Lista de Exercícios 3 - Dinâmica I (EEK243)

Prof. Luã G. Costa

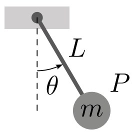
Universidade Federal do Rio de Janeiro

lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

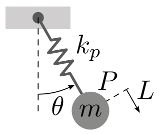
Dinâmica da Partícula

1. Considere os sistemas mecânicos descritos pela figura abaixo, onde P_i $(i = 1, 2)$ e B podem ser consideradas partículas. Para cada um dos sistemas, determine os seguintes tópicos:

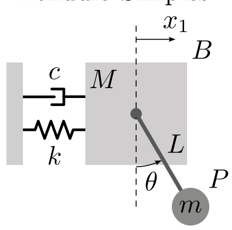
(1) Pêndulo Simples



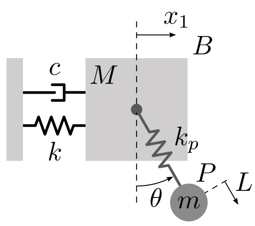
(2) Pêndulo Elástico



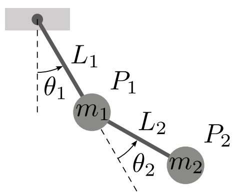
(3) Oscilador Linear - Pêndulo Simples



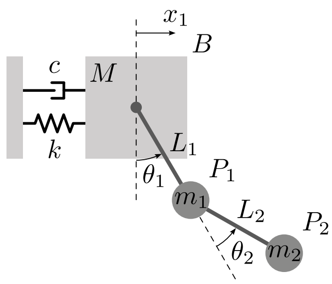
(4) Oscilador Linear - Pêndulo Elástico



(5) Pêndulo Duplo



(6) Oscilador Linear - Pêndulo Duplo



(a) Estabeleça sistemas de referência necessários para determinar o estado do sistema;

(b) Utilize os sistemas de referência do item anterior para determinar a velocidade a aceleração absolutas da(s) partícula(s).

(c) Descreva a velocidade e aceleração absolutas da(s) partícula(s) em todas as bases associadas aos sistemas de referência estabelecidos.

(d) Estabeleça um diagrama de corpo livre associados a cada partícula, definindo as forças necessárias para análise. Então estabeleça o equilíbrio dinâmico e obtenha a equação de movimento do sistema através da abordagem Newtoniana. Considere forças de corpo, forças de excitação externa, forças de dissipação, além de forças internas, se necessário.

(e) Estabeleça as energias associadas ao sistema e obtenha as equações de movimento através da abordagem Lagrangeana.

(f) Utilize um método numérico de solução de equações diferenciais para simular o comportamento do sistema e discuta os resultados.

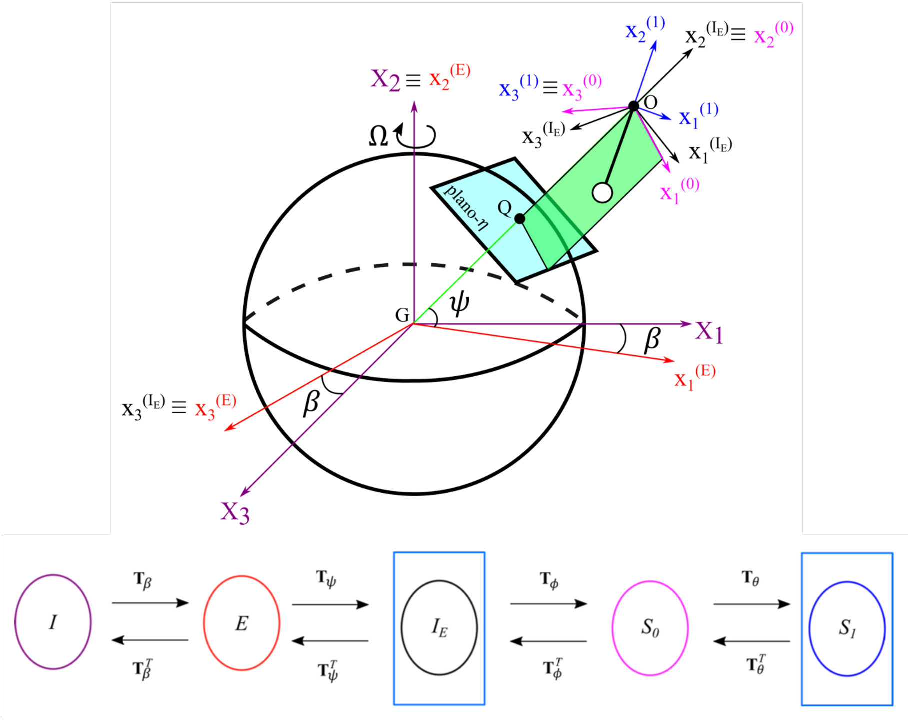
2. A experiência do pêndulo de Foucault (1819-1868) foi realizada no Panthéon, em Paris, em 1851 para provar que a Terra girava. A análise considera que o referencial inercial considerado no pêndulo simples, de fato, não é inercial uma vez que ele está solidário à Terra. Obtenha as equações de movimento do pêndulo de Foucault através das seguintes abordagens:

