

**Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey**  
**Campus Monterrey**



**Tecnológico  
de Monterrey**

**Modelación con ecuaciones diferenciales (Gpo 502)**

**Nombre del profesor:**  
*Luis Miguel Méndez Díaz*

## **Situación Reto**

**Energía en movimiento: Análisis de un sistema de doble  
resorte vertical para la eficiencia energética**

**Equipo: 4**

Emilio Alejandro González Huerta — A01286440  
Alejandro Mattar Acero — A00842028  
Laurie Camila Hernández Pacheco — A01286569  
Héctor Fernando Piñón Soto — A01564220

Fecha: 04/12/2025

## CONTENTS

I. Abstract	2
II. Marco Teórico	2
A. Sistemas Masa-Resorte	2
Sistema Acoplado	3
B. Estudio de Ecuaciones Diferenciales	3
Aplicadas	4
C. Modos normales y frecuencias naturales	4
D. Herramientas de Soluciones de EDO	4
E. Contexto de Aplicaciones	4
III. Prototipo	5
A. Modelo Real	5
IV. Modelado Matemático del Sistema Doble	6
Masa-Doble Resorte	6
A. Planteamiento y Variables	6
B. Análisis de Fuerzas	6
Resorte Superior	6
Resorte Inferior	6
Ecuación de movimiento para $m_1$	7
Ecuación de movimiento para $m_2$	7
C. Sistema Acoplado	7
D. Condiciones Iniciales y Parámetros Físicos	7
Solución analítica aproximada por modos	7
normales	8
V. Registro de datos experimentales	8
VI. Simulación numérica	9
VII. Conclusiones	11
VIII. Discusiones	12
A. Cálculo y análisis de errores	12
Error absoluto	12
Error relativo	12
Desviación estándar	12
Causas de discrepancias	12
B. Reflexión sobre los Objetivos de Desarrollo	13
Sostenible	13
C. Reflexión sobre el Uso de IA	13
IX. Referencias	13
X. Anexos	13
A. Recursos Tracker Analysis	13
B. Constante $k_2$	16
C. Hipervínculos	17

## I. ABSTRACT

El presente estudio se centra en el análisis dinámico de un sistema masa-doble resorte acoplado de dos grados de libertad, con el objetivo principal de validar la predicción de su comportamiento vibratorio mediante EDOs en comparación con mediciones empíricas. La investigación se basó en la construcción de un prototipo físico de bajo costo, utilizando cartón como soporte y resortes reciclados. El modelado teórico describió el sistema mediante EDOs acopladas de segundo orden (forma  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{Kx} = \mathbf{0}$ ), permitiendo calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración. Para la validación experimental se empleó Tracker Analysis, capturando el movimiento del prototipo en video y extrayendo los desplazamientos empíricos de las masas ( $y_1(t)$  y  $y_2(t)$ ). La comparación entre la solución analítica y los datos experimentales demostró una concordancia aceptable, confirmando que la respuesta del sistema es una superposición de sus modos naturales. Se determinó que las desviaciones observadas en el comportamiento se deben principalmente al desprecio del amortiguamiento en el modelo inicial.

## II. MARCO TEÓRICO

### A. Sistemas Masa-Resorte

Suponga que por definición de un sistema masa-resorte simple, se implica colocar un resorte a un soporte rígido de un extremo y del otro un objeto de masa  $m$  atado. El sistema puede tener una orientación vertical u horizontal para considerar la gravedad o no, pero a gran escala esto es lo que compone un sistema simple. Por naturaleza, se introduce la Ley de Hooke, la cual modela la fuerza restauradora que genera el resorte sobre la masa. Esta fuerza es proporcional a la magnitud de la elongación y contraria en el sentido de esta.

$$F = -kx \quad (1)$$

Se introduce la constante del resorte  $k$ , donde  $k > 0$ . Esta constante caracteriza al resorte y describe qué tan duro es para estirarse (a mayores valores, más rígido). El objetivo es modelar una ecuación que analíticamente describe el movimiento de la masa en relación al tiempo ocurrido. Para esto se necesita de la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

Asumiendo que no hay presencia de fuerzas externas, se puede igualar la ecuación anterior de Newton a lo siguiente

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) - mg \quad (3)$$

Si entendemos el punto  $x_0$  como el punto donde el resorte se estiró debido a la fuerza de gravedad, entonces la ecuación se simplifica únicamente a

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución describe un movimiento oscilatorio periódico (armónico). La solución general para el desplazamiento es  $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $A$  es la amplitud y  $\phi$  es la fase. La propiedad más importante de este movimiento es la frecuencia angular natural ( $\omega$ ), la cual está determinada únicamente por las propiedades físicas del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Esta frecuencia determina el periodo ( $T = 2\pi/\omega$ ) y la frecuencia lineal ( $f = 1/T$ ) de la oscilación.

