point du plan Π, alors le champ électrique en ce point est dans ce plan de symétrie.

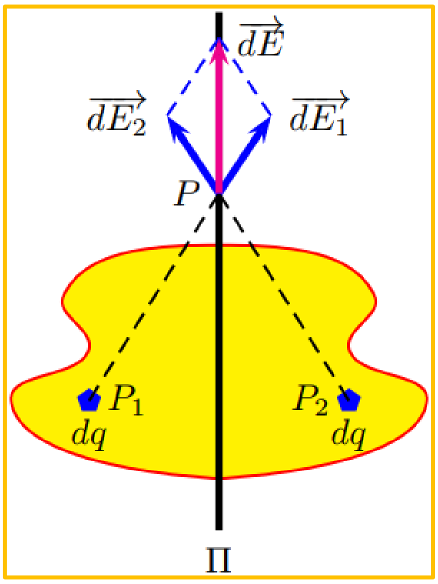


Figure 4 - Plan de symétrie d'une distribution continue surfacique quelconque

b) Antisymétrie plane :

Une distribution de charges est antisymétrique par rapport à un plan Π si, en prenant deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à ce plan, il vérifie :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(P_1) = -\rho(P_2)}}$$

Si P est un point du plan Π, alors le champ électrique en ce point est perpendiculaire au plan de symétrie.

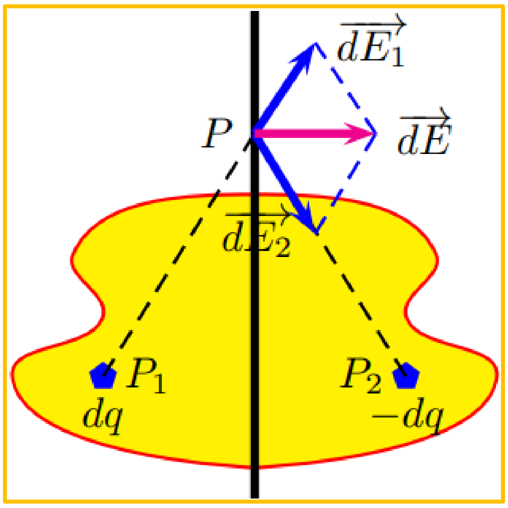


Figure 5 - Plan d'antisymétrie d'une distribution continue surfacique quelconque

c) Symétrie axiale :

Une distribution de charges est symétrique par rapport à un axe Δ si, en prenant deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe, il vérifie :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(M) = \rho(M')}}$$

Si P est un point de l'axe Δ, alors le champ électrique en ce point est parallèle à l'axe de symétrie.

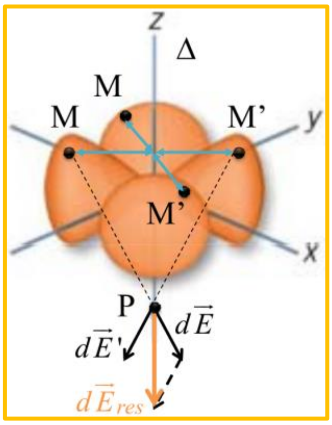


Figure 6 - Plan de symétrie selon un axe

3) *Invariances :*

a) Invariance par translation :

Une distribution est invariante par translation selon un axe si, en prenant deux points C et C' dont le second est la résultante par translation du premier selon cet axe, il vérifie :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(C) = \rho(C')}}$$

On peut le représenter en prenant un volume chargé quelconque et infini suivant l'axe Oy.

