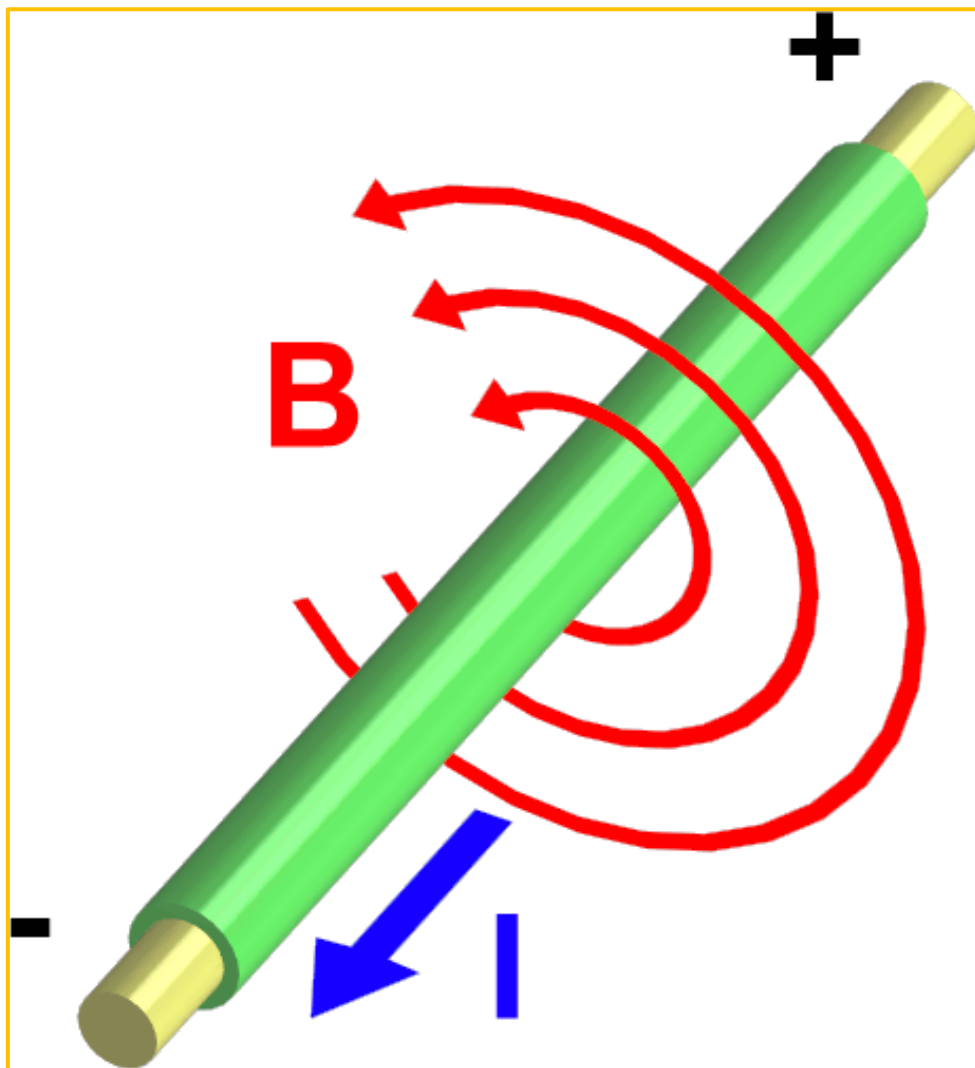


CM – Bases de l'Electricité

Chapitre 5 : Magnétostatique



I- Généralités :

1) Historique rapide :

En -600, Thalès de Millet et d'autres constatent qu'une roche provenant de la région de Magnésie a le pouvoir d'attirer le fer. Elle sera appelée plus tard la magnétite qui est un oxyde de fer (Fe_3O_4).

En 1117, la première référence explicite à la boussole magnétique est faite en Chine.

En 1820, Hans Cristian Orsted (1777 – 1851) réalise l'expérience qui porte son nom en faisant circuler un courant dans un fil à proximité d'une boussole pour faire bouger son aiguille.

Entre 1821 et 1831, de nombreuses expériences sont menées par Faraday et Ampère pour montrer qu'électricité et magnétisme sont liés.

En 1873, James Clerk Maxwell (1831 – 1879) unifie les lois de l'Electromagnétisme dans quatre équations, les équations de Maxwell. Ces équations font aussi le lien avec la lumière qui est une onde électromagnétique.

2) Résultats expérimentaux :

L'expérience de Thalès de Millet consistait à regarder ce qu'il se passe entre la magnétite et le fer. Si on met deux morceaux de fer l'un à côté de l'autre, rien ne se passe. Si on approchait un morceau de magnétite de l'un des morceaux de fer, celui-ci est attiré par la magnétite. Mais si on rapprochait les deux morceaux de fer entre eux après avoir mis la magnétite, le morceau qui s'en était rapproché attire celui qui n'a pas bougé comme s'il était devenu de la magnétite.

