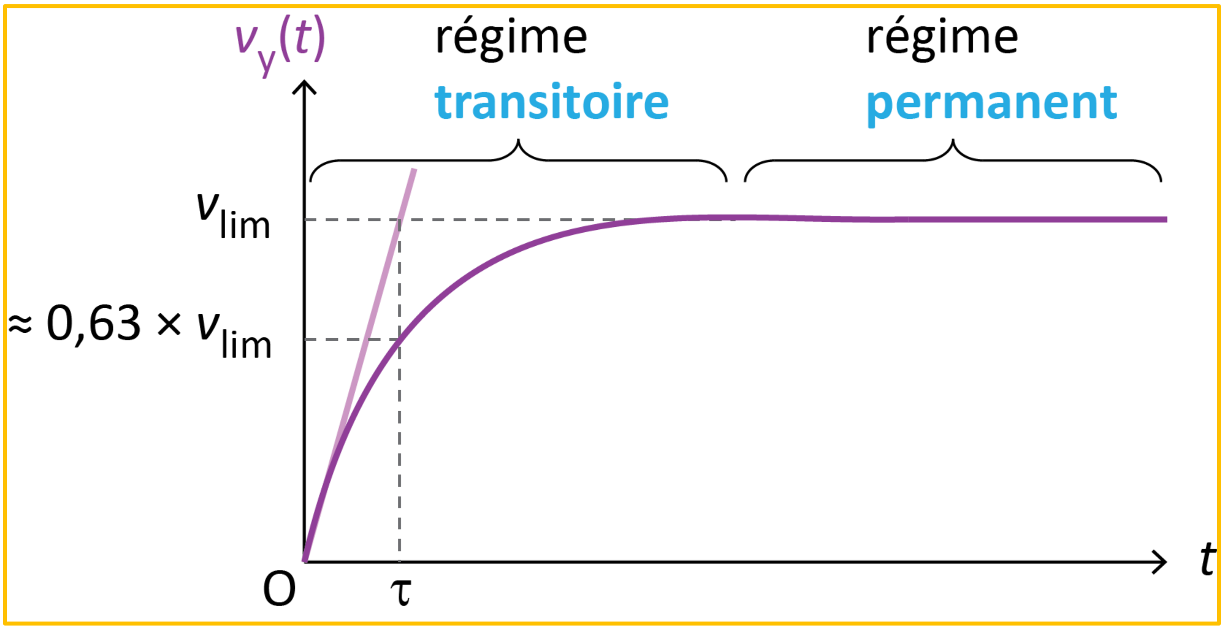
CM – Bases de l'Electricité

Chapitre 1 : Régimes transitoires



I- Rappels :

1) Régimes :

Un régime est dit « permanent » si l'évolution de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$ est constante au cours du temps. Il existe deux régimes permanents :

- Le régime continu (aussi appelé « courant continu » (CC) ou « direct current » (DC) en Anglais), où les évolutions au cours du temps de la tension et du courant sont constantes :

$$\boxed{\boldsymbol{u(t) = U = cste}} \; ; \; \boxed{\boldsymbol{i(t) = I = cste}}$$

La puissance générée (en Watt (W)) par ce régime, correspondant au produit de la tension et du courant, est donc aussi constante :

$$\boxed{\boldsymbol{p(t) = u(t)\, i(t) = U\, I = P = cste}}$$

Les batteries, les piles et les cellules photo-électriques sont des exemples connus de générateurs continus.

- Le régime variable périodique (aussi appelé « courant alternatif » (CA) ou « alternative current » (AC) en Anglais), où la tension et le courant varient dans le temps, mais ce sont des signaux périodiques de période T et de fréquence f (en Hertz (Hz)), avec :

$$\boxed{\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}}$$

La puissance est elle aussi une variable dépendant du temps :

$$\boxed{\boldsymbol{p(t) = u(t)\, i(t)}}$$

Les moteurs montés en génératrice, les dynamos, les transformateurs et les prises électriques sont des exemples de générateurs variables périodiques.

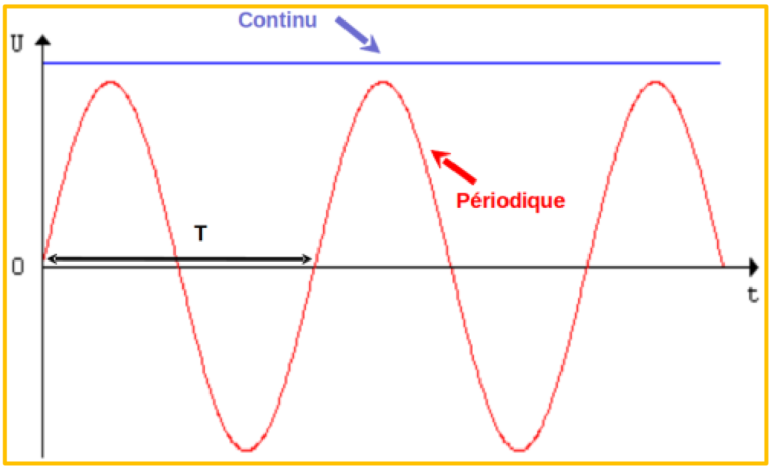


Figure 1 - Evolution au cours du temps de la tension d'un régime permanent continu (en bleu) et d'un régime variable périodique (en rouge)

Un régime est dit « transitoire » pour un régime d'évolution qui n'a pas encore atteint un état stable ou un régime permanent (continu ou périodique). Dans ce cas, les signaux $i(t)$ et $u(t)$ ne sont ni continus, ni variables périodiquement (on les note en minuscule pour dire qu'ils dépendent du temps).