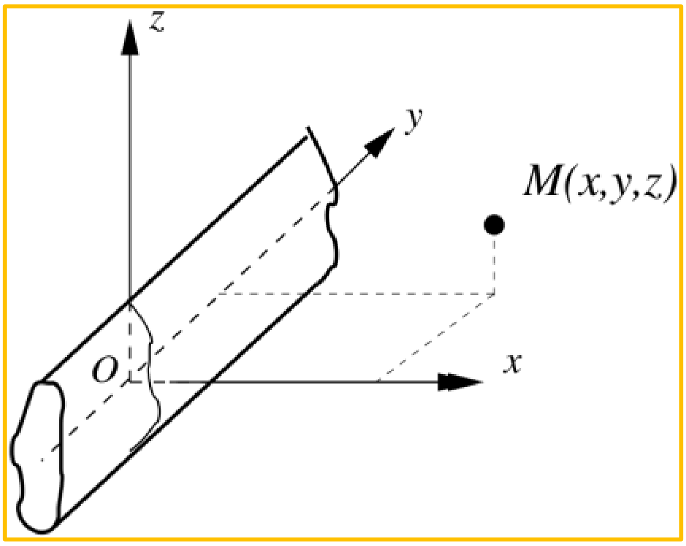


Figure 7 - Distribution continue volumique de charges invariante selon l'axe Oy

Dans ce cas, on peut alors écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(x, y, z) = \rho(x, z)}}$$

(pour tout y). En conséquence, le champ électrique et le potentiel ne dépendent pas de y :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, z)}} \ ; \ \boxed{\boldsymbol{V(x, y, z) = V(x, z)}}$$

b) Invariance par rotation :

Une distribution est invariante par rotation selon un axe si, en prenant deux points C et C' dont le second est la résultante par rotation du premier selon cet axe, il vérifie :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(C) = \rho(C')}}$$

On peut le représenter en prenant un volume chargé en forme de cône inversé et centré selon l'axe Oz.

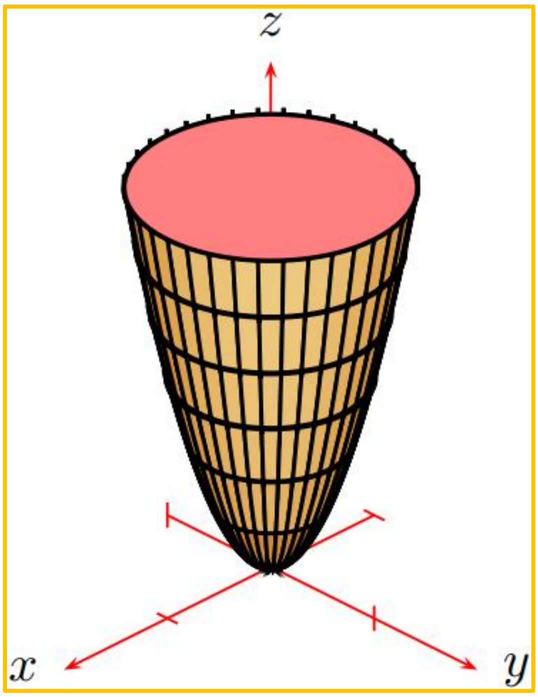


Figure 8 - Distribution continue volumique de charges invariante par rotation autour de l'axe Oz

Dans ce cas, on peut alors écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho(r,\theta,z) = \rho(r,z)}}$$

(pour tout θ). En conséquence, le champ électrique et le potentiel ne dépendent pas de θ :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,z)}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{V(r,\theta,z) = V(r,z)}}$$

De plus, l'axe Oz est un axe de symétrie et tous les plans qui le comprennent sont plans de symétries eux aussi.

III- Théorème de Gauss :

1) *Eléments de surface :*

Une surface ouverte est une surface délimitée par un contour. Une surface fermée est une surface qui entoure complètement un volume. On pose $\boldsymbol{d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}}$ le vecteur d'élément de surface orienté suivant $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface.

Figure 9 - Surface ouverte divisée en plusieurs éléments de surface dS *(à gauche) et surface fermée sphérique (à droite)*

2) Flux d'un champ de vecteurs :

Le flux ϕ d'un champ de vecteurs $\vec{E}$ traduit une « mesure » du passage des vecteurs à travers une surface orientée $\vec{S}$. En fonction de l'orientation de la surface et/ou de l'orientation du champ de vecteurs, la valeur du flux sera différente.

