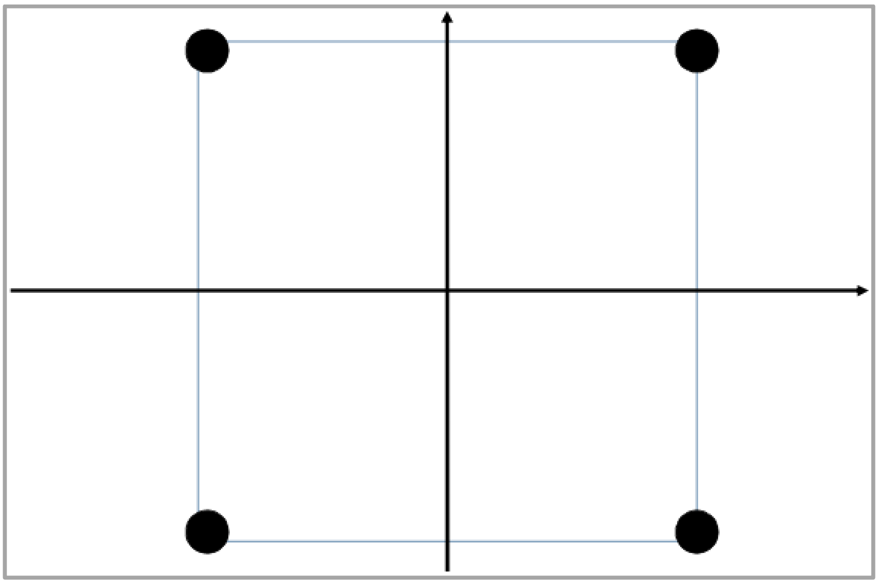
CM – Introduction à la Dynamique

Chapitre 5 : Systèmes de points matériels



I- Au-delà de la Mécanique du point matériel :

Etudier la mécanique d'un point matériel ne suffit pas à décrire entièrement le mouvement d'objets plus courants, comme des objets en rotation. On étudiera des systèmes de points matériels variables comme la collision de deux boules de billard, la rotation d'un gyroscope autour d'un axe ou le lancement d'une fusée.

1) *Définitions :*

Un corps est considéré « rigide » si la distance entre deux points quelconques de celui-ci ne varie pas au cours du temps, c'est-à-dire si le corps ne se déforme pas.

Le « centre de masse » d'un corps est un point de référence imaginaire (purement mathématique) situé à la position moyenne de la masse du corps. C'est ce point qui était appelé « point matériel » précédemment. Si la distribution de masse est uniforme et possède une symétrie globale, le centre de masse est confondu avec le centre géométrique.

2) *Détermination du centre de masse d'un système de points matériels :*

On notera G le centre de masse dans chacun des cas (à ne pas confondre avec le centre de gravité).

a) Cas d'un système de deux points matériels :

On considère un système de deux points matériels M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2. Le centre de masse G est défini par l'équation suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}}}$$

Dans un référentiel d'origine O, on peut déterminer le centre de masse par rapport à ce point, ce qui s'écrit :

$$\boldsymbol{m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = m_1\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}\right) + m_2\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}\right) = \vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{m_1\overrightarrow{GO} + m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{GO} + m_2\overrightarrow{OM_2} = \vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{GO}(m_1 + m_2) = -\left(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}}}$$

(car $\boldsymbol{\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}}$ par relation de Chasles et $\boldsymbol{\overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{OG}}$).

En réécrivant la formule avec les composantes de chaque vecteur, on obtient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 \end{pmatrix}}$$

Par exemple, si les deux points matériels M_1 et M_2 sont sur l'axe Ox et que les masses m_1 et m_2 sont identiques, on a :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{2m_2} \begin{pmatrix} m_2(x_1 + x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) Cas d'un système de N points matériels :

On considère un système de N points matériels M_k, de masses m_k (avec k allant de $\mathbf{1}$ à N). Le centre de masse G est défini par l'équation suivante :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{GM_k} = \vec{0}}$$

