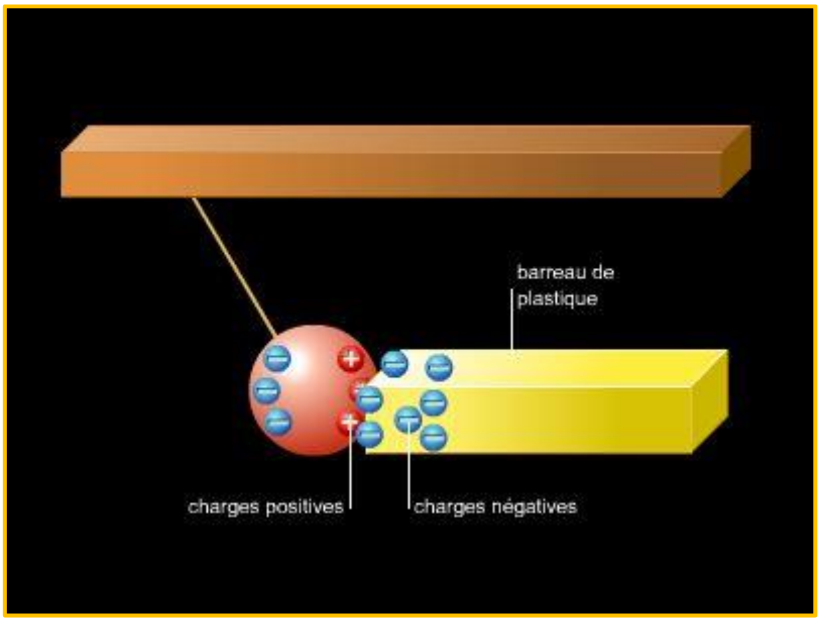
CM – Bases de l’Electricité

Chapitre 3 : Electrostatique – Partie 1



I- Charges électriques :

1) Propriétés :

La charge électrique est une notion abstraite qui permet d’expliquer certains comportements. Elle existe sous deux formes : négative et positive.

La charge électrique est conservative, elle ne peut ni être créée, ni être détruite. Toute charge électrique est un multiple entier de la charge élémentaire q_e dont l'unité est le Coulomb (noté $\boldsymbol{C}$, du nom de Charles-Augustin Coulomb (1736 – 1806)) qui correspond à l'équivalent d'un courant d'un ampère traversant un circuit pendant une seconde ($\mathbf{1}\ \boldsymbol{C} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}^{-\mathbf{1}}$). La charge élémentaire vaut $\boldsymbol{q_e} = \mathbf{1.602\,177\,33} \times \mathbf{10^{-19}}\boldsymbol{C} \approx \mathbf{1.6} \times \mathbf{10^{-19}}\boldsymbol{C}$.

Dans un atome, la charge d'un électron vaut $-\boldsymbol{q_e}$, la charge d'un proton vaut $\boldsymbol{q_e}$ et la charge d'un neutron est nulle.

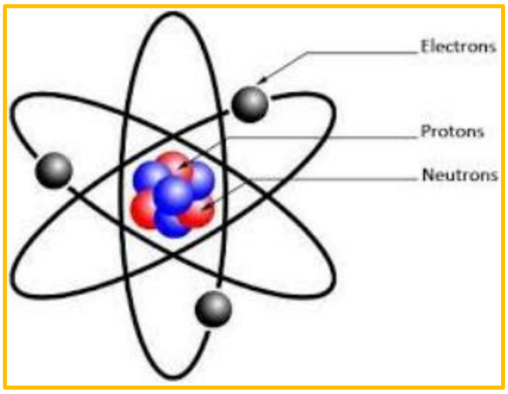


Figure 1 - Schéma d'un atome

À l'échelle macroscopique, un corps possédant une charge électrique négative a un excès d'électrons et un corps possédant une charge électrique positive a un excès de protons ou un déficit d'électrons (puisqu'on ne peut pas arracher facilement des protons à un atome).

Les premiers effets des charges électriques ont été découverts à l'Antiquité par Thalès de Milet (625 – 546 av. J.-C.), qui écrit : « *Frottez l'ambre avec de la laine et il attirera des morceaux de bois, de plumes, de paille, …* ».

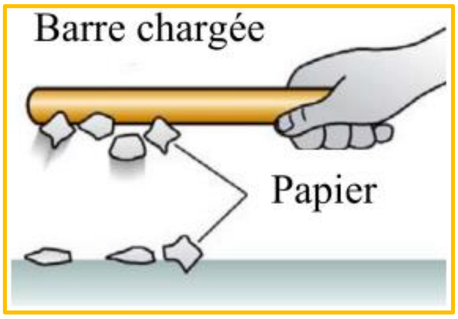


Figure 2 - Illustration d'un isolant chargé, préalablement frotté, attirant à lui des objets de petite masse

Le mot « électricité » vient du mot « elektrôn », signifiant « ambre » en grec. Il remarqua aussi que le frottement d'un tissu en soie sur du verre « arrache » des électrons au verre, le chargeant ainsi positivement.

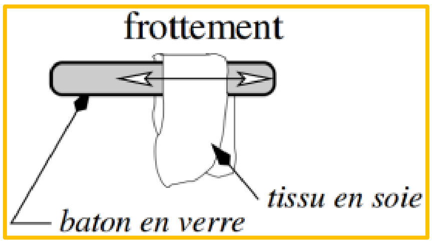


Figure 3 - Frottement d'un tissu de soie sur une barre en verre

2) Expériences basiques :

a) Expériences basiques par frottement :

On prend deux barres en plastiques non frottées, l'une suspendue au-dessus du vide et l'autre que l'on approche vers la première. Ici, rien ne se passe.