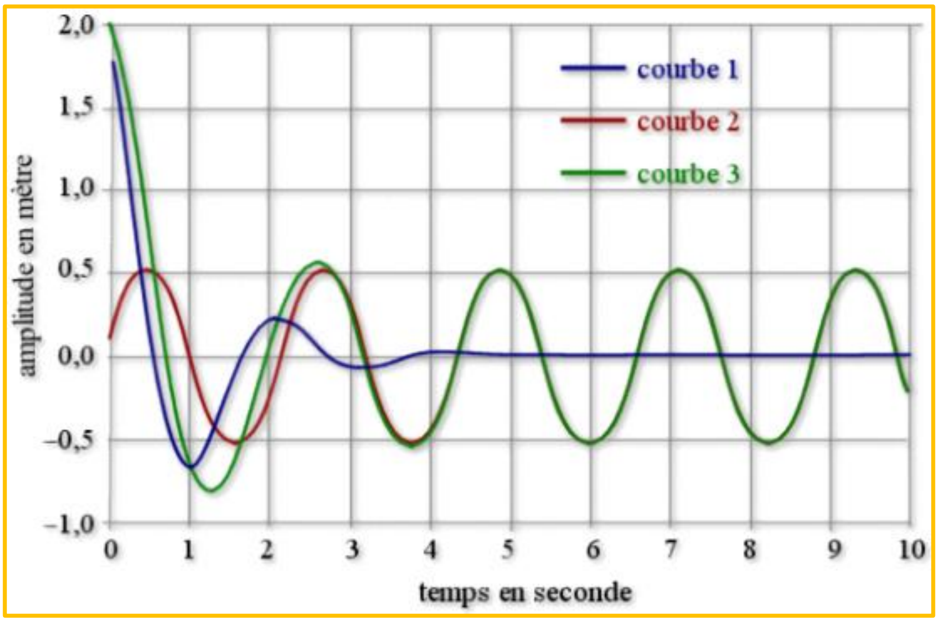


Figure 2 - Evolution de différents régimes au cours du temps (transitoire à continu en bleu, purement variable périodique en rouge, transitoire à variable périodique en vert)

2) Comportement des composants :

a) Résistance :

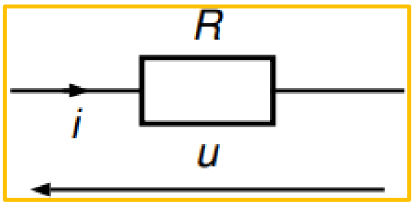


Figure 3 - Représentation schématique d'une résistance

Une résistance possède une résistance R (en Ohm (Ω)). Sa loi de fonctionnement est :

$$\boxed{\boldsymbol{u = R\, i}}$$

Cette relation montre qu'une modification quelconque de la tension $u(t)$ modifie instantanément le courant $i(t)$ d'un rapport R.

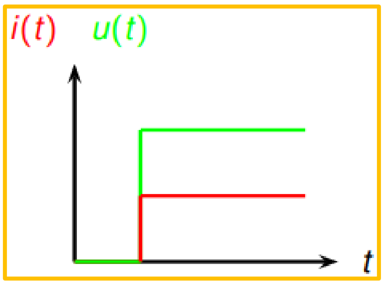


Figure 4 - Evolution de la tension et de l'intensité au cours du temps dans une résistance

b) Condensateur :

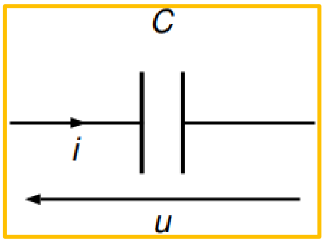


Figure 5 - Représentation schématique d'un condensateur

Un condensateur est composé d'au moins deux électrodes placées face à face et, souvent, d'un matériau diélectrique. Il possède une capacité C (en Farad (F)). Sa loi de fonctionnement est :

$$\boxed{\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt}}}$$

(par analyse dimensionnelle, on trouve que l'Ampère vaut : $[\boldsymbol{A}] = [\boldsymbol{F}] \times \frac{[V]}{[s]} = [\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{s}^{-1}]$). Cette relation montre qu'il ne peut pas y avoir de discontinuité de tension lors d'une modification brusque de courant (puisque la tension est dérivée par rapport au temps). Le condensateur a alors tendance à « freiner » la tension.

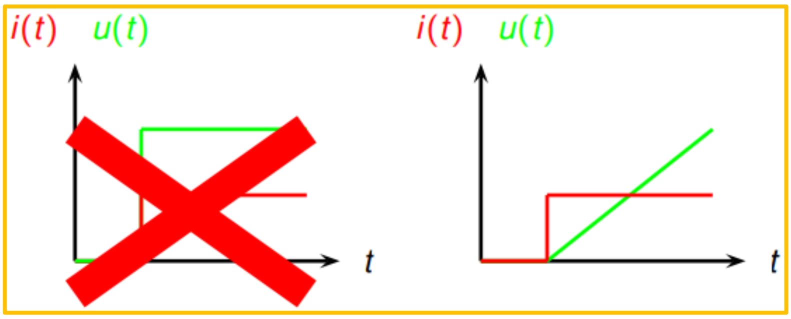


Figure 6 - Evolution supposée (à gauche) et réelle (à droite) de la tension et de l'intensité du temps pour un condensateur

La loi de fonctionnement du condensateur provient de la définition de la capacité C, qui représente la quantité de charge électrique stockée pour un potentiel électrique donné, ce qui permet de connaître la charge q qu'elle stocke :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \frac{q}{u}}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{q = C\,u}}$$

Si on dérive la seconde relation par rapport au temps, on retrouve la loi de fonctionnement :

$$\boldsymbol{\frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt}}}$$

Pour obtenir la tension $u(t)$ traversant le condensateur, on intègre sa loi de fonctionnement :

$$\boldsymbol{i = C\frac{du}{dt} \Leftrightarrow du = \frac{i}{C}dt \Rightarrow \int du = \frac{1}{C}\int i\, dt \Leftrightarrow \boxed{u(t) = \frac{A}{L}t + C}}$$

(avec A la valeur de l'écart entre $\mathbf{0}$ et i et C une constante).

Un condensateur a la capacité de se charger (accumuler des charges électriques) et de se décharger (restituer des charges électriques). Dans les deux cas, il est plus commode d'utiliser la convention « récepteur » en charge, impliquant un signe positif à l'intensité i car l'objet gagne des charges, et la convention générateur en décharge, impliquant un signe négatif à i car l'objet perd des charges.

Une tension appliquée entre les deux électrodes du condensateur crée un champ électrique. L'énergie électrique fournie au condensateur peut être stockée temporairement sous forme électrostatique. Ils servent comme filtrage ou stockage d'énergie.

