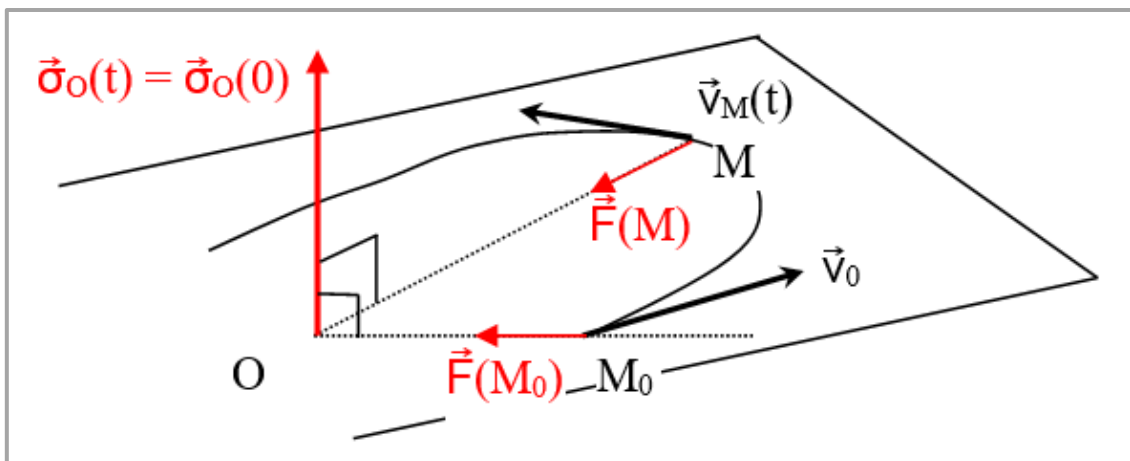


CM – Introduction à la Dynamique

Chapitre 4 : Mouvement à force centrale



Une force \vec{F} est dite « centrale » si, à tout instant t , sa direction est dirigée par un point fixe O dans le référentiel galiléen considéré.

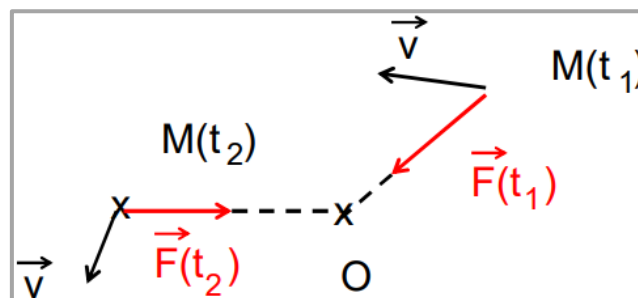


Figure 1 - Représentation d'un mouvement à force centrale

I- Propriétés générales :

1) Trajectoire dans un plan :

La trajectoire du point matériel M considéré subissant une force centrale est contenue dans un plan où se trouvent, entre autres, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et la force $\vec{F}(t)$. Le moment cinétique $\vec{L}_O(t)$ de ce point par rapport à un point O dans un référentiel donné est défini par :

$$\vec{L}_O(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{v}(t)$$

Donc le moment cinétique est perpendiculaire au vecteur position et au vecteur vitesse, donc il est perpendiculaire au plan de la trajectoire. On rappelle le théorème du moment cinétique :

$$\dot{\vec{L}}_O(t) = \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{F}(t)$$

Dans le cas d'un mouvement à force centrale, la force $\vec{F}(t)$ est colinéaire en tout temps t au vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$, donc leur produit vectoriel est nul ($\overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{F}(t) = \vec{0}$).

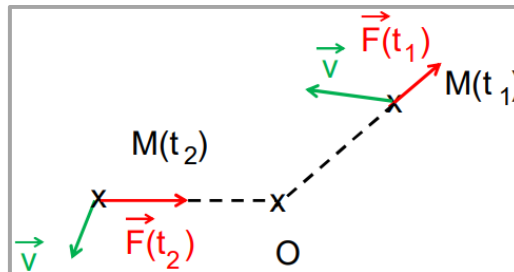


Figure 2 - Schéma de la situation

Cela implique que la dérivée du moment cinétique est nulle, donc que le moment cinétique lui-même est une constante du mouvement ($\dot{\vec{L}}_O(t) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O(t) = \text{cste} = \vec{L}_O$). Or, puisque le moment cinétique est perpendiculaire au vecteur position et au vecteur vitesse, le mouvement se fait bien dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et qui contient le point O .

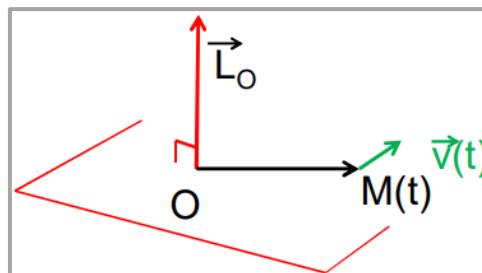


Figure 3 - Représentation du plan de la trajectoire et du moment cinétique du système

2) Loi des aires :

On considère un point matériel M sur une trajectoire elliptique quelconque dont le point O est un des foyers. On prend la position initiale du point $M(0)$ au temps $t = 0$ et sa position après un temps t donné. Soit $S(t)$ l'aire délimitée par la trajectoire et les deux vecteurs positions $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\overrightarrow{OM}(t)$ et qui est balayée par le vecteur position en tout temps t .