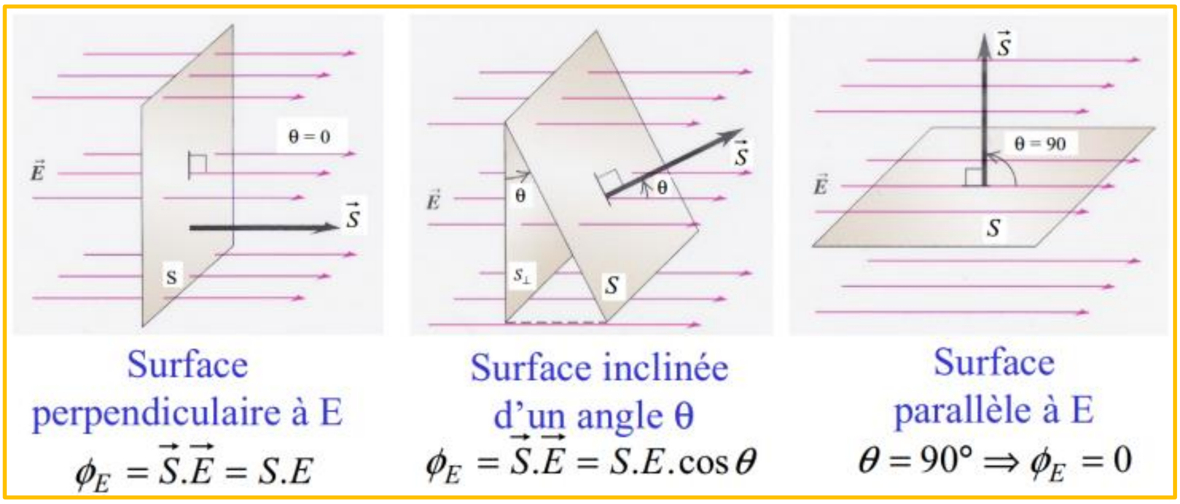


Figure 10 - Représentation de différentes orientations de surfaces et calculs de flux correspondants

On remarque que si la surface et le champ de vecteurs sont orientés dans la même direction et le même sens, la valeur du flux vaudra simplement le produit des normes des deux vecteurs ($\boldsymbol{S\ E}$) tandis que si les deux sont perpendiculaires, le flux est nul.

On considère une surface S ouverte décomposée en une infinité d'éléments de surface $d\vec{S}$ et traversée par un champ électrique $\vec{E}$. Le flux élémentaire est la « mesure » locale du champ électrique à travers la surface élémentaire :

$$\boxed{\boldsymbol{d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\ dS \cos\theta}}$$

Sur toute la surface S, le champ électrique $\vec{E}$ et l'élément de surface $d\vec{S}$ varient donc on obtient le flux total en intégrant sur toute la surface :

$$\boxed{\boldsymbol{\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}}$$

(si la surface est fermée, on encercle le symbole d'intégration).

3) *Théorème de Gauss :*

Le théorème de Gauss énonce que le flux du champ électrique $\vec{E}$ sortant d'une surface fermée est égal à la somme des charges internes Q_{int} à cette surface divisée par la permittivité diélectrique du milieu ε_0 :

$$\boxed{\boldsymbol{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}}$$

Pour utiliser ce théorème, on passe par les étapes suivantes :

- On cherche les symétries de la distribution de charge pour en déduire la direction du champ électrique et un système de coordonnées adapté à l'étude du système.
- On cherche les invariances de la distribution de charges pour en déduire les variables dont le champ électrique dépend.
- On choisit une surface de Gauss fermée adaptée au système passant par le point où on veut calculer le champ électrique. Pour simplifier les calculs, on choisira une surface telle que si l'élément de surface est parallèle au champ électrique, leur produit scalaire est le produit de leurs normes ($\boldsymbol{\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS}$) et si l'élément de surface est perpendiculaire au champ électrique, leur produit scalaire est nul ($\boldsymbol{\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0}$).
- On calcule le flux du champ électrique à travers la surface fermée ($\boldsymbol{\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$).
- On calcule la somme des charges internes contenues à l'intérieur de la surface de Gauss (qui l'entourent).
- On écrit la relation du théorème de Gauss et on en déduit la norme du champ électrique.

