

Problem 1

(1)

证明:

对于事件 A, B ,

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (AB))) = P(A) + P(B \setminus (AB)) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$n = 1$ 公式显然成立, 若 $n = k$ 时成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} & P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\ &= P(\cup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) - P((\cup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1}) \\ &= P(A_{k+1}) + P(\cup_{i=1}^k A_i) - P(\cup_{i=1}^k A_i A_{k+1}) \\ &= P(A_{k+1}) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} A_1 \dots A_k \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=1}^k P(A_i A_{k+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq k} P(A_i A_j A_{k+1}) + \cdots + (-1)^{k+1} A_1 \dots A_k A_{k+1} \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k+2} A_1 \dots A_{k+1} \right) \end{aligned}$$

由自然归纳法推得对 n 个数, 加法公式成立. \square

(2)

证明:

对于事件 A, B ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$$

$n = 1$ 公式显然成立, 若 $n = k$ 时成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} & P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\ &\leq P(\cup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k P(A_i) + P(A_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) \end{aligned}$$

由自然归纳法推得对 n 个数, Union Bound 成立. \square

(3)

证明:

$n = 1$ 显然成立, 若 $n = k$ 时成立, 则 $n = k + 1$ 时有

$$P(A_{k+1} | A_1 \dots A_k) = \frac{P(A_1 \dots A_{k+1})}{P(A_1 \dots A_k)} = \frac{P(A_1 \dots A_{k+1})}{P(A_1)P(A_2 | A_1) \dots P(A_k | A_1 \dots A_{k-1})}$$

即 $P(A_1)P(A_2 | A_1) \dots P(A_{k+1} | A_1 \dots A_k) = P(A_1 \dots A_{k+1})$.

由自然归纳法推得对 n 个数, 一般乘法公式成立. \square

Problem 2

(1)

不成立. 令 x, y, z 为 $\in \{0, 1\}$ 的随机变量, 事件 A 为 $x \geq yz$, 事件 B 为 $y = 1$, 事件 C 为 $z = 0$.

于是 $P(A|C) = 1$, $P(B|C) = \frac{1}{2}$, $P(AB|C) = \frac{1}{2}$. 故在事件 C 发生时 A, B 独立.

而 $P(A|\bar{C}) = \frac{3}{4}$, $P(B|\bar{C}) = \frac{1}{2}$, $P(AB|\bar{C}) = \frac{1}{4}$. 故在事件 \bar{C} 发生时 A, B 不独立.

\square

(2)

不成立. 令 x, y 为 $\in \{0, 1\}$ 的随机变量, 事件 A 为 $x = 1$, 事件 B 为 $y = 1$, 事件 C 为 $x = y$.

事件 A 和 B 独立. 而 $P(A|C) = \frac{1}{2}$, $P(B|C) = \frac{1}{2}$, $P(AB|C) = \frac{1}{2}$. 故事件 C 发生时 A, B 不独立. \square

(3)

成立.

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}).$$

由于 $P(AB) = P(A)P(B)$, 故 $P(A\bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$. \square

Problem 3

$|x| < 1$ 时

Mark: 直接使用 $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ 即可

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \\ &\geq -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1-x)}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\ln P(n, m) &= \sum_{i=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{i}{m}\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{i}{m} - \frac{i^2}{2m^2} - \frac{i^3}{3m^2(m-i)}\right) \\ &= -\frac{(n-1)n}{2m} - O\left(\frac{n^3}{m^2}\right) - O\left(\frac{n^4}{m^2(m-n)}\right)\end{aligned}$$

在 $m > 2n$ 时, 有 $\ln P(n, m) \geq -\frac{(n-1)n}{2m} - O\left(\frac{n^3}{m^2}\right)$.

由 $\exp(x) \geq 1 + x$ 得

$$P(n, m) \geq \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2m}\right) \left(1 - O\left(\frac{n^3}{m^2}\right)\right)$$

\square

Problem 4

(1)

队伍 A 大小 = k 的概率为 $\frac{1}{n-1}$.

在队伍大小为 k 的情况下, 第一个人在 A 中的概率为 $\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$.

故在队伍 A 且大小为 k 的概率为 $\frac{k}{(n-1)n}$. 队伍 B 同理, 概率也为 $\frac{k}{(n-1)n}$.

故总概率为 $\frac{2k}{(n-1)n}$.

(2)

令 X 为第一个人在队伍大小为 k 的事件, Y 为第一个人为队长的事件, 则 $P(Y|X) = \frac{1}{k}$, $P(X) = \frac{2k}{(n-1)n}$, $P(Y) = \frac{2}{n}$, 故由贝叶斯公式知

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{k} \frac{2k}{(n-1)n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

Problem 5

令 T 为患者实际患病的事件, X 为至少有一个检测阳性的事件.

故有

$$\begin{aligned} P(T) &= p \\ P(X) &= p(p_1 + p_2 - p_1 p_2) + (1-p)(q_1 + q_2 - q_1 q_2) \\ P(X|T) &= p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

故由贝叶斯公式知

$$P(T|X) = \frac{p(p_1 + p_2 - p_1 p_2)}{p(p_1 + p_2 - p_1 p_2) + (1-p)(q_1 + q_2 - q_1 q_2)}$$

Problem 6

(1)

$$P(A_{V,v}) = 2^{-k}.$$

(2)

$$P(\overline{B_V}) = (1 - 2^{-k})^{n-k}.$$

$$\text{故 } P(B_V) = 1 - (1 - 2^{-k})^{n-k}.$$

(3)

证明:

$$\text{即证 } P(\overline{C}) \leq \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k}.$$

$$P(\overline{C}) = P(\cup_{V:|V|=k} \overline{B_V}) \leq \sum_{V:|V|=k} P(\overline{B_V}) = \binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k}. \square$$

(4)

只需证明存在 $c > 0$, 使得 $n = c \times 2^k k^2$ 时, $P(C) > 0$, 即

$$\binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$$

$\binom{n}{k} \leq n^k$, 故只需

$$n^k (1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$$

两侧取 \ln 得

$$k \ln n + (n - k) \ln(1 - 2^{-k}) < 0$$

由于 $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots < -x$, 故只需

$$k \ln n + (n - k)(-2^{-k}) < 0$$

即

$$(c - \ln 2)k^2 - (k2^{-k} + k \ln c + 2k \ln k) > 0$$

取 $c = 12345$ 时不等式显然成立. 故存在 $n = O(k^2 2^k)$ 时题目条件成立. \square