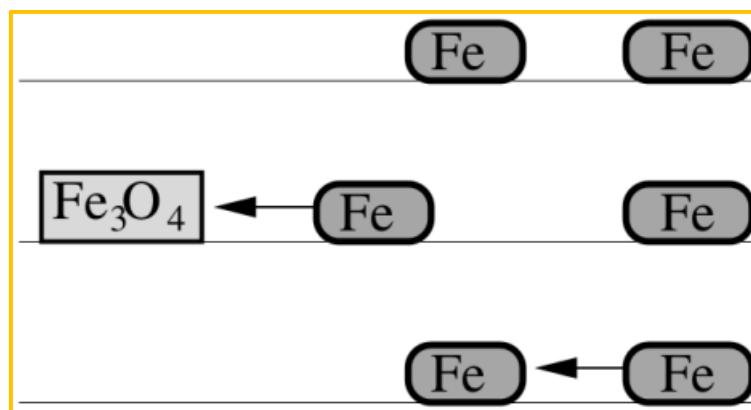


Figure 1 - Résultats de l'expérience de Thalès de Millet avec deux morceaux de fer (en haut), deux morceaux de fer et un morceau de magnétite (au centre) et deux morceaux de fer dont l'un a été attiré par la magnétite (en bas)

Thalès de Millet en déduisit que le morceau de fer attiré a conservé une partie de son aimantation : il devient lui-même un aimant.

On prend ensuite deux boussoles magnétiques que l'on met l'une en face de l'autre. Si les deux pôles nord se regardent, ils se repoussent et si le pôle nord d'une boussole et le pôle sud de l'autre se regardent, ils s'attirent. Ainsi, deux pôles de même nature se repoussent et deux pôles de nature opposée s'attirent.

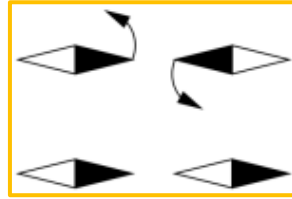


Figure 2 - Résultats de l'expérience des boussoles lorsque les pôles nord se regardent (en haut) et les pôles opposés se regardent (en bas)

L'expérience d'Oersted utilisait un fil duquel on fait passer un courant I à proximité d'une boussole. Lorsqu'il n'y a pas de courant, la boussole s'aligne avec le champ magnétique terrestre. Lorsque le courant est positif, la boussole pivote à 90° dans un sens et lorsque le courant est négatif, elle pivote du même angle mais dans le sens opposé.

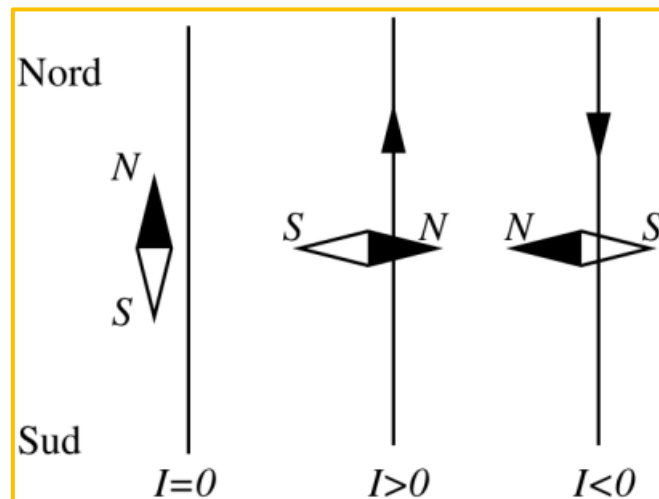


Figure 3 - Résultats de l'expérience d'Oersted

L'expérience d'Ampère consistait en un circuit fixe relié à deux fils de longueur l et espacés de r possédant des courants différents I_1 et I_2 et plongés à leur autre extrémité à du mercure. Le second fil est mobile.

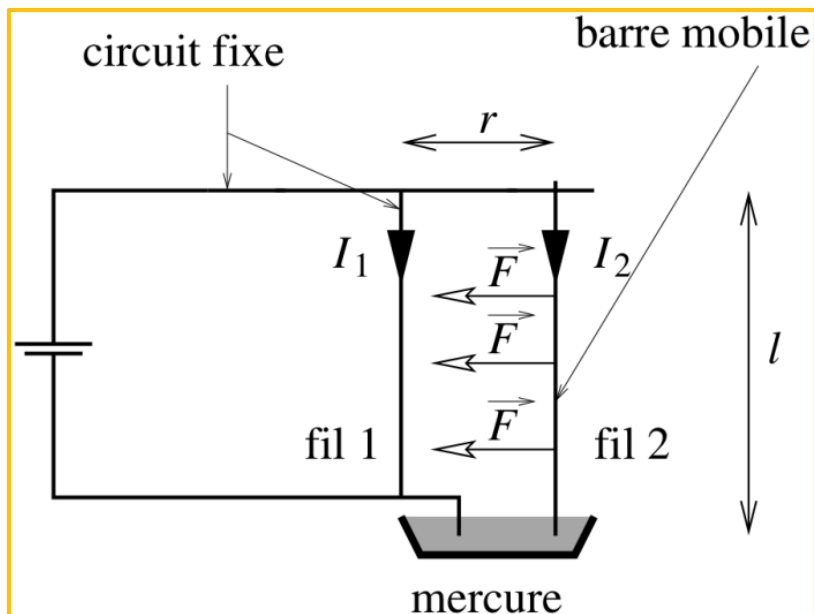


Figure 4 - Schéma de l'expérience d'Ampère

Ampère a montré que si les deux fils sont parallèles, le second fil se met en mouvement, montrant une force entre les deux fils. La force est attractive si les deux courants dans les deux fils sont de même sens et répulsive si les courants sont opposés. Le second fil reste parallèle en tout temps au premier donc la force est identique en tout point du fil. La force est inversement proportionnelle à r et augmente proportionnellement avec les deux courants ou la longueur des fils l , ce qui permet d'écrire :

$$F \propto \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

3) Définition de l'Ampère :

C'est à partir de l'expérience d'Ampère qu'a été défini (bien plus tard) l'unité de l'Ampère. La définition officielle dit : « La force exercée entre deux fils de longueur $l = 1\text{m}$ est de $F = 2 \times 10^{-7} \text{ N}$ s'ils sont parcourus par des courants égaux dans chaque fil d'un Ampère. ». Cette force vaut mathématiquement :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \vec{u}_r$$

(où le terme $\frac{\mu_0}{2\pi}$ est le coefficient constant de proportionnalité de la force et avec la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (ou $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ en unités du Système International)).