Para modelar sistemas físicos más realistas, es necesario considerar las fuerzas de amortiguamiento, generalmente proporcionales a la velocidad. Esto introduce un término de  $-c \frac{dx}{dt}$  a la suma de fuerzas, donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento, lo que provoca que la oscilación decaiga con el tiempo. (Zill, 2016)

### Sistema Acoplado

Ahora definiendo un sistema acoplado de dos resortes en serie verticales, suponga que dos resortes soportan una única masa  $m$  y uno está atado al extremo de otro. El primero se encuentra atado a un soporte rígido, mientras que el otro apoya la masa. En este caso, el desplazamiento  $x$  de la masa de su posición de equilibrio (elongación) consiste de la suma respectiva de desplazamiento para cada resorte

$$x = x_1 + x_2 \quad (6)$$

Dado que la masa de los resortes es despreciable, la fuerza restauradora debe ser la misma para ambas, lo que resulta ser que la constante efectiva del resorte del sistema  $k_{\text{eff}}$  es

$$-k_{\text{eff}}(x_1 + x_2) = -k_1 x_1 = -k_2 x_2 \quad (7)$$

Del lado derecho observe que  $x_1 = (k_2/k_1)x_2$ , por lo que

$$-k_{\text{eff}}\left(\frac{k_2}{k_1}x_2 + x_2\right) = -k_2 x_2 \quad (8)$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (9)$$

El sistema con resortes en serie ahora se comporta como un sistema simple con una constante elástica reducida ( $k_{\text{eff}}$ ). Por lo tanto, su frecuencia natural de oscilación

( $\omega_{\text{serie}}$ ) es:

$$\omega_{\text{serie}} = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} \quad (10)$$

Por el otro lado, un sistema acoplado de dos resortes en paralelo funciona ligeramente distinto pero con menos complicaciones. Para este caso, simplemente se puede definir la constante de resorte efectivo como la suma de todos los resortes que soportan la misma masa.

$$k_{\text{eff}} = k_1 + k_2 \quad (11)$$

En el caso de resortes en paralelo, la rigidez efectiva del sistema aumenta, resultando en una frecuencia natural de oscilación ( $\omega_{\text{paralelo}}$ ) mayor que la de cualquier resorte individual

$$\omega_{\text{paralelo}} = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad (12)$$

## B. Estudio de Ecuaciones Diferenciales Aplicadas

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación que relaciona una función incógnita  $x(t)$ , con sus derivadas respecto a una única variable independiente, que en sistemas dinámicos es el tiempo  $t$ .

El orden de una EDO lo define la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Una EDO de segundo orden incluye la derivada segunda de la función,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ . Esto tiene diversas aplicaciones en física porque la mayoría de los sistemas mecánicos son descritos por la Segunda Ley de Newton ( $\sum F = ma$ ). (Zill, 2016) La forma general de una EDO de segundo orden es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) \frac{dx}{dt} + b(t)x + c(t) \quad (13)$$

La razón del uso de estas herramientas matemáticas es el significado físico que se les otorga.

1. Primera derivada ( $\frac{dx}{dt}$ ): Representa la velocidad  $v(t)$ , la cual mide la tasa de cambio de la posición con respecto al tiempo, indicando cuán rápido y en qué dirección se mueve el objeto.
2. Segunda derivada ( $\frac{d^2x}{dt^2}$ ): Representa la aceleración  $a(t)$ , la cual mide la tasa de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, indicando la intensidad del cambio de movimiento (ya sea en rapidez o dirección).
3. La aplicación de las EDO a sistemas físicos se logra mediante la sustitución de la aceleración por su definición en la Ley de Newton (1).

En la ley de Newton, el resultado de la sumatoria de fuerzas define el resto de la forma de la EDO

1. Fuerza Restauradora: por ejemplo, la Ley de Hooke  $F = -kx$ .
2. Fuerzas de Amortiguamiento o Fricción: dependen de la velocidad  $\frac{dx}{dt}$ . Por ejemplo, la fricción ( $F = -c\frac{dx}{dt}$ ).
3. Fuerzas Externas: dependen del tiempo  $t$ . Por ejemplo, una fuerza de excitación periódica ( $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ ).