(a) Abordagem Newtoniana, estabelecendo o equilíbrio de forças e momentos;

(b) Abordagem Lagrangeana, estabelecendo as energias do sistema.

Os referenciais descritos na Figura são uma sugestão de referenciais para tratar o problema.

Após encontrar as equações de movimento, utilize um método numérico de solução de equações diferenciais para simular o comportamento do sistema e discuta os resultados.



Sistemas de referências são estabelecidos da seguinte forma:

- $I(X_i)$: Inercial (Fixo);
- $S_1(x_i^{(1)})$: Móvel 1 (Solidário à haste giratória);
- $S_2(x_i^{(2)})$: Móvel 2 (Solidário ao disco);

Determine os seguintes tópicos:

(a) Utilizando o teorema cinemático, determine a velocidade e aceleração absolutas do ponto P, considerando o referencial móvel 1, solidário à haste.

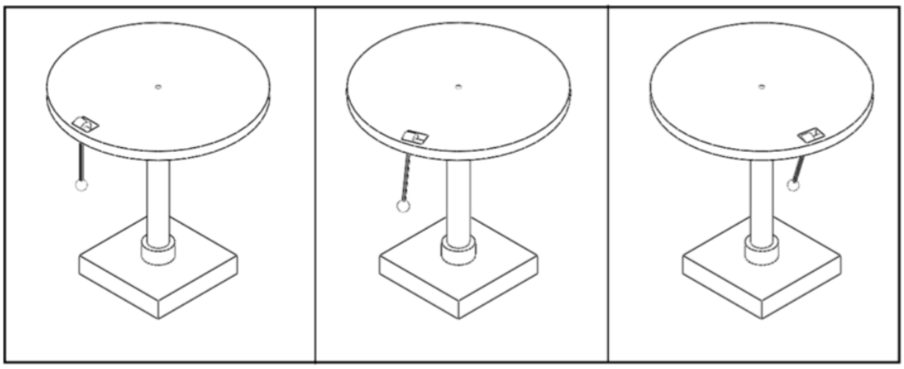
(b) Refaça o item anterior considerando o referencial móvel 2, solidário ao disco.

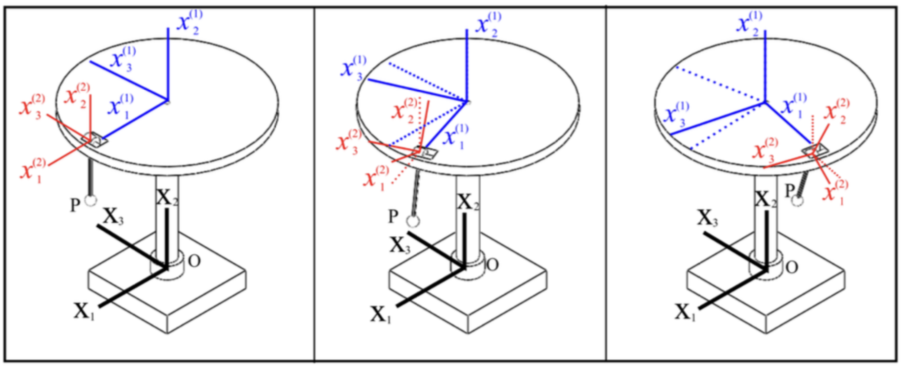
(c) Determine a velocidade e aceleração absolutas em todas as bases estabelecidas (Inercial, móvel 1, e móvel 2).