Dans un référentiel d'origine O, on peut déterminer le centre de masse par rapport à ce point, ce qui s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{GM_k} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_k}\right) = \overrightarrow{GO} \sum_{k=1}^{N} m_k + \sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{OM_k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow M\,\overrightarrow{GO} = -\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{OM_k}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{OM_k}}{M}}$$

(avec $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{m_k} = \boldsymbol{M}$ la masse totale du système). En réécrivant la formule avec les composantes de chaque vecteur, on obtient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} m_k x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} m_k y_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} m_k z_k \end{pmatrix}}$$

c) Cas d’un système continu :

On considère un système de points matériels formé de distributions continues avec des densités linéique λ, surfacique σ ou volumique ρ. Le centre de masse G est défini par l’équation suivante :

$$\boxed{\int \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}}$$

(avec $\boldsymbol{dm = \lambda(M)\, dl = \sigma(M)\, dS = \rho(M)\, dV}$ l’élément infinitésimal de masse au point M, ce qui définit une intégrale simple, double ou triple selon le cas étudié). L’intégration se limite uniquement à l’objet étudié et les densités peuvent être uniformes ou non. Dans un référentiel d’origine O, on peut déterminer le centre de masse par rapport à ce point, ce qui s’écrit :

$$\int \overrightarrow{GM}\, dm = \int \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}\right) dm = \overrightarrow{GO} \int dm + \int \overrightarrow{OM}\, dm = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow M\, \overrightarrow{GO} = -\int \overrightarrow{OM}\, dm$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OM}\, dm}{M}}$$

(avec $\int \boldsymbol{dm} = \boldsymbol{M}$ la masse totale du système dans le cas continu).

En réécrivant la formule avec les composantes de chaque vecteur, on obtient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} \int x\, dm \\ \int y\, dm \\ \int z\, dm \end{pmatrix}}$$

3) Mouvement du centre de masse :

On ne considérera que le cas d'un système de N points matériels discrets.

La vitesse du centre de masse $\overrightarrow{v_{CM}}$ est calculable de la même manière qu'un point matériel classique, c'est-à-dire par la dérivée temporelle du vecteur position du centre de masse $\overrightarrow{OG}$:

$$\overrightarrow{v_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{OM_k}}{M}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k}{M}\frac{d\overrightarrow{OM_k}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{v_k}}{M}}$$

La vitesse du centre de masse est donc la moyenne pondérée par la masse des vitesses des points matériels du système. De cette vitesse, on peut définir la quantité de mouvement du centre de masse $\overrightarrow{p_{CM}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{p_{CM}} = M\,\overrightarrow{v_{CM}} = M\,\frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{v_k}}{M} = \sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{v_k} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{p_k}}$$

La quantité de mouvement du centre de masse est donc la somme des quantités de mouvement des points matériels du système. On peut remarquer que le centre de masse doté de la masse totale M suffit pour l'étude des mouvements de translation d'un système de points matériels.

De la vitesse définie précédemment, on peut définir l'accélération du centre de masse $\overrightarrow{a_{CM}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{a_{CM}}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{v_{CM}}}}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k}{M}\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{v_k}}}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{\boldsymbol{F_k}}}{M}}$$

(avec $m_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{F_k}$ par le Principe Fondamental de la Dynamique). Or, la force $\overrightarrow{F_k}$ subie par chaque point matériel peut être décomposée en la somme d'une force externe au système (comme le poids, par exemple) et de la somme des forces interne que le point matériel subit du système (comme le poids propre de chaque élément infinitésimal du système qui ne se compense pas avec les autres, par exemple) :

$$\boxed{\overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{F_k^{externe}} + \sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}}}$$

En injectant cette nouvelle écriture dans l'équation précédente, on obtient :

$$\boxed{M\,\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{k=1}^{N}\left(\overrightarrow{F_k^{externe}} + \sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}}\right) = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{F_k^{externe}} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}}}$$

Or, la somme des forces internes peut s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{k,J}^{\imath nterne}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j \neq k}^{N-1} \left(\overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}} + \overrightarrow{F_{k,J}^{\imath nterne}}\right)\right) = \vec{0}}$$

(car $\overrightarrow{F_{J,k}^{\imath nterne}} = -\overrightarrow{F_{k,J}^{\imath nterne}}$ d'après le Principe d'action – réaction de Newton, puisque chaque force interne exercée sur un point s'oppose à une autre). On a finalement :

$$\boxed{M\,\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d\overrightarrow{p_{CM}}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{F_k^{externe}}}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique s'applique donc aussi au centre de masse.