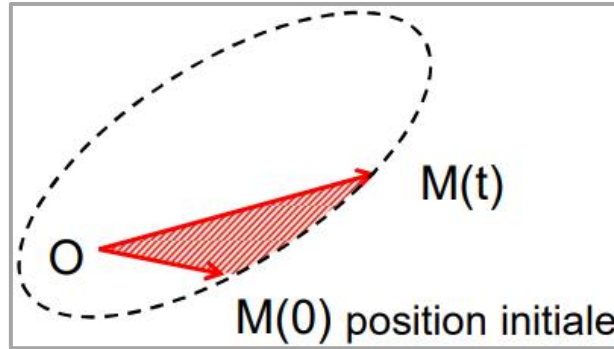


Figure 4 - Schéma de la situation

L'énoncé de la loi des aires est le suivant : « La surface balayée par le vecteur position \overrightarrow{OM} pendant deux intervalles de temps égaux est identique quelque soit l'intervalle de temps considéré. » Cela signifie qu'à deux temps t_1 et t_2 , pour un même intervalle Δt , l'aire ΔS balayée par le vecteur position est la même dans les deux cas. Cela signifie aussi que plus on est proche du centre de force O , plus le mouvement est rapide, puisque le vecteur position balaye une aire plus large dans le même temps qu'une aire à l'opposé de O .

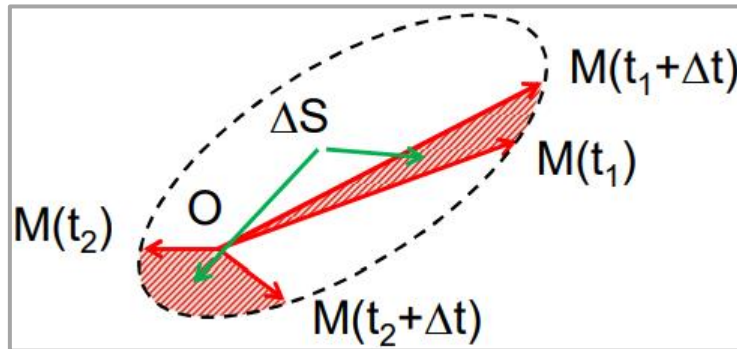


Figure 5 - Représentation de la loi des aires

Pour démontrer que ΔS est identique dans les deux intervalles, on pose d'abord :

$$\Delta S = S(t_1 + \Delta t) - S(t_1) = S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)$$

En divisant par Δt l'égalité précédente, on obtient :

$$\frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t} = \frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t}$$

Si on pose $\Delta t \rightarrow 0$, on retrouve les formules de dérivation de $S(\dot{t}_1)$ et $S(\dot{t}_2)$ en fonction du temps pour n'importe quelle valeur de t_1 , t_2 et Δt . On a donc :

$$S(\dot{t}_1) = S(\dot{t}_2) \Rightarrow \boxed{S(\dot{t}) = cste = \dot{S}}$$

La variation d'aire balayée $\dot{S}(t)$ est donc une constante du mouvement. Si on regarde la variation élémentaire de l'aire balayée dS en un temps dt entre deux points $M(t)$ et $M(t + dt)$ de la trajectoire, elle a la forme d'un triangle.

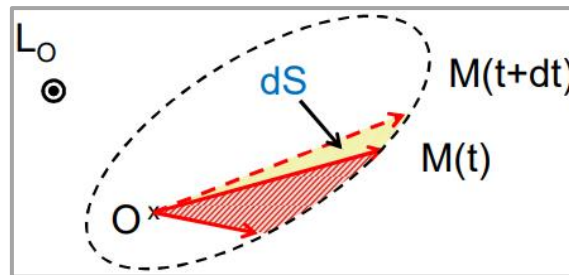


Figure 6 - Représentation de l'aire élémentaire dS balayée en un temps dt par le vecteur position du point matériel

Puisque l'on prend $dt \rightarrow 0$, l'approximation est considérée exacte, donc on peut la calculer l'aire élémentaire en fonction des valeurs des vecteurs positions $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t + dt)$. Le déplacement du vecteur position $d\overrightarrow{OM}$ au cours du temps dt vaut :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt}$$

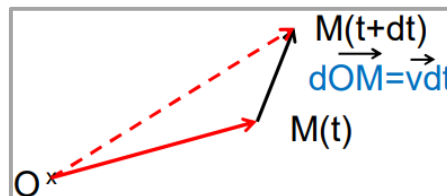


Figure 7 - Représentation géométrique de l'aire élémentaire et des différents vecteurs mis en jeu

(sachant que $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$).

L'aire élémentaire dS correspond au produit de la moitié de la longueur de la base du triangle (ici, la moitié de la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$) par sa hauteur (ici, la norme de la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}(t + dt)$ sur la perpendiculaire du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, qui vaut $\|\overrightarrow{OM}(t + dt)\| \sin \theta$).