4) Loi de Laplace :

La force qui décrite précédemment s'appelle la « force de Laplace » (du nom de Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827)) :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \vec{u}_r$$

Cette force est une interaction entre une source et un objet, ils peuvent donc s'écrire comme le produit d'une fonction des caractéristiques des courants objets qui ressentent la force (ici, le second fil dans l'expérience d'Ampère de courant I_2) et d'une fonction des courants sources de la force et de l'endroit où elle est ressentie (c'est le champ magnétique \vec{B}). Si on écrit l'élément différentiel de longueur du second fil dl_2 sous forme vectorielle ($d\vec{l}_2$) de sorte qu'il soit dirigé dans le sens du courant I_2 , on peut écrire l'élément de force de Laplace $d\vec{F}$:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{l}_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \cdot \vec{u}_r$$

Si on regarde la norme de la force, le terme $I_2 d\vec{l}_2$ correspond à l'objet qui la subit et le terme $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r}$ correspond au module du champ magnétique \vec{B} , qui ne dépend que de la distance radiale r , créé par le fil où circule le courant I_1 . Ce champ est dirigé suivant le vecteur unitaire \vec{u}_θ (il est donc orthoradial).

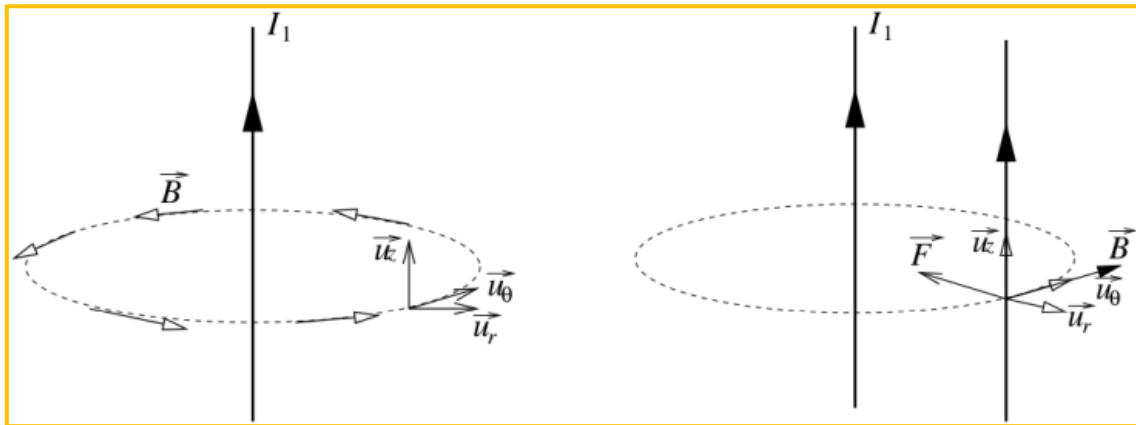


Figure 5 - Champ magnétique généré par un courant circulant dans un fil (à gauche) et visualisation de la force de Laplace avec le champ magnétique dans le cas de deux fils proches (à droite)

De l'analyse précédente, on peut déduire que la loi de Laplace peut s'écrire comme un produit vectoriel entre les termes précédents :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}$$

(où $d\vec{F}$ est perpendiculaire au plan formé par $I d\vec{l}$ et \vec{B} , les trois vecteurs formant un trièdre direct que l'on peut représenter simplement grâce au pouce, à l'index et au majeur de la main droite).

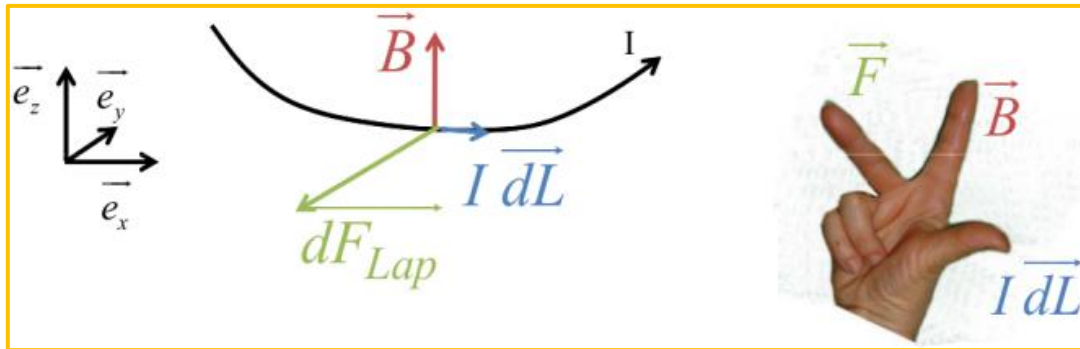


Figure 6 - Représentation du trièdre direct formé par les trois vecteurs (à gauche) et représentation par la règle de la main droite (à droite)

On peut faire la comparaison avec la loi de Coulomb en Electrostatique :

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u} = q_2 \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F}_L = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^2} d\vec{l}_1 \wedge \vec{u} = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^2} d\vec{l}_1 \wedge \vec{u}$$

(avec \vec{E} le champ électrique créé par la charge q_1 (qui dépend de la distribution des charges électriques dans l'espace) et q_2 la charge électrique qui subit la force ; avec \vec{B} le champ magnétique créé par le courant $I_1 d\vec{l}_1$ circulant dans un fil rectiligne (qui dépend de la distribution des courants électriques dans l'espace) et $I_2 d\vec{l}_2$ le morceau de fil où circule le courant I_2 qui subit la force). Les deux forces sont le produit d'un terme qui la subit et d'un champ, électrique ou magnétique en fonction. La force de Coulomb utilise le produit scalaire tandis que la force de Laplace utilise le produit vectoriel.