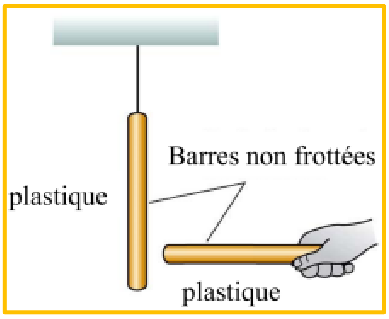


Figure 4 - Barres de plastique neutres

On frotte les deux barres en plastique avec de la laine avant de les rapprocher. Ici, la barre suspendue va s'éloigner de la barre que l'on approche sans qu'il n'y ait contact. Cela vient du fait qu'en frottant les deux barres avec de la laine, on « arrache » des électrons aux deux objets, les chargeant positivement. Lorsqu'on approche les deux barres, le fait qu'elles sont chargées de la même manière les repoussent obligatoirement.

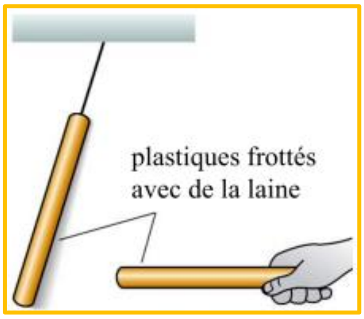


Figure 5 - Barres de plastique chargées après frottement avec de la laine

On remplace la barre en plastique que l'on approche par une barre en verre que l'on frotte avec de la soie (la barre suspendue est aussi frottée avec de la laine).

Ici, la barre suspendue se rapproche de la barre que l'on tend. La barre en plastique frottée avec de la laine est chargée positivement mais la barre en verre frottée avec de la soie est chargée négativement, ce qui fait qu'en cas d'approche de l'une vers l'autre, les deux barres s'attirent.

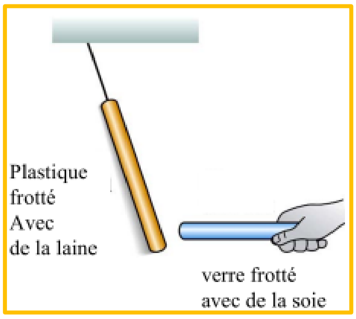


Figure 6 - Barre en plastique frottée avec de la laine repoussée par une barre de verre frottée avec de la soie

On reprend le cas des deux barres en plastique, excepté que l'on les frotte fortement avec de la laine. Ici, la barre suspendue est aussi repoussée, mais plus loin. Cela vient du nombre de charges négatives arrachées qui sont plus nombreuses, donc le pouvoir de repoussement des barres est augmenté.

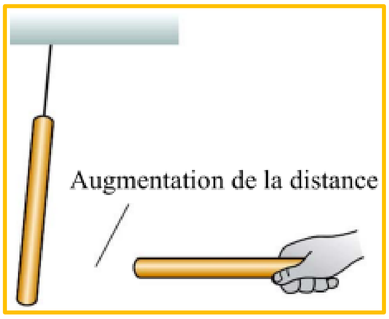


Figure 7 - Barres de plastiques chargées se repoussant bien plus qu'elles ont été frottées

b) Expériences basiques par contact :

On prend une barre en plastique chargée électriquement dont on pose l'extrémité sur une sphère métallique. Les charges électriques de la barre en plastique sont absorbées par la sphère, devenant chargée à son tour. Cela vient du fait que la sphère est faite en métal, un matériau conducteur de charges électriques, les captant au plastique qui est un isolant électrique.

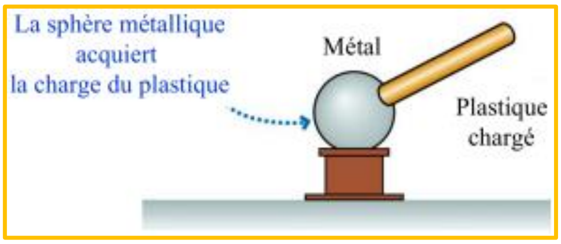


Figure 8 - Transmission de charges d'un matériau isolant à un matériau conducteur

Si on essaie d'attirer des petits objets avec la barre en plastique, cela devient impossible car la barre n'est plus chargée électriquement : elle est redevenue neutre.

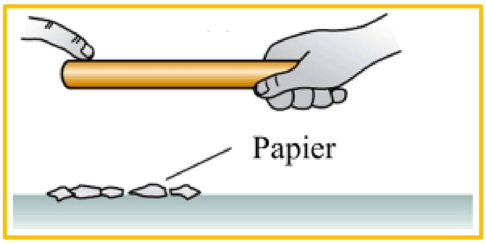


Figure 9 - Barre en plastique isolante redevenue neutre

On reprend le premier cas, excepté que l'on relie la sphère métallique à une autre sphère de même nature avec une barre en métal. Les charges vont se propager de la barre en plastique à la première sphère, puis de la première sphère à la seconde grâce à la barre en métal conductrice.

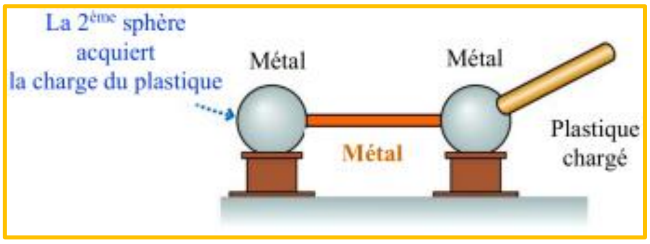


Figure 10 - Transmission de charges entre deux matériaux conducteurs

Si on remplace la barre en métal par une barre en plastique, donc un isolant électrique, il n'y a pas de transfert de charges d'une sphère à une autre et la seconde sphère métallique restera neutre.