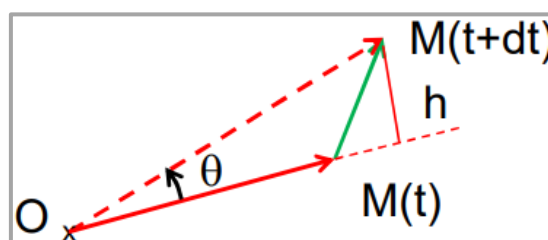


Figure 8 - Représentation des distances utiles pour le calcul de l'aire élémentaire

On a alors :

$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t)\| \|\vec{OM}(t+dt)\| \sin \theta = \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t) \wedge \vec{OM}(t+dt)\| \\
 &= \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t) \wedge (\vec{OM}(t) + \vec{v}(t) dt)\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM}(t) \wedge \vec{v}(t)\| dt = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} dt \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{2m} = cste}
 \end{aligned}$$

(avec $\|\vec{OM}(t)\| \|\vec{OM}(t+dt)\| \sin \theta = \|\vec{OM}(t) \wedge \vec{OM}(t+dt)\|$ par définition du produit vectoriel et $\|\vec{OM}(t) \wedge \vec{v}(t)\| = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$). On introduit alors la constante des aires C :

$$\dot{S} = \frac{\|\vec{L}_O\|}{2m} = \frac{C}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}}$$

Pour le mouvement des planètes, c'est une quantité mesurable contrairement à leur masse m . De plus, on désigne souvent \dot{S} sous le nom de vitesse aréolaire (vitesse de variation de l'aire). On remarque aussi qu'en coordonnées polaires, le moment cinétique s'écrit $\vec{L}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{k}$ et on peut en déduire directement l'expression de la constante des aires dans ce système de coordonnées :

$$\vec{L}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{k} \Rightarrow \boxed{\frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = r^2 \dot{\theta} = C}$$

II- Cas des forces électrostatique et gravitationnelle :

On considère le cas des forces électrostatique $\vec{F}_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}_r$ et gravitationnelle $\vec{F}_{Gravité} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}_r$ exercées par une masse m_0 ou une charge q_0 fixée en un point O et une masse m ou une charge q qui peut se déplacer. On est donc dans le cas d'une force centrale de la forme $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$.

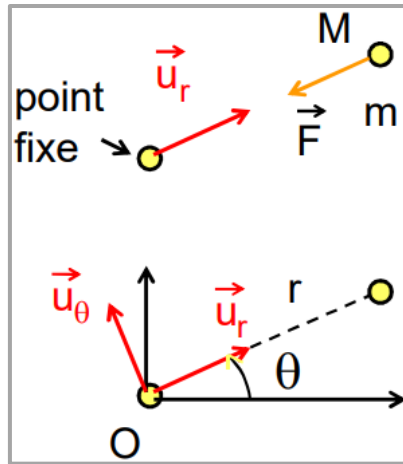


Figure 9 - Schéma de la situation et représentation en coordonnées polaires

1) Calcul alternatif de la constante des aires C :

Une autre façon de retrouver la constante de la loi des aires est de passer par le Principe Fondamental de la Dynamique en utilisant les coordonnées polaires. Dans le cas précédent, il n'y a qu'une force qui est subie par le système, ce qui donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \frac{k}{r^2} \vec{u}_r = m \left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta \right)$$

En ne regardant que la projection de l'équation précédente selon \vec{u}_θ , on trouve :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{r} (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow (r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = C = cste}$$

(avec $(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$). On retrouve bien la constante des aires C .

2) Expression de la vitesse avec la constante des aires C :

L'expression de la vitesse en coordonnées polaires est $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$. En réécrivant chaque composante de la vitesse en fonction de la constante des aires C , on obtient :

$$\boxed{\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)} ; \boxed{r\dot{\theta} = \frac{C}{r}}$$

(on a $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ par règle de la chaîne et $\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$). En posant $u = \frac{1}{r}$, on obtient pour la vitesse \vec{v} :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{v^2 = C^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right)}$$

C'est la première formule de Binet (du nom de Jacques Binet (1786 – 1856)).

3) Expression de l'accélération avec la constante des aires C :

On reprend l'expression de l'accélération en coordonnées polaires ($\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$), excepté que l'on ne regarde que la composante \vec{u}_r puisque la force \vec{F} exercée sur le système est centrale donc l'accélération \vec{a} est radiale. En la réécrivant en fonction de la constante des aires C , on obtient :

$$\ddot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)}$$

$$r^2 \dot{\theta} = C \Leftrightarrow r \dot{\theta} = \frac{C}{r} \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{r \dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^3}}$$

En posant $u = \frac{1}{r}$, on obtient pour l'accélération \vec{a} :

$$\boxed{\vec{a} = \left(-C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - C^2 u^3 \right) \vec{u}_r = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r}$$

C'est la seconde formule de Binet.

4) Equation du mouvement avec la constante des aires C :

En reprenant le Principe Fondamental de la Dynamique précédente et l'écriture obtenue pour l'accélération, on peut établir l'équation du mouvement du système en posant toujours $u = \frac{1}{r}$:

$$-mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{u}_r = k u^2 \vec{u}_r \Leftrightarrow -mC^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{k}{mC^2}$$

(on pose par la suite $K = -\frac{k}{mC^2}$).

5) Trajectoire du système :

On considère que les conditions initiales du système étudié sont $\theta = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta$ et $r = x_0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{x_0}$ (ce sont des conditions très générales).