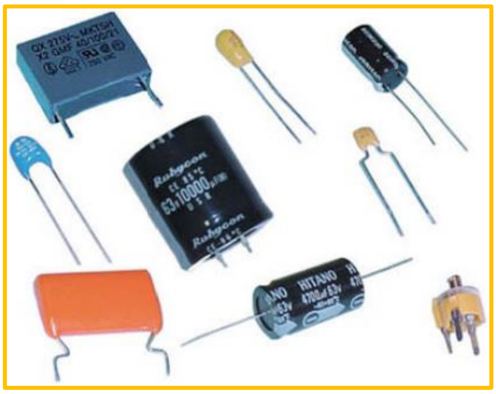


Figure 7 - Exemples de condensateurs

c) Inductance :

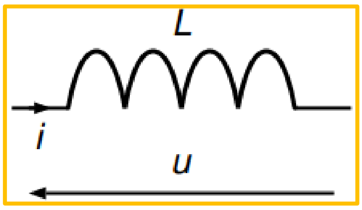


Figure 8 - Représentation schématique d'une inductance ou bobine

L'inductance (ou bobine) est composée de plusieurs spires (tours de fils) et, souvent d'un circuit ferromagnétique. Elle possède une inductance L (en Henry (H)). Sa loi de fonctionnement est :

$$\boxed{\boldsymbol{u = L\frac{di}{dt}}}$$

(par analyse dimensionnelle, on trouve que le Volt vaut : $[\boldsymbol{V}] = [\boldsymbol{H}] \times \frac{[\boldsymbol{A}]}{[\boldsymbol{s}]} = [\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}^{-1}]$). Cette relation montre qu'il ne peut pas y avoir de discontinuité de courant lors d'une modification brusque de tension (puisque le courant est dérivée par rapport au temps). L'inductance a alors tendance à « freiner » le courant.

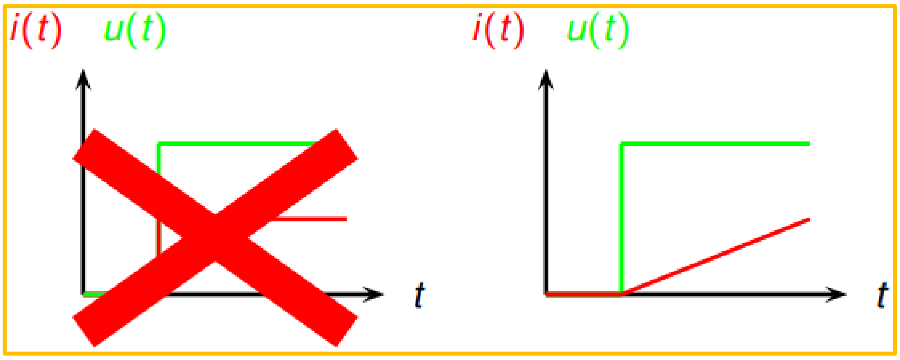


Figure 9 - Evolution supposée (à gauche) et réelle (à droite) de la tension et de l'intensité du temps pour une inductance

Pour obtenir le courant $i(t)$ traversant l'inductance, on intègre sa loi de fonctionnement :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}\frac{\boldsymbol{di}}{\boldsymbol{dt}} \Leftrightarrow \boldsymbol{di} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{dt} \Rightarrow \int \boldsymbol{di} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{L}}\int \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{dt} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}}$$

(avec A la valeur de l'écart entre $\mathbf{0}$ et u et C une constante).

Le bobinage de l'inductance parcouru par un courant crée un champ magnétique. L'énergie électrique fournie à l'inductance peut être stockée temporairement sous forme magnétique. Elles servent comme filtrage, stockage d'énergie et créateur de champ magnétique (ce sont alors des électroaimants).

Figure 10 - Exemples d'inductances

3) Equations différentielles :

Un système linéaire, à une entrée e et une sortie s, est régi par une équation différentielle est régi par une équation différentielle d'ordre n à coefficients constants de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = b_0 s + b_1 \frac{de}{dt} + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + \cdots + b_n \frac{d^n e}{dt^n}}}$$

(avec $m \leq n$). La solution $s(t)$ du système à l'entrée $e(t)$ est du type :

$$\boxed{\boldsymbol{s(t) = s_1(t) + s_2(t)}}$$

(avec $s_1(t)$ la solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM), qui ne dépend que du système et des conditions initiales, et $s_2(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre (SPEASM), de même nature que l'entrée $e(t)$). Contrairement à une équation classique, où on cherche une inconnue (une valeur), on cherche à connaître une fonction mathématique (dépendant du temps dans ce cas).

La méthode de résolution est la suivante :

- On annule le second membre et on cherche la solution générale $s_1(t)$.
- On revient à l'équation différentielle et on cherche la solution particulière $s_2(t)$ qui la satisfait. Elle est généralement de la même forme que le second membre.
- On fait la somme des deux solutions pour obtenir la solution complète $s(t)$.
- On détermine les inconnues restantes à l'aide des conditions initiales (par exemple : $\boldsymbol{s(t=0) = S_0 = s_1(t=0) + s_2(t=0)}$).

II- Systèmes du premier ordre :

1) Le dipôle RC :

Le dipôle RC correspond à l'association d'une résistance et d'un condensateur, alimentée (ou non) par un générateur de tension continue, le tout relié à un interrupteur.

a) Condensateur en convention récepteur (déchargé) :

On prend le condensateur déchargé, donc la tension à ses bornes est orientée dans le sens opposé à celui du générateur de tension continue.

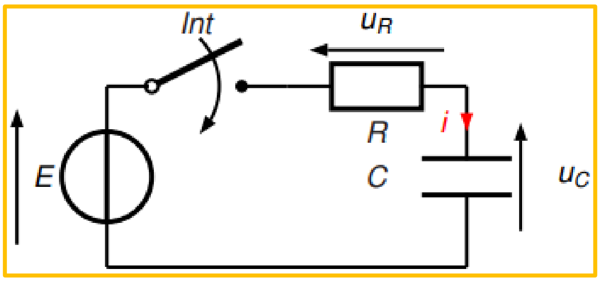


Figure 11 - Représentation schématique du circuit électrique d'un dipôle RC avec le condensateur déchargé

Au temps $\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur n'est pas chargé ($\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t}=\mathbf{0})=\mathbf{0}$) et la tension à ses bornes est nulle ($\boldsymbol{u_C}(\boldsymbol{t}=\mathbf{0})=\mathbf{0}$). Pour établir l'équation différentielle, on écrit d'abord la loi des mailles de ce circuit :

$$\boldsymbol{E-u_R-u_C=0 \Leftrightarrow \boxed{u_R+u_C=E}}$$

On applique ensuite les lois de comportement de chaque dipôle ($\boldsymbol{u_R=R\,i}$ et $\boldsymbol{i=C\frac{du_C}{dt}}$ car le courant est identique partout dans le circuit), ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_R+u_C=E \Leftrightarrow R\,i+u_C=E \Leftrightarrow \boxed{RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E}}$$