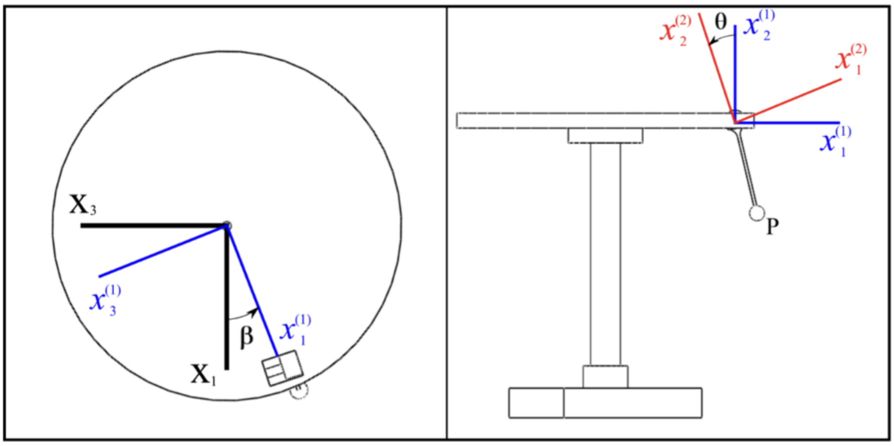
(d) Determine a velocidade e aceleração absolutas derivando o vetor posição descrito na base, I.

(e) Implemente computacionalmente as soluções obtidas e visualize a trajetória da partícula no espaço tridimensional.

3. Considere o sistema do disco-pêndulo do tipo 2-3, composto por um disco que gira sobre uma haste, que possui um pêmdulo acoplado, conforme representado na Figura a seguir.







Sistemas de referências são estabelecidos da seguinte forma:

- $I(X_i)$: Inercial (Fixo);
- $S_1(x_i^{(1)})$: Móvel 1 (Solidário ao disco giratório);
- $S_2(x_i^{(2)})$: Móvel 2 (Solidário ao pêndulo);

Dessa forma, determine os seguintes pontos:

(a) Utilizando o teorema cinemático, determine a velocidade e aceleração absolutas do ponto P, considerando o referencial móvel 2, solidário ao pêndulo.

(b) Refaça o item anterior considerando o referencial móvel 1, solidário ao disco.

(c) Determine a velocidade e aceleração absolutas em todas as bases estabelecidas (Inercial, móvel 1 e móvel 2).

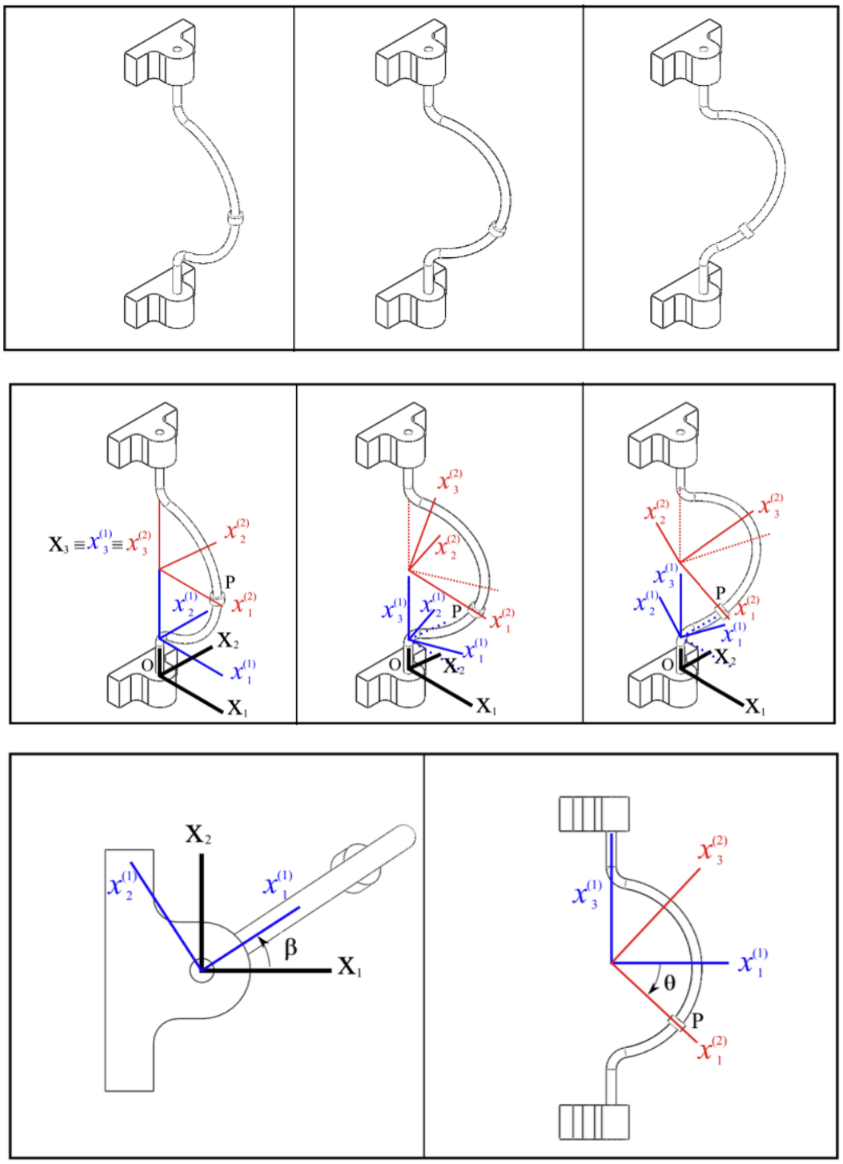
(d) Determine a velocidade e aceleração absolutas derivando o vetor posição descrito na base, I.