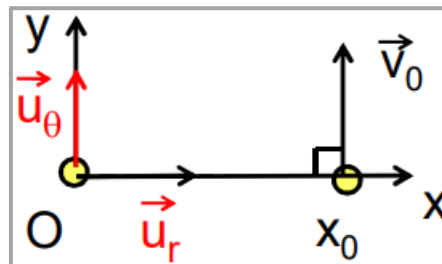


Figure 10 - Schéma de la situation

En résolvant l'équation différentielle du second ordre obtenue pour l'équation du mouvement, on obtient la solution générale :

$$u(\theta) = A \sin \theta + B \cos \theta + K$$

On détermine les constantes A et B grâce aux conditions initiales. On commence par B :

$$u(0) = A \sin 0 + B \cos 0 + K = B + K = \frac{1}{x_0}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{x_0} - K$$

Pour obtenir A , on reprend l'écriture de la vitesse obtenue précédemment en y injectant la condition initiale correspondantes :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + Cu \vec{u}_\theta = v_0 \vec{u}_\theta \Leftrightarrow \begin{cases} -C \frac{du}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow A \cos \theta - B \sin \theta = 0 \\ Cu = v_0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{C}{x_0} \Leftrightarrow C = v_0 x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cos 0 - B \sin 0 = \boxed{A = 0} \\ \boxed{C = v_0 x_0} \end{cases}$$

La solution générale devient alors :

$$\boxed{u(\theta) = \left(\frac{1}{x_0} - K \right) \cos \theta + K = K \left(1 - \left(1 - \frac{1}{Kx_0} \right) \cos \theta \right)}$$

En récrivant cette solution selon r , on obtient l'équation de la trajectoire avec les coordonnées polaires :

$$\frac{1}{r} = K \left(1 - \left(1 - \frac{1}{Kx_0} \right) \cos \theta \right) \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}}$$

(avec $p = \frac{1}{K} = -\frac{mC^2}{k}$ et $e = 1 - \frac{1}{Kx_0}$). La trajectoire obtenue est une conique, c'est-à-dire une courbe provenant de la coupe d'un cône selon un certain angle. En fonction de l'excentricité e , l'orbite du point M aura une trajectoire légèrement différente :

- Si $e = 0$, l'orbite est circulaire et est centrée sur l'origine O prise pour repérer le système.
- Si $-1 < e < 1$, l'orbite est elliptique et l'origine O est situé à un des foyers de l'ellipse.
- Si $|e| = 1$, la trajectoire est parabolique.
- Si $|e| > 1$, la trajectoire est hyperbolique.

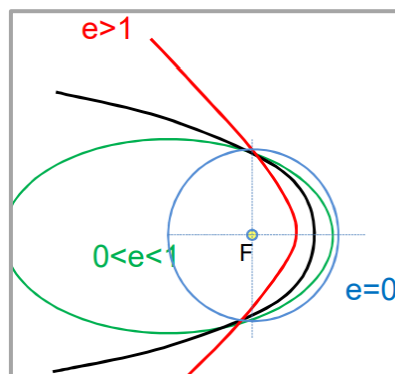


Figure 11 - Représentation des différentes trajectoires de coniques en fonction de l'excentricité (le point F étant le foyer de la conique)

L'équation polaire de la trajectoire conique correspond à une ellipse. De façon générale, une ellipse est le cas généralisé du cercle dont le rayon n'est pas constant. Il est composé d'un demi-grand axe a , d'un demi-petit axe b et de deux foyers dont l'un d'entre eux, noté F , est l'origine du repère polaire permettant de suivre la position du point M sur sa trajectoire (le périmètre de l'ellipse). La demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ correspond à la distance entre le foyer F et le centre de l'ellipse. L'aire de l'ellipse vaut $S = \pi ab$.

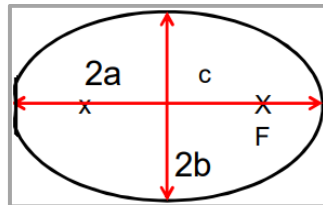


Figure 12 - Schéma d'une ellipse

En reprenant les coefficients de l'équation de la trajectoire ($r = \frac{p}{1-e \cos \theta}$), on peut réécrire l'excentricité $e = \frac{c}{a}$ (l'écart entre la trajectoire et le centre de l'ellipse) et le paramètre $p = \frac{b^2}{a}$ (c'est la valeur de la trajectoire pour $\theta = \frac{\pi}{2}$). De plus, on peut écrire le coefficient d'aplatissement de l'ellipse $\varepsilon = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$. On peut alors déduire via ces paramètres les valeurs du demi-grand axe $a = \frac{p}{1-e^2}$ et du demi-petit axe $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

III- Application au mouvement d'astres autour de corps massifs :

On considère un corps massif de masse m subissant du Soleil de masse m_s une force gravitationnelle $\vec{F} = -G \frac{m_s m}{r^2} \vec{u}_r$ (avec $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle). Le Soleil est considéré fixe dans le référentiel de Copernic.

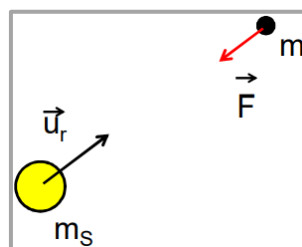


Figure 13 - Schéma de la situation

On rappelle que le Soleil a un diamètre de $1.39 \times 10^6 \text{ km}$ et une masse de $m_s = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$. À comparer, Jupiter (la plus grande et massive planète du système Solaire) a un diamètre de $1.43 \times 10^5 \text{ km}$ et une masse de $1.9 \times 10^{27} \text{ kg}$, tandis que la Terre a un diamètre de $1.2 \times 10^4 \text{ km}$ et une masse de $6 \times 10^{24} \text{ kg}$.