4) Applications :

a) Champ créé par une sphère conductrice chargée :

On considère une sphère conductrice de centre O et de rayon R portant la charge Q uniformément répartie sur sa surface (sa densité surfacique σ est positive). On veut calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point M situé à une distance r.

On cherche d'abord les symétries et invariances de la distribution de charge du système. Puisque c'est une sphère, tout plan passant par le centre O et M est un plan de symétrie donc le champ électrique $\vec{E}$ est porté par ce plan et est radial, suivant la direction du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Les coordonnées sphériques (r, θ, δ) sont les plus adaptées à l'étude du système et on peut en déduire que le champ électrique est de la forme :

$$\boxed{\vec{E} = E(r, \theta, \delta) \cdot \overrightarrow{e_r}}$$

Les charges sont réparties uniformément sur la surface de la sphère donc une rotation quelconque suivant θ ou δ du système ne change rien au champ électrique $\vec{E}$ au point M. On en déduit que le champ électrique ne dépend ni de l'angle θ, ni de l'angle δ, ce qui permet d'affiner sa forme :

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \cdot \overrightarrow{e_r}}$$

Ensuite, on choisit une surface de Gauss Σ adaptée qui sera une sphère de rayon r et passant par le point M. En chaque point de la sphère Σ, le champ électrique $\vec{E}$ est parallèle à l'élément de surface $d\vec{S}$ donc leur produit scalaire donne :

$$\boxed{\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r)\, dS}$$

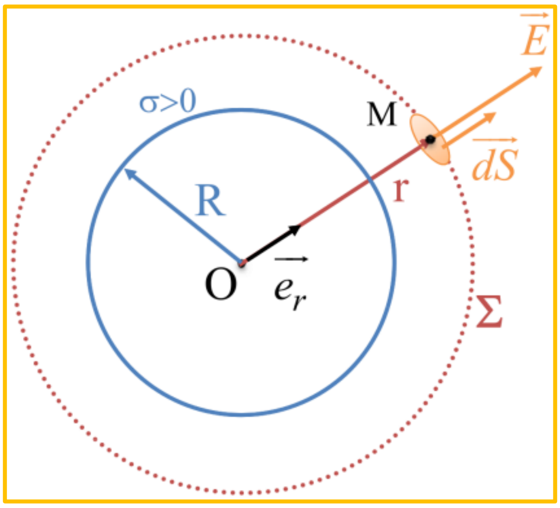


Figure 11 - Sphère conductrice chargée positivement, champ électrique généré en un point M et surface de Gauss considérée

On continue en calculant le flux du champ électrique ϕ :

$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E(r)\, dS = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = E(r)\, 4\pi r^2}$$

(car $E(r)$ est constante sur toute la sphère Σ, dont la surface vaut $\boldsymbol{4\pi r^2}$). On calcule ensuite la charge interne Q_{int} à la surface de Gauss où on doit considérer deux cas :

- Si le rayon r de la surface de Gauss Σ est plus petit que le rayon R de la sphère chargée, il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de Gauss (puisque toutes les charges sont à sa surface et seront à l'extérieur de Σ), donc la charge interne Q_{int} est nulle.
- Si le rayon r de la surface de Gauss Σ est plus grand que le rayon R de la spère chargée, elle englobe la sphère et, par conséquent, toute sa charge Q. Puisqu'elle est uniforme sur toute sa surface, elle correspond au produit de sa densité surfacique de charge σ et de sa surface totale :

$$\boxed{Q_{int} = \sigma\, 4\pi R^2}$$

On applique finalement le théorème de Gauss dans les deux cas de la charge interne :

- Si $\boldsymbol{r < R}$:

