第27章管理科学基础知识

项目管理就是项目管理团队运用各种资源达成预定目标的过程。在这一过程中，项目管理团队为了更有效地运用有限的资源以更高水平达到目标，必须不断地做出各种决策。可以说，管理的过程也就是不断地进行各种决策的过程。

尽管决策的正确性不仅依靠科学而且凭借经验与艺术，但随着决策的难度以及决策失误后造成的损失程度的不断增大，那种仅凭经验与艺术的决策情形越来越少，即使是以往认为主要靠经验和艺术的那些非程序化或高层次决策，也往往要先经过一系列基于科学方法的信息处理和可行性研究。管理科学正是为管理决策提供科学方法的一门学科。

27.1数学建模基础知识

当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言，把它表述为数学式子，也就是数学模型，然后用通过计算得到的模型结果来解释实际问题，并接受实际的检验。这个建立数学模型的全过程就称为数学建模。

数学建模是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象和简化，建立能近似刻画并解决实际问题的模型的一种强有力的数学手段。

1.数学模型

数学模型是客观世界中的实际事物的一种数学简化，它常常是以某种意义上接近实际事物的抽象形式存在的，但它和真实的事物有着本质的区别。要描述一个实际现象可以有很多种方式，例如，录音、录像、比喻等。为了使描述更具科学性、逻辑性、客观性和可重复性，人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象，这种语言就是数学。使用数学语言描述的事物就称为数学模型。

模型的一般数学形式可用下列表达式描述：

目标的评价准则：=U乃，f(x，4)

约束条件：g□ ;..，乃，4)>□

其中：;为可控变量，乃为己知参数；4为随机因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳（最小或最大）、适中、满意等。准则可以是单一的，也可以是多个的。约束条件可以没有也可有多个。当g是等式时，即为平衡条件。

当模型中无随机因素时，称它为确定性模型，否则为随机模型。随机模型的评价准则可用期望值、方差表示，也可用某种概率分布来表示；当可控变量只取离散值时，称

为离散模型，否则称为连续模型。也可按使用的数学工具，将模型分为代数方程模型、微分方程模型、概率统计模型、逻辑模型等；若用求解方法来命名时，有直接最优化模型、数字模拟模型、启发式模型等；也有按用途来命名的，例如，分配模型、运输模型、更新模型、排队模型、存储模型等；还可以用研究对象来命名，例如，能源模型、教育模型、军事对策模型、宏观经济模型等。

2． 数学建模的过程

应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步。建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程。要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学理论和方法去分析和解决问题。这就需要深厚而扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。

虽然面临的各种实际问题不一样，但数学建模的基本过程基本上是一致的，可以遵循以下过程。

(1) 模型准备：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息。用数学语言来描述问题。

(2) 模型假设：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设。

(3) 模型建立：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻划各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构。只要能够把问题描述清楚，尽量使用简单的数学工具。

(4) 模型求解：利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算（估计)。

(5) 模型分析：对所得的结果进行数学上的分析。

(6) 模型检验：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。

(7) 模型应用：应用方式因问题的性质和建模的目的而异。

3． 数学建模的方法

构造模型是一种创造性劳动，成功的模型往往是科学与艺术的结晶，一般的建模方法和思路有以下四种。

(1) 直接分析法：根据对问题内在机理的认识，直接构造出模型。

(2) 类比法：根据类似问题的模型构造新模型。

(3) 数据分析法：通过试验，获得与问题密切相关的大量数据，用统计分析方法进行建模。

(4) 构想法：对将来可能发生的情况给出逻辑上合理的设想和描述，然后用已有的方法构造模型，并不断修正完善，直至比较满意为止。

27.2图论

在现实世界中，有很多现象、事物、状态都可以用图形来描述，许多学科都以图论作为工具来研究和解决问题。例如，在软件开发中，各项任务之间怎么衔接，才能使开发工作完成得既快又好。在信息系统建设中，将庞大而复杂的信息系统工程和管理问题用图来描述，可以解决很多工程设计和管理决策的最优化问题，例如，完成工程任务的时间最少、费用最省等。

27.2.1最小生成树

在连通的带权图的所有生成树中，权值和最小的那棵生成树（包含图中所有顶点的树)，称作最小生成树。求带权连通无向图的最小生成树的算法有普里姆（Prim)算法和克鲁斯卡尔（Kruskal)算法。

1．普里姆算法

设已知G=（F,五）是一个带权连通无向图，顶点F={0，1，2,…，《-1}。设是构造生成树过程中已被考虑在生成树上的顶点的集合。初始时，t/只包含一个出发顶点。设r是构造生成树过程中已被考虑在生成树上的边的集合，初始时r为空。如果边G，_/)具有最小代价，且/et/ ,j∈那么U最小代价生成树应包含边a_/)。把y加到U中，把（/j）加到r中。重复上述过程，直到t/等于F为止。这时，r即为要求的最小代价生成树的边的集合。

普里姆算法的特点是，当前形成的集合r始终是一棵树。因为每次添加的边是使树中的权尽可能小，因此，这是一种贪心的策略。普里姆算法的时间复杂度为□(«^{2})，与图中边数无关，适合于稠密图（边数远远大于顶点数的图）。

2．克鲁斯卡尔算法

设r的初始状态只有《个顶点而无边的森林r=(r，^)，按边长递增的顺序选择五中的《-i安全边（《，v)并加入r，生成最小生成树。所谓安全边是指两个端点分别是森林r里两棵树中的顶点的边。加入安全边，可将森林中的两棵树连接成一棵更大的树，因为每一次添加到r中的边均是当前权值最小的安全边，这能保证最终的r是一棵最小生成树。

克鲁斯卡尔算法的特点是当前形成的集合r除最后的结果外，始终是一个森林。克鲁斯卡尔算法的时间复杂度为□(el$_□$g$_2$e)，与图中顶点数无关，较适合于稀疏图（边数远远小于顶点数的图）。