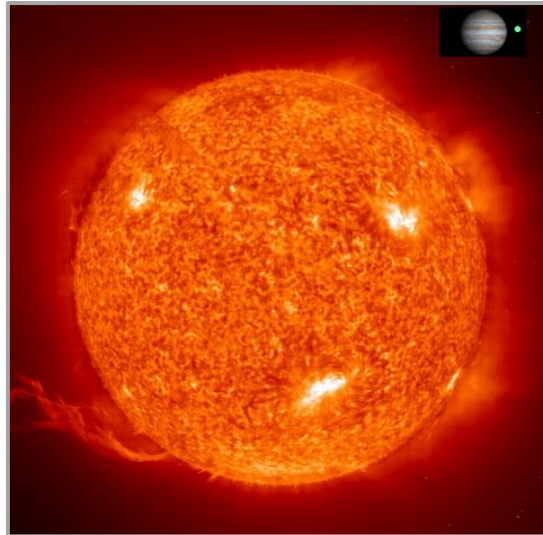


Figure 14 - Comparaison en taille entre le Soleil, Jupiter et la Terre

Dans cette situation et en prenant les conditions initiales explicitées précédemment ($\theta = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta$ et $\mathcal{C} = x_0 v_0$), on retombe sur l'équation de la trajectoire $r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ (avec $p = \frac{c^2}{Gm_s}$ et $e = 1 - \frac{c^2}{Gm_s x_0}$). De ce fait, l'excentricité e de la trajectoire est forcément inférieure ou égale à 1 et, selon sa vraie valeur, il existe plusieurs situations possibles concernant la trajectoire de l'objet considéré.

1) Cas où $e = 1$:

Pour avoir $e = 1$, il faut que la constante des aires \mathcal{C} soit nulle (pour que $e = 1 - \frac{0^2}{Gm_s x_0} = 1$). Or, sachant que $\mathcal{C} = x_0 v_0$, cela veut obligatoirement dire que la vitesse initiale v_0 est nulle (car x_0 ne peut pas être nul initialement). Cela correspond donc à une chute libre sans vitesse initiale où le corps de masse m va se diriger inexorablement vers le Soleil.

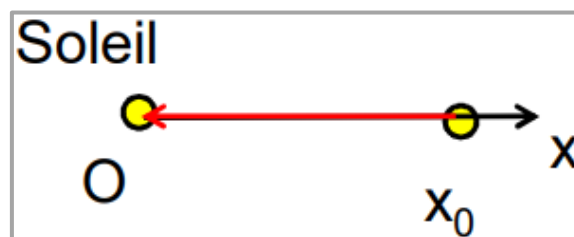


Figure 15 - Schéma de la situation

2) Cas où $e = 0$:

Pour avoir $e = 0$, il faut que $C^2 = Gm_S x_0$ (pour que $e = 1 - \frac{Gm_S x_0}{Gm_S x_0} = 1 - 1 = 0$), donc que $v_0^2 = \frac{Gm_S}{x_0}$ (car $C^2 = x_0^2 v_0^2 = Gm_S x_0 \Leftrightarrow v_0^2 = \frac{Gm_S}{x_0}$). Dans ce cas, la trajectoire vaut :

$$r = \frac{\frac{Gm_S x_0}{Gm_S}}{1 - 0 \times \cos 0} = x_0 = r_0$$

Cela correspond donc à une orbite circulaire autour du Soleil. L'accélération \vec{a} du système est donc uniquement normale à la trajectoire et pas tangentielle : c'est un mouvement circulaire uniforme. Elle vaut :

$$a_n = \frac{F}{m} = \frac{\frac{Gm_S m}{r_0}}{m} = \frac{Gm_S}{r_0^2} = \frac{v^2}{r_0}$$

La vitesse de rotation du système v_{circ} vaut alors :

$$v_{circ}^2 = v^2 = \frac{Gm_S}{r_0} \Rightarrow v_{circ} = \sqrt{\frac{Gm_S}{r_0}}$$

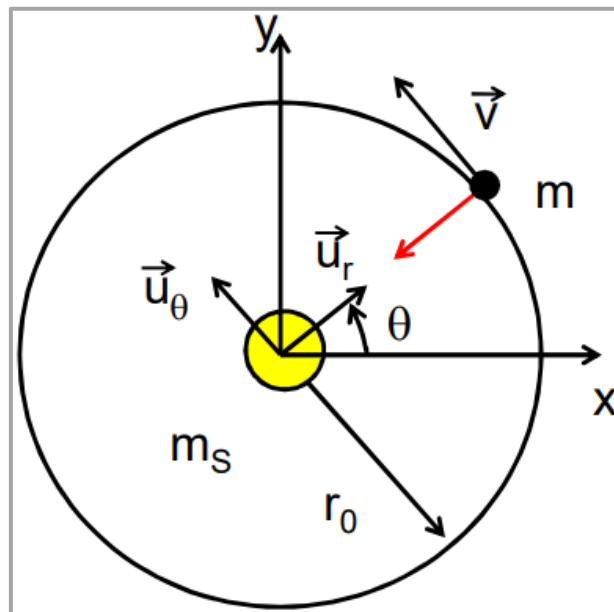


Figure 16 - Schéma de la situation

La vitesse de rotation obtenue est indépendante de la masse m de l'objet sur l'orbite. En regardant pour le cas de l'orbite de Mercure ($r_{0,m} = 108 \times 10^6 \text{ km}$), de la Terre ($r_{0,t} = 150 \times 10^6 \text{ km}$) et de Jupiter ($r_{0,j} = 778 \times 10^6 \text{ km}$), on trouve une vitesse de rotation pour chaque de respectivement $v_{circ,m} = 48 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{circ,t} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit $108\,000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$) et $v_{circ,j} = 13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

3) Cas où $0 < e < 1$:

L'excentricité e est comprise entre 0 et 1 si la vitesse initiale v_0 du corps étudié est comprise entre 0 et la vitesse de rotation v_{circ} . Dans ce cas, la trajectoire devient une ellipse inscrite à l'intérieur de l'orbite circulaire précédente dont le Soleil est un de ses foyers.

