Lista de Exercícios 1 - Dinâmica I (EEK243)

PROF. LUÃ G. COSTA

Federal University of Rio de Janeiro

lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

Tensores

1. Prove as afirmações abaixo, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores (tensores de 1ª ordem), e $\mathbf{T}$ é uma matriz (tensor de 2ª ordem).

(a) $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

(b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{b}\right)$

(c) $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i$

2. Escreva em notação indicial as expressões abaixo, onde todas as entidades são tensores de 2ª ordem:

(a) $\mathbf{I}$, sendo este o tensor identidade;

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$

(d) $\mathbf{E} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}$

3. Mostre que $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$, sendo δ_{ij} o tensor delta de Kronecker.

4. Mostre que os vetores $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$ são perpendiculares. Determine um vetor $\mathbf{w}$ de forma que ele seja perpendicular ao plano formado entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

5. Sendo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Avalie $\mathbf{d}$, se $d_k = \xi_{ijk} a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_k$, sendo ξ_{ijk} o tensor permutação. Mostre também que esse resultado é o mesmo que $d_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_k$.

6. Verifique a seguinte identidade: $\xi_{ijm}\xi_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. Dica: existem 6 casos para serem considerados: (1) $i = j$, (2) $i = k$, (3) $i = l$, (4) $j = k$, (5) $j = l$, e (6) $k = l$.

7. Use a identidade $\xi_{ijm}\xi_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ do item anterior para provar que:

(a) $\xi_{ilm}\xi_{jlm} = 2\delta_{ij}$

(b) $\xi_{ijk}\xi_{ijk} = 6$

(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

8. Seja $|A_{ij}|$ o determinante do tensor $\mathbf{A}$, mostre que $|A_{ij}| = \xi_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \xi_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$.

9. Mostre que um tensor de segunda ordem quadrado pode ser decomposto em um tensor simétrico e um tensor antissimétrico através da seguinte decomposição:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

Um tensor de segunda ordem quadrado é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas.

10. Sendo $\mathbf{u}$ um vetor, mostre através de notação indicial que seu módulo $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ é invariante a uma transformação de coordenadas do tipo $\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$. Considere um sistema de coordenadas cartesiano que é ortogonal. Dessa forma $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, e portanto, $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

11. Utilize os conceitos de notação indicial para implementar uma mini biblioteca computacional pessoal que faça as seguintes operações:

(a) Produto escalar entre dois vetores;

(b) Produto vetorial entre dois vetores;

(c) O determinante de uma matriz.

Separe as operações em funções (ou métodos de uma classe) para que possam ser utilizadas de em situações genéricas.

12. Implemente um código computacional que avalie a transformação de coordenadas de um vetor entre duas bases diferentes. Utilize o código para mapear os seguintes cenários:

(a) Translação;

(b) Rotação;

(c) Expansão;

(d) Contração;

(e) Cisalhamento;

(f) Caso geral envolvendo uma mistura de todas as anteriores.