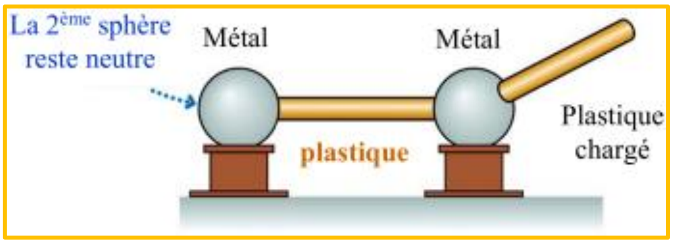


Figure 11 - Transmission de charges impossible entre deux conducteurs reliés par un matériau isolant

c) Bilan :

Des différentes expériences, on peut faire certains constats :

- Deux charges de même signe se répulsent, deux charges de signes opposés s'attirent.
- Les conducteurs électriques peuvent être chargés s'ils sont isolés (de la terre) et les isolants peuvent être toujours chargés.
- La distribution des charges dans un isolant est statique, elles restent là où elles ont été déposées, tandis que les charges dans un conducteur peuvent se

déplacer et se répartissent en surface d'un condensateur. En régime permanent, les charges seront considérées comme statiques.

Figure 12 - Répartition des charges dans un isolant (à gauche) et un conducteur (à droite) après dépôt

II- Forces électromagnétiques :

1) Balance de Coulomb :

La balance de torsion de Coulomb est un instrument physique qui a permis de mesurer avec précision les forces qui s'exercent entre les charges électriques. Il est composé de deux sphères, une chargée négativement et un contrepoids, reliés par une barre isolante, le tout suspendu par un fil attaché au centre de la barre, permettant aux deux sphères de tourner sur le contour d'un cercle gradué.

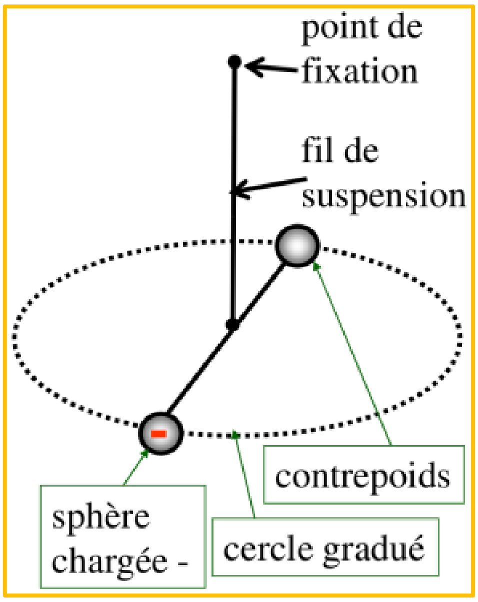


Figure 13 - Schéma de la balance de torsion de Coulomb

Lorsque l'on approche une charge, on mesure l'angle α de déplacement de la balance. Cet angle est proportionnel à la force entre les deux charges, séparées d'une distance r, dont on cherche à déterminer la force.

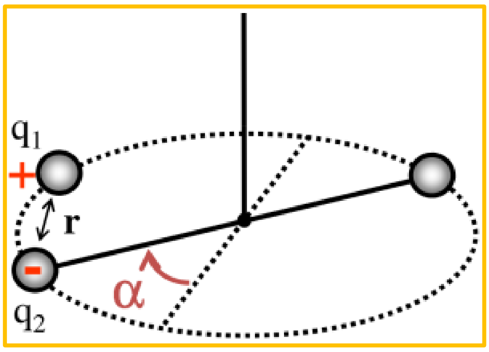


Figure 14 - Mesure de l'angle formé par la balance après avoir approché une sphère chargée positivement

2) Loi de Coulomb :

Après de multiples expériences, Coulomb déduit que la force exercée entre deux charges ponctuelles est dirigée selon la droite joignant les deux charges, attractive ou répulsive selon leur nature, proportionnelle aux charges q_1 et q_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance r entre les deux charges. Le module de la force s'exerçant entre les deux charges s'écrit :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{F_C}\right\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1\, q_2|}{r^2}}$$

(avec $\left\|\overrightarrow{F_C}\right\|$ en Newton ($\boldsymbol{N}$), les charges q_1 et q_2 en Coulomb ($\boldsymbol{C}$), la distance r en mètres ($\boldsymbol{m}$), la permittivité diélectrique du vide $\boldsymbol{\varepsilon_0} = \frac{1}{36\pi\times10^9} \approx \mathbf{8.85} \times \mathbf{10^{-12}}\ \boldsymbol{F \cdot m^{-1}}$, où le rapport $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ vaut $\mathbf{9} \times \mathbf{10^9}$). On appelle cette force la « force électrostatique » (ou « force de Coulomb »), qui est une quantité vectorielle. On définit le vecteur unitaire $\vec{u}$ qui servira de référence de direction et de sens. Il est toujours dirigé de l'objet source de la force vers l'objet qui la subit.

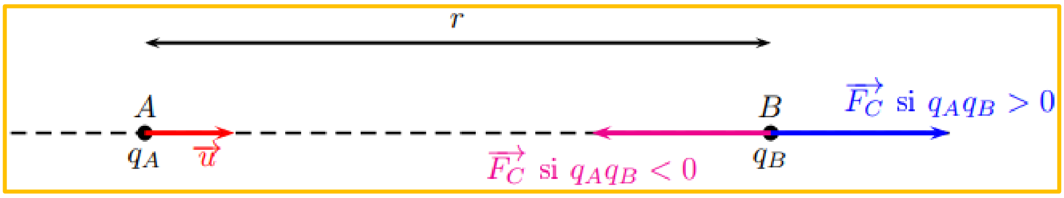


Figure 15 - Direction de la force électrostatique selon le vecteur unitaire et selon le signe du produit des charges

On exprime alors la force d'attraction ou de répulsion exercée par la charge source q_A sur la charge objet q_B comme :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A\to B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}\vec{u}}$$

Puisque la force électrostatique s'exerce d'une charge sur une autre, vu que l'on a deux charges, elle s'exerce aussi de l'autre charge à la première. On peut reprendre le cas précédent où les deux charges sont positives ($q_1 q_2 > 0$), mais on regarde les forces électrostatiques exercées par chaque charge sur l'autre.

