Empaquetamiento óptimo de objetos convexos suaves

Luis Ángel Gutiérrez Rodríguez

Mayo 30, 2022

Introducción

Los problemas de empaquetamiento, también conocidos como *Cutting and Packing Problems*, son aquellos donde se tienen dos conjuntos de entidades, los **contenedores** y los **objetos**. Todos los objetos siempre deben quedar empaquetados en la menor cantidad de contenedores disponibles. Ambas entidades poseen características particulares, como su capacidad o volumen, dependiendo de lo que se deseé empaquetar. Llamaremos polígonos o poliedros a los objetos que deberán ser empaquetados en los contenedores, dependiendo la dimensión en la que se trabaje.

Un **objeto suave** es aquel cuyas propiedades son fijas, pero su forma y tamaño pueden modificarse dentro de ciertos límites [1]. Por ejemplo, un triángulo puede cambiar el tamaño de sus lados, pero si su área permanece constante, es un *triángulo suave*.

Estado del arte

El empaquetamiento de objetos convexos se ha abordado de maneras diferentes en la literatura. En ellas podemos encontrar el empaquetamiento aleatorio de partículas con forma de tetraedro [2]; el empaquetamiento en columnas de esferas y elipses en contenedores cilíndricos (Véase Figura 1) [3, 4]; también la implementación de un método de elementos discretos (DEM, por sus siglas en inglés) [5].

Figura 1: Cilindro con tetraedros

En la literatura podemos observar una clara tendencia por resolver estos problemas utilizando experimentación empírica, o utilizando el DEM. El DEM consiste en replicar la experimentación empírica en un simulador de físicas. En estos eventos se consideran los efectos de la fricción, la relación de altura y la excentricidad [2] para enriquecer la simulación.

En la experimentación empírica los objetos que se van a empaquetar son rígidos y cuentan con una función de excentricidad predefinida. En este proyecto, en lugar de predefinir excentricidades, el modelo matemático determinará su posición en el contenedor y la excentricidad del objeto. Para resolver este problema utilizaremos métodos de optimización, modelos de programación no lineal. Con esta condición suave, propia de los objetos que empaquetaremos, estaremos contribuyendo en el estado del arte implementando modelos de optimización [4, 6–18] que lleguen a encontrar el empaquetamiento óptimo.

Metodología

En este proyecto se empaquetarán los objetos más sencillos de cada dimensión geométrica, triángulos y tetraedros respectivamente para la 2D y 3D. Posteriormente se evaluará continuar con objetos más complejos descomponiéndolos con la triangulación de Delaunay (Véase Figura 2) [19].

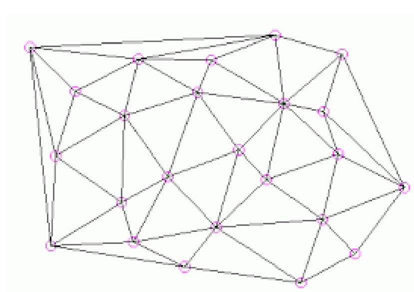

Figura 2: Descomposición de Delauney

Para comenzar a resolver este problema se trabajará primero en objetos de dos dimensiones (2D). Trabajaremos con el polígono más simple que es el triángulo. Tomaremos en cuenta que cada triángulo es una composición de tres vértices y estos vértices a su vez se componen en coordenadas x y y, convexas al contenedor. Para evitar la superposición de los triángulos implementaremos el lema de Farkas (Véase Figura 3). En contraposición de la minimización del tamaño del contenedor, se buscará que los vértices formen lados del triángulo tal que, al evaluar el área con la fórmula de Herón, ésta se conserve intacta.