【例】图27-1是某地区的通信线路图，假设其中标注的数字代表通信线路的长度(单位为千米)，现在要求至少要架设多长的线路，才能保持6个城市的通信连通。

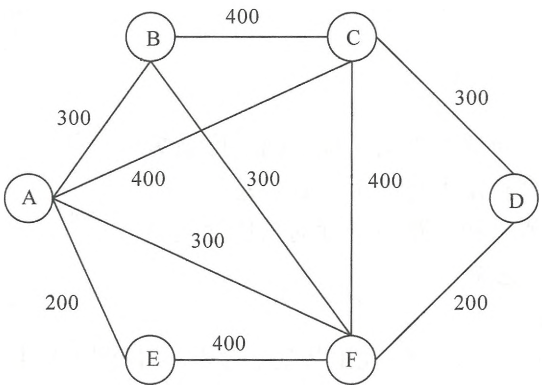

图27-1由线路相接的城市

【解】作为一个例子，下面使用克鲁斯卡尔算法来解答，如图27-2所示。

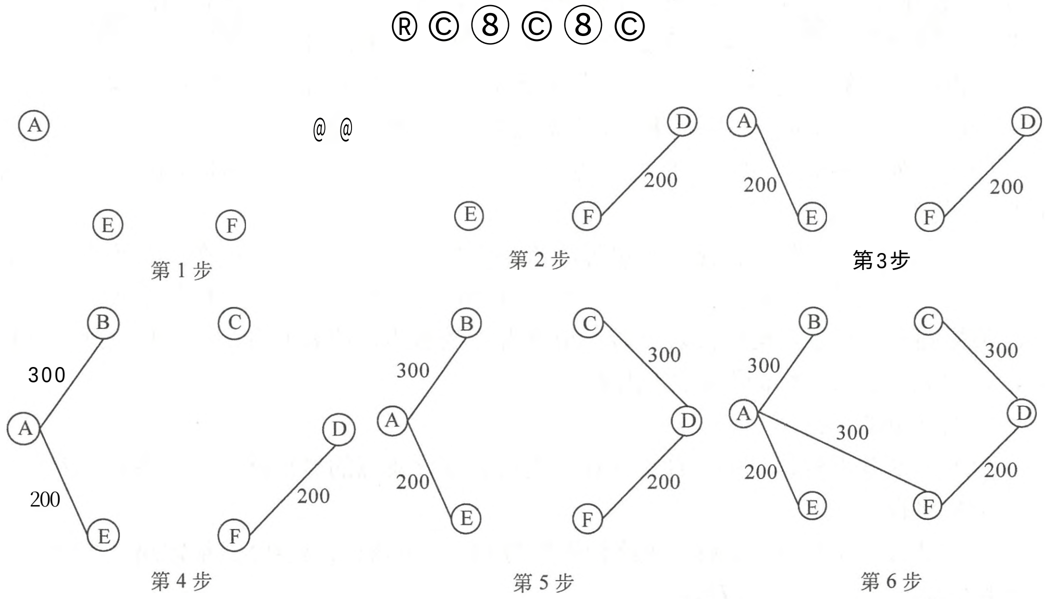

图27-2求解的过程

到了第5步，就有了多种选择，既可以选择AF,也可以选择BF,因为其路程都是300千米。图27-2给出的第6步是选择AF的结果。还有一种结果，就是在第4步时，不是选择AB，而是选择AF或者BF，则结果如图27-3所示。

从第6步的结果可以计算出，至少要架设的线路长度为200*2+300*3=1300千米。

作为一个练习，建议读者使用普里姆算法解答本题，看能得到什么样的结果。

通过这个例子可以发现，一个给定的图的最小生成树不一定是唯一的，但不管有多

少棵最小生成树，其权值之和是相等的。

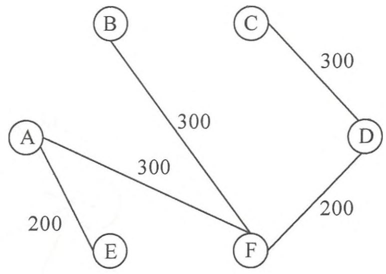

图 27-3 另外一种结果

27.2.2最短路径

带权图的最短路径问题即求两个顶点间长度最短的路径。其中路径长度不是指路径上边数的总和，而是指路径上各边的权值总和。路径长度的具体含义取决于边上权值所代表的意义。

1.单源最短路径

已知有向带权图□(F，五)，找出从某个源点seF到F中其余各顶点的最短路径，称为单源最短路径。

目前，求单源最短路径主要使用迪杰斯特拉（Dijkstm)提出的一种按路径长度递增次序产生各顶点最短路径的算法。若按长度递增的次序生成从源点s到其他顶点的最短路径，则当前正在生成的最短路径上除终点以外，其余顶点的最短路径均已生成（将源点的最短路径看作是已生成的源点到其自身的长度为0的路径)。

迪杰斯特拉算法的基本思想是：设S为最短距离已确定的顶点集（看作红点集），K-S是最短距离尚未确定的顶点集（看作蓝点集)。

(1) 初始化：初始化时，只有源点s的最短距离是已知的（见>(4=□)，故红点集 $S=\{s\}$，蓝点集为空。

(2) 重复以下工作，按路径长度递增次序产生各顶点最短路径：在当前蓝点集中选择一个最短距离最小的蓝点来扩充红点集，以保证算法按路径长度递增的次序产生各顶点的最短路径。当蓝点集中仅剩下最短距离为m的蓝点，或者所有蓝点已扩充到红点集时，s到所有顶点的最短路径就求出来了。

需要注意的是：

(1) 若从源点到蓝点的路径不存在，则可假设该蓝点的最短路径是一条长度为无穷大的虚拟路径。

(2) 从源点s到终点/的最短路径简称为/的最短路径；s到？的最短路径长度简称为f的最短距离，并记为双)□)。

根据按长度递增次序产生最短路径的思想，当前最短距离最小的蓝点*的最短路径是：

源点，红点1，红点2，…，红点《，蓝点炙

距离为：源点到红点《的最短距离+<红点《，蓝点的边长

为求解方便，可设置一个向量□[□.• «-1]，对于每个蓝点veF-S，用Z)[v]记录从源点s到达v且除v外中间不经过任何蓝点（若有中间点，则必为红点）的“最短”路径长度（简称估计距离）。若&是蓝点集中估计距离最小的顶点，则*的估计距离就是最短距离，即若D阅=!11丨11{/)[/]|/£厂-^},则0阅=50(幻。

初始时，每个蓝点v的Z)[c]值应为权心，v>，且从s到v的路径上没有中间点，因为该路径仅含一条边<*?，v>。

将A:扩充到红点后，剩余蓝点集的估计距离可能由于增加了新红点A而减小，此时必须调整相应蓝点的估计距离。对于任意的蓝点_/，若由蓝变红后使£>[/]变小，则必定是由于存在一条从s到y且包含新红点a的更短路径：勺，…，炙，介。且乃[/]减小的新路径户只可能是由于路径<>?，…，A：>和边<炙，/>组成。所以，当lengtl^/^DI^+wcA:，_/>小于Z)[/]时，应该用户的长度来修改乃[/]的值。

【例】如图27-4所示，有一批货物要从城市s发送到城市？，线条上的数字代表通过这条路的费用（单位为万元）。那么，运送这批货物，至少需要花费多少元？

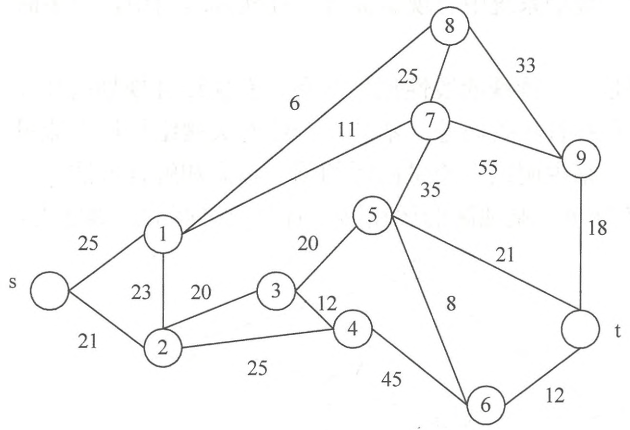

图 27-4　待求最少费用的图

【解】这是一个求最短路径的问题，求解过程如表27-1所示。

表 27-1求 最 短 路 径 的 过 程

红 点 集	D【l]	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	D[6]	D[7]	D[8]	D[9]	D[t]
{S}	25	21	00	00	00	00	00	00	00	00
{s,2}	25		41	46	00	00	00	00	00	00
{s,2,l}			41	46	00	00	36	31	00	00
{s,2,l,8}			41	46	00	00	36		64	00
{s,**2**,1,8,7}			41	46	71	00			64	00
{s,2,1,8,7,3}				46	61	00			64	00
{s,2,1,8,7,3,4}					61	91			64	00
{s,2,1,8,7,3,4,5}						69			64	82
{s,2,1,8,7,3,4,5,9}						69				82
{s,2,1,8,7,3,4,5,9,6}										81
{s,2,1,8,7,3,4,5,9,6,t}										