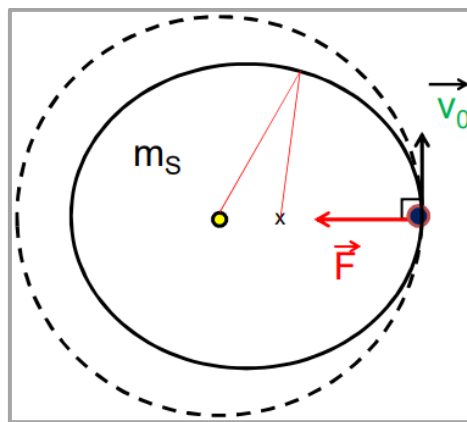


Figure 17 - Schéma de la situation

4) Cas où $-1 < e < 0$:

L'excentricité e est comprise entre -1 et 0 si la vitesse initiale v_0 du corps étudié est comprise entre la vitesse de rotation v_{circ} et cette même vitesse multipliée par $\sqrt{2}$ ($v_{circ} < v_0 < \sqrt{2}v_{circ}$). Dans ce cas, la trajectoire devient une ellipse plus grande que l'orbite circulaire précédente dont le Soleil est un de ses foyers.

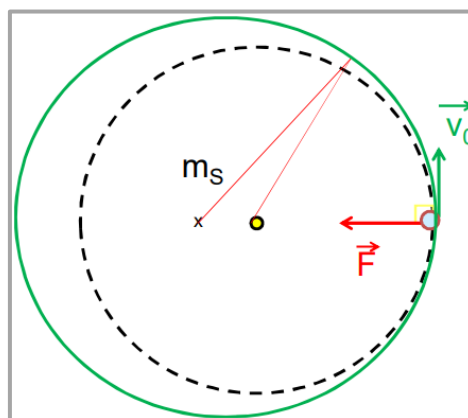


Figure 18 - Schéma de la situation

5) Cas où $e = -1$:

Pour avoir $e = -1$, il faut que :

$$v_0 = \sqrt{2}v_{circ} = \sqrt{\frac{2Gm_s}{x_0}} = v_{lib}$$

Cela correspond à la vitesse de libération v_{lib} que le corps doit dépasser pour s'arracher à la force gravitationnelle du Soleil. Dans ce cas, la trajectoire est parabolique : le corps part à l'infini et y arrive à vitesse nulle.

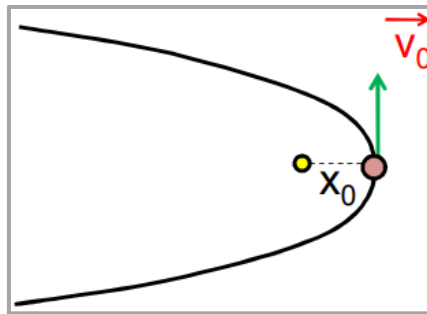


Figure 19 - Schéma de la situation

6) Cas où $e < -1$:

L'excentricité e est inférieure à -1 si la vitesse initiale v_0 du corps est supérieure à la vitesse de libération v_{lib} . En reprenant l'équation de la trajectoire ($r = \frac{p}{1-e \cos \theta}$), la distance r tend vers l'infini lorsque $\cos \theta = \frac{1}{e}$, donc lorsque l'angle θ tend vers un angle limite $\pm \theta_0$ par rapport à l'axe x (car $r = \frac{p}{1-e \cos(\pm \theta_0)} = \frac{p}{1-\frac{1}{e}} = \frac{p}{1-1} \rightarrow \infty$). Dans ce cas, la trajectoire est hyperbolique : la trajectoire est rectiligne à l'infini et la vitesse non nulle au même endroit.

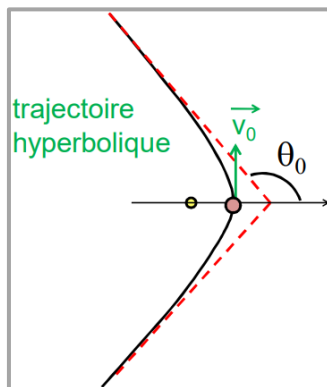


Figure 20 - Schéma de la situation

7) Lois de Kepler :

Les lois de Kepler (du nom de Johannes Kepler (1571 – 1630)) sont trois lois qui établissent le mouvements des planètes et autres corps massifs autour d'astres. Elles sont les suivantes :

- « Le centre de gravité d'une planète décrit une ellipse dont le centre du Soleil occupe l'un de ses foyers. »
- « Le mouvement de la planète est régi par la loi des aires. »
- « Le rapport du cube du demi-grand axe a_p de l'ellipse au carré de la période de révolution T_p est une constante pour toutes les planètes du système Solaire. »

$$\frac{a_p^3}{T_p^2} = \frac{Gm_s}{4\pi^2}$$

Démonstration :

La troisième loi de Kepler dérive de la loi des aires. En considérant une ellipse de demi-grand axe $a_p = \frac{p}{1-e^2}$ et de demi-petit axe $b_p = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$, son aire S vaut :

$$S = \pi ab = \pi \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La loi des aires vaut $\dot{S} = \frac{C}{2}$, donc on peut aussi obtenir l'aire S de l'ellipse en intégrant sa variation temporelle \dot{S} sur une période de révolution T_p :

$$S = \int_0^{T_p} \dot{S} dt = \frac{C}{2} \int_0^{T_p} dt = \frac{C}{2} T_p$$

En égalisant les deux équations, on obtient :

$$\frac{C}{2} T_p = \pi \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow \frac{C^2}{4} T_p^2 = \frac{p G m_s}{4} T_p^2 = \pi^2 \frac{p^4}{(1-e^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow T_p^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_s} \frac{p^3}{(1-e^2)^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s} a_p^3$$

(avec $p = \frac{c^2}{Gm_s}$ et $\frac{p^3}{(1-e^2)^3} = a_p^3$).