On peut poser $\boldsymbol{\tau=RC}$ pour alléger l'écriture de l'équation. On la résout en suivant la méthode classique :

- On annule le second membre ($\boldsymbol{\tau\frac{du_C}{dt}+u_C=0}$) et on cherche la solution homogène $s_1(t)$:

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \Leftrightarrow \tau\frac{du_C}{dt}=-u_C \Leftrightarrow \frac{du_C}{u_C}=-\frac{1}{\tau}dt}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \int\frac{du_C}{u_C}=-\frac{1}{\tau}\int dt \Leftrightarrow \ln u_C+C_1=-\frac{1}{\tau}t+C_2}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow e^{\ln u_C}=e^{-\frac{1}{\tau}t+C_2-C_1}\quad -\frac{1}{\tau}t+C_2-C_1}$$

$$\boldsymbol{\boxed{\Leftrightarrow s_1(t)=Ke^{-\frac{1}{\tau}t}}}$$

(avec C_1 et C_2 des constantes d'intégration différentes et $\boldsymbol{K=e^{C_2-C_1}=cste}$).

- On revient à l'équation différentielle et on cherche la solution particulière $s_2(t)$, qui est de la forme du second membre, soit une constante. Puisque la variable est la tension u_C, la solution $\boldsymbol{u_C=E}$ satisfait l'équation, donc :

$$\boldsymbol{\boxed{s_2(t)=E}}$$

- La somme des deux solutions donne la solution générale $u_C(t)$:

$$\boxed{u_C(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t} + E}$$

- On détermine la constante d'intégration K de la solution homogène à l'aide de la condition initiale ($u_C(t = 0) = 0$) :

$$u_C(t=0) = Ke^{-\frac{1}{\tau}\times 0} + E = K + E = 0 \Leftrightarrow \boxed{K = -E}$$

La solution finale est donc :

$$\boxed{u_C(t) = -Ee^{-\frac{1}{\tau}t} + E = E\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)}$$

On peut aussi connaître le courant $i(t)$ traversant le circuit en reprenant la loi de fonctionnement du condensateur :

$$\boxed{i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(E\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)\right) = -\frac{CE}{\tau}\left(-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}t}}$$

On peut étudier les limites des fonctions $u_C(t)$ et $i(t)$ avant de les visualiser de façon graphique :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\times 0}\right) = E(1-1) = 0}$$

$$\boxed{\lim_{t\to \infty} u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\times \infty}\right) = E(1-0) = E}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = \frac{E}{R}} \; ; \; \boxed{\lim_{t\to \infty} i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times \infty} = 0}$$

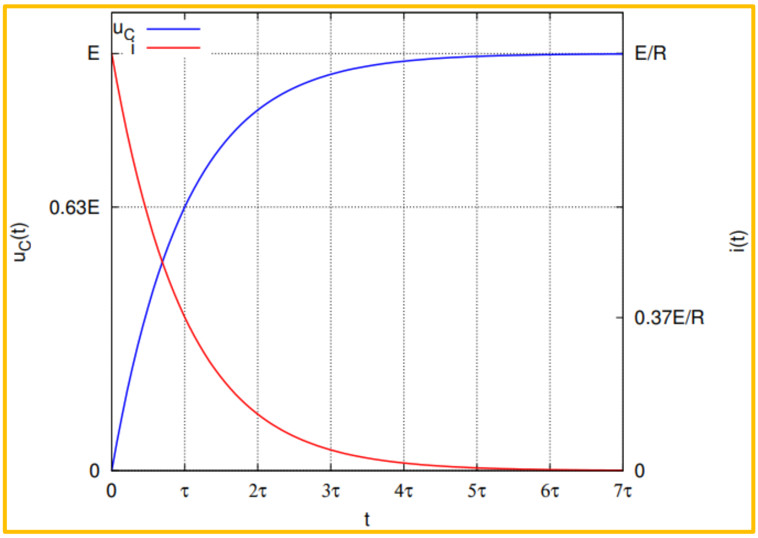


Figure 12 - Evolution temporelle de la tension et du courant dans le circuit RC avec le condensateur déchargé

Le paramètre τ est appelé la « constante de temps » du circuit (en secondes ($[\boldsymbol{s}] = [\boldsymbol{\Omega}][\boldsymbol{F}]$)). Au temps $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.63}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.37}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$; au temps $\boldsymbol{t} = \mathbf{3}\boldsymbol{\tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.95}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.05}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$; au temps $\boldsymbol{t} = \mathbf{3}\boldsymbol{\tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.99}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.01}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$.

b) Condensateur en convention générateur (chargé) :

On débranche le générateur de tension et on a le condensateur chargé, donc la tension à ses bornes est orientée dans le sens opposé à celui de la résistance.

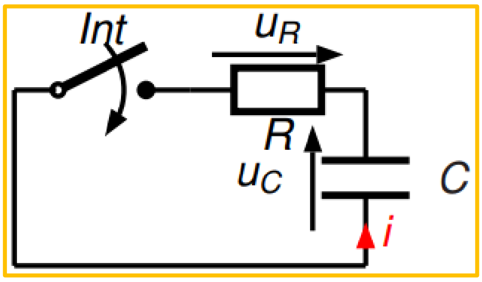


Figure 13 - Représentation schématique du circuit électrique d'un dipôle RC avec le condensateur chargé

Au temps $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur est chargé ($\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t} = \mathbf{0}) = \boldsymbol{Q}$) et la tension à ses bornes vaut E ($\boldsymbol{u_C}(\boldsymbol{t} = \mathbf{0}) = \boldsymbol{E}$). Pour établir l'équation différentielle, on écrit d'abord la loi des mailles de ce circuit :

$$\boxed{\boldsymbol{u_R - u_C = 0}}$$

On applique ensuite les lois de comportement de chaque dipôle ($\boldsymbol{u_R = R\,i}$ et $\boldsymbol{i = -C\frac{du_C}{dt}}$ car le courant est identique partout dans le circuit et qu'on est en convention générateur), ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_R - u_C = 0 \Leftrightarrow R\,i - u_C = 0 \Leftrightarrow} \boxed{\boldsymbol{RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0}}$$

On pose de nouveau $\boldsymbol{\tau = RC}$. On la résout en suivant la méthode classique :