II- Loi de Biot et Savart :

1) Enoncé :

On considère un conducteur C de forme quelconque (distribution de courants électriques quelconque), parcouru par un courant I (indépendant du temps) et $d\vec{l}$ un élément de C orienté dans le même sens que le courant.

La contribution élémentaire du champ magnétique $d\vec{B}$ de cet élément créé par $I d\vec{l}$ au champ total \vec{B} créé par I tout le long de C au point M est donné par la loi de Biot et Savart (des noms de Jean-Baptiste Biot (1774 – 1862) et Félix Savart (1791 – 1841)) :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

(avec dB en Tesla (**T**, du nom de Nikola Tesla (1856 – 1943)), I en Ampère et dl et r en mètres).

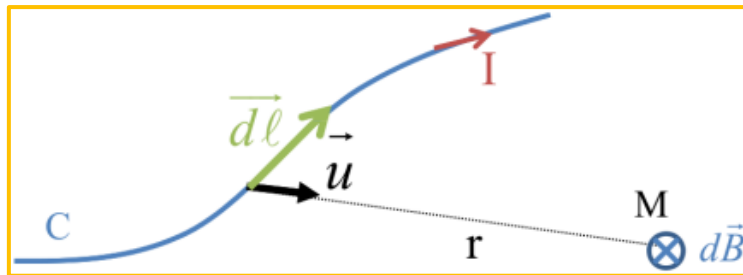


Figure 7 - Champ magnétique élémentaire généré par un élément de conducteur parcouru par un courant

Les vecteurs $d\vec{l}$, \vec{u} et $d\vec{B}$ forment un trièdre direct comme pour la loi de Laplace et peuvent être représentés par la règle de la main droite.

2) Rappels sur le produit vectoriel :

Le produit vectoriel est une opération mathématique permettant d'obtenir un vecteur \vec{C} à partir de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Le module du vecteur \vec{C} obtenu vaut :

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \beta$$

(avec β l'angle entre les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B}). Le vecteur \vec{C} obtenu est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{A} et \vec{B} , l'ensemble $(\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$ formant un trièdre direct. Une propriété du produit vectoriel est qu'il est anticommutatif :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes, le produit vectoriel se calcule de la manière suivante :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ B_x A_z - B_z A_x \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$$

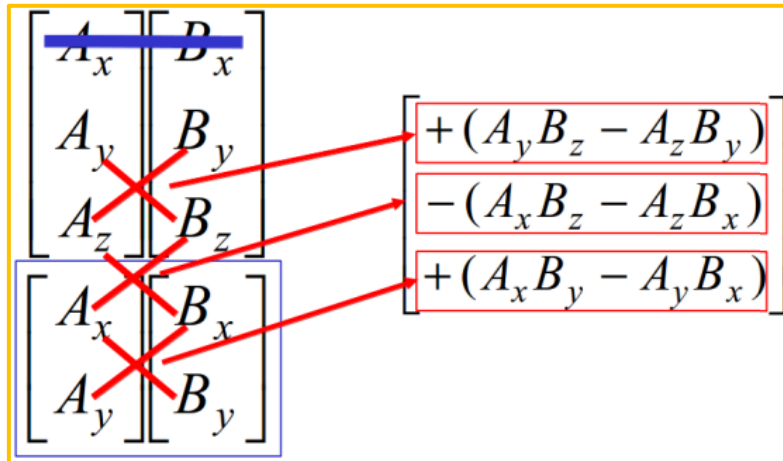


Figure 8 - Représentation du calcul du produit vectoriel

3) Exemples :

a) Fil rectiligne infini :

On considère un fil infini parcouru par un courant I et on cherche à calculer le champ magnétique \vec{B} induit par ce courant en un point M situé à une distance r_0 du fil.

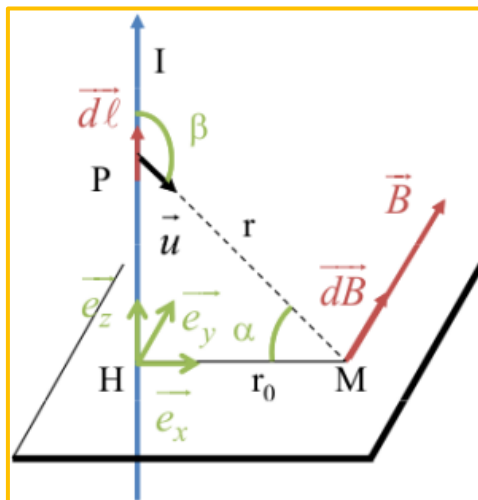


Figure 9 - Schéma de la situation

La loi de Biot et Savart donne le champ magnétique élémentaire créé par un élément de fil de longueur dl :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{e}_z \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin(\beta) dz \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos(\alpha) dz \vec{e}_y$$

