数学讲义

LeeStars

2025.07.10

目录

1 序言

数学这门课程，本身就是一个无穷无尽的知识库，一个人穷尽一生也无法将其完全理解、领会。但是，从小学到中学，从初中到高中，我们经历的是一次又一次对数学体系的重构，对数学概念的剖析和再定义。初中数学的重点更加侧重于“数形结合”等思维的培养上，但是现在却越来越习惯于公式化地做题。这显然是不利于数学这门自然科学的学习的。

举一个最简单的例子：初中的课程，包括数的划分、函数、几何等等，是严格局限在课本定义和定理范围内的。但是，有没有人可以问出：“为什么要这样划分数字？”“这样的划分是否合理？”“函数能不能反映更多事物之间的关系？”“函数只能有一个自变量吗？”“三角形的内角和一定是 $180°$ 吗？”等等诸如此类的问题？

于是，借一位我很尊敬的助教的话：“我们要以一种‘高观点’来解决低问题。”所谓“高观点”，是从一个知识点的根本出发，一步一步推导出表象，解释“为什么”和“凭什么”的合理性问题。

奈何本人学识浅薄，只能以我目前掌握的知识，尽可能架构出一套完整的知识体系（当然是以高中知识为基础）。

高中数学的一大任务就是对初中的概念进行“再定义”，通过“集合论”这一近代数学的基石，让所有概念通过“集合”这一概念来定义。再辅以向量、导数等工具，使之自洽。所以，我将尽可能将初、高中的知识串联在一条主线上，考虑每个概念、定义从何而来、为何而来，在这个过程中补充必要的知识点。

最后，我希望你，无论是谁，都可以保留这最原初的、对数学之美最本质的热爱，坚持下去。哪怕你以后所学的专业、从事的职业和数学毫无关系，你在其中获得的思想、观点乃至你的审美，都在潜移默化地改变着你。

愿这集全人类智慧的学科能够至少对你产生一点点影响。

2 必须知识

2.1 集合/集合论

先简要介绍一下集合论的基本概念：

定义 1 (集合论) 集合论是研究“集合”这一基本对象的一个分支。

定义 2 (集合) 集合，简称集，是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇总而成的集体。通常用大写字母表示。

集合具有确定性、互异性和无序性。

（以下仅方便记忆，非标准描述。下文中如果不强调定义或定理，均为非正式描述。）

- 确定性：元素与集合的关系一定是“属于”或“不属于”，不存在模棱两可的关系；
- 互异性：同一集合内元素不重复；
- 无序性：同一集合内元素顺序不重要。

先来介绍一个特殊的集合———空集（没有元素的集合）：ϕ
然后看看怎么表示一个集合：

- 例举法：将集合中的每个元素都写出来，放在大括号里，以逗号分隔。

  例如：光的三原色 {红，蓝，绿}，1 到 10 以内的质数 {2，3，5，7}

- 描述法：明确指出元素及其性质。

  例如：直线 y=2x+1 图像上所有的点 {(x,y)|y=2x+1}

- 图像法（Venn 图法），即用 Venn 图来表示集合及其之间的关系。
- 区间法：专用于数集，便于划分。
- 符号法：特殊集合。

接下来考虑集合中的元素与集合、集合与集合的关系：

集合中的元素与集合的关系分为属于（$\in$）和不属于（$\notin$）。（若元素在右而集合在左，则符号反向。）顾名思义，这一关系即反映元素是否存在于该集合中。

集合与集合的关系有包含/包含于（$\supseteq$ / $\subseteq$）和真包含/真包含于。

定义 3 (子集) 若 $\forall x \in A$，都有 $x \in B$，则称 A 是 B 的一个子集。记为 $A \subseteq B$。

定义 4 (真子集) 若 $\forall x \in A$，都有 $x \in B$，且 $\exists x \in B$，有 $x \notin A$，则称 A 是 B 的一个真子集。记为 $A \subsetneqq B$

至于集合的运算、补集、交集、并集乃至容斥原理，暂时不做介绍。

集合是一种抽象的结构，虽然我们后面接触到的集合几乎全部都是数集，但这不代表集合内的元素不能是其他东西。如果在一个集合中定义好各种运算和封闭性，还可以构造出相应的“群”、“环”和“域”等概念，乃至推广到线性空间。

接下来，我们将进一步讨论各种数集，这不仅会重构一次数的定义，也将引申出一个由小学至高中贯穿始终的数学思路：“扩域”。

2.2 数集/数域

从小学至今，我们研究的数字从正整数 $\mathbb{Z}^{+}$，到整数 $\mathbb{Z}$，到有理数 $\mathbb{Q}$，再到实数 $\mathbb{R}$……后者总是包含前者，从集合的角度来看，就像是我们在一次又一次地跳出原有的集合，然后进入/扩大到一个范围更大的集合。我称之为“扩域”，意为“数域/数集的扩大”。

数集这部分没什么要讲的，就是将同一类数字放在一起，作为一个集合，然后给他起一个名字就行了。我们需要考虑的是，到底是什么促使我们一次一次地扩大概念。从正整数到整数，我们经历了“负数”；从整数到有理数，我们经历了“分数”；从有理数到实数，我们经历了“无理数”；包括加入高中后，从实数集 $\mathbb{R}$ 到全数集/复数集 $\mathbb{C}$，我们会经历“复数/虚数”。

那么，这些让我们扩大数集的概念又从何而来？“负数”来自人类对盈亏的理解，需要负数来表示亏损；“分数”来自于对不可分之划分，来表示均分后的结果；“无理数”来自勾股定理后对斜边长度的质疑，以此表示非平方数的开方；以及“复数”，诞生于三次方程的求根过程，而保证了二次方程一定有两个根，是不可开方数之开方，以契合所谓“代数基本定理”。

定理 1 (代数基本定理) *任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根，并由此推出，n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）。*

虽然写在纸上仅寥寥几句，但在数学史上，却是人类几千年经验和思想的集合。剩下的也就没什么要讲的了。