- On annule le second membre ($\boldsymbol{\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = 0}$) et on cherche la solution homogène $s_1(t)$:

$$\boldsymbol{\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \tau\frac{du_C}{dt} = -u_C \Leftrightarrow \frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{\tau}dt}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \int\frac{du_C}{u_C} = -\frac{1}{\tau}\int dt \Leftrightarrow \ln u_C + C_1 = -\frac{1}{\tau}t + C_2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln u_C} = e^{-\frac{1}{\tau}t+C_2-C_1} - \frac{1}{\tau}t + C_2 - C_1$$

$$\boxed{\Leftrightarrow s_1(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t}}$$

- Le second membre de l'équation différentielle est nul, donc la solution particulière $s_2(t)$ qui la satisfait est, elle aussi, nulle :

$$\boxed{s_2(t) = 0}$$

- La somme des deux solutions donne la solution générale $u_C(t)$:

$$\boxed{u_C(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t}}$$

- On détermine la constante d'intégration K de la solution homogène à l'aide de la condition initiale ($\boldsymbol{u_C(t=0)=0}$) :

$$u_C(t=0) = Ke^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = \boxed{K = 0}$$

La solution finale est donc :

$$\boxed{u_C(t) = Ee^{-\frac{1}{\tau}t}}$$

On peut aussi connaître le courant $i(t)$ traversant le circuit en reprenant la loi de fonctionnement du condensateur :

$$\boxed{i(t) = -C\frac{du_C}{dt} = -C\frac{d}{dt}\left(Ee^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = -\frac{CE}{\tau}\left(-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}t}}$$

On voit que la tension $u_C(t)$ est différente du cas où le condensateur est en charge mais le courant $i(t)$ est le même. On peut étudier les limites des fonctions $u_C(t)$ et $i(t)$ avant de les visualiser de façon graphique :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} u_C(t) = Ee^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = E} \; ; \; \boxed{\lim_{t\to\infty} u_C(t) = Ee^{-\frac{1}{\tau}\times\infty} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = \frac{E}{R}} \; ; \; \boxed{\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times\infty} = 0}$$

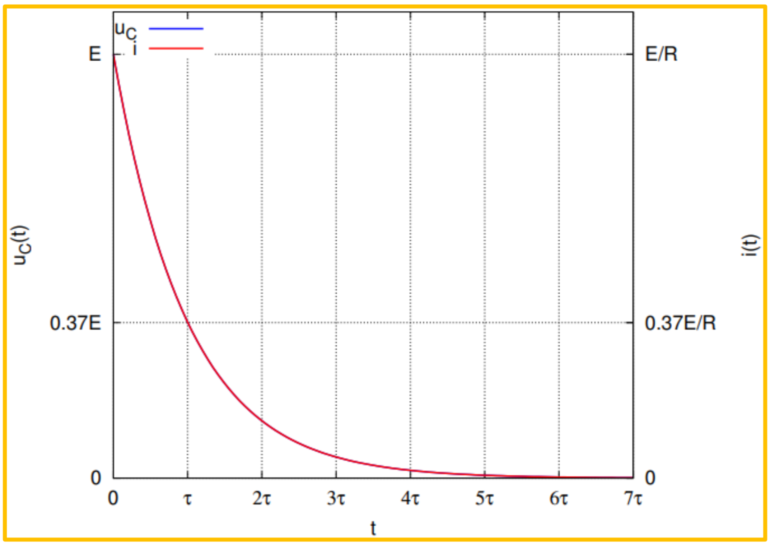


Figure 14 - Evolution temporelle de la tension et du courant dans le circuit RC

Contrairement au cas du condensateur déchargé, le courant et la tension évoluent de la même manière, à la différence d'un facteur $\frac{1}{R}$. Au temps $\boldsymbol{t = \tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.63}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.63}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$; au temps $\boldsymbol{t = 3\tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.37}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.37}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$; au temps $\boldsymbol{t = 3\tau}$, la tension $u_C(t)$ vaut $\mathbf{0.01}\boldsymbol{E}$ et le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.01}\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$.

2) Le dipôle RL :

Le dipôle RL correspond à l'association d'une résistance et d'une bobine, alimentée par un générateur de tension continue, le tout relié à un interrupteur.

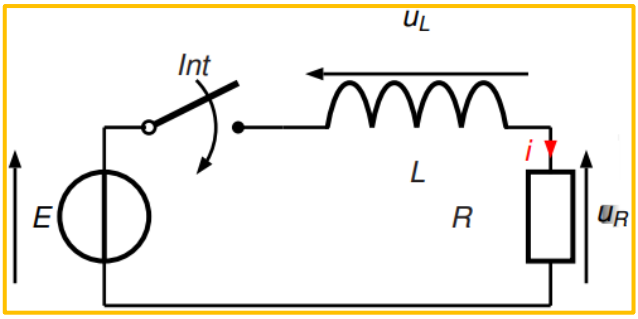


Figure 15 - Représentation schématique du circuit électrique d'un dipôle RL

Au temps $\boldsymbol{t = 0}$, on ferme l'interrupteur. Le courant traversant la bobine est nul ($\boldsymbol{i(t = 0) = 0}$). Pour établir l'équation différentielle, on écrit d'abord la loi des mailles de ce circuit :

$$\boldsymbol{E - u_R - u_L = 0 \Leftrightarrow \boxed{u_R + u_L = E}}$$

On applique ensuite les lois de comportement de chaque dipôle ($\boldsymbol{u_R = R\,i}$ et $\boldsymbol{u_L = L\frac{di}{dt}}$), ce qui donne :

$$\boldsymbol{u_R + u_C = E \Leftrightarrow R\,i + L\frac{di}{dt} = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}}}$$

On peut poser $\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$ pour alléger l'écriture de l'équation. On la résout en suivant la méthode classique :