因此，从s到t的最短路径长度为81万兀，路径为s—>•②—>■③—>•⑤—>•⑥—t

2.每一对顶点之间的最短路径

对图中每对顶点w和v，找出w到v的最短路径问题。在实际应用中，这一问题可用每个顶点作为源点调用一次单源最短路径问题的迪杰斯特拉算法予以解决。但在理论算法上，更常用的是弗洛伊德（Folyd)提出的求每一对顶点之间的最短路径的算法。限于篇幅，本书不再介绍。

27.2.3网络与最大流量

许多应用包含了流量问题。例如，公路系统中有车辆流，控制系统中有信息流，网络系统中有数据流，金融系统中有现金流等。在实际应用中，很多时候需要寻求最大流量问题。

最大流量问题是一个特殊的线性规划问题，有关线性规划的知识，请学习27.4节。为了便于读者理解和解答相关问题，本节不介绍有关网络与最大流量的理论知识，而是通过一个实际例子，来说明最大流量问题的基本概念和解答方法。

【例】图27-5标出了某地区的运输网，各节点之间的运输能力，如表27-2所示。

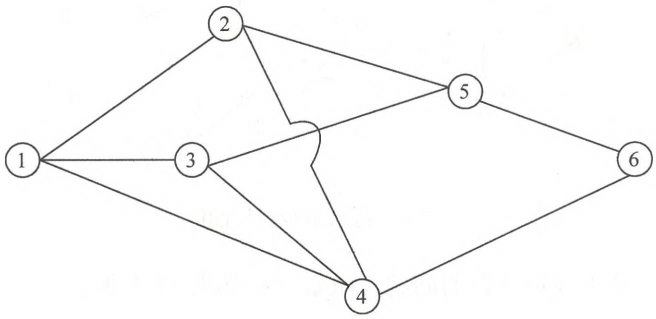

图 27-5 某地区的运输网

表27-2各节点之间的运输能力（单位：万吨/小时)

	①	②	③	④	⑤	⑥
①		6	10	10		
②	6				7	
③	10				14	
④	10	4	1			5
⑤		7	14			21
⑥				5	21	

那么，从节点①到节点⑥的最大运输能力（流量）可以达到多少万吨/小时？

【解】为了便于计算，将表27-2中的数据标记到图27-5上，形成图27-6。

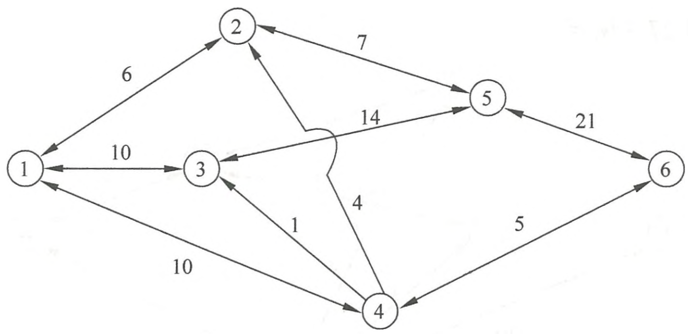

图27-6新的运输网

在运输网络的实际问题中，可以看出，对于流有两个明显的要求，一是每条边（弧)上的流量不能超过该边的最大通过能力（即边的容量)，二是中间节点的流量为0。因为对于每个节点，运出这个节点的产品总量与运进这个节点的产品总量之差，是这个节点的净输出量，简称为这个节点的流量。由于中间节点只起到转运作用，所以中间节点的流量为0。另外，起始点的净流出量和终点的净流入量必须相等，也是这个方案的总运输量。

在本题中，从节点①到节点⑥可以同时沿多条路径运输，总的最大流量应是各条路径上的最大流量之和，每条路径上的最大流量应是其各段流量的最小值。

解题时，每找出一条路径算出流量后，该路径上各段线路上的流量应扣除已经算过的流量，形成剩余流量。剩余流量为0的线段应将其删除（断开)。这种做法比较简单。例如，路径①③⑤⑥的最大流量为10万吨，计算过后，该路径上各段流量应都减少10万吨。从而①③之间将断开，③⑤之间的剩余流量是4万吨，⑤⑥之间的剩余流量为11万吨，如图27-7所示。

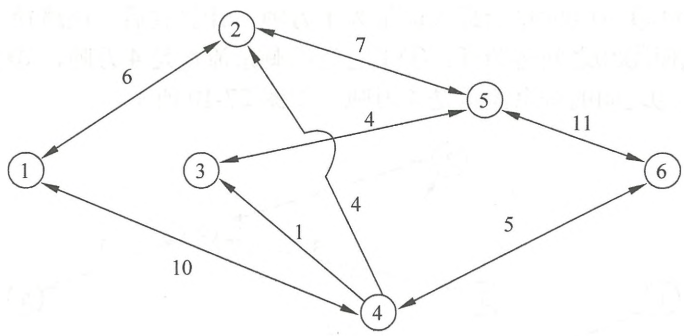

图 27-7　①③断开后的运输网

同理，依次执行类似的步骤：

(1)路径①②⑤⑥的剩余最大流量为6万吨。计算过后，该路径上各段流量应都减少6万吨。从而①②之间将断开，②⑤之间的剩余流量是1万吨，⑤⑥之间的剩余流量

为5万吨，如图27-8所示。

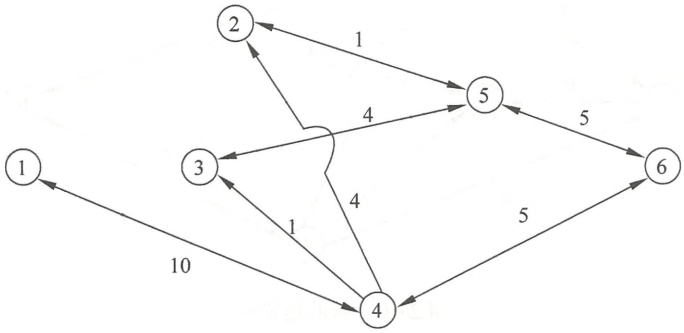

图 27-8　①②断开后的运输网

（2）路径①④⑥的剩余最大流量为5万吨。计算过后，该路径上各段流量应都减少5万吨。从而④⑥之间将断开，①④之间的剩余流量是5万吨，如图27-9所示。

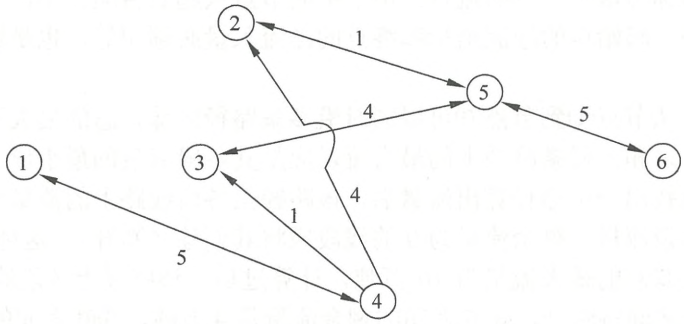

图 27-9　④⑥断开后的运输网

（3）路径①④③⑤⑥的剩余最大流量为1万吨。计算过后，该路径上各段流量应都减少1万吨。从而④③之间将断开，①④之间的剩余流量是4万吨，③⑤之间的剩余流量是3万吨，⑤⑥之间的剩余流量是4万吨，如图27-10所示。