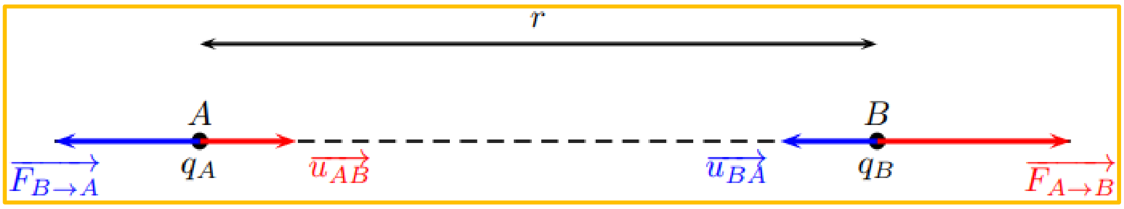


Figure 16 - Forces électrostatiques exercées par chaque charge sur l'autre

Mathématiquement, la force électrostatique exercée de A vers B $\overrightarrow{F_{A\to B}}$ et la force électrostatique exercée de B vers A $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ s'écrivent :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A\to B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}\overrightarrow{u_{AB}}} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{F_{B\to A}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}\overrightarrow{u_{BA}}}$$

Les deux forces sont de même direction (sur le même axe) et de même norme ($\left\|\overrightarrow{F_{A\to B}}\right\| = \left\|\overrightarrow{F_{B\to A}}\right\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_A \cdot q_B|}{r^2}$) mais de sens opposés ($\overrightarrow{u_{AB}} = -\overrightarrow{u_{BA}}$). On en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{A\to B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}\overrightarrow{u_{AB}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A \cdot q_B}{r^2}\overrightarrow{u_{BA}} = -\overrightarrow{F_{B\to A}}}$$

Les deux forces suivent le « principe des actions réciproques » ou « principe d'action – réaction » : toute force exercée résulte en une réaction opposée et de même norme.

En termes d'ordres de grandeur, en prenant l'exemple des forces électrostatique et gravitationnelle exercées entre le proton et l'électron d'un atome d'hydrogène :

- Pour un proton de charge $q_1 = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ et un électron de charge $q_2 = -1.6 \times 10^{-19}\ C$ séparés d'une distance $r = 0.53 \times 10^{-10}\ m$, la norme de la force électrostatique vaut :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{F_C}\right\| = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}\frac{\left|1.6 \times 10^{-19} \times (-1.6 \times 10^{-19})\right|}{(0.53 \times 10^{-10})^2} = 8.2 \times 10^{-8}\ N}$$

- Pour un proton de masse $m_1 = 1.67 \times 10^{-27}\ kg$ et un électron de masse $m_2 = 0.91 \times 10^{-30}\ kg$ séparés de la même distance, la norme de la force gravitationnelle vaut :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{F_g}\right\| = G\frac{|m_1\, m_2|}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{\left|1.67 \times 10^{-27} \times 0.91 \times 10^{-30}\right|}{(0.53 \times 10^{-10})^2} = 3.6 \times 10^{-47}\ N}$$

(avec $G = 6.67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$).

On remarque que la force gravitationnelle est environ $\mathbf{10^{40}}$ fois plus faible que la force électrostatique.

3) Exercice d'application :

On cherche à calculer la force $\overrightarrow{F_r}$ exercée par deux charges $\boldsymbol{q_B = -25\,nC}$ et $\boldsymbol{q_C = 50\,nC}$ sur une charge $\boldsymbol{q_A = 50\,nC}$, les trois positionnées en triangle isocèle rectangle en A et dont les distances AB et AC sont identiques et valent $\mathbf{5\,cm}$. On prendra un repère cartésien orthonormé direct à deux dimensions $(\vec{x}, \vec{y})$ pour étudier ce problème.

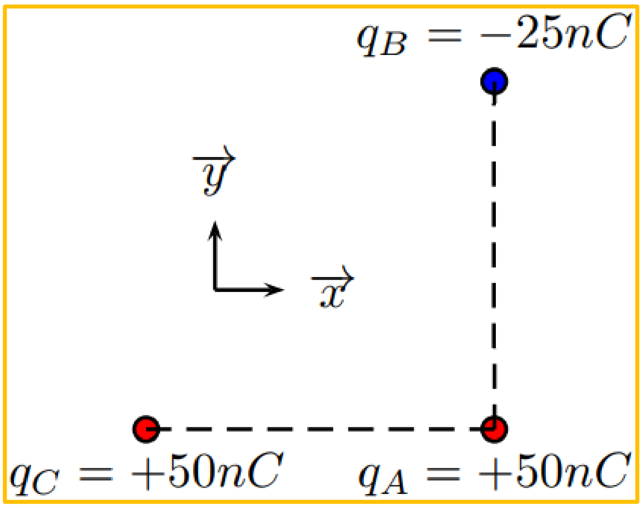


Figure 17 - Schéma de la situation

On commence par déterminer les directions et sens des forces électrostatiques $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ exercée par B sur A et $\overrightarrow{F_{C\to A}}$ exercée par C sur A. Dans le premier cas, q_A et q_B sont de signe opposé, donc les charges s'attirent, et la force $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ est dirigée selon le vecteur $\vec{y}$. Dans le second cas, q_A et q_C sont de même signé, donc les charges se repoussent, et la force $\overrightarrow{F_{C\to A}}$ est dirigée selon le vecteur $\vec{x}$. La force résultante $\overrightarrow{F_r}$ exercée correspond à la somme vectorielle des deux autres forces, faisant qu'elle a des composantes selon $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F_r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{F_{B\to A}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{C\to A}}} = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F_{B\to A}}}\right\| \vec{\boldsymbol{x}} + \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F_{C\to A}}}\right\| \vec{\boldsymbol{y}}}$$

Ensuite, on calcule les normes des forces $\overrightarrow{F_{B\to A}}$ et $\overrightarrow{F_{C\to A}}$:

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F_{B\to A}}}\right\| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}} \frac{\left|(\mathbf{-25 \times 50}) \times \mathbf{10^{-9}}\right|}{(\mathbf{5 \times 10^{-2}})^2} = \mathbf{4.5 \times 10^{-3}}\ \boldsymbol{N}}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F_{C\to A}}}\right\| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}} \frac{\left|(\mathbf{50 \times 50}) \times \mathbf{10^{-9}}\right|}{(\mathbf{5 \times 10^{-2}})^2} = \mathbf{9 \times 10^{-3}}\ \boldsymbol{N}}$$