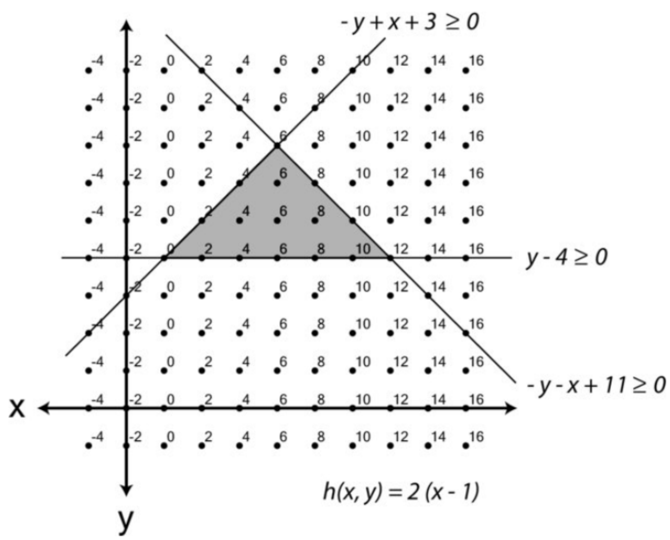

Figura 3: Triángulo en términos del lema de Farkas

El estudio del empaquetamiento de tetraedros son interesantes por sus aplicaciones y propiedades en diferentes áreas de la industria como en la geotécnica, la minería, la transportación, nanotecnología, entre otras.

Hipótesis

Se obtendrán modelos, teoría y nuevos métodos de solución a éste tipo de problemas a través de la utilización de modelos matemáticos y la generación de nuevos conocimientos para el campo de objetos suaves, con una fuerte justificación matemática.

Objetivos

En lo general, se buscará desarrollar un método de solución óptima para empaquetar objetos de dos y tres dimensiones tomando en cuenta los métodos de elementos discretos, densidad de empaquetamiento y el atributo de números de coordinación, entre otros.

En lo particular, se buscará qué al resolver el problema de empaquetamiento qué objetos convexos suaves con las figuras más simples de cada dimensión generar un marco de trabajo en el cual se puedan utilizar polígonos y poliedros más complejos.

Resultados Esperados

Se buscará en la literatura problemas relacionados para buscar la mejor solución actual e implementarla para esta situación con objetos suaves. Se generarán instancias adecuadas o se actualizarán de la literatura para adaptarlas al problema específico del empaquetamiento de objetos suaves. Se ampliarán los modelos matemáticos que den solución a este tipo de problemática.

Figura 4: Triángulos en medio semicírculo

Para una mejor apreciación de los objetos empaquetados se generarán imágenes (Véase Figura 4) para la verificación visual y así garantizar que, en dimensiones en que se puede realizar una gráfica, el modelo matemático converge a óptimo.

Conclusiones

En conclusión, se desarrollará un modelo matemático que brinde soluciones óptimas al problema del empaquetamiento de objetos suaves en 2D y 3D. Este modelo consistirá una función objetivo, que minimizará el tamaño del contenedor, y de restricciones no lineales, ya que calcula el área del triángulo con base en la distancia entre los vértices. También, al aplicar la fórmula de Herón, se hace uso de las raíces cuadradas. La excentricidad de una figura será determinada por el modelo. Este proyecto propone darle una solución con fundamento matemático a los problemas de empaquetamiento para, de alguna manera, dejar el lado la experimentación empírica.

Plan de trabajo

- Presentar anteproyecto y definir los límites del proyecto (enero - junio 2022)
- Iniciar la redacción de los primeros capítulos de la tesis doctoral (agosto - diciembre 2022)
- Iniciar la experimentación y desarrollo de los modelos no lineales (agosto - diciembre 2022)
- Iniciar la redacción de artículo científico con los resultados esperados de la experimentación con la suavidad. (enero - junio 2023)
- Revisión de la estructura final de tesis (enero - junio 2023)
- Enviar artículo a publicación en revista EJOR (enero - junio 2023)
- Enviar tesis a revisión del comité (agosto 2023)
- Revisión de detalles finales de artículos y tesis (agosto - diciembre 2023)
- Iniciar el proceso de defensa de tesis (enero 2024)
- Defender tesis de grado Doctorado (Antes de julio 2024)

Referencias

[1] P. Ji, K. He, Y. Jin, H. Lan, and C. Li, "An iterative merging algorithm for soft rectangle packing and its extension for application of fixed-outline floorplanning of soft modules," *Computers & Operations Research*, vol. 86, pp. 110–123, 2017.