Exemple :

On considère un système de trois points matériels M_1, M_2 et M_3 de masses m_1, m_2 et m_3 dans un champ de pesanteur constante $\vec{g}$. Les trois points subissent et appliquent une force interne sur chacun des autres points possibles et subissent aussi une force externe qui est leur poids.

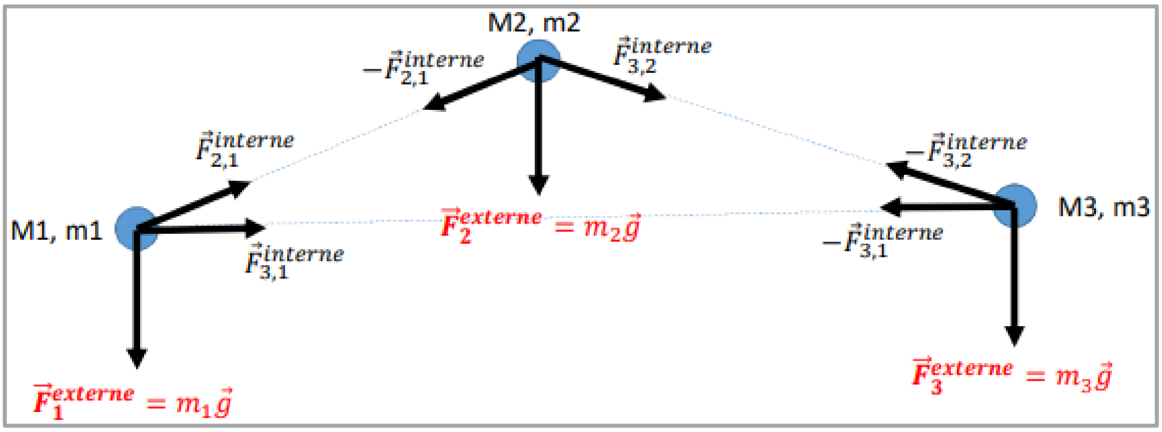


Figure 1 - Schéma de la situation

En reprenant les calculs précédents, la force externe $\overrightarrow{F^{externe}}$ et la force interne $\overrightarrow{F^{interne}}$ totale exercée sur le système valent respectivement :

$$\boxed{\overrightarrow{F^{externe}} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{g} = M\vec{g}}\ ;\ \boxed{\overrightarrow{F^{interne}} = \vec{0}}$$

4) Cas particulier d'un système de points matériels isolé :

Un système de points matériels est isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure. De ce fait, la dérivée de la quantité de mouvement du centre de masse est nulle, donc la quantité de mouvement du centre de masse est une constante du mouvement :

$$\frac{d\overrightarrow{p_{CM}}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{p_{CM}} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{p_k} = \sum_{k=1}^{N} m_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{cste}}$$

II- Les chocs :

Un choc entre deux points matériels est une force interne de contact extrêmement brève qui change leurs vitesses. Pour un système isolé, il y a conservation de la quantité de mouvement ($\overrightarrow{\boldsymbol{p_{CM}}} = \boldsymbol{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}}$ dans le cas d'un système à deux points matériels).

On distingue deux types de chocs : les chocs élastiques (ne présente pas de pertes d'énergie après le choc) et les chocs inélastiques (présente une perte d'énergie par chaleur, déformation, rupture, etc…).

On considère un choc entre deux systèmes de points matériels de masses respectives m_1 et m_2. À l'état initial, le premier système possède une quantité de mouvement dirigée selon l'axe Ox et le second système est au repos ; à l'état final, les deux systèmes possèdent une quantité de mouvement différente qui fait un angle θ_1 et θ_2 avec l'axe Ox.