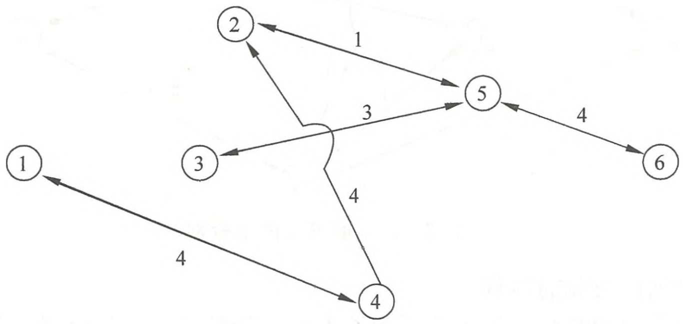

图27-10④③断开后的运输网

(4)路径①④②⑤⑥的剩余最大流量为1万吨。计算过后，该路径上各段流量应都减少1万吨。从而②⑤之间将断开，①④之间、④②之间、⑤⑥之间的剩余流量都是3万吨，如图27-11所示。

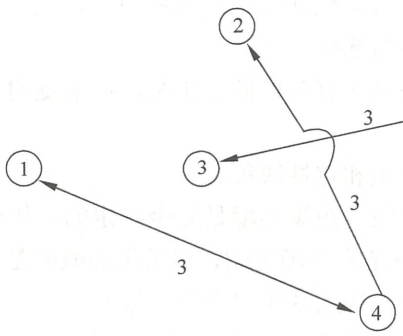

图 27-11 ②⑤断开后的运输网

至此，从节点①到节点⑥已经没有可通的路径，因此，从节点①到节点⑥的最大流量应该是所有可能运输路径上的最大流量之和，即10+6+5+1+1=23万吨。

按照习惯，每次应尽量先找出具有最大流量的路径。理论上可以证明，虽然寻找各种路径的办法可以不同，运输方案也可以有很多种，但总的最大流量是唯一确定的。

27.3决策论

决策就是为了到达一定目标，采用一定的科学方法和手段，从两个以上的方案中选择一个满意方案的分析判断过程。大至国家经济、政治，小到个人生活，凡是在有选择的地方就有决策。关于决策的重要性，诺贝尔奖奖金获得者西蒙有一句名言“管理就是决策”。这就是说，管理的核心是决策。

决策论是一门与经济学、数学、心理学和组织行为学有密切相关的综合性学科。它的研究对象是决策，它的研究目的是帮助人们提高决策质量，减少决策的时间和成本。因此，决策论是一门创造性的管理技术，它包括发现问题、确定目标、确定评价标准、方案制订、方案选优和方案实施等过程。

27.3.1决策的分类与模型

决策是人们在政治、经济、技术和日常生活中普遍存在的一种行为，是管理中经常发生的一种活动。决策是决定的意思，它是为了实现特定的目标，根据客观的可能性，在占有一定信息和经验的基础上，借助一定的工具、技巧和方法，对影响目标实现的诸因素进行分析、计算和判断选优后，对未来行动作出决定。

1． 决策的分类

从不同的角度出发，可以对决策进行不同的分类。

按性质的重要性分类，可将决策分为战略决策（涉及某组织发展和生存有关的全局性、长远问题的决策），策略决策（为完成战略决策所规定的目的而进行的决策）和执行决策（根据策略决策的要求对执行方案的选择）。

按决策的结果分类，可分为程序决策（有章可循的决策，可重复的）和非程序决策(无章可循的决策，一次性的）。

按定量和定性分类，可分为定量决策和定性决策。

按决策环境分类，可分为确定型决策（决策环境是完全确定的，作出的选择的结果也是确定的），风险决策（决策的环境不是完全确定的，其发生的概率是已知的）和不确定型决策（将来发生结果的概率不确定，凭主观倾向进行决策)。

按决策过程的连续性分类，可分为单项决策（整个决策过程只作一次决策就得到结果）和序列决策（整个决策过程由一系列决策组成）。

2． 决策模型

构造决策行为的模型主要有两种，分别为面向结果的方法和面向过程的方法。面向决策结果的方法程序比较简单，其过程为“确定目标-收集信息—提出方案—方案选择—决策”。面向决策过程的方法一般包括“预决策—决策—决策后”三个阶段，其中决策阶段又可分为分部决策和最终决策两个子阶段。任何决策问题都由以下要素构成决策模型。

(1) 决策者。可以是个人、委员会或某个组织，一般指领导者或领导集体。

(2) 可供选择的方案（替代方案)、行动或策略。

(3) 衡量选择方案的准则。包括目的、目标、属性、正确性的标准，在决策时有单一准则和多准则。

(4) 事件：不为决策者所控制的客观存在的将发生的状态。

(5) 每一事件的发生将会产生的某种结果。例如，获得收益或损失。

(6) 决策者的价值观。例如，决策者对货币额或不同风险程度的主观价值观念。

27.3.2不确定型决策

研究确定型决策的价值不是很大，因为一切都是确定的。值得研究的决策有风险决策和不确定型决策。预期货币价值分析就是一种风险型决策，本节介绍不确定型决策。

不确定型决策（非确定型决策）是指决策者对环境情况一无所知，决策者根据自己的主观倾向进行决策。根据决策者的主观态度不同，可分为五种准则，分别为悲观主义准则、乐观主义准则、折中主义准则、等可能性准则和后悔值准则。下面通过一个例题，具体介绍这些准则的含义和求解方法。

【例】某公司需要根据下一年度宏观经济的增长趋势预测决定投资策略。宏观经济

增长趋势有不景气、不变和景气三种，投资策略有积极、稳健和保守三种，各种状态的收益，如表27-3所示。

表27-3各种状态的收益

预计收益（单位：百万元人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	50	150	500
	稳健	150	200	300
	保守	400	250	200

【解】在本题中，由于下一年度宏观经济的各种增长趋势的概率是未知的，所以是一个不确定型决策问题。

1. 乐观主义准则

乐观主义准则也称为最大最大准则（maxmax准则），其决策的原则是“大中取大”。持这种准则思想的决策者对事物总抱有乐观和冒险的态度，他决不放弃任何获得最好结果的机会，争取以“好中之好”的态度来选择决策方案。决策者在决策表中各个方案对各个状态的结果中选出最大者，记在表的最右列，再从该列中选出最大者。在表27-3中，积极方案的最大结果为500,稳健方案的最大结果为300,保守方案的最大结果为400。三者的最大值为500，因此，选择其对应的积极投资方案。

2. 悲观主义准则

悲观主义准则也称为最大最小准则（maxmin准则），其决策的原则是“小中取大”。这种决策方法的思想是对事物抱有悲观和保守的态度，在各种最坏的可能结果中选择最好的。决策时从决策表中各方案对各个状态的结果选出最小者，记在表的最右列，再从该列中选出最大者。在表25-3中，积极方案的最小结果为50,稳健方案的最小结果为150，保守方案的最小结果为200。三者的最大值为200，因此，选择其对应的保守投资方案。

