Problem 1

(1)

证明:

对于事件 A, B,

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus (AB))) = P(A) + P(B \setminus (AB)) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$n = 1$ 公式显然成立，若 $n = k$ 时成立，则 $n = k + 1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\
&= P(\cup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) - P((\cup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1}) \\
&= P(A_{k+1}) + P(\cup_{i=1}^k A_i) - P(\cup_{i=1}^k A_k A_{k+1}) \\
&= P(A_{k+1}) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k+1} A_1 \ldots A_k \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^k P(A_i A_{k+1}) - \sum_{1 \le i < j \le k} P(A_i A_j A_{k+1}) + \cdots + (-1)^{k+1} A_1 \ldots A_k A_{k+1} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k+1} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{k+2} A_1 \ldots A_{k+1} \right)
\end{aligned}
$$

由自然归纳法推得对 n 个数，加法公式成立. $\square$

(2)

证明:

对于事件 A, B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \le P(A) + P(B)$$

$n = 1$ 公式显然成立，若 $n = k$ 时成立，则 $n = k + 1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&P((\cup_{i=1}^k A_i) \cup A_{k+1}) \\
&\le P(\cup_{i=1}^k A_i) + P(A_{k+1}) \\
&\le \sum_{i=1}^k P(A_i) + P(A_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)
\end{aligned}
$$

由自然归纳法推得对 n 个数，Union Bound 成立. $\square$

(3)

证明:

$n = 1$ 显然成立，若 $n = k$ 时成立，则 $n = k + 1$ 时有

$$P(A_{k+1} | A_1 \ldots A_k) = \frac{P(A_1 \ldots A_{k+1})}{P(A_1 \ldots A_k)} = \frac{P(A_1 \ldots A_{k+1})}{P(A_1) P(A_2 | A_1) \ldots P(A_k | A_1 \ldots A_{k-1})}$$

即 $P(A_1) P(A_2 | A_1) \ldots P(A_{k+1} | A_1 \ldots A_k) = P(A_1 \ldots A_{k+1})$.

由自然归纳法推得对 n 个数，一般乘法公式成立. □

Problem 2

(1)

不成立. 令 x,y,z 为 $\in\{0,1\}$ 的随机变量，事件 A 为 $x\geq yz$，事件 B 为 $y=1$，事件 C 为 $z=0$.

于是 $P(A|C)=1$，$P(B|C)=\frac{1}{2}$，$P(AB|C)=\frac{1}{2}$. 故在事件 C 发生时 A,B 独立.

而 $P(A|\bar{C})=\frac{3}{4}$，$P(B|\bar{C})=\frac{1}{2}$，$P(AB|C)=\frac{1}{4}$. 故在事件 $\bar{C}$ 发生时 A,B 不独立. □

(2)

不成立. 令 x,y 为 $\in\{0,1\}$ 的随机变量，事件 A 为 $x=1$，事件 B 为 $y=1$，事件 C 为 $x=y$.

事件 A 和 B 独立. 而 $P(A|C)=\frac{1}{2}$，$P(B|C)=\frac{1}{2}$，$P(AB|C)=\frac{1}{2}$. 故事件 C 发生时 A,B 不独立. □

(3)

成立.

$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

由于 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 $P(A\bar{B})=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\bar{B})$. □

Problem 3

$|x|<1$ 时

$$
\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\dots \\
&\geq -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1-x)}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\ln P(n,m) &= \sum_{i=1}^{n-1}\ln(1-\frac{i}{m}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1}-\frac{i}{m}-\frac{i^2}{2m^2}-\frac{i^3}{3m^2(m-i)} \\
&= -\frac{(n-1)n}{2m}-O(\frac{n^3}{m^2})-O(\frac{n^4}{m^2(m-n)})
\end{aligned}
$$

在 $m>2n$ 时，有 $\ln P(n,m)\geq -\frac{(n-1)n}{2m}-O(\frac{n^3}{m^2})$.

由 $\exp(x)\geq 1+x$ 得

$$
P(n,m)\geq \exp(-\frac{(n-1)n}{2m})\left(1-O(\frac{n^3}{m^2})\right)
$$

□

Problem 4

(1)

队伍 A 大小 $= k$ 的概率为 $\frac{1}{n-1}$.

在队伍大小为 k 的情况下，第一个人在 A 中的概率为 $\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$.

故在队伍 A 且大小为 k 的概率为 $\frac{k}{(n-1)n}$. 队伍 B 同理，概率也为 $\frac{k}{(n-1)n}$.

故总概率为 $\frac{2k}{(n-1)n}$.

(2)

令 X 为第一个人所在队伍大小为 k 的事件，Y 为第一个人为队长的事件，则 $P(Y|X) = \frac{1}{k}$，$P(X) = \frac{2k}{(n-1)n}$，$P(Y) = \frac{2}{n}$，故由贝叶斯公式知

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{k}\frac{2k}{(n-1)n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

Problem 5

令 T 为患者实际患病的事件，X 为至少有一个检测阳性的事件.

故有

$$\begin{aligned} P(T) &= p \\ P(X) &= p(p_1 + p_2 - p_1 p_2) + (1-p)(q_1 + q_2 - q_1 q_2) \\ P(X|T) &= p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

故由贝叶斯公式知

$$P(T|X) = \frac{p(p_1 + p_2 - p_1 p_2)}{p(p_1 + p_2 - p_1 p_2) + (1-p)(q_1 + q_2 - q_1 q_2)}$$

Problem 6

(1)

$P(A_{V,v}) = 2^{-k}$.

(2)

$P(\overline{B_V}) = (1 - 2^{-k})^{n-k}$.

故 $P(B_V) = 1 - (1 - 2^{-k})^{n-k}$.

(3)

证明:

即证 $P(\overline{C}) \leq \binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k}$.

$P(\overline{C}) = P(\cup_{V:|V|=k} \overline{B_V}) \leq \sum_{V:|V|=k} P(\overline{B_V}) = \binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k}$. $\square$

(4)

只需证明存在 $c>0$，使得 $n = c\times 2^k k^2$ 时，$P(C)>0$，即

$$\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}<1$$

$\binom{n}{k}\le n^k$，故只需

$$n^k(1-2^{-k})^{n-k}<1$$

两侧取 $\ln$ 得

$$k\ln n+(n-k)\ln(1-2^{-k})<0$$

由于 $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots<-x$，故只需

$$k\ln n+(n-k)(-2^{-k})<0$$

即

$$(c-\ln 2)k^2-(k2^{-k}+k\ln c+2k\ln k)>0$$

取 $c=12345$ 时不等式显然成立. 故存在 $n=O(k^2 2^k)$ 时题目条件成立. $\square$