(avec $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$, $\vec{e}_z \wedge \vec{u} = \sin(\beta) \vec{e}_y$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \sin(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$). Dans ce résultat, il y a trois variables indépendantes : l'angle α , la longueur z sur le fil et la distance r de l'élément de fil générant l'élément de champ magnétique. Vu qu'il faudra intégrer le résultat pour obtenir le champ magnétique total \vec{B} , il faut en garder une seule qui permette de faciliter ce calcul. On choisit l'angle α car les intégrales des sinusoides sont plus faciles à calculer. Grâce à la trigonométrie, on peut remplacer les autres variables z et r par α :

$$\tan \alpha = \frac{z}{r_0} \Leftrightarrow z = r_0 \tan \alpha \Rightarrow dz = r_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos \alpha}{r_0} \Leftrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{r_0^2}$$

Cela donne :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha \cos^2 \alpha}{r_0^2} \cos(\alpha) \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \cos(\alpha) d\alpha \vec{e}_y$$

Pour calculer la contribution de la portion du fil entre deux points P et P' symétriques l'un de l'autre de l'axe Ox , il faut intégrer l'angle α de α_P à $\alpha_{P'}$:

$$\vec{B} = \int_{\alpha_P}^{\alpha_{P'}} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_P}^{\alpha_{P'}} \cos(\alpha) d\alpha \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} [\sin(\alpha)]_{\alpha_P}^{\alpha_{P'}} \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\sin(\alpha_P) - \sin(\alpha_{P'})) \vec{e}_y$$

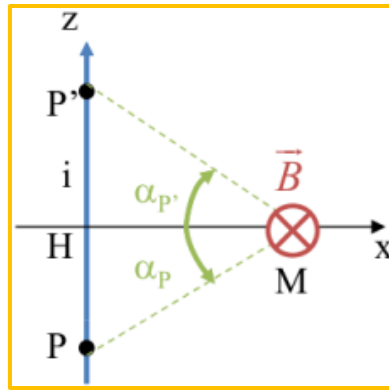


Figure 10 - Représentation des points P et P' permettant l'intégration de la formule précédente

Pour un fil de longueur infini, les angles valent $\alpha_P = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_{P'} = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (1 - (-1)) \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \vec{e}_y$$

La norme du champ magnétique ne dépend que de l'intensité du courant et de la distance au point considéré par rapport au fil. Elle est constante sur un cercle de rayon r_0 . Le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à tout plan radial (c'est-à-dire tout plan passant par le fil et perpendiculaire au cercle), donc les lignes de champ magnétique sont des cercles. Leur orientation dépend du sens du courant.

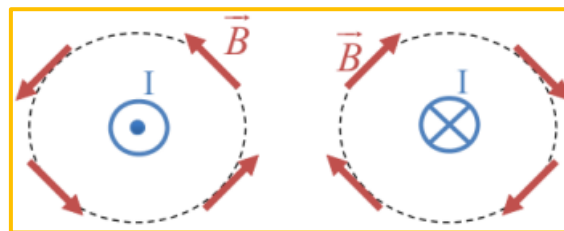


Figure 11 - Sens du champ magnétique suivant si le courant se dirige vers l'avant (à gauche) ou vers l'arrière (à droite)

Si le courant vaut 1 A et la distance du point M au fil vaut 1 cm , la norme du champ magnétique vaut $2 \times 10^{-5} \text{ T}$. À comparaison, le champ magnétique terrestre vaut environ entre 30 à $70 \mu\text{T}$, celui en surface d'un aimant vaut environ 0.2 à 1.3 T , celui dans un moteur électrique vaut environ 1 à 2 T et celui dans un électroaimant supra-conducteur vaut environ 20 à 45 T .

III- Lignes de champ magnétique :

Tout comme pour le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B} suit des lignes de champ sur tout l'espace et dépendent du système considéré. Contrairement aux lignes de champ électrique, elles forment des cercles, rebouclant sur elles-mêmes.

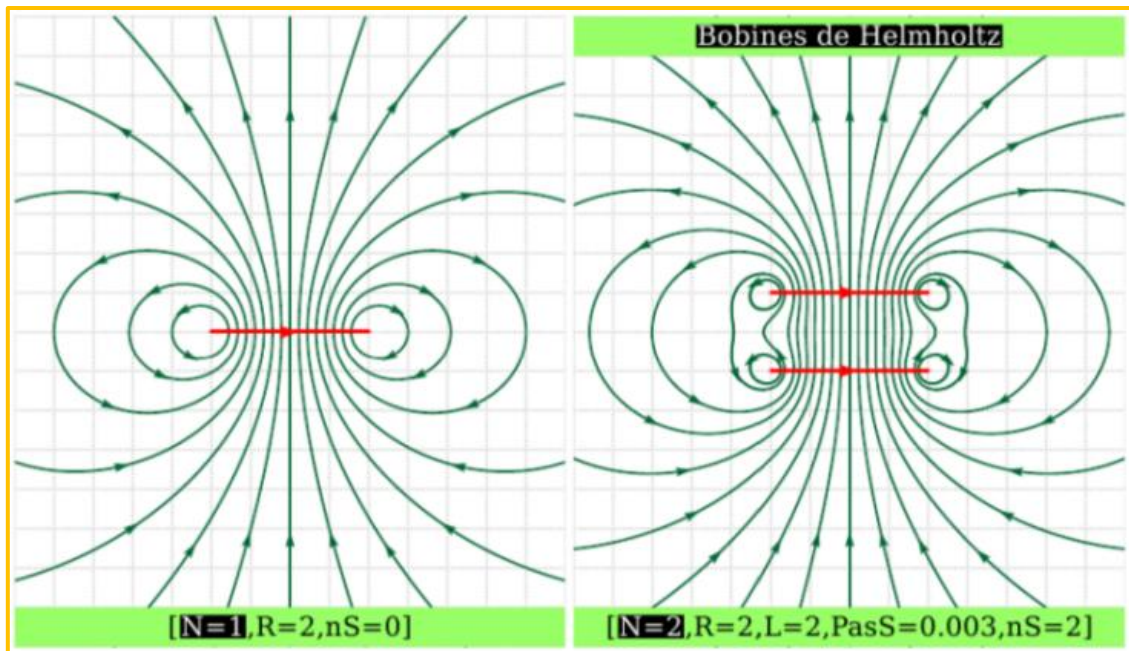


Figure 12 - Lignes de champ magnétique créées par une spire (à gauche) et par deux spires configurées en bobine de Helmholtz (à droite)