3. 折中主义准则

折中主义准则也称为赫尔威斯（Harwicz)准则，这种决策方法的特点是对事物既不乐观冒险，也不悲观保守，而是从中折中平衡一下，用一个系数《（称为折中系数）来表示，并规定用以下公式计算结果：

$$cvi = a \times \max [ay] + (1 - a) \times \min \{a_z y\}$$

即用每个决策方案在各个自然状态下的最大效益值乘以c(，再加上最小效益值乘以1-«。然后再比较从中选择最大者。显然，折中主义准则的结果取决于《的选择，a接近于1，则偏向于乐观；a接近于0,则偏向于悲观。

4. 等可能准则

等可能准则也称为拉普拉斯（Laplace)准则。当决策者无法事先确定每个自然状态

出现的概率时，就可以把每个状态出现的概率定为1/«（«是自然状态数），然后按照最大期望值准则决策。也就是说，把一个不确定型决策转换为风险决策。

5.后悔值准则

后悔值（遗憾值）准则也称为萨维奇（Savage）准则、最小机会损失准则。决策者在制定决策之后，如果不能符合理想情况，必然有后悔的感觉。这种方法的特点是每个自然状态的最大收益值（损失矩阵取为最小值），作为该自然状态的理想目标，并将该状态的其他值与最大值相减所得的差作为未达到理想目标的后悔值。这样，从收益矩阵就可以计算出后悔值矩阵。最后按照最大后悔值达到最小的方法进行决策，因此，也称为最小最大后悔值（minmax）。在本题中，根据表27-3可以得出后悔值矩阵，如表27-4所示。

表27-4各种状态的后悔值

预计收益（单位：百万兀人民币）		经济趋势预测		
		不景气	不变	景气
投资策略	积极	350	100	0
	稳健	250	50	200
	保守	0	0	300

在表27-4中，积极方案的最大后悔值为350，稳健方案的最大后悔值为250，保守方案的最大后悔值300。三者的最小值为250，因此，选择其对应的稳健投资方案。

27.3.3灵敏度分析

通常，在决策模型中，自然状态的概率和损益值往往由估计或预测得到，不可能十分准确。此外，实际情况也是在不断发生变化的。因此，需要分析为决策所用的数据可在多大范围内变动，原最优决策方案继续有效，这就是灵敏度分析，也称为敏感性分析。

【例】假设有外表完全相同的木盒100只，将其分为2组，一组装白球，有70盒；另一组装黑球，有30盒。现从这100盒中任取一盒，请你猜，如果这盒内装的是白球，猜对了得500分，猜错了罚200分；如果这盒内装的是黑球，猜对了得1000分，猜错了罚150分。为使期望得分最多，应选哪一个方案？

【解】先画出决策树，如图27-12所不。

根据图27-12，可以计算出各方案的期望值。

“猜白”的期望值：（0.7X500）+（0.3X（-200））=290；

“猜黑”的期望值：（0.7X（-150））+（0.3X1000）= 195。

因此，“猜白”的方案是最优的。现假定出现白球的概率从0.7变为0.8，这时，各方案的期望值如下。

“猜白”的期望值：（0.8X500）+（0.2X（-200））=360；

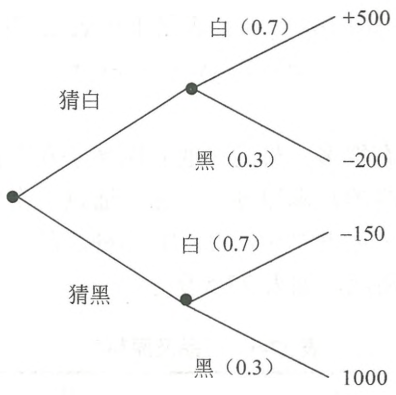

图27-12猜球问题的决策树

“猜黑”的期望值：（0.8X（-150））+（0.2X1000）=80。

可见，“猜白”的方案仍然是最优的。但是，如果假设出现白球的概率从0.7变为0.6。这时，各方案的期望值如下。

“猜白”的期望值：（0.6X500）+（0.4X（-200））=220；

“猜黑”的期望值：（0.6X（-150））+（0.4X1000）=310。

现在的最优方案就不是“猜白”，而是“猜黑”了。由此可见，各自然状态发生的概率的变化，可引起最优方案的改变。那么，转折点如何确定呢？

设P为出现白球的概率，1-户为出现黑球的概率。当这2个方案的期望值相等时，即

/?X500+（1-/?）X（-200）=pX（-150）+ Cl-p) X1000

求得p=0.65。称它为转折概率。

同理，对其他数据也可以进行类似的分析，看哪些数据是非常敏感的变量，哪些数据是不太敏感的变量，以及最优方案在不变的条件下，这些变量允许变化的范围。这都是灵敏度分析的内容。

27.4线性规划

线性规划是研究在有限的资源条件下，如何有效地使用这些资源达到预定目标的数学方法。用数学的语言来说，也就是在一组约束条件下寻找目标函数的极值问题。

求极大值（或极小值）的模型表达如下。

$$\begin{cases} a_{n}x_{x} + a_{n}x_{2} \text{ H--h } a_{ln}x_{n} < b_{x} \\ {}^{a}i\backslash{}^{x}\backslash + ci_{22}x_{2}\text{- H· l- } a_{2n}x_{n} < b_{2} \\ \vdots \\ {}^{a}m\backslash{}^{X}\backslash{}^{+a}{}_{m}2X2^{+}\text{---} + {}^{a}mn^{X}n^{\wedge b}n \end{cases}, x_{t}>0, \text{ i « i} \leqslant \cdot \leqslant$$

在上述条件下，求解~ '，…，，使满足下列表达式的z取极大值（或极小值）：

$$Z = C_jJC_j + C_2X_2 H\text{------------}h\, C_nX_n$$

1.图解法

解线性规划问题的方法有很多，最常用的有图解法和单纯形法。图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，下面，通过一个例子来说明图解法的应用。

【例】某工厂在计划期内要安排生产I、II两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原料的消耗，如表27-5所示。

表27-5产品及原料表

	I	II	总数
设 备	1	2	8台时
原材料**A**	4	0	16**kg**
原材料B	0	4	12**kg**

该工厂每生产一件产品I可获利2元，每生产一件产品II可获利3元，问应该如何安排计划使该工厂获利最多？

【解】该问题可用以下数学模型来描述，设~ A分别表示在计划期内产品I、II的产量，因为设备的有效台时是8，这是一个限制产量的条件，所以在确定产品I、II的产量时，要考虑不超过设备的有效台时数，即可用不等式表示为

$$jCj + 2_{jc_2} < 8$$

同理，因原料A、B的限量，可以得到以下不等式

$$4xj < 16$$

$$4x_2 < 12$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限制的条件下，如何确定产量~ A，以得到最大的利润。若用z表示利润，这时$z = 2jc_1 + 3x_2$。综上所述，该计划问题可用数学模型表示如下。

目标函数：

$$\max\ z = 2xj + 3jc_2$$

满足约束条件：

$$Xj + 2x_2 < 8$$

$$4x_1 < 16$$

$$4x_2 < 12$$

$$x_{I?}x_2 > 0$$

在以& x_2为坐标轴的直角坐标系中，非负条件~ A >0是指第一象限。上述每个约束条件都代表一个半平面。例如，约束条件A+$2x_2$ <8代表以直线力+$2x_2$ =8为边界的左下方的半平面。若同时满足今x_2>0，力+2'<8，4^<16和$4x_2$<12的约束条