Al sumar estas fuerzas e igualarlas a la inercia ( $ma$ ), se obtiene la EDO que modela el sistema completo. La EDO de un sistema masa-resorte con amortiguamiento es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (14)$$

### C. Modos normales y frecuencias naturales

Los modos normales de oscilación son los patrones característicos en los que un sistema físico por ejemplo, un conjunto de masas y resortes acoplados puede moverse de forma ordenada y simultánea. En estos modos, todas las masas oscilan con una misma frecuencia angular ( $\omega_n$ ), aunque con diferentes amplitudes y fases relativas. Esta frecuencia compartida se conoce como frecuencia natural del sistema, y es fundamental para predecir cómo responderá ante una perturbación o fuerza externa.

Si una fuerza externa actúa con una frecuencia igual o muy cercana a la frecuencia natural, se produce el fenómeno de resonancia, en el cual la amplitud de las oscilaciones crece significativamente, pudiendo incluso dañar estructuras si no se controla adecuadamente. En sistemas lineales simples, como el oscilador masa-resorte, la ecuación diferencial que describe el movimiento es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (15)$$

donde  $m$  es la masa y  $k$  la constante del resorte. La solución general de esta ecuación es:

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (16)$$

donde la frecuencia natural se define por la ecuación (5). En sistemas acoplados con dos masas y tres resortes, el análisis de los modos normales implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que puede representarse en forma matricial como:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (17)$$

donde  $M$  es la matriz de masas y  $K$  la matriz de rigideces. Al resolver el problema de autovalores asociado

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (18)$$

se obtienen las frecuencias naturales ( $\omega_i$ ) y los modos normales correspondientes. Cada modo describe un patrón distinto de vibración, y el movimiento total del sistema puede representarse como una combinación lineal de todos ellos. Conocer estas frecuencias y modos es esencial en ingeniería para evitar fallos estructurales o vibraciones indeseadas (SimScale, 2023).

### D. Herramientas de Soluciones de EDO

Para analizar este tipo de sistemas dinámicos, se utilizan distintas herramientas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). En el enfoque analítico, destacan métodos como la transformada de Laplace, que convierte el problema del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, facilitando la resolución algebraica de ecuaciones acopladas. Otra técnica común es el uso de autovalores y autovectores, que permite determinar los modos normales resolviendo sistemas matriciales del tipo  $Ax = \lambda x$ , donde  $\lambda$  representa los autovalores asociados a las frecuencias naturales del sistema.

Sin embargo, cuando las ecuaciones se vuelven demasiado complejas o no lineales, los métodos analíticos dejan de ser prácticos. En esos casos, se utilizan métodos numéricos como Euler o Runge-Kutta, los cuales aproximan la evolución temporal del sistema mediante iteraciones discretas. Por ejemplo, en el método de Euler, la actualización del valor de  $x$  se realiza mediante:

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n, t_n) \quad (19)$$

Mientras que el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) mejora la precisión con un promedio ponderado de varias pendientes intermedias. Estas técnicas se implementan fácilmente en programas como Python o MATLAB, que permiten simular y visualizar el comportamiento dinámico de sistemas con múltiples grados de libertad (UMass, 2021).

### E. Contexto de Aplicaciones

**Contexto de aplicaciones** Los sistemas masa-resorte acoplados tienen una gran variedad de aplicaciones prácticas. En los amortiguadores de vehículos, las frecuencias naturales determinan el equilibrio entre confort y estabilidad, evitando que el automóvil resuene ante irregularidades del terreno. En los sistemas antisísmicos, se diseñan estructuras con masas adicionales (denominadas amortiguadores de masa sintonizada) que vibran en contrafase con el edificio, disipando energía y reduciendo daños durante un sismo. También, en los dispositivos piezoelectríficos, las oscilaciones mecánicas se transforman en energía eléctrica aprovechando la frecuencia natural para maximizar la eficiencia del sistema.