Lorsque le système considéré est une spire, les lignes de champ magnétique forment des cercles de plus en plus grands et allongés (donc plutôt des ellipses) au fur et à mesure que l'on s'approche de son centre (où la ligne de champ est une droite). En prenant une bobine de Helmholtz (du nom de Hermann von Helmholtz (1821 – 1894)), qui est un système composé de deux spires distantes l'une de l'autre, les lignes de champ dans la bobine sont quasiment des droites pour la majorité et elles rebouclent en cercles dès qu'on en sort. Aux bords des deux systèmes, on remarque que les lignes de champ forment des cercles quasi-parfaits.

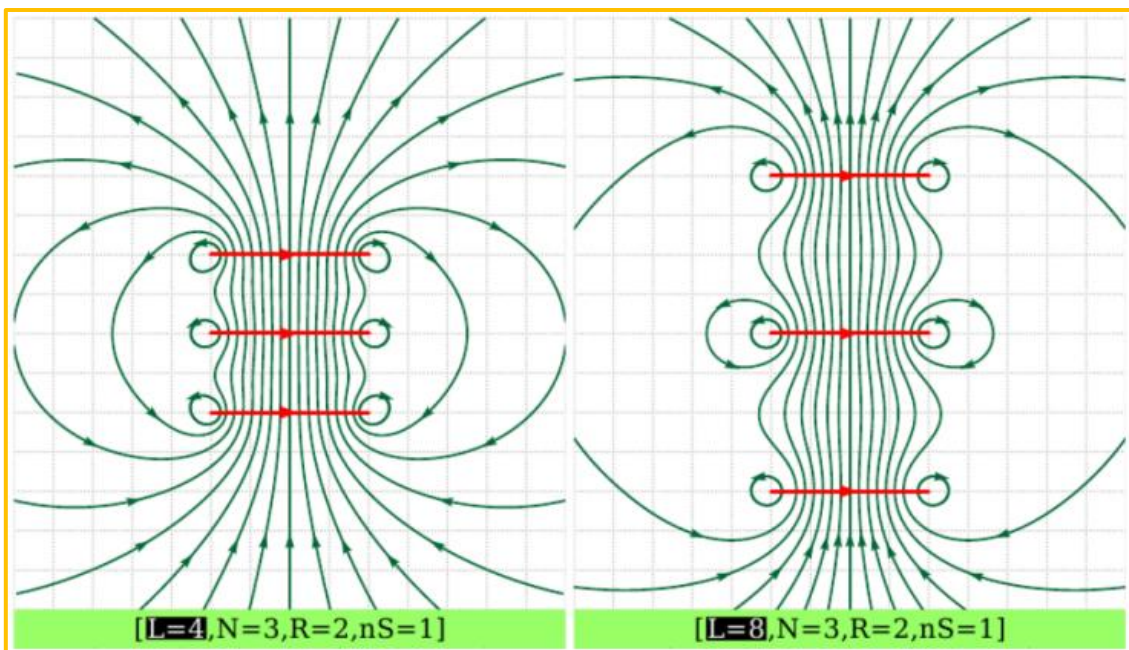


Figure 13 - Lignes de champ magnétique créées par un solénoïde avec spires resserrées (à gauche) et très espacées (à droite)

Lorsque le système considéré est un solénoïde (un cylindre composé de plusieurs spires, ici trois), plus les spires sont resserrées et plus les lignes de champ magnétique sont des droites à l'intérieur. Lorsqu'on les espacement un peu plus, certaines lignes courbent entre deux spires.

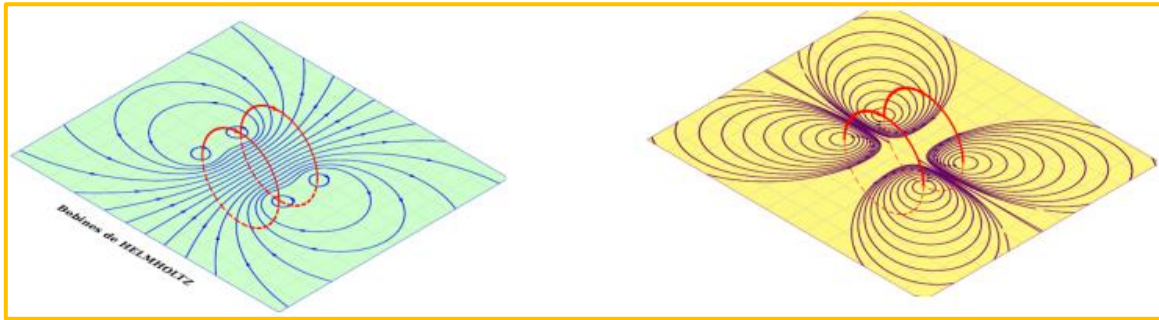


Figure 14 - Lignes de champ magnétique d'une bobine de Helmholtz avec des courants dans chaque spire dans le même sens (à gauche) et dans des sens opposés (à droite)

Lorsqu'on reprend la bobine de Helmholtz et que l'on compare les lignes de champ magnétique lorsque les courants de chaque spire sont de même sens ou de sens opposé, les résultats sont différents. Dans le cas des courants opposés, les lignes de champ se forment autour des extrémités des spires et vers l'extérieur de la bobine, mais aucune ligne de champ n'apparaît au centre : il n'y a donc pas de champ magnétique au centre de la bobine de Helmholtz dans ce cas.