件的点，必然落在由这三个半平面相交组成的区域内，如图27-13中的阴影部分所示。阴影区域中的每一个点（包括边界点）都是这个线性规划问题的解（称可行解），因而此区域是本题的线性规划问题的解的集合，称它为可行域。

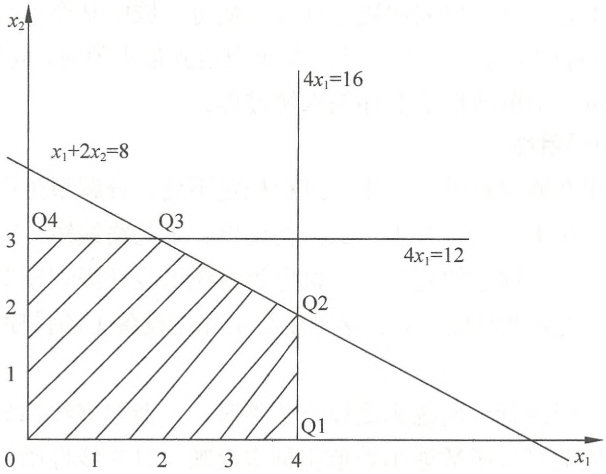

图27-13图解法

再分析目标函数z = 2:^+3:^，在坐标平面上，它可表示以z为参数，-2/3为斜率的一•族平行线：

$$x_2 = -\left(\frac{2}{3}\right)x_1 + \frac{z}{3}$$

位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，因此称它为等值线。当z值由小变大时，直线沿其法线方向向右上方移动。当移动到込点时，使z值在可行域边界上实现最大化，这就得到了本题的最优解込，込点的坐标为（4，2)。经过计算，可以得出 z =14□

这说明该厂的最优生产计划方案是：生产4件产品I，2件产品II，可得最大利润为14元。

2.关于解的讨论

在上述例题中，得到的最优解是唯一的，但对一般线性规划问题而言，求解结果还可能出现以下几种情况：无穷多最优解（多重解），无界解（无最优解），无可行解。当求解结果出现后两种情况时，一般说明线性规划问题的数学模型有错误。无界解源于缺乏必要的约束条件，无可行解源于矛盾的约束条件。

从图解法中直观地看到，当线性规划问题的可行域非空时，它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解，它一定在可行域的某个顶点得到；若在两个顶点同时得到最优解，则它们连线上的任意一点都是最优解，即有无穷多最优解。

3. 单纯形法

图解法虽然直观，但当变量数多于3个以上时，它就无能为力了，这时需要使用单纯形法。

单纯形法的基本思路是：根据问题的标准，从可行域中某个可行解（一个顶点）开始，转换到另一个可行解（顶点），并且使目标函数达到最大值时，问题就得到了最优解。限于篇幅，本书不再介绍单纯形法的详细求解过程。

4. 线性规划的适用性

线性规划模型用在原材料单一、生产过程稳定不变、分解型生产类型的组织是十分有效的，例如，石油化工厂等。对于产品结构简单、工艺路线短，或者零件加工组织，有较大的应用价值。需要注意的是，对于机电类组织用线性规划模型只适用于作年度的总生产计划，而不宜用来做月度计划。这主要与工件在设备上的排序有关，计划期太短，很难安排过来。

一般来说，一个经济管理问题满足以下条件时，才能建立线性规划的模型。

(1) 要求解问题的目标函数能用数值指标来反映，且为线性函数。

(2) 存在着多种方案。

(3) 要求达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些约束条件可用线性等式或不等式描述。

27.5动态规划

动态规划法是决策分析中的一种常用方法，是解决多阶段决策过程问题的一种最优化方法。所谓多阶段决策过程，就是将问题分成若干个相互联系的阶段，每个阶段都作出决策，从而使整个过程达到最优化。许多实际问题利用动态规划法处理，常比线性规划法更为有效，特别是对于那些离散型问题。

动态规划的实质是分治思想和解决冗余，因此，动态规划是一种将问题实例分解为更小的、相似的子问题，并存储子问题的解而避免计算重复的子问题，以解决最优化问题的算法策略。由此可知，动态规划法与分治法和贪心法类似，它们都是将问题实例归纳为更小的、相似的子问题，并通过求解子问题产生一个全局最优解。其中贪心法的当前选择可能要依赖已经作出的所有选择，但不依赖于有待于做出的选择和子问题。因此，贪心法自顶向下，一步一步地作出贪心选择；而分治法中的各个子问题是独立的（即不包含公共的子问题），因此，一旦递归地求出各子问题的解后，便可自下而上地将子问题的解合并成问题的解。但不足的是，如果当前选择可能要依赖子问题的解时，则难以通过局部的贪心策略达到全局最优解；如果各子问题是不独立的，则分治法要做许多不必

要的工作，重复地解公共的子问题。

设计一个标准的动态规划算法，通常可按以下两个步骤进行。

(1) 划分阶段：按照问题的时间或空间特征，把问题分为若干个阶段。这若干个阶段一定要是有序的或者是可排序的（即无后向性），否则问题就无法用动态规划法求解。

(2) 选择状态：将问题发展到各个阶段时所处于的各种客观情况用不同的状态表示出来。状态的选择要满足无后效性，即无论当前取哪个解，对后面的子问题都没有影响。

动态规划法可以解决很多方面的问题，下面通过一个例子来说明其应用。

【例】某工厂平均每月生产6吨货物，分别发往A、B、C、D四个卖场，为了便于管理，发往每个卖场的货物数量为整数吨，如果各卖场出售该货物获得的利润，如表27-6所示。每个月给四个卖场分配多少货物，能让总利润最大。

表27-6发货量与利润表（单位：万元）

卖场 数量/吨^	卖场**A**	卖场**B**	卖场**C**	卖场**D**
0	0	0	0	0
1	3	2	3	4
2	6	3	6	5
3	7	5	7	6
4	7	7	8	6
5	7	9	8	6
6	7	10	8	6

【解】将问题按卖场分为四个阶段，将A、B、C、D四个卖场分别编号为1、2、3、4。设：

- 状态变量知表示每月分配给第灸个卖场至第4个卖场的货物吨数（hi，2，3，4)□
- 决策变量本：表不每月分配给第A：个卖场的货物吨数（hl，2，3，4)。
- 状态转移方程为：&$_{+1}$=&-不，即&=&$_{+1}$+右。
- 已知次=6，*S_4=X_4。
- X&)：表示第A：阶段的最佳总效果。
- $r(X_k)$：表示第阶段取得最佳效果时為的取值。

第四阶段

当时的具体利润情况，如表27-7所示。

表 27-7第四阶段分析表

X_4 \ S_4	0	1	2	3	4	5	6	r(X_4)	ASd
0	0							0	0
1	0	4						1	4
2	0	4	5					2	5
3	0	4	5	6				3	6
4	0	4	5	6	6			3,4	6
5	0	4	5	6	6	6		3,4,5	6
6	0	4	5	6	6	6	6	3,4,5,6	6