[2] S. Zhao, X. Zhou, W. Liu, and C. Lai, "Random packing of tetrahedral particles using the polyhedral discrete element method," *Particuology*, vol. 23, pp. 109–117, 2015.

[3] B. Zhao, X. An, H. Zhao, D. Gou, L. Shen, and X. Sun, "Dem simulation on random packings of binary tetrahedron-sphere mixtures," *Powder Technology*, vol. 361, pp. 160–170, 2020.

[4] T. Romanova, I. Litvinchev, and A. Pankratov, "Packing ellipsoids in an optimized cylinder," *European Journal of Operational Research*, vol. 285, no. 2, pp. 429–443, 2020.

[5] B. Zhao, X. An, Y. Wang, Q. Qian, X. Yang, and X. Sun, "Dem dynamic simulation of tetrahedral particle packing under 3d mechanical vibration," *Powder Technology*, vol. 317, pp. 171–180, 2017.

[6] B. Chazelle, H. Edelsbrunner, and L. J. Guibas, "The complexity of cutting complexes," *Discrete & Computational Geometry*, vol. 4, no. 2, pp. 139–181, 1989.

[7] J. A. Bennell and J. F. Oliveira, "A tutorial in irregular shape packing problems," *Journal of the Operational Research Society*, vol. 60, no. sup1, pp. S93–S105, 2009.

[8] G. Scheithauer, *Introduction to cutting and packing optimization: Problems, modeling approaches, solution methods*, vol. 263. Springer, 2017.

[9] L. J. Araújo, E. Özcan, J. A. Atkin, and M. Baumers, "Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset," *International Journal of Production Research*, vol. 57, no. 18, pp. 5920–5934, 2019.

[10] T. Romanova, A. Pankratov, and I. Litvinchev, "Packing ellipses in an optimized convex polygon," *J. Glob. Optim.*, 2019.

[11] A. A. Leao, F. M. Toledo, J. F. Oliveira, M. A. Carravilla, and R. Alvarez-Valdés, "Irregular packing problems: A review of mathematical models," *European Journal of Operational Research*, vol. 282, no. 3, pp. 803–822, 2020.

[12] J. Raeder, D. Larson, W. Li, E. L. Kepko, and T. Fuller-Rowell, "Openggcm simulations for the themis mission," *Space Science Reviews*, vol. 141, no. 1, pp. 535–555, 2008.

[13] I. Litvinchev, T. Romanova, R. Corrales-Diaz, A. Esquerra-Arguelles, and A. Martinez-Noa, "Lagrangian approach to modeling placement conditions in optimized packing problems," *Mobile Networks and Applications*, vol. 25, pp. 2126–2133, 2020.

[14] A. Pankratov, T. Romanova, and I. Litvinchev, "Packing oblique 3d objects," *Mathematics*, vol. 8, no. 7, p. 1130, 2020.

[15] J. Kallrath, *Business optimization using mathematical programming: an introduction with case studies and solutions in various algebraic modeling languages*. Springer, 2021.

[16] T. Romanova, Y. Stoyan, A. Pankratov, I. Litvinchev, S. Plankovskyy, Y. Tsegelnyk, and O. Shypul, "Sparsest balanced packing of irregular 3d objects in a cylindrical container," *European Journal of Operational Research*, vol. 291, no. 1, pp. 84–100, 2021.

[17] T. Romanova, Y. Stoyan, A. Pankratov, I. Litvinchev, K. Avramov, M. Chernobryvko, I. Yanchevskyi, I. Mozgova, and J. Bennell, "Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing," *International Journal of Production Research*, vol. 59, no. 2, pp. 560–575, 2021.

[18] T. Romanova, A. Pankratov, I. Litvinchev, S. Plankovskyy, Y. Tsegelnyk, and O. Shypul, "Sparsest packing of two-dimensional objects," *International Journal of Production Research*, vol. 59, no. 13, pp. 3900–3915, 2021.

[19] V. T. Rajan, "Optimality of the delaunay triangulation in $\mathbb{R}^d$," *Discrete & Computational Geometry*, vol. 12, no. 2, pp. 189–202, 1994.