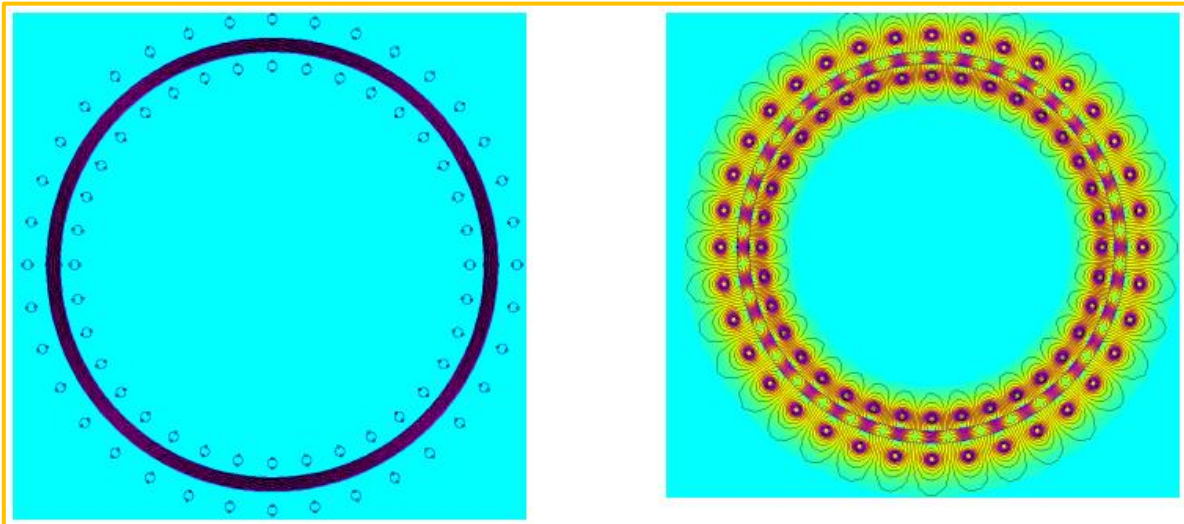


Figure 15 - Lignes de champ magnétique créées dans un tore ferromagnétique avec des courants de spire allant dans le même sens (à gauche) et des courants de spire opposés entre les spires situées côte à côte (à droite)

Lorsque le système est un tore ferromagnétique composé d'un grand nombre de spires, si le courant dans les spires est dans le même sens, les lignes de champ magnétique sont contenues à l'intérieur, tandis que si les courants dans les spires alternent en termes de sens les unes par rapport aux autres, les lignes de champ se forment autour du tore mais pas au centre des spires.

IV- Le théorème d'Ampère :

1) Enoncé :

L'énoncé du théorème d'Ampère est le suivant : « La circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'une courbe C fermée orientée est égale à la perméabilité magnétique du vide μ_0 multipliée par la somme algébrique des courants enlacés par cette courbe. » :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$$

Pour l'illustrer, on considère trois courants I_1 , I_2 et I_3 , les deux derniers courants allant dans le même sens contrairement au premier, entourés d'un contour C quelconque (ici, un cercle) orienté dans le sens trigonométrique (on peut choisir le sens que l'on souhaite, cela importe peu au final).

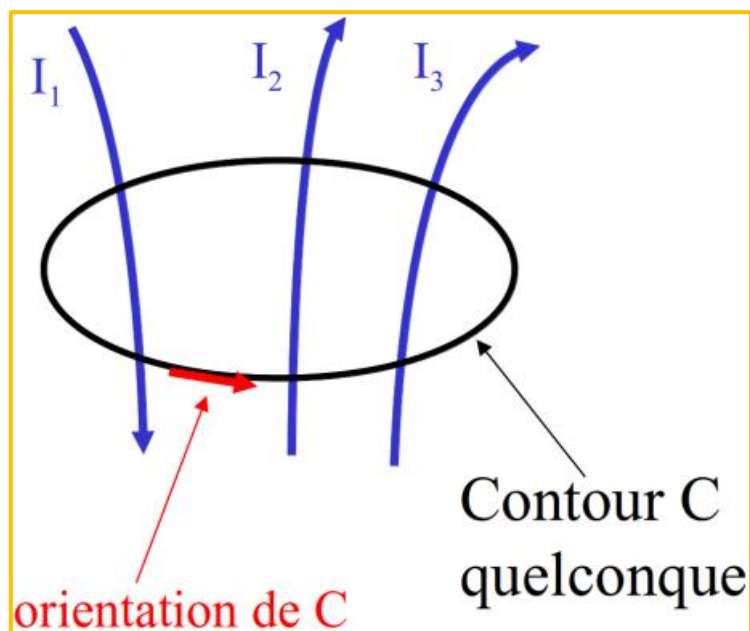


Figure 16 - Illustration du théorème d'Ampère

En suivant le théorème d'Ampère, on écrit alors :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 + I_3 - I_1)$$

(avec I_2 et I_3 comptés positifs et I_1 compté négatif du fait du sens de l'orientation du contour C choisie). Le théorème d'Ampère est à la Magnétostatique ce que le théorème de Gauss est à l'Electrostatique : elle permet de calculer facilement le module du champ considéré.