注：**Max**(X_4)是指能使本阶段得到利润最大值的不取值集合。

第三阶段

当^3时的利润情况，如表27-8所示。

表27-8第三阶段分析表

^3 \ S_3	0	1	2	3	4	5	6	*r*(X_3)	胸
0	0							0	0
1	4	3						0	4
2	5	7	6					1	7
3	6	8	10	7				2	10
4	6	9	11	11	8			2,3	11
5	6	9	12	12	12	8		*2,3,4*	12
6	6	9	12	13	13	12	8	*3,4*	13

第二阶段

当^=2时的具体利润情况，如表27-9所示。

表27-9第二阶段分析表

X_2 \ S_2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	*r*(X_2)	*f*(S_2)
0	0							0	0
1	4	2						0	4
2	7	6	3					0	7
3	10	9	7	5				0	10
4	11	12	10	9	7			1	12
5	12	13	13	12	11	9		1,2	13
6	13	14	14	15	14	13	10	3	15

第一阶段

当^=1时的具体利润情况，如表27-10所示。

表27-10第一阶段分析表

S_1 \ X_1	0	1	2	3	4	5	6	$r(X_1)$	$f(S_1)$
0	0							0	0
1	4	3						0	4
2	7	7	6					0,1	7
3	10	10	10	7				0,1,2	10
4	12	13	13	11	7			1,2	13
5	13	15	16	14	11	7		2	16
6	15	16	18	17	14	11	7	2	18

此时，可逆向追踪，得到最佳的分配方案，如表 27-11 所示。

表27-11最佳分配方案

方案 \ 卖场	A	B	C	D	合计	利润
1	2	1	2	1	6	18

因此，A卖场分配2吨，B卖场分配1吨，C卖场分配2吨，D卖场分配1吨，可以获得最大利润，最大利润值为18万元。

27.6本章练习

(1)山区某乡的6个村之间有山路，如图27-14所示，其中的数字标明了各条山路(公里）。

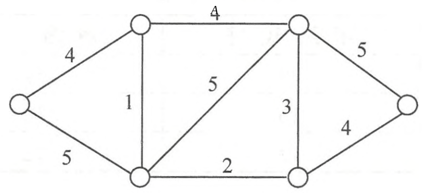

图 27-14 山路示意图

乡政府决定沿山路架设电话线。为实现村村通电话，电话线总长至少为. ____________公里。

A．11　　B．14　　C．18　　D．33

试题分析

本题需要在给定的图上寻找最小生成树。

图由若干个结点以及结点之间的连线组成，每条连线上标记了权数（本题为长度）。最小生成树实际上是其中的一个子图，它包括所有的结点以及部分连线，这些连线需要连接所有的结点，但其总权数（长度）最小。

从本题应用看，就是要在上述山路图中确定部分山路，使其能连接6个村，又能使总长度最短。

最小生成树的求解方法：先选择最短的一条线（如有多条，可以任选一条），它已经连接了两个点。从这两点出发，再找出能连接其他一个点的最短线（如有多条，可以任选一条)。这样，就已经用两条线连接了 3个点。依此类推，逐步做下去，连线也逐步增多，连接的点也逐步增多，直到所有的点都连上为止。这样求出的若干条连线以及所有结点就组成了最小生成树。

本题求出的一种最小生成树，如图27-15所示。

其连线的总长度等于14公里，连接了 6个村。

在同一个图中，最小生成树的方案可能有多个，但其连线的总长度是相等的。

这是运筹学求解最优问题的普遍原则：最优值如果有，则必是唯一的，但达到最优值的方案可能不止一个。

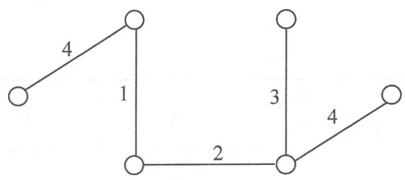

图 27-15　最小生成树

参考答案：B

(2)某企业开发了一种新产品，拟定的价格方案有三种：较高价、中等价、较低价。估计这种产品的销售状态也有三种：销路较好、销路一般、销路较差。根据以往的销售经验，他们算出，这三种价格方案在三种销路状态下的收益值，如表27-12所示。

表27-12收益值表

收益值（万元）	销路较好	销路一般	销路较差
较高价	20	11	8
中等价	16	16	10
较低价	12	12	12

企业一旦选择了某种决策方案，在同样的销路状态下，可能会产生后悔值（即所选决策方案产生的收益与最佳决策收益值的差值）。例如，如果选择较低价决策，在销路较好时，后悔值就为8万元。因此，可以根据上述收益值表制作后悔值表，如表27-13(空缺部分有待计算）所示：

表27-13后悔值表

后悔值（万元）	销 路 较 好	销 路 一 般	销 路 较 差
较 高 价	0		
中 等 价		0	
较 低 价	8		0

企业做定价决策前，首先需要选择决策标准。该企业决定采用最小-最大后悔值决策标准（坏中求好的保守策略），为此，该企业应选择决策方案__________。

A.较高价　　B.中等价　　C.较低价　　D.中等价或较低价

试题分析

本题考查不确定型决策的后悔值分析。

首先算出各种方案在各种销路状态下的后悔值，填写后悔值表中的空缺部分，并算出每种方案的最大后悔值，如表27-14所示。

表27-14后悔值表

后悔值（万元）	销 路 较 好	销 路 一 般	销 路 较 差	最大后悔值
较高价	0	5	4	5
中等价	4	0	2	4
较低价	8	4	0	8

按照最小最大后悔值决策标准（坏中求好的保守策略），应根据最大后悔值中的最小值来选择对应的决策方案。表27-14中，最大后悔值中的最小值为4万元（对应中等价），所以，决定采用中等价方案。

参考答案.• B

(3)某厂准备生产甲、乙、丙三种产品，生产每件产品所需的A、B两种原料数量，能获得的利润，以及工厂拥有的原料数量，如表27-15所示。

表27-15原料数量表

	产品甲	产品乙	产品丙	拥有量
原料**A**（吨）	6	5	3	45
原料**B**（吨）	3	5	4	30
每件利润（万元）	3	4	1	

根据该表，只要安排好生产计划，就能获得最大利润__________万元。

A．25　　B．26　　C．27　　D．28

试题分析

本题考查管理科学基础知识中的线性规划。

设该厂生产甲x件，乙 >；件，丙z件，则有线性规划模型：

Max $S=3x+4y+z$

$6x+5y+3z<=45$

$3x+5y+4z<=30$

$x, y, z>=0$

线性规划问题的最优解必然在可行解区的顶点处达到。

由于产品丙对利润的贡献最低，不妨先设p□。

此时，容易解得，在x=5,尸3时能获得最大利润27万元。

当z=A>0时，

Max $S=3x+4y+A$

6x+5^<=45-3A

3x+5><=30-4A

jc,少 >=0

可以得到最优解：>x=5+A/3，_y=3-A，F27-2A。

即z增加某个增量时，总利润将减少2倍的这些增量。

因 此 ，x=在. _ y=3,z=0时能获得最大利润27万元。

参考答案：C

（4）如图27-16的网络图表示从城市A到城市B运煤的各种路线。各线段上的数字表示该线段运煤所需的费用（百元/车）。城市A有3个装货点，城市B有3个卸货点，各点旁标注的数字表示装/卸煤所需的费用（百元/车）。根据该图，从城市A的一个装卸点经过一条路线到城市B的一个卸货点所需的装、运、卸总费用至少为____________（百元/车）。