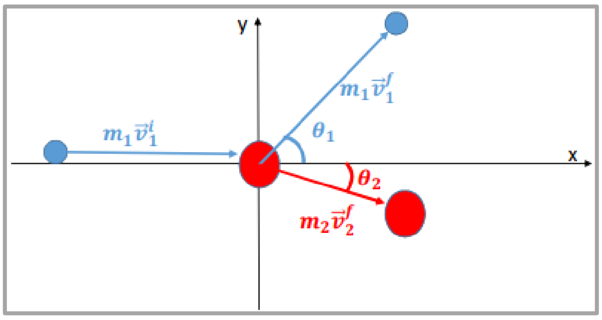


Figure 2 - Schéma de la situation

La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire pour ce système :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{P_{CM}}} = \boldsymbol{m_1\overrightarrow{v_1^i} + m_2\overrightarrow{v_2^i} = m_1\overrightarrow{v_1^f} + m_2\overrightarrow{v_2^f}}}$$

En projetant l'équation sur le repère cartésien utilisé, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{m_1 v_1^i} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m_1 v_1^f \cos\theta_1} \\ \boldsymbol{m_1 v_1^f \sin\theta_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{m_2 v_2^f \cos\theta_2} \\ \boldsymbol{-m_2 v_2^f \sin\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{m_1 v_1^i = m_1 v_1^f \cos\theta_1 + m_2 v_2^f \cos\theta_2} \\ \boldsymbol{0 = m_1 v_1^f \sin\theta_1 - m_2 v_2^f \sin\theta_2} \end{cases}}$$

C’est un système de deux équations à quatre inconnues, donc on ne peut pas le résoudre. Si on est dans le cas d’un choc élastique, il y a aussi conservation de l’énergie cinétique :

$$\boxed{E_c^i = E_c^f \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{v_1^i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \overrightarrow{v_2^i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \overrightarrow{v_1^f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \overrightarrow{v_2^f}^2}$$

En prenant le système de deux équations précédentes et cette équation, on obtient un système de trois équations à quatre inconnues, qui est résoluble si on fixe une des inconnues.

En prenant le cas particulier où les deux masses du système sont identiques (cas d’un jeu de pétanque ou de boules de billards), on peut montrer que :

$$\boxed{\overrightarrow{v_1^f} \cdot \overrightarrow{v_2^f} = \vec{0}}$$

On a alors trois possibilités :

- Soit $\overrightarrow{v_1^f} = \vec{0}$, donc le premier système s’arrête net et communique toute son énergie au deuxième.
- Soit $\overrightarrow{v_2^f} = \vec{0}$, donc le premier système rate le second (car il faut forcément qu’il y ait choc pour que le second système ait une vitesse).
- Soit $\overrightarrow{v_1^f} \perp \overrightarrow{v_2^f}$ (par définition du produit scalaire), donc les deux systèmes partent avec un angle relatif de $90°$.

III- Composition de mouvements :

On considère la chute d’une pomme dans un train en mouvement depuis le point de vue d’un voyageur ou d’une personne sur un quai à proximité. On associe au quai un référentiel fixe (R), appelé référentiel « absolu » d’axes $Oxyz$ et de base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, et au train un référentiel mobile (R'), appelé référentiel « relatif » d’axes $O'x'y'z'$ et de base $\{\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}\}$.

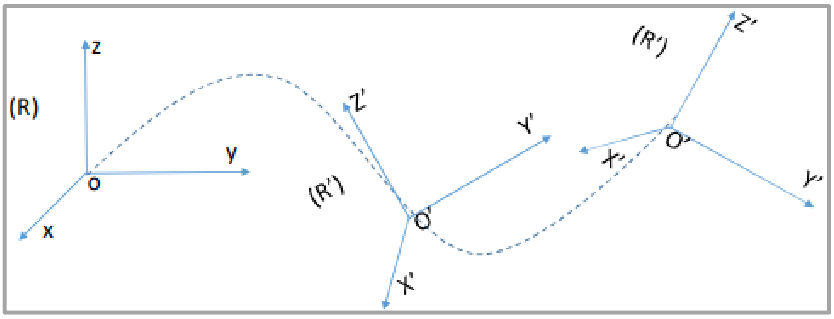


Figure 3 - Représentation d'un repère absolu quelconque et d'un repère relatif quelconque en mouvement

Le référentiel (R) peut avoir n'importe quel type de mouvement par rapport à (R').