(e) Estabeleça um diagrama de corpo livre associado à partícula P. Estabeleça o equilíbrio dinâmico e obtenha as equações de movimento do sistema através da abordagem Newtoniana. Considere forças de corpo, forças de dissipação, além de forças internas, se necessário.

(f) Estabeleça as energias associadas ao sistema e obtenha as equações de movimento através da abordagem Lagrangeana.

(g) Utilize um método numérico de solução de equações diferenciais para simular o comportamento do sistema e discuta os resultados.

4. Considere um composto de uma haste circular livre para girar em torno de seu eixo longitudinal por onde desliza um corpo P, conforme mostrado na Figura a seguir.



Sistemas de referências são estabelecidos da seguinte forma:

- $I(X_i)$: Inercial (Fixo);
- $S_1(x_i^{(1)})$: Móvel 1 (Solidário à haste circular giratória);
- $S_2(x_i^{(2)})$: Móvel 2 (Solidário ao corpo móvel);

Dessa forma, determine os seguintes pontos:

(a) Utilizando o teorema cinemático, determine a velocidade e aceleração absolutas do ponto P, considerando o referencial móvel 2, solidário ao corpo móvel.

(b) Refaça o item anterior considerando o referencial móvel 1, solidário à haste circular.

(c) Determine a velocidade e aceleração absolutas em todas as bases estabelecidas (Inercial, móvel 1 e móvel 2).

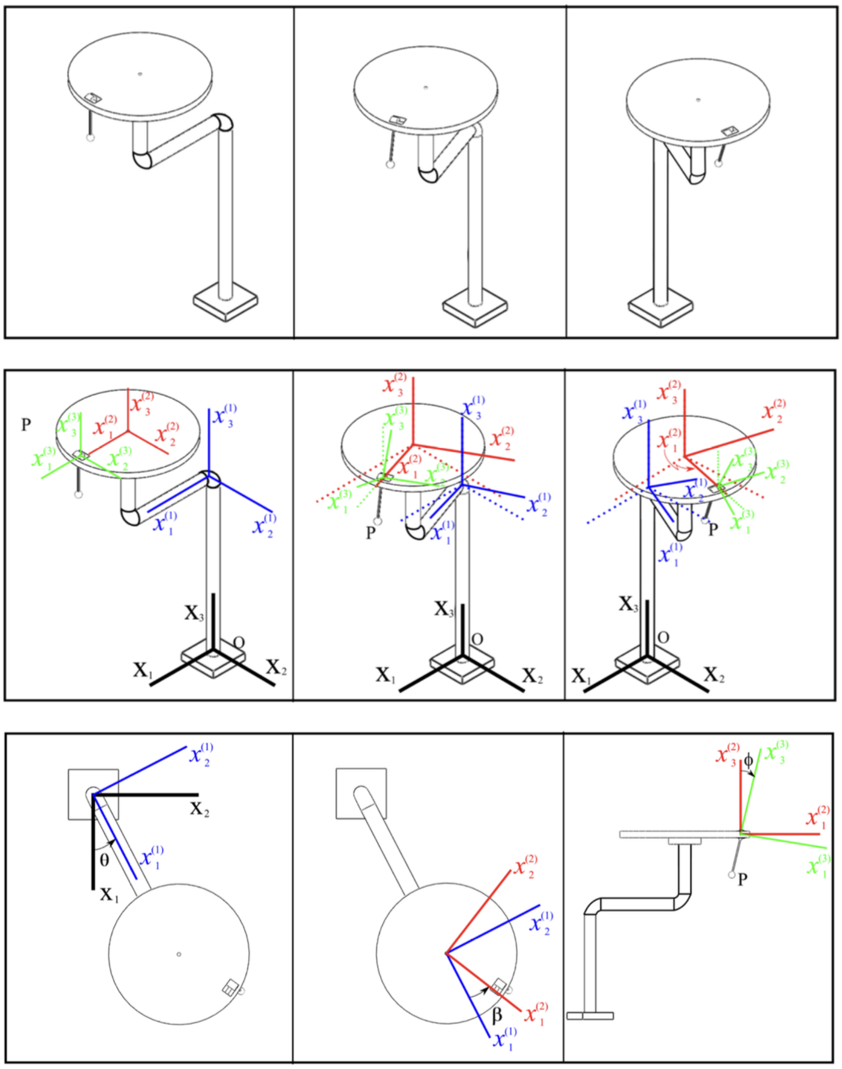
(d) Determine a velocidade e aceleração absolutas derivando o vetor posição descrito na base, I.