8) Analyse énergétique :

Dans le système considéré d'une force de la forme $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$, l'énergie potentielle correspondante est de la forme $E_p = -\frac{k}{r}$ (avec $k = \frac{q_s q}{4\pi\epsilon_0} = Gm_s m$ selon le cas électrostatique ou gravitationnel). En regardant graphiquement l'évolution de l'énergie potentielle en fonction de la distance r , elle prend la forme d'une hyperbole qui possède une asymptote en 0 et qui est nulle lorsque r tend vers l'infini (les valeurs sont négatives car $k > 0$, donc $E_p < 0$).

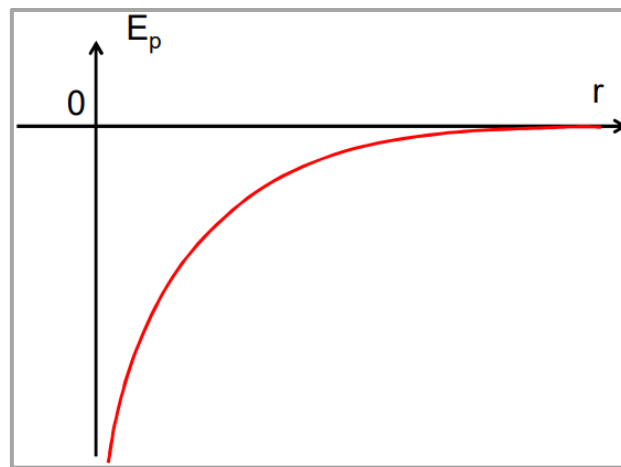


Figure 21 - Evolution de l'énergie potentielle en fonction de la distance

L'énergie mécanique E_m du système, qui est la somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p , est constante au cours du temps et sera notée $E_{m,0}$:

$$E_{m,0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gm_s m}{r_0}$$

a) Cas où $E_{m,0} < 0$ – Trajectoires fermées :

Si l'énergie mécanique $E_{m,0}$ est négative, alors l'énergie potentielle E_p est aussi négative et l'intersection sur le graphique précédent entre la courbe et la valeur d'énergie donne une distance r_{lim} qui est la séparation maximale entre le corps étudié et le Soleil.

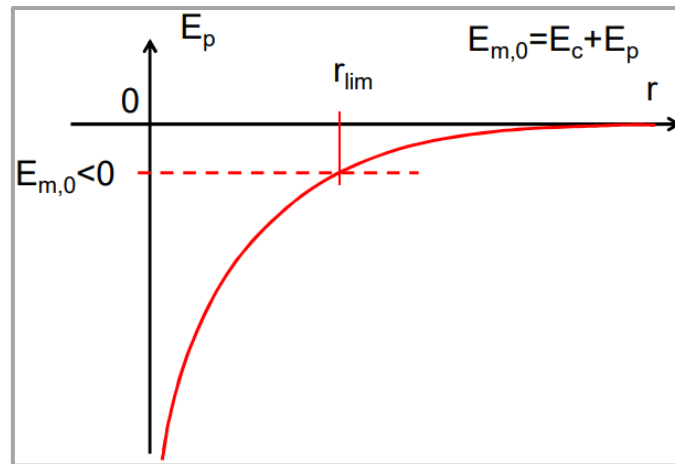


Figure 22 - Représentation de la séparation maximale entre le corps étudié et le Soleil sur le graphe de l'évolution de l'énergie potentielle

La distance r_{lim} correspond au point où l'énergie cinétique E_c est nulle, donc cela correspond à une trajectoire de collision. Cette distance ne peut alors jamais être atteinte dans le cas d'orbites stables. Cela signifie qu'une énergie mécanique $E_{m,0}$ négative correspond à des trajectoires fermées (elliptiques ou circulaires). C'est le cas des planètes du système Solaire et de certaines comètes qui reviennent périodiquement (comme la comète de Halley (du nom de Edmond Halley (1656 – 1742)) qui a une périodicité de **76 ans** et une excentricité de $e = 0.97$) et d'un certain nombre d'astéroïdes (comme ceux de la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter).

Sur la trajectoire, on peut définir le « périhélie », le point de la trajectoire le plus proche du Soleil et qui est à vitesse de rotation maximale, et l'« aphélie », le point de la trajectoire le plus éloigné du Soleil et qui est à vitesse de rotation minimale (et non nulle comme vu précédemment).

