

# Lista 1 - Mecânica de Sistemas Inteligentes (COM 783)

PROF. LUÃ G. COSTA

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
lgcosta@mecanica.coppe.ufrj.br

## Diretrizes

- **Data de entrega:** Até o dia 18 de agosto de 2025 (segunda-feira);
- **Formato:** Relatório em PDF, acompanhado dos respectivos códigos-fonte utilizados;
- **Meio de envio:** Repositório online (como GitHub ou GitLab), contendo todos os arquivos utilizados (imagens, relatório, códigos, etc). O link do repositório deve ser enviado por e-mail;
- **Linguagem de programação:** Livre escolha.

## Dinâmica Não Linear

1. Em sua grande maioria, sistemas dinâmicos não lineares não possuem soluções analíticas, ou, quando possuem, estas têm um escopo restrito. Por isso, é necessário recorrer a métodos numéricos para avaliar o comportamento desses sistemas. Nesse contexto, implemente os seguintes métodos numéricos:

- Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) de passo fixo.
- Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) adaptativo de ordens 4 e 5, com controle automático de erro.

A implementação deve ser feita de forma generalizada, isto é, abstraída em funções ou classes. Explique por que essa abordagem é importante no contexto de modelagem computacional.

Para validar os métodos, simule um oscilador harmônico linear descrito pela equação a seguir e compare os resultados obtidos com sua solução analítica correspondente. Faça uma análise de convergência da solução.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \gamma \sin(\Omega t) \quad (1)$$

Por fim, discuta em quais contextos a utilização desses métodos é mais adequada e, nos casos em que não forem recomendados, quais outros métodos poderiam ser empregados como alternativa.

2. O Mapa de Poincaré é uma ferramenta extremamente útil para avaliar a dinâmica de um sistema. Existem formas distintas de obtenção desses mapas, dependendo do sistema dinâmico. Implemente um procedimento numérico para obter o mapa de Poincaré para o caso particular de sistemas com excitação harmônica. Para isso, siga os passos descritos abaixo:

- (a) Com auxílio do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para solução dos sistemas dinâmicos, avalie os mapas de Poincaré dos seguintes sistemas:

- Oscilador linear não dissipativo:

$$\ddot{x} + \omega_n^2x = \gamma \sin(\Omega t) \quad (2)$$

- Oscilador biestável tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma \sin(\Omega t) \quad (3)$$

- Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\theta) = \gamma \sin(\Omega t) \quad (4)$$

No caso do oscilador linear não dissipativo, avalie diferentes relações entre a frequência natural,  $\omega_n$ , e frequência de forçamento adimensional,  $\Omega$ . Para os casos do oscilador tipo Duffing e o pêndulo simples, avalie diferentes combinações entre amplitude de forçamento adimensional,  $\gamma$ , e frequência de forçamento adimensional,  $\Omega$ . Adicionalmente, discuta a topologia do espaço de fase de cada caso.

- (b) Tente implementar o item anterior utilizando o método Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) para solucionar os sistemas dinâmicos e obter seus respectivos mapas de Poincaré. Discuta as principais dificuldades durante a implementação, e, se necessário, descreva as ferramentas adicionais utilizadas para uma implementação bem-sucedida.

3. Determine os pontos de equilíbrio e avalie a natureza da estabilidade desses pontos para os sistemas listados abaixo. Realize a análise de forma analítica, sempre que possível, e, quando não for possível, implemente a solução numericamente. Se houver, discuta os casos em que a natureza dos pontos de equilíbrio não pode ser determinada pela análise de autovalores e autovetores.

- (a) Oscilador tipo Duffing:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (5)$$

- (b) Pêndulo simples:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 \sin(\theta) = 0 \quad (6)$$

- (c) Sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (7)$$

- (d) Sistema multiestável com 2 graus de liberdade:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta_1\dot{x}_1 - 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1x_1^3 - \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) &= 0 \\ \rho\ddot{x}_2 + 2\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha_2x_2 + \beta_2x_2^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Generalize a implementação numérica para este tipo de avaliação, de modo que seja flexível e aplicável a qualquer sistema dinâmico.

4. Implemente a bacia de atração de pontos de equilíbrio (pontos fixos) estáveis para todos os sistemas descritos nas letras (a), (b) e (d) da questão anterior utilizando os seguintes espaços ou subespaços:

- (a) Espaço de estados  $x \times \dot{x}$   
 (b) Espaço de estados  $\phi \times \dot{\phi}$   
 (c) Subespaços de estados:  $x_1 \times x_2$ ,  $x_1 \times \dot{x}_1$ , e  $x_2 \times \dot{x}_2$

**(Bônus)** Faça uma implementação generalizada para permitir a análise de qualquer sistema dinâmico, além de identificar automaticamente os atratores (pontos fixos) dentro do domínio avaliado. Discuta as dificuldades encontradas durante a implementação e comente sobre outras possíveis abordagens para a identificação de pontos de equilíbrio que não foram adotadas na solução final.

5. **(Bônus):** Utilizando o conceito de mapas de Poincaré, crie um algoritmo que classifique automaticamente as respostas dinâmicas de um sistema dinâmico submetido a estímulos harmônicos. O algoritmo precisa ser robusto e aceitar qualquer sistema dinâmico como entrada.