- On annule le second membre ($\boldsymbol{\tau\frac{di}{dt} + i = 0}$) et on cherche la solution homogène $s_1(t)$:
$$\boldsymbol{\tau\frac{di}{dt} + i = 0 \Leftrightarrow \tau\frac{di}{dt} = -i \Leftrightarrow \frac{di}{i} = -\frac{1}{\tau}dt}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow \int\frac{di}{i} = -\frac{1}{\tau}\int dt \Leftrightarrow \ln i + C_1 = -\frac{1}{\tau}t + C_2}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow e^{\ln i} = e^{-\frac{1}{\tau}t + C_2 - C_1}\ -\frac{1}{\tau}t + C_2 - C_1}$$
$$\boldsymbol{\boxed{\Leftrightarrow s_1(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{E}{R}}}$$
- On revient à l'équation différentielle et on cherche la solution particulière $s_2(t)$, qui est de la forme du second membre, soit une constante. Puisque la variable est le courant i, la solution $\boldsymbol{i = \frac{E}{R}}$ satisfait l'équation, donc :
$$\boldsymbol{\boxed{s_2(t) = \frac{E}{R}}}$$
- La somme des deux solutions donne la solution générale $i(t)$:
$$\boldsymbol{\boxed{i(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{E}{R}}}$$
- On détermine la constante d'intégration K de la solution homogène à l'aide de la condition initiale ($\boldsymbol{i(t=0) = 0}$) :
$$\boldsymbol{u_C(t=0) = Ke^{-\frac{1}{\tau}\times 0} + \frac{E}{R} = K + \frac{E}{R} = 0 \Leftrightarrow \boxed{K = -\frac{E}{R}}}$$
La solution finale est donc :
$$\boldsymbol{\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)}}$$

On peut aussi connaître la tension $u_L(t)$ aux bornes de la bobine en reprenant sa loi de fonctionnement :

$$\boxed{\boldsymbol{u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)\right) = -\frac{LE}{\tau R}\left(-e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) = Ee^{-\frac{1}{\tau}t}}}$$

On peut étudier les limites des fonctions $u_C(t)$ et $i(t)$ avant de les visualiser de façon graphique :

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{t\to 0} i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\times 0}\right) = \frac{E}{R}(1-1) = 0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{t\to \infty} i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\times \infty}\right) = \frac{E}{R}(1-0) = \frac{E}{R}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{t\to 0} u_L(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times 0} = \frac{E}{R}}} \ ; \ \boxed{\boldsymbol{\lim_{t\to \infty} u_L(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{\tau}\times \infty} = 0}}$$

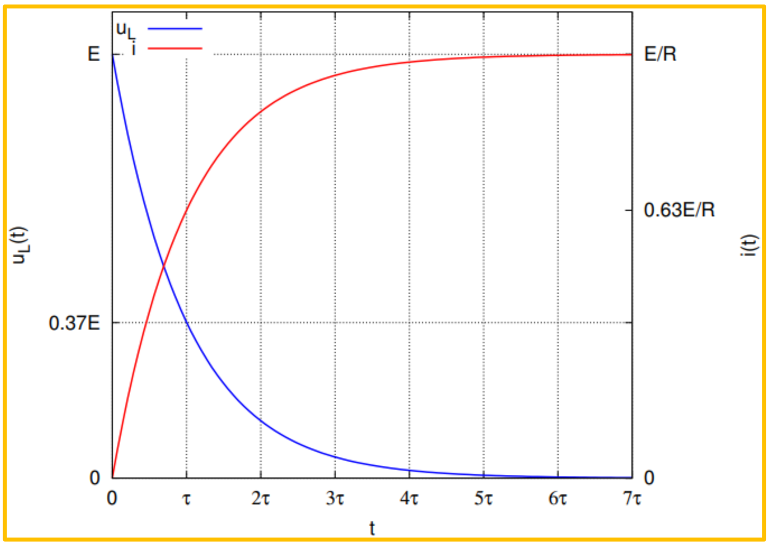


Figure 16 - Evolution temporelle de la tension et du courant dans le circuit RC avec le condensateur déchargé

La constante de temps du circuit est différente ($\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}}$), mais reste homogène à un temps (en secondes ($[\boldsymbol{s}] = \frac{[\boldsymbol{H}]}{[\Omega]}$)). Au temps $\boldsymbol{t = \tau}$, le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.63}\boldsymbol{E}$ et la tension $u_L(t)$ vaut $\mathbf{0.37}\boldsymbol{\frac{E}{R}}$; au temps $\boldsymbol{t = 3\tau}$, le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.95}\boldsymbol{E}$ et la tension $u_L(t)$ vaut $\mathbf{0.05}\boldsymbol{\frac{E}{R}}$; au temps $\boldsymbol{t = 3\tau}$, le courant $i(t)$ vaut $\mathbf{0.99}\boldsymbol{E}$ et la tension $u_L(t)$ vaut $\mathbf{0.01}\boldsymbol{\frac{E}{R}}$.

III- Système du second ordre :

On prend le cas du dipôle RLC série qui correspond à l'association d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur déchargé, alimentée par un générateur de tension continue, le tout relié à un interrupteur.

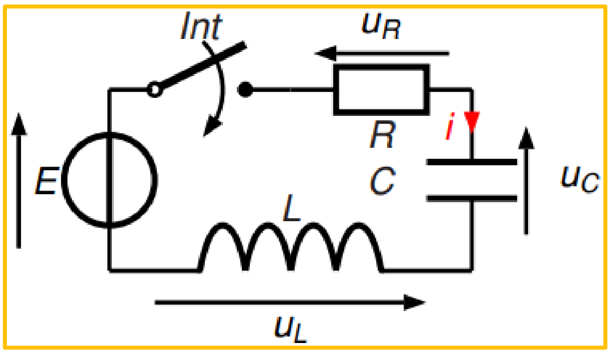


Figure 17 - Représentation schématique du circuit électrique d'un dipôle RLC

Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Le condensateur est déchargé ($q(t = 0) = 0$), donc la tension à ses bornes est nulle ($u_C(t = 0) = 0$), et le courant traversant le circuit est nul ($i(t = 0) = 0$). Pour établir l'équation différentielle, on écrit d'abord la loi des mailles de ce circuit :

$$E - u_R - u_L - u_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{u_R + u_L + u_C = E}$$

On applique ensuite les lois de comportement de chaque dipôle ($u_R = R\,i$, $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_C}{dt}$), ce qui donne :

$$u_R + u_L + u_C = E \Leftrightarrow R\,i + L\frac{di}{dt} + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow RC\frac{du_C}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}}$$

C'est une équation différentielle du second ordre avec second membre. On peut poser $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\alpha = \frac{R}{2L}$ pour alléger l'écriture de l'équation, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt} + 2\alpha\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E}$$

On la résout en suivant la méthode classique (pour une équation différentielle du second ordre) :

- On annule le second membre ($\boldsymbol{\frac{d^2u_C}{dt} + 2\alpha\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0}$) et on cherche la solution homogène $s_1(t)$ en posant l'équation caractéristique de l'équation (on pose $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\frac{du_C}{dt}}$ une variable quelconque) :