1) Cas de la translation de (R') par rapport à (R) :

Dans le cas de la translation de (R) par rapport à (R'), l'origine O' est mobile mais les axes de chaque repère sont parallèles entre eux en tout temps t.

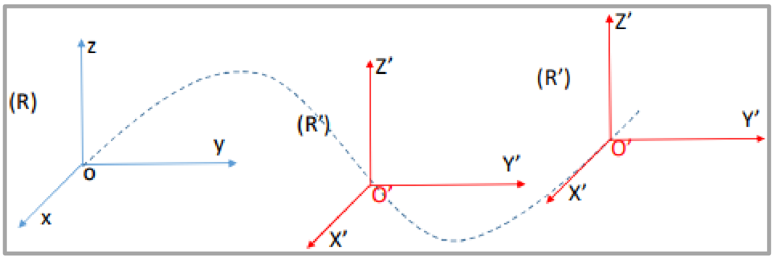


Figure 4 - Schéma de la situation

Tout ce qui se rapporte à (R) est dit « absolu » et noté normalement, tandis que tout ce qui se rapporte à (R') est dit « relatif » et noté avec une apostrophe.

a) Composition de la position :

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ peut se composer par relation de Chasles avec le vecteur position $\overrightarrow{OO'}$ de l'origine O' de (R') repéré par (R) et le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ du point M repéré par (R') :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}}$$

Le cas le plus commun de translation est celle uniforme de vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{v_{O'/O}}} = \boldsymbol{u}\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ selon Oz.

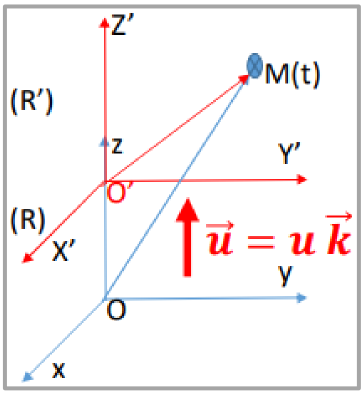


Figure 5 - Schéma de la situation

Dans ce cas, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = u\,t\,\vec{k} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = u\,t + z' \end{cases}}$$

b) Composition des vitesses :

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ correspond à la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ obtenu par composition :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}}$$

Dans le cas particulier précédent, le vecteur vitesse $\vec{v}$ vaut alors :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = u\,\vec{k} + \overrightarrow{v'} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}' \\ \dot{y} = \dot{y}' \\ \dot{z} = u\,t + \dot{z}' \end{cases}}$$

c) Composition des accélérations :

Le vecteur accélération $\vec{a}$ correspond à la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$, obtenu lui-même par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ défini par composition :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}}$$

Dans le cas particulier précédent, le vecteur accélération $\vec{a}$ vaut alors :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = 0\,\vec{k} + \overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a'}}$$

Les lois de la Dynamique de Newton sont donc préservées dans un référentiel galiléen.

Exemple :

On considère le lancement d'une fusée de masse M. Les gaz brûlés par le réacteur s'échappent vers le bas avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée. La quantité de mouvement de la fusée à un temps t vaut $\vec{P}(t) = M(t)\,\vec{v}$ (la masse dépend du temps car elle est diminuée au fur et à mesure de l'élévation de la fusée). On peut se demander ce que vaut cette quantité de mouvement au temps $t + \Delta t$:

$$\boxed{\vec{P}(t + \Delta t) = (M(t) + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \Delta M(\vec{v} + \vec{u})}$$

(avec $M(t) + \Delta M$ la nouvelle masse de la fusée (où ΔM est négatif) et $\vec{v} + \vec{u}$ venant de la composition des vitesses). La variation de la quantité de mouvement de la fusée au premier ordre vaut :

$$\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) = M(t)\,\vec{v} + M(t)\,\Delta\vec{v} + \Delta M\,\vec{v} + \Delta M\,\Delta\vec{v} - \Delta M\,\vec{v} - \Delta M\,\vec{u} - M(t)\,\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t) = M(t)\,\Delta\vec{v} - \Delta M\,\vec{u}}$$