On en déduit que la force résultante $\vec{F_r}$ et sa norme $\|\vec{F_r}\|$ vaut :

$$\boxed{\vec{F_r} = 4.5 \times 10^{-3}\,\vec{x} + 9 \times 10^{-3}\,\vec{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{F_r}\| = \sqrt{(4.5 \times 10^{-3})^2 + (9 \times 10^{-3})^2} = 10.06 \times 10^{-3}\ N}$$

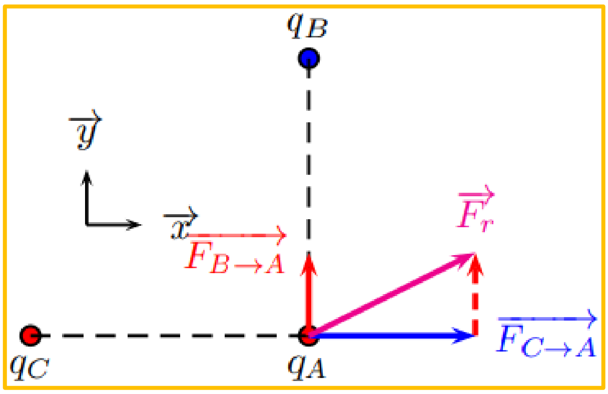


Figure 18 - Représentation des différentes forces électrostatiques mises en jeu

4) Généralisation :

On peut généraliser la force électrostatique résultante $\vec{F}$ exercée par N charges q_i exerçant des forces $\vec{F_i}$ sur une charge q (avec $i = 1, \ldots, N$). La charge q_i exerce sur la charge q la force $\vec{F_i}$ telle que :

$$\boxed{\vec{F_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i \cdot q}{r_i^2}\vec{u_i}}$$

(avec r_i^2 la distance entre la charge q_i et la charge q et $\vec{u_i}$ le vecteur directeur dirigé sur l'axe entre les deux charges). La force résultante $\vec{F}$ exercée par toutes les charges est la somme de toutes les forces exercées par chaque charge :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i \cdot q}{r_i^2}\vec{u_i}}$$

III- Le champ électrique :

1) Préambule :

Un champ est une grandeur physique dont la valeur varie selon les coordonnées de l'espace et éventuellement du temps. Il est dit « scalaire » si à chaque point de l'espace (et éventuellement à chaque instant), on peut lui associer un nombre (une valeur), comme pour la température, la position ou le potentiel électrique ; il est dit « vectoriel » si à chaque point de l'espace (et éventuellement du temps), on peut lui associer un vecteur (une valeur selon les trois directions de l'espace, comme pour la vitesse, l'accélération, le champ de gravité ou le champ électrique.

Parmi tous les outils mathématiques à disposition pour l'étude des champs, on se servira de la circulation d'un champ de vecteurs, du gradient, des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.

2) Définition :

Si on approche, à une même distance r, une charge q_1 et une charge q_1 d'une charge Q, la loi de Coulomb donne :

$$\boxed{\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot Q}{r^2}\vec{u}} \; ; \; \boxed{\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 \cdot Q}{r^2}\vec{u}}$$

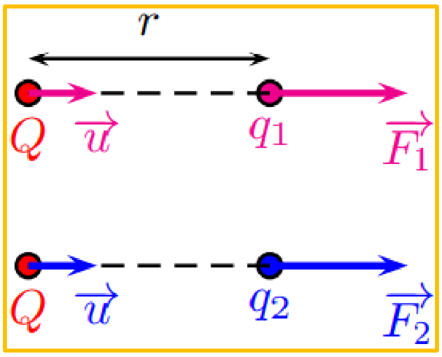


Figure 19 - Représentation des forces électrostatiques de deux charges q_1 et q_2 distantes de r d'une même charge Q

On remarque alors que $\frac{\overrightarrow{F_1}}{q_1} = \frac{\overrightarrow{F_2}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}$. Ce rapport est appelé le « champ électrique » $\vec{E}$ créé par la charge source Q (pris en un point de l'espace à une distance r de Q) :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}}$$

Son unité est le Volt par mètre ($\boldsymbol{V \cdot m^{-1}}$).

3) Propriétés :

Le champ électrique est continu excepté sur la charge source où il diverge (puisqu'il est proportionnel à l'inverse du carré de la distance r, donc le champ électrique tend vers l'infini quand r est nul) et est nul quand la distance r tend vers l'infini, est radial et est dirigé vers l'intérieur ou l'extérieur suivant le signe de la charge (extérieur si $\boldsymbol{Q} > \boldsymbol{0}$ et intérieur si $\boldsymbol{Q} < \boldsymbol{0}$).

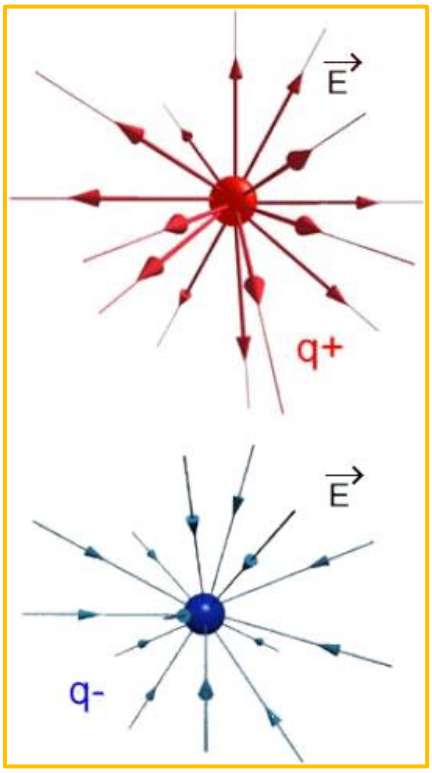


Figure 20 - Représentation d'un champ électrique suivant le signe de la charge source (intérieur si négatif et extérieur si positif)