Estas aplicaciones se vinculan directamente con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), especialmente con los que promueven la innovación, la infraestructura sostenible y la eficiencia energética (ODS 7, 9 y 11). Comprender los modos normales y las frecuencias naturales permite diseñar tecnologías más seguras, eficientes y sostenibles, alineadas con las necesidades actuales de desarrollo responsable (De Gruyter, 2022). des

### III. PROTOTIPO

Comenzando por la parte de la modelación real del sistema físico, se nos fue asignado un prototipo en específico: un metrónomo de doble resorte. Las instrucciones son las siguientes:

#### Materiales específicos

- Base de cartón y dos plataformas de cartón (intermedia y superior).
- Ligas/resortes; palito con banderita (indicador visual).
- Monedas/tuercas (para ajustar masas); cinta/pegamento; regla y tijeras.

#### Pasos de construcción

1. Corta una base de cartón (approx.  $12 \times 18$  cm), una masa intermedia (approx.  $8 \times 12$  cm) y una plataforma superior.
2. Une la base con la masa intermedia con 2 ligas (resorte 1), colocadas de forma simétrica.
3. Une la masa intermedia con la plataforma superior con otras 2 ligas (resorte 2).
4. Coloca un palito vertical en la plataforma superior y pega en la punta una banderita de papel (indicador visual).
5. Agrega monedas o tuercas como pesos en la masa intermedia y/o superior para ajustar la frecuencia de oscilación.
6. Añade topes de cartón o goma para limitar el movimiento.
7. Verifica que la banderita oscile claramente en un plano vertical.

Para esto, se modeló en *Blender* un prototipo del proyecto. Los elementos rojos constituyen las masas añadidas a las plataformas intermedias, los azules los resortes de compresión, el palito verde es el sistema de referencia vertical, las plataformas verdes son las placas intermedias que unen los resorte en serie, y finalmente la caja gris es

un soporte y protección de cartón. Todo el proyecto completo tiene una medición aproximada de  $12 \times 18 \times 25$  cm de volumen.

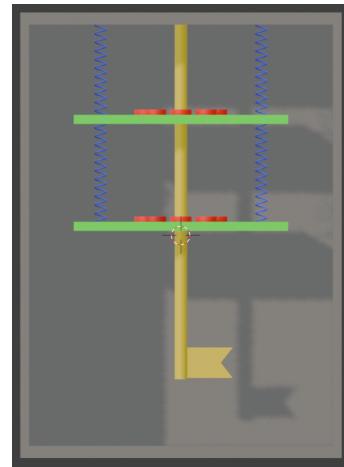


Figura 1: Vista frontal del prototipo

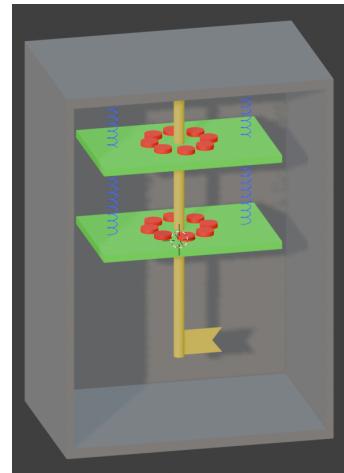


Figura 2: Vista isométrica del prototipo

#### A. Modelo Real

Utilizando la planeación del problema, se construyó el siguiente prototipo sin cambios adicionales, únicamente ignorando la banderilla colgante en medio (con el fin de evitar fricción innecesaria). La elección de los materiales se basó en consideraciones prácticas de costo y disponibilidad de recursos. Para el soporte estructural se utilizó cartón ensamblado con silicona, formando un prisma rectangular que proporciona la rigidez. Los muelles se recuperaron de libretas de espiral usadas. Las masas que componen las plataformas se conforman a partir de una colección de fichas y monedas, asegurando que su peso total no excediera los 150 gramos conjuntamente. Finalmente, una regla fue fijada al costado de la estructura

mediante cinta adhesiva, la cual funciona como el marco de referencia para la medición y el análisis tanto empírico como analítico de los desplazamientos.



Figura 3: Vista frontal del prototipo final

#### IV. MODELADO MATEMÁTICO DEL SISTEMA DOBLE MASA–DOBLE RESORTE

Con el objetivo de predecir el comportamiento dinámico del prototipo construido, siendo un oscilador vertical compuesto por dos masas y dos resortes, se desarrolla un modelo matemático que describe el desplazamiento de cada masa en función del tiempo. Para ello, se emplean principios fundamentales de la dinámica clásica explicados en el marco teórico y simplificación de las constantes de los resortes.

##### A. Planteamiento y Variables

Se define un sistema de coordenadas inercial con eje vertical positivo hacia abajo.

