

Lista de Exercícios 1 - Dinâmica I (EEK243)

PROF. LUÃ G. COSTA

Federal University of Rio de Janeiro

lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

Tensores

1. Prove as afirmações abaixo, onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetores (tensores de 1ª ordem), e \mathbf{T} é uma matriz (tensor de 2ª ordem).

(a) $\mathbf{T} \cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}$

(b) $(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{b})$

(c) $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_i$

2. Escreva em notação indicial as expressões abaixo, onde todas as entidades são tensores de 2ª ordem:

(a) \mathbf{I} , sendo este o tensor identidade;

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

(c) $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}$

(d) $\mathbf{E} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}$

3. Mostre que $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$, sendo δ_{ij} o tensor delta de Kronecker.

4. Mostre que os vetores $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_3$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$ são perpendiculares. Determine um vetor \mathbf{w} de forma que ele seja perpendicular ao plano formado entre \mathbf{u} e \mathbf{v} .

5. Sendo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Avalie \mathbf{d} , se $d_k = \xi_{ijk} a_i b_j \hat{\mathbf{e}}_k$, sendo ξ_{ijk} o tensor permutação. Mostre também que esse resultado é o mesmo que $d_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_k$.

6. Verifique a seguinte identidade: $\xi_{ijm} \xi_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$. Dica: existem 6 casos para serem considerados: (1) $i = j$, (2) $i = k$, (3) $i = l$, (4) $j = k$, (5) $j = l$, e (6) $k = l$.

7. Use a identidade $\xi_{ijm} \xi_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$ do item anterior para provar que:

(a) $\xi_{ilm} \xi_{jlm} = 2\delta_{ij}$

(b) $\xi_{ijk} \xi_{ijk} = 6$

(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

8. Seja $|A_{ij}|$ o determinante do tensor \mathbf{A} , mostre que $|A_{ij}| = \xi_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} = \xi_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$.

9. Mostre que um tensor de segunda ordem quadrado pode ser decomposto em um tensor simétrico e um tensor antissimétrico através da seguinte decomposição:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

Um tensor de segunda ordem quadrado é uma matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas.

-
10. Sendo \mathbf{u} um vetor, mostre através de notação indicial que seu módulo $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ é invariante a uma transformação de coordenadas do tipo $\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$. Considere um sistema de coordenadas cartesiano que é ortogonal. Dessa forma $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, e portanto, $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$.
11. Utilize os conceitos de notação indicial para implementar uma mini biblioteca computacional pessoal que faça as seguintes operações:
- (a) Produto escalar entre dois vetores;
 - (b) Produto vetorial entre dois vetores;
 - (c) O determinante de uma matriz.
- Separe as operações em funções (ou métodos de uma classe) para que possam ser utilizadas de em situações genéricas.
12. Implemente um código computacional que avalie a transformação de coordenadas de um vetor entre duas bases diferentes. Utilize o código para mapear os seguintes cenários:
- (a) Translação;
 - (b) Rotação;
 - (c) Expansão;
 - (d) Contração;
 - (e) Cisalhamento;
 - (f) Caso geral envolvendo uma mistura de todas as anteriores.