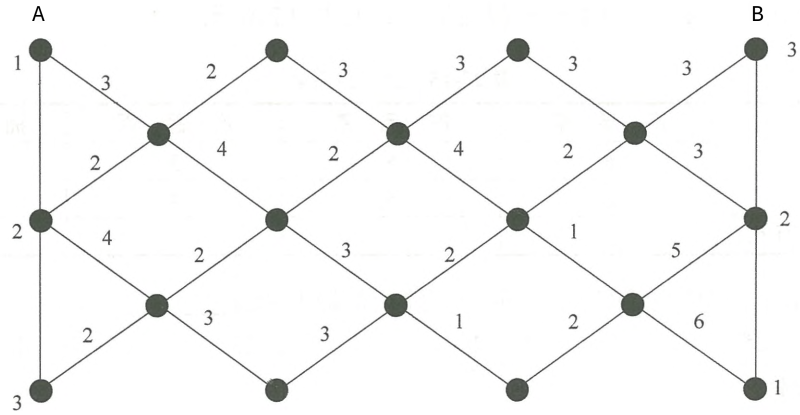

图27-16运煤路线网络图

A．19　　B．20　　C．21　　D．22

试题分析

解决这个问题，可以考虑从起点到终点层层推导的方式。

具体过程如图27-17所示，其中红色字体标记的数字代表从起点到当前结点，最短路径长度。

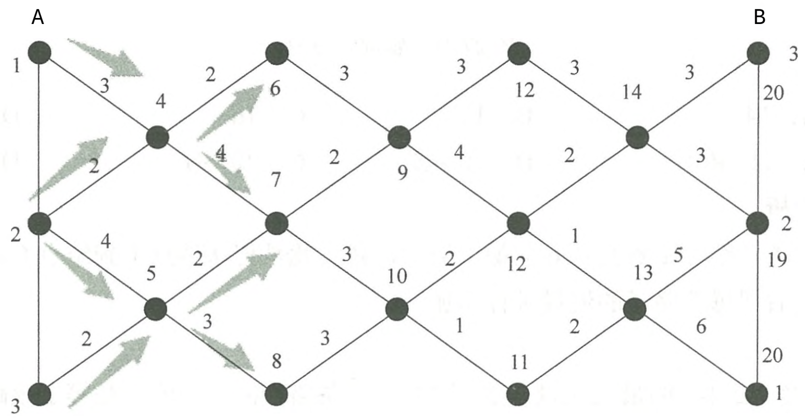

图27-17具体过程

参考答案：A

(5)　线性规划问题不可能________。

A．没有最优解

B．只有一个最优解

C．只有2个最优解

D．有无穷多个最优解

试题分析

线性规划问题求解结果可能出现以下情况：无穷多最优解（多重解），只有一个最优解，无界解（无最优解），无可行解。

参考答案：C

(6)　某石油管理公司拥有，如图27-18所示的输油管道网。其中有6个站点，标记为①~⑥。站点①是唯一的供油站。各站点之间的箭线表示输油管道和流向。箭线边上标注的数字表示该管道的最大流量（单位：百吨/小时）。据此可算出，从站点①到达站点⑥的最大流量为________百吨/小时，而且当管道________关闭维修时管道网仍可按该最大流量值向站点⑥供油。

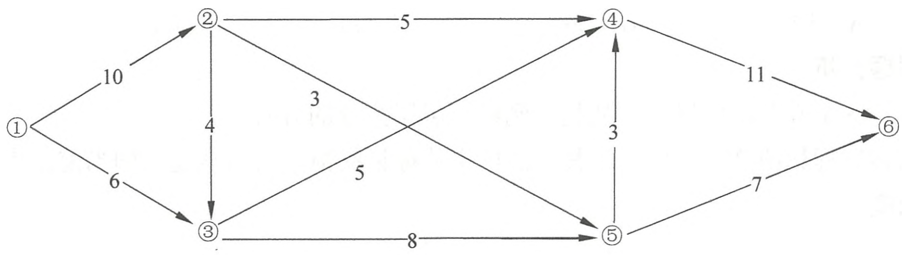

图 27-18　输油管道网

A．14　　B．15　　C．16　　D．18

A.②—③　　B.②—⑤　　C.③—④　　D.⑤—④

试题分析

本题要求从结点1到结点6的最大流量，其实就是把从结点1到结点6所有的路径找出来，然后把每条路径的流量进行累加。

如：

①　　路径1-2-4-6的最大流量是5,注意：一条路径的最大流量是等于该路径上每段流量中的最小值的，因为他是整个路径的瓶颈所在。在找到这条路径后，可把这条路径从原图中抽掉，即：1-2之间的运力由10，变成了 5，2-4由5变成了 0，4-6由11变成了 6。

②　路径1-2-5-6的最大流量是3。

依此类推，找出的所有路径运力累加和为16。

后面的一空的问题，可以通过代入法进行求解，S卩，假设②一③运力为□,计算图中结点1到结点6的最大运力有没有发生变化。并以此类推，尝试B、C、D选项。

参考答案：C　D

(7)用一辆载重量为10吨的卡车装运某仓库中的货物（不用考虑装车时货物的大小），这些货物单件的重量和运输利润如表27-16所示。适当选择装运一些货物各若干件，就能获得最大总利润________元。

表27-16运输重量和利润表

货物（类）	A	B	C	D	E	F
每件重量（顿）	1	2	3	4	5	6
每件运输利润（元）	53	104	156	216	265	318

A．530　　B．534　　C．536　　D．538

试题分析

根据题意可知，若能把10吨货刚好装满，且装的货均是单位利润最高的那些货物，应能达到最大的利润，所以可将每类货物的单位利润计算出来，如表27-17所示。

表27-17运输利润表

货物（类）	A	B	C	D	E	F
每件重量（顿）	1	2	3	4	5	6
每件运输利润（元）	53	104	156	216	265	318
单位利润	53	52	52	54	53	53

由此表可知，装2件A与2件D能达到最大利润：538元。

参考答案：D

(8)某公司拟将5百万元资金投放下属A、B、C三个子公司（以百万元的倍数分配投资），各子公司获得部分投资后的收益如表27-18所示（以百万元为单位）。该公司投资的总收益至多为________百万元。

表27-18投资收益表

子公司 \ 收益	0	1	2	3	4	5
A	0	1.2	1.8	2.5	3	3.5
B	0	0.8	1.5	3	4	4.5
C	0	1	1.2	3.5	4.2	4.8

A．4.8　　B．5　　C．5.2　　D．5.5

试题分析

本题属于典型的动态规划问题，在解这种题时，除了采用本章介绍的方法外，还可以采用枚举法进行求解，即把所有可能的方案列出来，再择优，该方法在应对考题时，往往更有效，更快捷，如表27-19所示。

表27-19枚举表

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>利润值（百万元）</th></tr>
<tr><td rowspan="6">增加投资数额</td><td rowspan="6">0</td><td>0</td><td>5</td><td>4.8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>4.2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>4.5</td></tr>
</table>

续表

	A	B	C	利润值（百万元）
增加投资数额	1	0	4	5.4
		1	3	5.5
		2	2	3.9
		3	1	5.2
		4	0	5.2
	2	0	3	5.3
		1	2	3.8
		2	1	4.3
		3	0	4.8
	3	0	2	4
		1	1	4.3
		2	0	4
	4	0	1	4
		1	0	3.8
	5	0	0	3.5

参考答案：D