2) Méthode :

Pour appliquer le théorème d'Ampère, on suit la méthodologie suivante :

- On cherche les symétries de la distribution des courants, permettant de connaître la direction du champ magnétique (en utilisant la loi de Biot et Savart) et de choisir un système de coordonnées pratique.
- On cherche les invariances de la distribution des courants et on en déduit de quelles variables dépend la norme du champ magnétique.
- On choisit une courbe fermée passant par le point M où on cherche à calculer le champ magnétique. Pour simplifier les calculs, on choisira cette courbe telle que si le champ magnétique et l'élément de longueur suivant la courbe sont parallèles, alors le produit scalaire entre les deux est $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ et si ils sont perpendiculaires, alors le produit scalaire est nul.
- On calcule la circulation du champ magnétique sur tout le contour.
- On calcule la somme algébrique des courants en comptant le courant positivement si le champ magnétique qu'il génère suit l'orientation de la courbe et négatif sinon.
- On écrit la relation du théorème d'Ampère et on en déduit la norme du champ magnétique.

3) Exemples :

a) Fil infini :

On reprend le cas du fil infini parcouru d'un courant I auquel on veut calculer le champ magnétique \vec{B} d'un point M à une distance r du fil. On prend un contour C qui est un cercle centré au niveau du fil et passant par M .

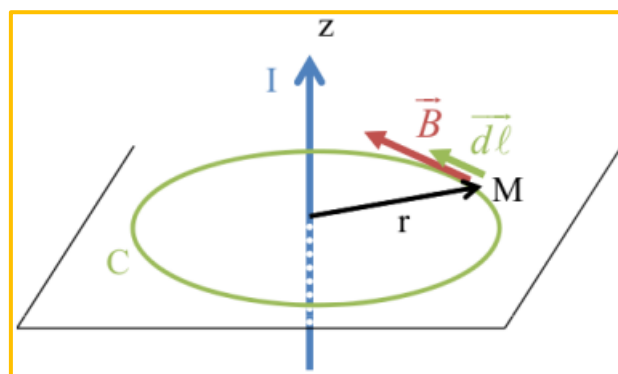


Figure 17 - Schéma de la situation

En regardant les symétries du système, tout plan radial passant par le fil est un plan de symétrie. Le champ magnétique étant perpendiculaire aux plans de symétrie, sa direction est orthoradiale.

En coordonnées cylindriques (les plus adaptées), on écrit le champ magnétique comme :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

En regardant les invariances du système, la distribution de courant est invariante selon z et θ , donc le champ magnétique peut être affiné :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

Le contour C choisi permet d'avoir le champ magnétique \vec{B} en permanence parallèle à l'élément de longueur $d\vec{l}$ du contour. La circulation du champ magnétique le long du contour vaut :

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B(r) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = \oint_C B(r) dl = 2\pi r B(r)$$

Le courant traversant est le courant I . On peut alors écrire le théorème d'Ampère :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Le résultat est le même qu'avec la loi de Biot et Savart.

b) Tore bobiné :

On considère un tore composé d'un nombre N de spires (ou tours) tous parcourus par un courant I de sens identique. On cherche à calculer le champ magnétique \vec{B} généré dans un cercle de rayon r situé au centre des spires dans le tore. Le système possède un rayon intérieur R_1 et un rayon extérieur R_2 .

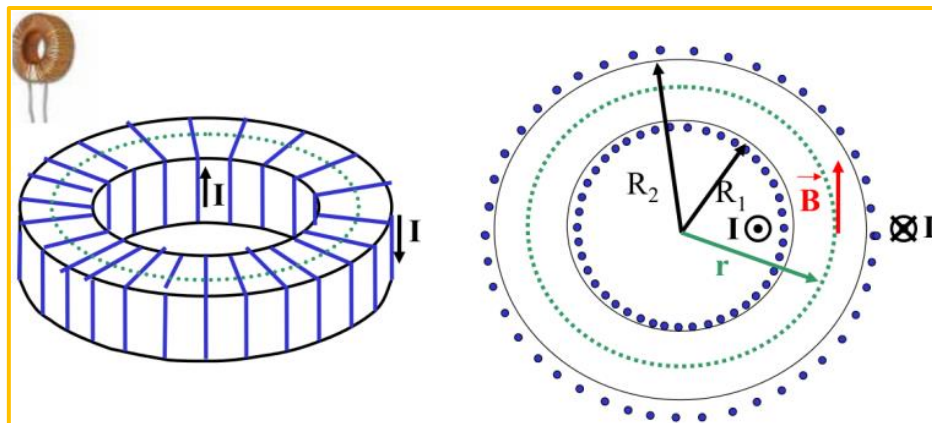


Figure 18 - Schéma de la situation et illustration d'un tore bobiné (en haut à gauche)

En regardant les symétries du système, on remarque que tout plan radial passant par le centre du tore est plan de symétrie, donc le champ magnétique \vec{B} en est orthoradial :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

En regardant les invariances du système, le champ magnétique \vec{B} ne dépend pas de z (tant que l'on est à l'intérieur du tore) et de θ , donc le champ magnétique ne dépend que de r :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

On choisit comme contour fermé C un cercle concentrique au tore de rayon r . En tout point de C , le champ magnétique \vec{B} est parallèle à l'élément de longueur $d\vec{l}$ du contour, donc sa circulation vaut :

$$C = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B(r) \vec{e}_\theta \cdot dl \vec{e}_\theta = \oint_C B(r) dl = 2\pi r B(r)$$

À l'intérieur du contour, le même courant I passe N fois (puisque'il y a N spires), toujours dans le même sens. En appliquant le théorème d'Ampère, on obtient :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 NI \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$