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = 0}$$

  Le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère chargée.
- Si $\boldsymbol{r > R}$:

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2}}$$

  On retrouve le même résultat qu'avec une sphère conductrice chargée.
- Dans le cas particulier où $\boldsymbol{r = R}$, on reprend l'expression précédente excepté que l'on fait tendre r vers R, ce qui donne :

$$\boxed{E(r) \underbrace{=}_{r \to R} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

  Au voisinage de la sphère chargée, le champ tend vers une valeur constante.

b) Champ créé par un fil infini :

On considère un fil rectiligne de longueur infinie suivant Oz avec une densité de charges linéique $\boldsymbol{\lambda > 0}$. On veut calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point M.

On cherche d'abord les symétries et invariances de la distribution de charge du système. Puisque c'est un fil, il est lui-même un axe de symétrie donc le champ électrique $\vec{E}$ est porté par cet axe et est radial, suivant la direction du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont les plus adaptées à l'étude du système et on peut en déduire que le champ électrique est de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = E(r, \theta, z) \cdot \overrightarrow{e_r}}}$$

Les charges sont réparties uniformément le long du fil donc une translation selon z (car le fil est infini suivant Oz) ou une rotation quelconque suivant θ du système ne change rien au champ électrique $\vec{E}$ au point M. On en déduit que le champ électrique ne dépend que de r, ce qui permet d'affiner sa forme :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = E(r) \cdot \overrightarrow{e_r}}}$$

Ensuite, on choisit une surface de Gauss Σ adaptée qui sera un cylindre de hauteur h, de rayon r et d'axe central parallèle au vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$, le tout passant par le point M.

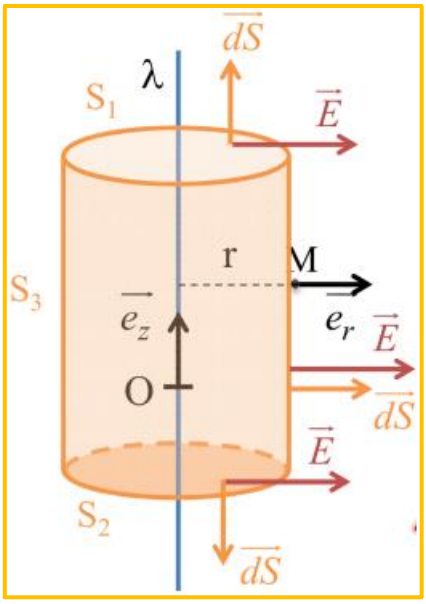


Figure 12 - Fil infini chargé positivement, champ électrique généré en un point M et surface de Gauss considérée

On calcule le flux ϕ du champ électrique $\vec{E}$ en décomposant la surface de Gauss Σ en trois surfaces : la surface du dessus du cylindre S_1, la surface du dessous du cylindre S_2 et la surface du contour du cylindre S_3.

On a alors :

$$\boldsymbol{\phi} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + \iint_{S_3} E(r) \cdot dS = E(r) \iint_{S_3} dS$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = E(r)\, 2\pi r h}$$

(les intégrales $\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ et $\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sont nulles car le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à l'élément de surface $d\vec{S}$ dans les deux cas et la surface S_3 vaut $\boldsymbol{2\pi r h}$). La charge interne Q_{int} est contenue uniquement sur la partie du fil à l'intérieur de la surface de Gauss Σ, donc :

$$\boxed{Q_{int} = \lambda h}$$

On applique finalement le théorème de Gauss :

$$E(r)\, 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}}$$

IV- Les conducteurs et condensateurs :

1) *Les conducteurs :*

On appelle « conducteur » tout corps possédant à l'échelle microscopique des porteurs de charges mobiles susceptibles de se déplacer dans tout le volume du matériau. En Electrostatique, les charges sont considérées immobiles et même si les charges à l'intérieur d'un conducteur peuvent se déplacer, on étudiera le système lorsque les charges sont « redevenues » immobiles. On dit alors que le système est à l'équilibre. Lorsqu'on charge un conducteur, les charges amenées se repoussent et se répartissent uniformément sur sa surface de façon à s'éloigner le plus possible les unes par rapport aux autres. Cela conduira à voir une densité surfacique de charges telle que :

