Lista 1 - Mecânica de Sistemas Inteligentes (COM 783)

Prof. Luã G. Costa
Universidade Federal do Rio de Janeiro
lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

Diretrizes

- **Data de entrega:** Até o dia 18 de agosto de 2025 (segunda-feira);
- **Formato:** Relatório em PDF, acompanhado dos respectivos códigos-fonte utilizados;
- **Meio de envio:** Repositório online (como GitHub ou GitLab), contendo todos os arquivos utilizados (imagens, relatório, códigos, etc). O link do repositório deve ser enviado por e-mail;
- **Linguagem de programação:** Livre escolha.

Dinâmica Não Linear

1. Em sua grande maioria, sistemas dinâmicos não lineares não possuem soluções analíticas, ou, quando possuem, estas têm um escopo restrito. Por isso, é necessário recorrer a métodos numéricos para avaliar o comportamento desses sistemas. Nesse contexto, implemente os seguintes métodos numéricos:

- Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) de passo fixo.
- Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) adaptativo de ordens 4 e 5, com controle automático de erro.

A implementação deve ser feita de forma generalizada, isto é, abstraída em funções ou classes. Explique por que essa abordagem é importante no contexto de modelagem computacional.

Para validar os métodos, simule um oscilador harmônico linear descrito pela equação a seguir e compare os resultados obtidos com sua solução analítica correspondente. Faça uma análise de convergência da solução.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \gamma \sin(\Omega t) \tag{1}$$

Por fim, discuta em quais contextos a utilização desses métodos é mais adequada e, nos casos em que não forem recomendados, quais outros métodos poderiam ser empregados como alternativa.

2. O Mapa de Poincaré é uma ferramenta extremamente útil para avaliar a dinâmica de um sistema. Existem formas distintas de obtenção desses mapas, dependendo do sistema dinâmico. Implemente um procedimento numérico para obter o mapa de Poincaré para o caso particular de sistemas com excitação harmônica. Para isso, siga os passos descritos abaixo:

(a) Com auxílio do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para solução dos sistemas dinâmicos, avalie os mapas de Poincaré dos seguintes sistemas:

- Oscilador linear não dissipativo:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \gamma \sin(\Omega t) \tag{2}$$

- Oscilador biestável tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma \sin(\Omega t) \tag{3}$$

- Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\theta) = \gamma \sin(\Omega t) \tag{4}$$

No caso do oscilador linear não dissipativo, avalie diferentes relações entre a frequência natural, ω_n, e frequência de forçamento adimensional, Ω. Para os casos do oscilador tipo Duffing e o pêndulo simples, avalie diferentes combinações entre amplitude de forçamento adimensional, γ, e frequência de forçamento adimensional, Ω. Adicionalmente, discuta a topologia do espaço de fase de cada caso.

(b) Tente implementar o item anterior utilizando o método Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) para solucionar os sistemas dinâmicos e obter seus respectivos mapas de Poincaré. Discuta as principais dificuldades durante a implementação, e, se necessário, descreva as ferramentas adicionais utilizadas para uma implementação bem-sucedida.

3. Determine os pontos de equilíbrio e avalie a natureza da estabilidade desses pontos para os sistemas listados abaixo. Realize a análise de forma analítica, sempre que possível, e, quando não for possível, implemente a solução numericamente. Se houver, discuta os casos em que a natureza dos pontos de equilíbrio não pode ser determinada pela análise de autovalores e autovetores.

(a) Oscilador tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \tag{5}$$

(b) Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\theta) = 0 \tag{6}$$

(c) Sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{7}$$

(d) Sistema multiestável com 2 graus de liberdade:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 2\zeta_1\dot{x}_1 - 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1 x_1^3 - \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\rho\ddot{x}_2 + 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_2 x_2 + \beta_2 x_2^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Generalize a implementação numérica para este tipo de avaliação, de modo que seja flexível e aplicável a qualquer sistema dinâmico.

4. Implemente a bacia de atração de pontos de equilíbrio (pontos fixos) estáveis para todos os sistemas listados na questão anterior utilizando os seguintes espaços ou subespaços:

(a) Espaço de estados $x \times \dot{x}$

(b) Espaço de estados $\phi \times \dot{\phi}$

(c) Subespaços de estados: $x \times y$, $x \times z$, e $y \times z$

(d) Subespaços de estados: $x_1 \times x_2$, $x_1 \times \dot{x}_1$, e $x_2 \times \dot{x}_2$

(Bônus) Faça uma implementação generalizada para permitir a análise de qualquer sistema dinâmico, além de identificar automaticamente os atratores (pontos fixos) dentro do domínio avaliado. Discuta as dificuldades encontradas durante a implementação e comente sobre outras possíveis abordagens para a identificação de pontos de equilíbrio que não foram adotadas na solução final.

5. (Bônus): Utilizando o conceito de mapas de Poincaré, crie um algoritmo que classifique automaticamente as respostas dinâmicas de um sistema dinâmico submetido a estímulos harmônicos. O algoritmo precisa ser robusto e aceitar qualquer sistema dinâmico como entrada.