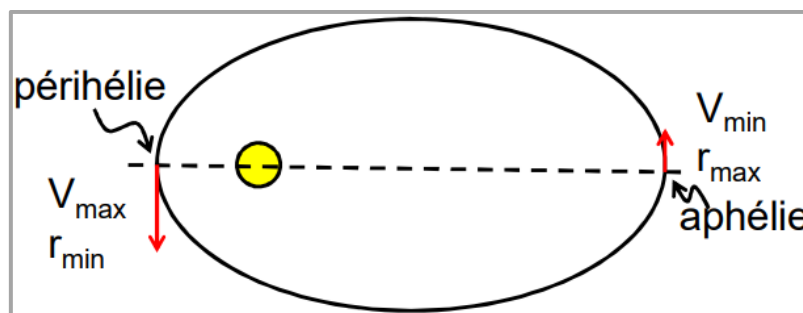


Figure 23 - Représentation du périhélie et de l'aphélie sur l'orbite d'un corps autour du Soleil

La distance au périhélie $r_{périhélie}$ est inférieure ou égale à celle de l'aphélie $r_{aphélie}$ qui est strictement inférieure à la distance limite r_{lim} . La trajectoire est donc déterminée par la donnée de la distance r et de la vitesse v à chacun de ces deux points. Dans les deux cas, la vitesse est perpendiculaire au centre de rotation. Si le centre de rotation est la Terre, on parle de « périgée » et d'« apogée ». Si c'est un astre quelconque, on parle de « périastre » et d'« apoastre ». La trajectoire d'un astre par rapport à un autre avec lequel il est en interaction gravitationnelle est l'orbite.

b) Cas où $E_{m,0} > 0$ – Trajectoires ouvertes :

Si l'énergie mécanique $E_{m,0}$ est positive, alors le surplus d'énergie qui permet de dépasser les valeurs négatives de l'énergie potentielle E_p correspond à l'énergie cinétique E_c .

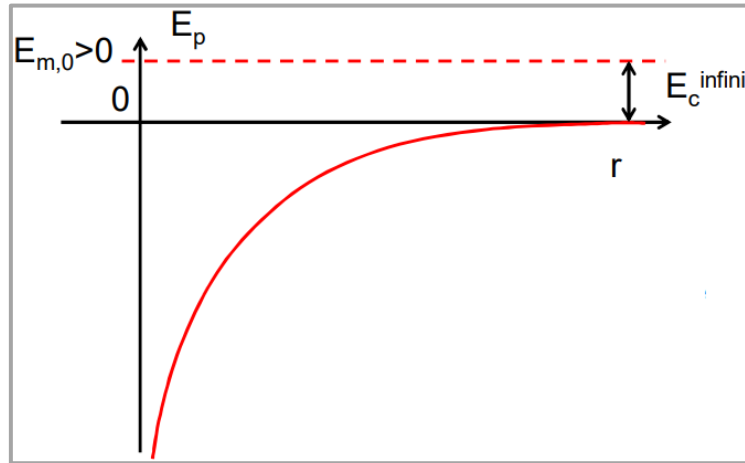


Figure 24 – Evolution de l'énergie dans le cas d'une énergie mécanique positive

Dans ce cas, la distance au Soleil r n'est plus bornée : la trajectoire est ouverte et le corps n'est pas lié au Soleil. De plus, la vitesse est non nulle à l'infini. Cela signifie qu'une énergie mécanique $E_{m,0}$ positive correspond à des trajectoires hyperboliques : le point matériel vient de l'infini et repart à l'infini en étant défléchi par le Soleil (comme certaines comètes non liées au système Solaire).

c) Cas marginal ($E_{m,0} = 0$) :

Si l'énergie mécanique $E_{m,0}$ est nulle, la trajectoire est ouverte mais elle est intermédiaire entre l'ellipse et l'hyperbole : la trajectoire est parabolique. Il n'y a pas d'asymptote rectiligne contrairement au cas de la trajectoire hyperbolique et la vitesse du corps est nulle à l'infini.

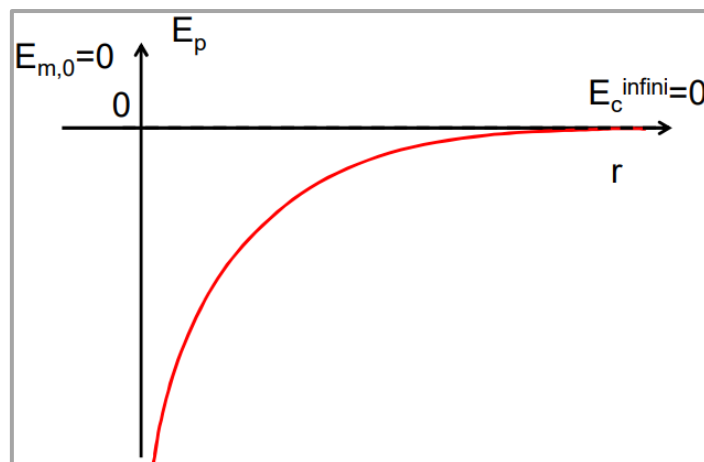


Figure 25 – Evolution de l'énergie dans le cas marginal

9) Vitesse de libération :

La vitesse de libération v_{lib} est la vitesse minimale nécessaire à communiquer à un objet pour qu'il ne soit plus lié à un astre gravitationnellement. On peut alors chercher la valeur de la vitesse de libération dans le cas de la Terre.

On considère un objet de masse m à la surface de la Terre, de masse m_T de rayon $r_0 = 6\,400\text{ km}$. Pour que l'objet se libère de l'attraction gravitationnelle terrestre, il faut lui communiquer une énergie mécanique $E_{m,0}$ au moins nulle dans le champ de pesanteur terrestre, ce qui donne :

$$E_{m,0} = \frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{Gm_T m}{r_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{lib}^2 = \frac{Gm_T m}{r_0} \Leftrightarrow v_{lib}^2 = \frac{2Gm_T}{r_0}$$

$$\Leftrightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_0}}$$

Dans ce cas, la vitesse de libération sur Terre vaut environ $v_{lib} = 11\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Sur la Lune, elle vaut environ $v_{lib} = 2.4\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.