De plus, si on a deux charges q_A et q_B placées respectivement aux points A et B, celles-ci créent un champ électrique total $\vec{E}(M)$ au point M qui est la somme des champs électriques $\overrightarrow{E_A}(M)$ et $\overrightarrow{E_B}(M)$ créés par chaque charge séparément :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \overrightarrow{\boldsymbol{E_A}}(\boldsymbol{M}) + \overrightarrow{\boldsymbol{E_B}}(\boldsymbol{M})}$$

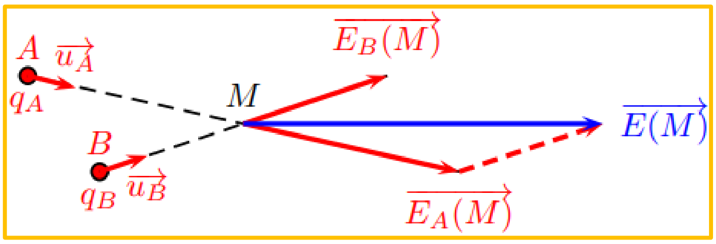


Figure 21 - Représentation des champs électriques de chaque charge et de la somme des champs

On peut généraliser pour un champ $\vec{E}(M)$ créé en un point M par N charges q_i distribuées en N points notés O_i par la formule :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{(O_iM)^2}\overrightarrow{u_i}}$$

Il existe aussi un lien entre le champ électrique et la force de Coulomb, suivant la définition du champ électrique écrite plus tôt :

$$\boxed{\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M)}$$

4) Lignes de champ :

Une ligne de champ est une courbe telle qu'en chacun de ses points la direction du champ électrique est portée par la tangente à la courbe. C'est, en première approximation, le chemin que l'on suivrait en partant d'un point et en suivant la direction donnée par les vecteurs le long du chemin.

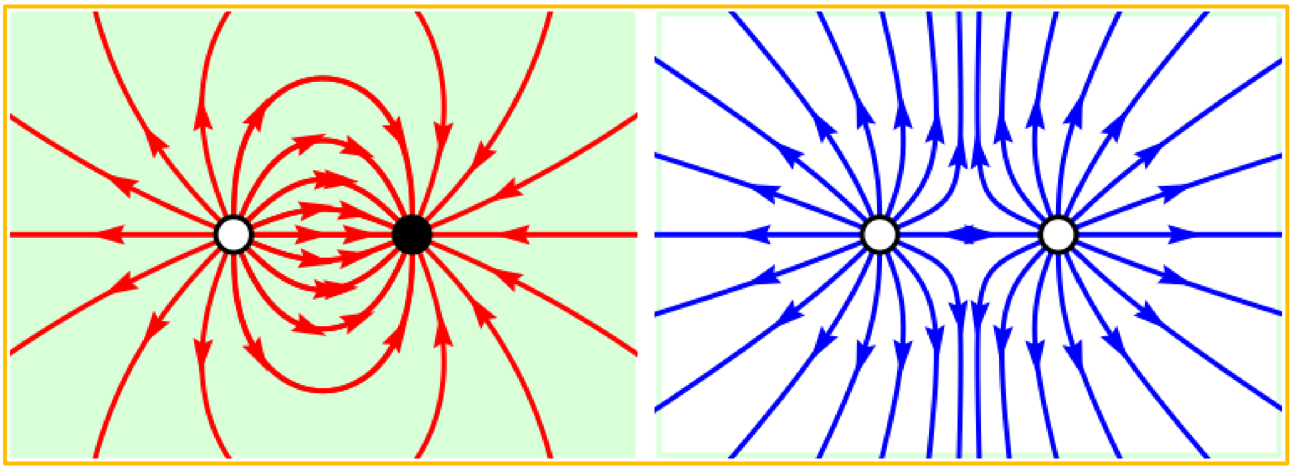


Figure 22 - Ligne de champ électrique créées par deux charges ponctuelles de signe opposé (à gauche) et de même signe (à droite)

IV- Le potentiel électrique :

1) Travail de la force électrostatique :

On cherche à quantifier le travail, c'est-à-dire l'application d'une force sur un déplacement donné, pour déplacer la charge q du point A au point B le long du chemin (Γ) en présence d'une charge fixe q_1 distante de r.

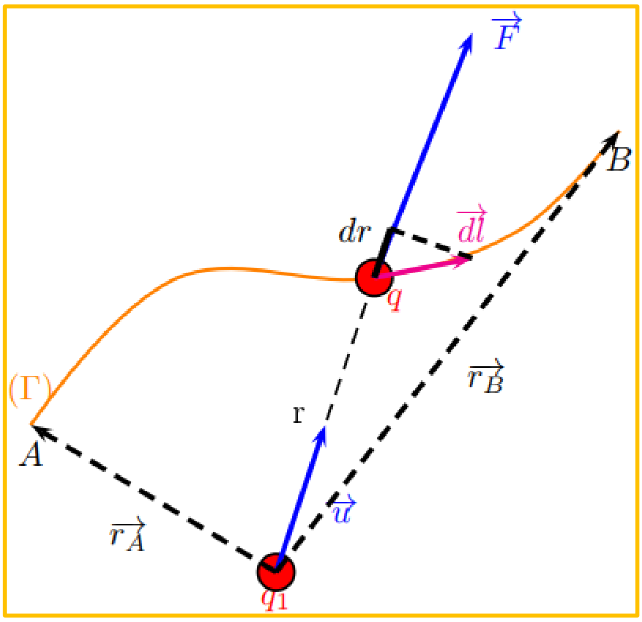


Figure 23 - Schéma de la situation

On définit le travail élémentaire dW comme le produit scalaire entre la force appliquée $\vec{F}$ et le déplacement élémentaire $d\vec{l}$:

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q}{r^2}\vec{u}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\,q}{r^2}dr}$$

(avec $\vec{u}\cdot d\vec{l} = dr$ la projection du déplacement élémentaire $d\vec{l}$ sur le vecteur unitaire $\vec{u}$). Pour un déplacement quelconque entre A et B, le travail W_{AB} est donné par :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \frac{q_1\,q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1\,q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_{AB} = \frac{q_1\,q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)}$$

(avec r_A et r_B les distances entre la charge q_1 et les points A et B respectivement). Si le travail est positif, les forces produisent un travail moteur et si le travail est négatif, les forces produisent un travail résistant.