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}}$$

Les conducteurs possèdent certaines propriétés :

- Le champ électrique est nul en tout point M à l'intérieur du conducteur ($\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\mathbf{0}}$).
- Le potentiel est le même en tout point du conducteur ($\boldsymbol{V}(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{cste}$).
- La direction du champ électrique $\vec{E}$ en un point M à l'extérieur d'un conducteur mais trop proche de celui-ci est perpendiculaire à sa surface (car la surface du conducteur est une surface équipotentielle et les lignes de champ électrique sont toujours perpendiculaires à ces surfaces). Sa norme est proportionnelle à la densité surfacique de charges et vaut :

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}}$$

2) Capacité :

On appelle « capacité » C d'un conducteur à l'équilibre la grandeur :

$$\boxed{\boldsymbol{C} = \left|\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{V}}\right|}$$

(avec C en Farad ($\boldsymbol{F}$), Q la charge électrique en Coulomb ($\boldsymbol{C}$) et V le potentiel électrique en Volt ($\boldsymbol{V}$)).

3) Les condensateurs :

On considère deux conducteurs A et B dont le second (qui est électriquement neutre) entoure complètement le premier (qui est chargé positivement à $+\boldsymbol{Q_A}$).

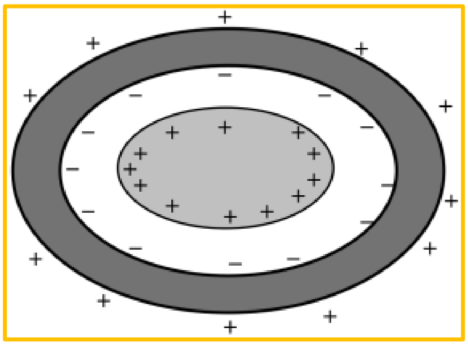


Figure 13 - Schéma de la situation

Le conducteur interne A a des charges positives qui se répartissent sur sa surface. Par influence, des charges libres négatives (de charge $-\boldsymbol{Q_A}$) du conducteur externe B se répartissent sur sa face interne. Pour rester électriquement neutre, les charges libres positives (de charge $-\boldsymbol{Q_A}$) de B se répartissent sur sa surface externe. Les charges portées par les deux surfaces en regard sont rigoureusement opposées.

On appelle alors « condensateur » un ensemble de deux conducteurs à l'équilibre en influence totale, de charges respectives $-\boldsymbol{Q}$ et $+\boldsymbol{Q}$. Les conducteurs sont alors appelés « armatures » ou « électrodes ». Si V_1 et V_2 sont les potentiels des électrodes d'un condensateur et Q la charge d'une des électrodes, on définit la capacité C du condensateur par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \left|\frac{Q}{V_1 - V_2}\right|}}$$

La capacite représente alors la faculté d'un condensateur à pouvoir stocker une certaine quantité de charges lorsqu'il y a une différence de potentiel entre ses deux électrodes.

4) Exemples :

a) Condensateur sphérique :

On considère une sphère A pleine conductrice de rayon R_1, chargé à $+\boldsymbol{Q}$, entourée d'une sphère creuse B de rayon interne R_2 et de rayon externe R_3. La sphère creuse est initialement neutre. Par influence totale, la surface interne de la sphère creuse est chargée à $-\boldsymbol{Q}$ et la surface externe est chargée à $+\boldsymbol{Q}$.