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 + 2\alpha\, r + \omega_0^2 = 0}}$$

  C'est un polynôme du second ordre. On peut alors chercher ses racines en calculant son discriminant Δ :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 4\alpha^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2 = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)}}$$

  Selon le signe du discriminant, on aura trois solutions différentes :
    - Si le discriminant est positif ($\Delta > \mathbf{0}$), le système est en régime apériodique, de solution homogène :

$$\boxed{\boldsymbol{s_1(t) = A_1\, e^{r_1 t} + B_1\, e^{r_2 t}}}$$

      (avec r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique et A_1 et B_1 des coefficients dépendant des conditions initiales).
    - Si le discriminant est nul ($\Delta = \mathbf{0}$), le système est en régime critique, de solution homogène :

$$\boxed{\boldsymbol{s_1(t) = (A_2 t + B_2)e^{-\alpha t}}}$$

      (avec A_2 et B_2 des coefficients dépendant des conditions initiales).
    - Si le discriminant est négatif ($\Delta < \mathbf{0}$), le système est en régime oscillatoire amorti, de solution homogène :

$$\boxed{\boldsymbol{s_1(t) = (A_3\, e^{-\alpha t})\sin(\omega t - \varphi)}}$$

      (avec A_3 et φ des coefficients dépendant des conditions initiales et $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\boldsymbol{\omega_0^2 - \alpha^2}}$).
- On revient à l'équation différentielle et on cherche la solution particulière $s_2(t)$, qui est de la forme du second membre, soit une constante. Puisque la variable est la tension u_C, la solution $\boldsymbol{u_C} = \boldsymbol{E}$ satisfait l'équation, donc :

$$\boxed{\boldsymbol{s_2(t) = E}}$$

  Ici, la solution particulière représente le régime permanent à atteindre.
- La somme des deux solutions donne la solution générale $u_C(t)$. Suivant les valeurs de résistance R, de capacité C, d'inductance L et les conditions initiales, le régime transitoire précédent le régime permanent sera différent. On fixera les valeurs de $\boldsymbol{E = 10\ V}$, $\boldsymbol{C = 10\ mH}$ et $\boldsymbol{L = 10\ nF}$ et seul R variera.

1) Régime apériodique :

On prend le cas d'une résistance de $\mathbf{7\ k\Omega}$, donc la valeur du discriminant est positive, ce qui mène au régime périodique, de solution générale :

$$\boxed{u_C(t) = A_1\, e^{r_1 t} + B_1\, e^{r_2 t} + E}$$

On peut étudier les limites de la fonction $u_C(t)$ avant de la visualiser de façon graphique :

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} u_C(t) = A_1\, e^{r_1\times\infty} + B_1\, e^{r_2\times\infty} + E = E}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{du_C}{dt} = r_1 A_1\, e^{r_1\times 0} + r_2 B_1\, e^{r_2\times 0} = r_1 A_1 + r_2 B_1 = 0}$$

Les limites calculées ici seront identiques pour chaque régime.

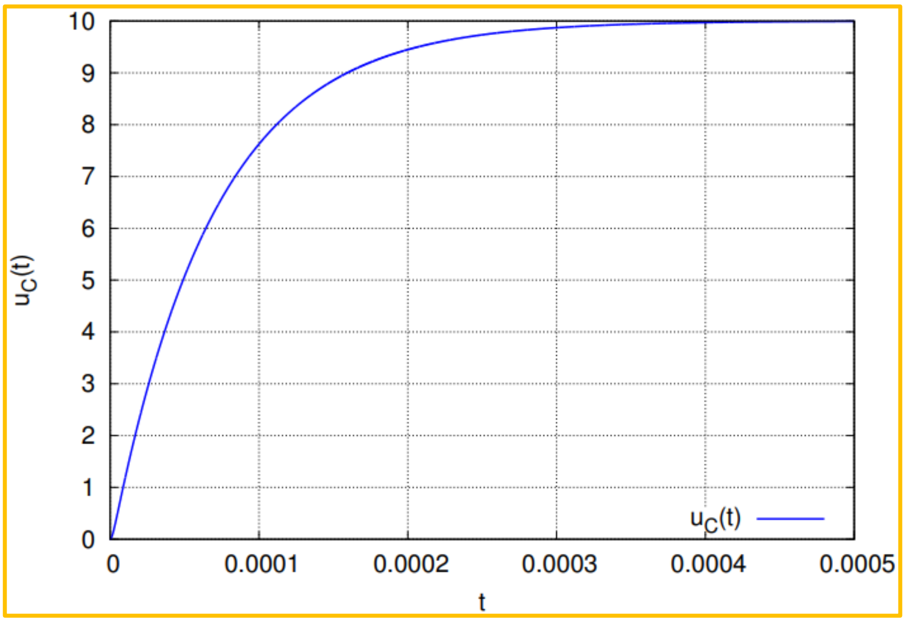


Figure 18 - Evolution temporelle de la tension dans le circuit RLC en régime apériodique

On remarque que le condensateur gagne en tension lentement, donc se charge aussi lentement.

2) Régime critique :

On prend le cas d'une résistance de $\mathbf{2\ k\Omega}$, donc la valeur du discriminant est nulle, ce qui mène au régime critique, de solution générale :

$$\boxed{u_C(t) = (A_2 t + B_2)e^{-\alpha t} + E}$$

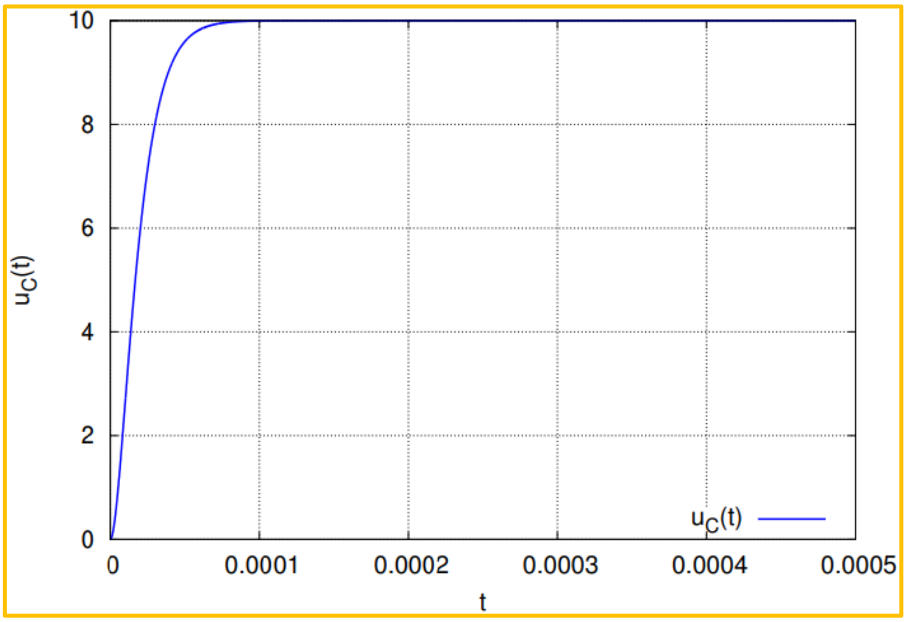


Figure 19 - Evolution temporelle de la tension dans le circuit RLC en régime critique

