

## 卡特兰数

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0$$

## 卡特兰数递推

$$H(n+1) = H(n) * (4 * n + 2) / (n + 2)$$

$$H(n) = C(2 * n, n) / (n + 1) (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$H(n) = C(2 * n, n) - C(2 * n, n - 1) (n = 0, 1, 2, \dots)$$

1、如果  $ax \equiv 1 \pmod{p}$ ，且  $a$  与  $p$  互质，则称  $a$  关于模  $p$  的乘法逆元为  $x$ 。

2、 $ax \equiv 1 \pmod{p}$  即  $a * x - y * p = 1$ 。把  $y$  写成  $+$  的形式就是  $a * x + p * y = 1$ ，为方便理解下面我们把  $p$  写成  $b$  就是  $a * x + b * y = 1$ 。就表示  $x$  是  $a$  的模  $b$  乘法逆元， $y$  是  $b$  的模  $a$  乘法逆元。然后就可以用扩展欧几里得求了。

3、求  $a/b = x \pmod{M}$

只要  $M$  是一个素数，而且  $b$  不是  $M$  的倍数，就可以用一个逆元整数  $b1$ ，通过  $a/b = a * b1 \pmod{M}$ ，只能来以乘换除。

费马小定理：对于素数  $M$  任意不是  $M$  的倍数的  $b$ ，都有：  $b^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}$

于是可以拆成：  $b * b^{M-2} \equiv 1 \pmod{M}$

于是：  $a/b = a/b * (b * b^{M-2}) = a * (b^{M-2}) \pmod{M}$

用扩展欧几里德算法算出  $b1$ ，然后计算  $a * b1 \pmod{M}$   $exgcd(b, M, x, y)$ ：  $b1 = x$ ；

4、 $p$  为质数时（线性求逆元）

$$inv(a) = (p - p/a) * inv(p \% a) \% p$$

证明：

设  $x = p \% a$ ， $y = p/a$ ，于是有  $x + y * a = p$ ，所以  $(x + y * a) \% p = 0$

移项得  $x \% p = (-y) * a \% p$ ， $x * inv(a) \% p = (-y) \% p$ ， $inv(a) = (p - y) * inv(x) \% p$

于是  $inv(a) = (p - p/a) * inv(p \% a) \% p$