(e) Estabeleça um diagrama de corpo livre associado à partícula P. Estabeleça o equilíbrio dinâmico e obtenha as equações de movimento do sistema através da abordagem Newtoniana. Considere forças de corpo, forças de dissipação, além de forças internas, se necessário.

(f) Estabeleça as energias associadas ao sistema e obtenha as equações de movimento através da abordagem Lagrangeana.

(g) Utilize um método numérico de solução de equações diferenciais para simular o comportamento do sistema e discuta os resultados

5. Considere o sistema mecânico descrito na Figura abaixo, composto por uma haste girante, um disco e um pêndulo acoplado ao disco.



Sistemas de referências são estabelecidos da seguinte forma:

- $I(X_i)$: Inercial (Fixo);
- $S_1(x_i^{(1)})$: Móvel 1 (Solidário à haste giratória);
- $S_2(x_i^{(2)})$: Móvel 2 (Solidário ao disco giratório);
- $S_3(x_i^{(3)})$: Móvel 3 (Solidário ao pêndulo).

Dessa forma, determine os seguintes pontos:

(a) Utilizando o teorema cinemático, determine a velocidade e aceleração absolutas do ponto P, considerando o referencial móvel 1, solidário à haste giratória.

(b) Refaça o item anterior considerando o referencial móvel 2, solidário ao disco giratório.

(c) Refaça o item anterior considerando o referencial móvel 3, solidário ao pêndulo.

(d) Determine a velocidade e aceleração absolutas em todas as bases estabelecidas (Inercial, móvel 1, móvel 2, e móvel 3).

(e) Determine a velocidade e aceleração absolutas derivando o vetor posição de P descrito na base, I.

(f) Estabeleça um diagrama de corpo livre associado à partícula P. Estabeleça o equilíbrio dinâmico e obtenha as equações de movimento do sistema através da abordagem Newtoniana. Considere forças de corpo, forças de dissipação, além de forças internas, se necessário.

(g) Estabeleça as energias associadas ao sistema e obtenha as equações de movimento através da abordagem Lagrangeana.

(h) Utilize um método numérico de solução de equações diferenciais para simular o comportamento do sistema e discuta os resultados

Lembretes

Considere as formas gerais dos teoremas cinemáticos:

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square} \tag{1} $$

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{a}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times \left({}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{p}^{\square} \right) + 2\, {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} \tag{2} $$

$$ {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\square} = {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\bigstar} + {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\boldsymbol{\alpha}^{\square} + {}^{\triangle}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\bigstar} \times {}^{\bigstar}_{\bigcirc}\boldsymbol{\omega}^{\square} \tag{3} $$

Considere, também, as definições de energias, Lagrangeano, e das equações de Euler-Lagrange:

Energia Cinética: $T = \dfrac{1}{2} m \, {}^{I}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square} \cdot {}^{I}_{\bigcirc}\mathbf{v}^{\square}$ (4)

Energia Potencial: $U = -\displaystyle\int_{\bigcirc\mathbf{p}_0}^{\bigcirc\mathbf{p}} {}_{\bigcirc}\mathbf{F} \cdot d\, {}_{\bigcirc}\mathbf{p}$ (5)

Lagrangeano: $\mathcal{L} = T - U$ (6)

Equações de Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k$ (7)

Além disso, tanto os regimes elásticos lineares (conservativos) quanto os processos dissipativos (não-conservativos) podem ser modelados por meio das seguintes forças atuantes no sistema:

Força de restituição elástica linear: $\mathbf{F}_k = -k\mathbf{p}$ (8)

Força de dissipação viscosa: $\mathbf{F}_d = -c\dot{\mathbf{p}}$ (9)

Força de dissipação por atrito: $\mathbf{F}_a = -\mu \|\mathbf{F}_n\| \operatorname{sign}(\dot{\mathbf{p}})$ (10)