On remarque que le condensateur se charge plus rapidement puisque la tension à ses bornes augmente plus vite qu'en régime apériodique, sans jamais dépasser la valeur du régime permanent. Si la résistance R diminue encore, des oscillations apparaissent.

3) Régime pseudopériodique :

On prend le cas d'une résistance de $\mathbf{200\ \Omega}$, donc la valeur du discriminant est négative, ce qui mène au régime pseudopériodique, de solution générale :

$$\boxed{\boldsymbol{u_C(t) = (A_3\, e^{-\alpha t})\sin(\omega t - \varphi) + E}}$$

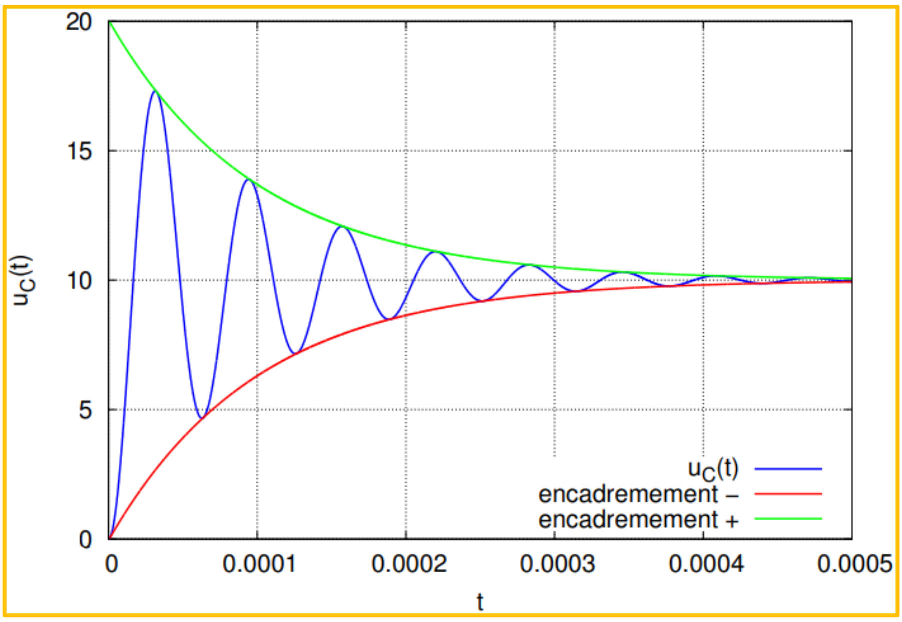


Figure 20 - Evolution temporelle de la tension dans le circuit RLC en régime pseudo-périodique

On remarque que le condensateur se charge très rapidement mais oscille autour de la valeur du régime permanent avant de converger vers celui-ci. Les oscillations sont contenues dans une enveloppe exponentielle.

4) Cas particulier – Régime pseudopériodique non amorti :

On prend le cas d'une résistance nulle, donc la valeur du discriminant est négative, ce qui mène au régime pseudopériodique, mais la valeur de R implique que le coefficient α est aussi nul ($\boldsymbol{\alpha = \frac{0}{2L} = 0}$), enlevant la présence d'un amortissement dans l'évolution de la tension aux bornes du condensateur et faisant que $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 0} = \omega_0}$. Sa solution générale est alors :

$$\boxed{\boldsymbol{u_C(t) = (A_3)\sin(\omega_0 t - \varphi) + E}}$$

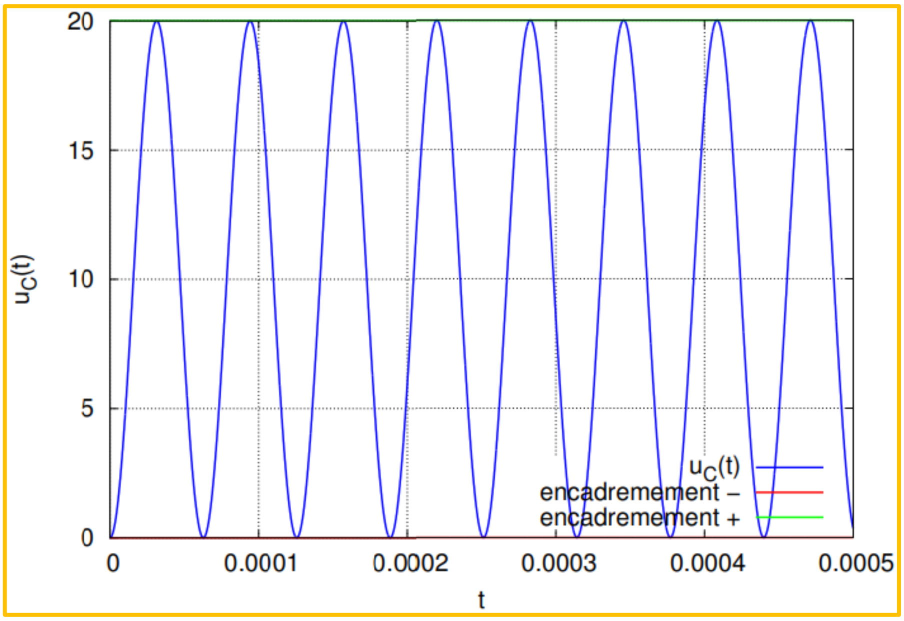


Figure 21 - Evolution temporelle de la tension dans le circuit RLC en régime pseudopériodique non amorti

Dans ce cas, l'encadrement n'est plus exponentiel mais constant au cours du temps, faisant que les oscillations de la tension perdurent indéfiniment.