On remarque dans la formule du travail qu'il ne dépend que des distances r_A et r_B, donc le travail ne dépend pas du chemin suivi entre les points A et B.

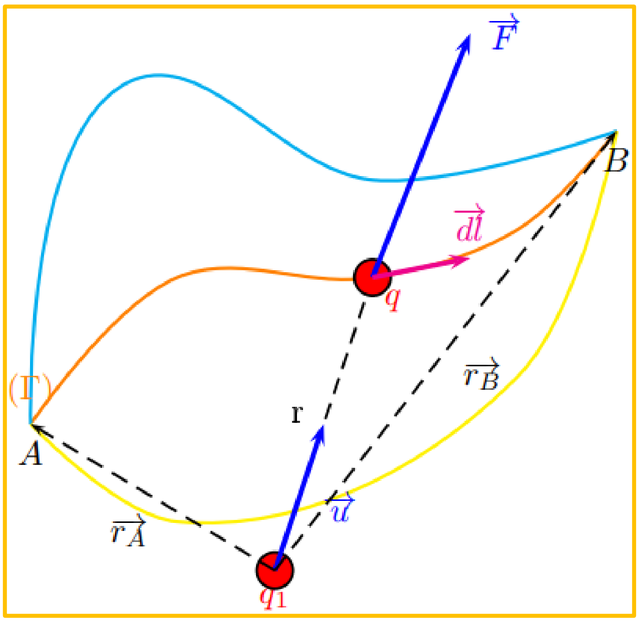


Figure 24 - Représentation de différents chemins possibles où le travail vaudra la même valeur (car il ne dépend pas du chemin suivi)

On dit que la force est conservative dans ce cas, ce qui signifie qu'elle dérive d'un potentiel. Le travail W_{AB} correspond alors à la différence d'énergie potentielle entre les points A et B. Si on met en facteur la charge q déplacée dans la formule du travail, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{W_{AB} = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_A} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_B}\right) = q(V_A - V_B)}}$$

(avec $\boldsymbol{V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_A}}$ et $\boldsymbol{V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_B}}$ les potentiels électriques créés par la charge q_1 aux points A et B respectivement).

2) Propriétés :

On peut généraliser le potentiel électrique V créé par une charge q en n'importe quel point de l'espace par la formule :

$$\boxed{\boldsymbol{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0}}$$

En effet, le potentiel électrique $V(r)$ est défini à une constante V_0 près. Quelque soit sa valeur, la différence de potentiel entre deux points A et B reste identique et le travail W_{AB} également, puisqu'elle se soustrait par elle-même. On peut choisir la valeur en sachant qu'une charge ponctuelle q n'a aucun effet sur des charges très éloignées :

$$\lim_{r\to+\infty} V(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_0 = 0}$$

(dans le cas où le système chargé a des dimensions finies). Sinon, on prend une autre référence que l'infini pour la constante V_0. Par exemple, si on connaît le potentiel d'un système chargé en $\mathbf{0}$, on choisit $V_0 = \lim_{r\to 0} V(r)$. Dans les deux cas, dès que l'on prend une référence pour V_0, on la garde pour toute la durée de la résolution du problème.

On peut aussi définit les surfaces équipotentielles qui sont des régions où le potentiel électrostatique est constant. On les définit mathématiquement par $V(x, y, z) = cste$. Pour une charge ponctuelle, le potentiel électrique vaut $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, donc les surfaces équipotentielles sont des sphères de rayon r. Puisque les lignes de champ électrique $\vec{E}$ étaient radiales, elles sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

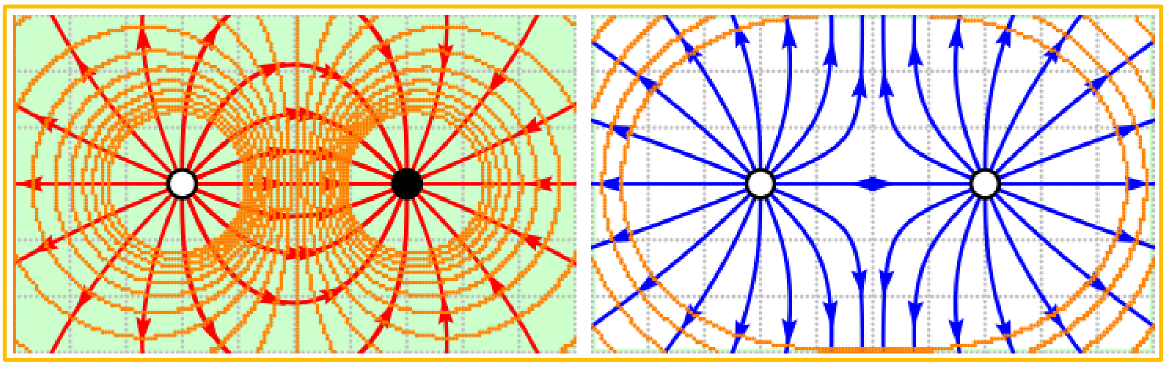


Figure 25 - Lignes de champ et surfaces équipotentielles créées par deux charges de signe opposé (à gauche) et de même signe (à droite)

Les potentiels de N charges q_i distantes de r_i (avec $i = 1, \dots, N$) s'additionnent pour créer en un point quelconque un potentiel électrique total V :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}}$$

V- Relation entre champ électrique et potentiel :

1) Circulation du champ électrique :

On appelle « circulation » C du champ électrique $\vec{E}$ le long d'un chemin (Γ) entre deux points A et B l'intégrale suivante :

$$\boxed{C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

(elle ressemble à celle du travail W_{AB} excepté que l'on prend un champ de vecteurs et non une force). Comme pour le travail, la circulation ne dépend pas du chemin suivi mais des extrémités du chemin pris.