(le terme $\Delta M\,\Delta\vec{v}$ étant du second ordre, on ne le considère pas). On divise les deux membres de l'égalité par Δt puis on prend la limite $\Delta t \to 0$, ce qui donne :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{P}(t + \Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t} = M(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = M(t)\,\vec{a} - \frac{dM}{dt}\vec{u}}$$

Or, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement donne la force extérieure que subit le système, soit le poids, ce qui mène a l'équation de l'accélération suivante :

$$\boxed{M(t)\,\vec{a} = M(t)\,\vec{g} - \frac{dM}{dt}\vec{u}}$$

Le second terme correspond à une force dirigée vers le haut, une force de poussée.

2) Cas d'un mouvement quelconque de (R') par rapport à (R) :

Dans le cas d'un mouvement quelconque de (R') par rapport à (R), la base de (R) est notée $\{\overrightarrow{e_i}\}$ et celle de (R') est notée $\{\overrightarrow{e_i'}\}$ (avec $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$). La position absolue sera notée $\vec{\boldsymbol{r}} = \sum \boldsymbol{x_i}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i}}$ et la position relative sera notée $\overrightarrow{\boldsymbol{r'}} = \sum \boldsymbol{x_i'}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}$. On rappelle que pour un mouvement circulaire sur un cercle de rayon R à une altitude $\boldsymbol{z = 0}$, le vecteur position valant $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{R}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\rho}}$ et le vecteur vitesse valant $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R\dot{\theta}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} = \boldsymbol{R\omega}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}$, on peut définir un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}\,\vec{\boldsymbol{k}}$ qui est une constante du mouvement, donc la vitesse peut se réécrire $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

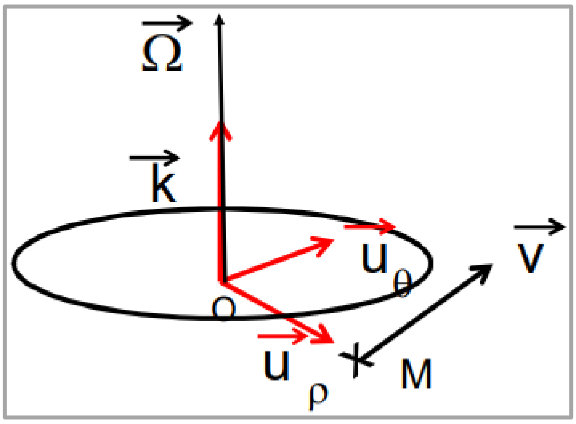


Figure 6 - Schéma de la situation

De plus, la rotation de la base relative autour de la base absolue (qui se généralise à toute rotation) peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}}{dt} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}}$$

La composition de la position dans ce cas vaut :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} + \sum \boldsymbol{x_i'}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}}$$

(avec $\overrightarrow{OO'}$ le vecteur position du repère (R') par rapport à (R)). La composition de la vitesse dans ce cas vaut alors :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}}{dt} + \frac{d\sum \boldsymbol{x_i'}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}}{dt} + \sum \frac{d\boldsymbol{x_i'}}{dt}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}} + \sum \boldsymbol{x_i'}\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}}}{dt}$$

$$= \overrightarrow{\boldsymbol{v_O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \sum \boldsymbol{x_i'}\overrightarrow{\boldsymbol{e_i'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{r'}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_e}}}$$

(avec $\overrightarrow{v'}$ la vitesse relative du système dans le repère (R') et $\overrightarrow{\boldsymbol{v_e}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_O}} + \vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{r'}}$ la vitesse d'entraînement du repère (R') par rapport au repère (R)). La composition de l'accélération dans ce cas vaut finalement :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{a_e}} + \overrightarrow{\boldsymbol{a_c}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{a_e}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v'}}}$$

(avec $\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}} = \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{v'}}$ l'accélération de Coriolis (du nom de Gaspard – Gustave Coriolis (1792 – 1843)).