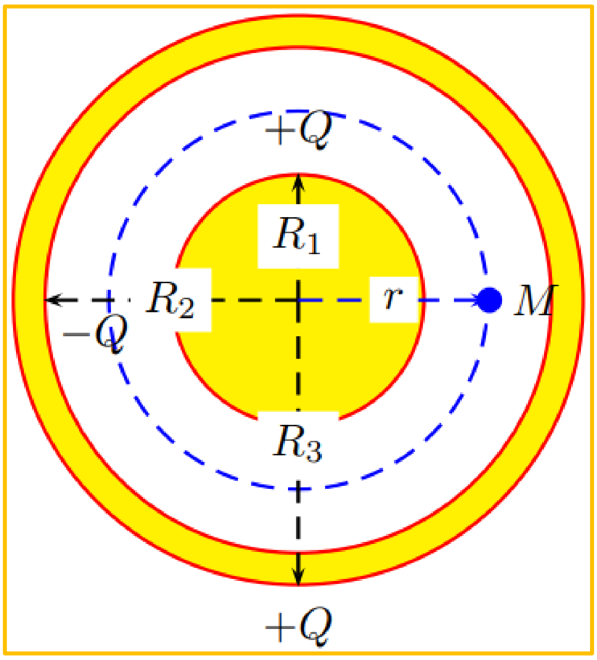


Figure 14 - Condensateur sphérique

On cherche à calculer le champ électrique $\vec{E}$ au point M se situant entre les deux conducteurs à une distance r. C'est le même raisonnement que pour la sphère creuse chargée à sa surface, donc il vaut :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r^2}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}}$$

On calcule ensuite la différence de potentiel entre les deux conducteurs :

$$\boldsymbol{V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{e_r}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]}}$$

(avec $\boldsymbol{\overrightarrow{e_r}\cdot d\vec{l} = dr}$). La capacité C de ce condensateur vaut alors :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \left|\frac{Q}{V_1 - V_2}\right| = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}}}$$

b) Condensateur plan :

On considère un condensateur plan formé de deux plaques métalliques A et B (chargées respectivement à $+\boldsymbol{Q}$ et à $-\boldsymbol{Q}$) parallèles de surface S très grande devant son épaisseur e. Les densités surfaciques de charge sont respectivement $\boldsymbol{\sigma = \frac{+Q}{S}}$ et $\boldsymbol{\sigma = \frac{-Q}{S}}$.

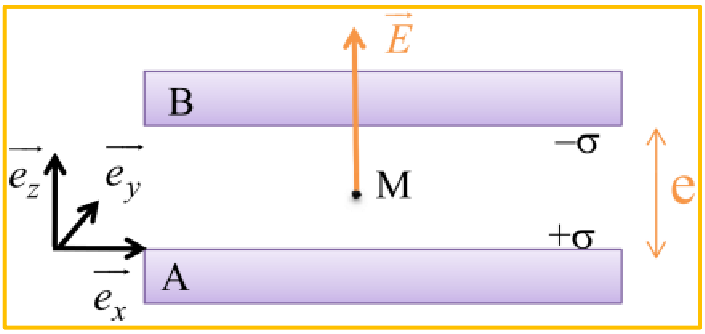


Figure 15 - Condensateur plan

On cherche à calculer le champ électrique $\vec{E}$ au point M qui se trouve à l'intérieur du condensateur. Puisque e est très petit, on peut considérer que le point M est très proche des surfaces chargées, donc il est perpendiculaire aux surfaces (dirigé de la surface chargée positivement à celle dirigée négativement) et il vaut :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\overrightarrow{\boldsymbol{e_z}}}$$

On calcule ensuite la différence de potentiel entre les deux conducteurs :

$$\boldsymbol{V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}\cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{z_A}^{z_B} dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_B - z_A)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{V_A - V_B = \frac{\sigma\, e}{\varepsilon_0} = \frac{Q\, e}{S\,\varepsilon_0}}}$$

(avec $\boldsymbol{\overrightarrow{e_z}\cdot d\vec{l} = dz}$ et $\boldsymbol{z_B - z_A = e}$). La capacité C de ce condensateur vaut alors :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \left|\frac{Q}{V_1 - V_2}\right| = \frac{Q}{\frac{Q\,e}{S\,\varepsilon_0}} = \frac{S\,\varepsilon_0}{e}}}$$