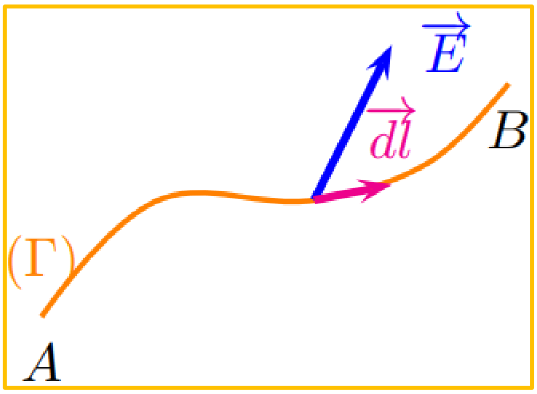


Figure 26 - Représentation de la circulation du champ électrique sur un chemin entre deux points A et B

Si on fait « circuler » le champ électrique $\vec{E}$ de A à A en passant par B (donc on reboucle sur A), on a :

$$\boxed{C_{AA} = C_{AB} + C_{BA} = C_{AB} - C_{AB} = 0}$$

Cela signifie que la circulation du champ électrique sur un chemin fermé est nulle :

$$\boxed{\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

(on utilise le symbole d'intégration entouré d'un cercle $\oint$ pour signifier un chemin fermé).

2) Relations entre champ électrique et potentiel :

Si la circulation du champ électrique $\vec{E}$ ne dépend pas du chemin suivi, alors il dérive d'un potentiel. Pour le travail W_{AB}, on obtenait :

$$\boxed{\boldsymbol{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B)}}$$

Par identification, on trouve :

$$\boldsymbol{q(V_A - V_B) = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\, C_{AB} \Rightarrow \boxed{C_{AB} = V_A - V_B}}$$

On en déduit la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique V :

$$\boldsymbol{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \Rightarrow \boxed{\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}}$$

Une tension ou différence de potentiel ΔV est égale à l'opposé de la circulation du champ électrique $\vec{E}$. Localement, pour une variation infiniment petite de potentiel dV, les points A et B étant séparés de la longueur infiniment petite $d\vec{l}$, on écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}}}$$

En coordonnées cartésiennes, on peut réécrire les variations infinitésimales de potentiel dV et de longueur $d\vec{l}$ comme :

$$\boxed{\boldsymbol{dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{l} = dx\, \overrightarrow{u_x} + dy\, \overrightarrow{u_y} + dz\, \overrightarrow{u_z}}}$$

La relation précédente devient alors :

$$\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -\vec{E} \cdot \left(dx\, \overrightarrow{u_x} + dy\, \overrightarrow{u_y} + dz\, \overrightarrow{u_z}\right)}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \boxed{E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz}}$$

Par identification, on obtient les trois composantes du champ électrique :

$$\boxed{\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

La dérivée partielle d'une grandeur par rapport à un espace correspond à l'opérateur mathématique du gradient $\vec{\nabla}$:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

3) Forme intégrale – Forme locale :

Il y a donc deux formes pour exprimer la relation entre le champ électrique et le potentiel :

- La forme intégrale, qui possède deux formes selon si on prend la différence de potentiel ΔV ou le potentiel V directement :

$$\boxed{\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}} \; ; \; \boxed{V = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + cste}$$

- La forme locale :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

(où l'opérateur gradient $\vec{\nabla} V$ représente les variations (ou dérivées) du potentiel dans les trois directions de l'espace : $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$).

En fonction du système de coordonnées pris en compte, la forme du gradient est différente. Sa forme en coordonnées cylindriques et sphériques est respectivement :

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}} \; ; \; \boxed{\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \delta} \end{pmatrix}}$$

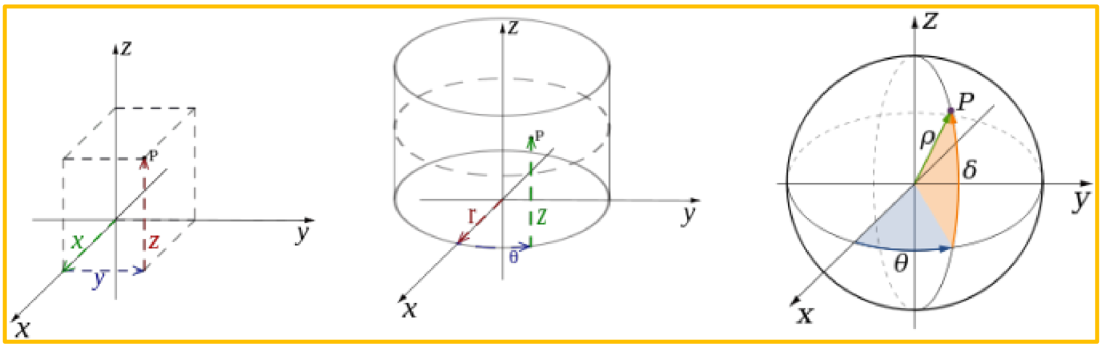


Figure 27 - Représentation des coordonnées cartésiennes (à gauche), cylindriques (au centre) et sphériques (à droite)

(avec $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}$ en cartésiennes ; $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $\boldsymbol{y = r\sin\theta}$ et $\boldsymbol{z = z}$ en cylindriques ; $\boldsymbol{x = \rho\cos\theta\cos\delta}$, $\boldsymbol{y = \rho\sin\theta\cos\delta}$ et $\boldsymbol{z = \rho\sin\delta}$ en sphériques).

Pour une charge ponctuelle, on peut passer du champ électrique $\vec{E}$ au potentiel électrique V en suivant les relations :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{V}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}}} \quad \Leftarrow \quad \boxed{\boldsymbol{V} = -\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{cste}}$$