$x_1(t)$  : desplazamiento de la masa superior  $m_1$

$x_2(t)$  : desplazamiento de la masa inferior  $m_2$

Ambas variables se miden respecto a la posición de equilibrio estático, en la cual las fuerzas de gravedad quedan compensadas por la deformación inicial de los resortes. De este modo, el análisis dinámico se centra únicamente en las oscilaciones alrededor de dicho acomodo.

##### B. Análisis de Fuerzas

En (1), se expresa la ecuación de la fuerza restauradora generada por un resorte lineal de constante elástica  $k$  sometido a una deformación  $\Delta L$ .

##### Resorte Superior

La elongación corresponde directamente al desplazamiento de la masa superior  $\Delta L_1 = x_1$ , por lo cual

$$F_{k_1} = -k_{eff_1} x_1$$

##### Resorte Inferior

La deformación depende de la distancia relativa entre ambas masas  $\Delta L_2 = x_2 - x_1$ , generando

$$F_{k_2} = -k_{eff_2}(x_2 - x_1)$$

Una consideración práctica del prototipo es que, en cada nivel, las masas están sostenidas por dos resortes idénticos conectados en paralelo soportando cada plataforma con cada masa.

Para cada nivel, los resortes son del mismo tipo (ecuación (11)). Por lo que, se dice que para la masa 1 (los resortes rosas)  $k_{eff_1} = 2k_1$  y para la masa 2 (los resortes grises)  $k_{eff_2} = 2k_2$ .

Aplicando la ecuación general del movimiento,

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

se construyen las ecuaciones diferenciales de cada masa usando el siguiente diagrama de cuerpo libre.

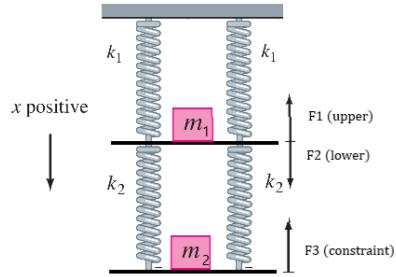


Figura 4: Diagrama de Cuerpo Libre del Prototipo

Para la masa  $m_1$ , se presentan dos fuerzas dadas por ambos pares de resortes. Asumiendo un estiramiento inicial del resorte, hay una fuerza superior (en el sentido negativo) y una inferior (en el sentido positivo). La primera solo es proporcional al desplazamiento de  $m_1$ , mientras que las segundas depende de la distancia relativa entre ambas masas.

Para la masa  $m_2$ , el par de resorte  $k_2$  solo efectúa una fuerza  $F_3$ . Asumiendo estiramiento nuevamente, esta fuerza va en sentido negativo y depende nuevamente del estiramiento relativo entre ambas masas.

### Ecuación de movimiento para $m_1$

Sobre la masa superior actúan la fuerza del resorte superior y la del resorte intermedio

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -2k_1 x_1 + 2k_2(x_2 - x_1) \quad (20)$$

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2(k_1 + k_2)x_1 - 2k_2x_2 = 0 \quad (21)$$

### Ecuación de movimiento para $m_2$

La masa inferior está influenciada únicamente por el resorte intermedio

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -2k_2(x_2 - x_1) \quad (22)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - 2k_2x_1 + 2k_2x_2 = 0 \quad (23)$$

## C. Sistema Acoplado

El comportamiento dinámico queda descrito mediante

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2(k_1 + k_2)x_1 - 2k_2x_2 = 0 \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} - 2k_2x_1 + 2k_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Este modelo refleja el acoplamiento entre las masas, donde el desplazamiento de una afecta directamente la otra, generando modos normales de vibración y frecuencias naturales distintas a las de un oscilador simple.

## D. Condiciones Iniciales y Parámetros Físicos

Se consideran los desplazamientos iniciales de cada plataforma respecto al equilibrio

$$x_1(0) = 0,050 - 0,126 \text{ m} = -0,076 \text{ m}$$

$$x_2(0) = 0,115 - (0,126 + 0,006) \text{ m} = -0,017 \text{ m}$$

*Nota:* a las posiciones absolutas iniciales les restamos las posiciones de equilibrio donde el resorte se estira con su respectiva masa. Para la masa 2 acoplada es ligeramente distinto y se resta adicionalmente el estiramiento del resorte 2 únicamente.

Asimismo, las masas se liberan desde el reposo:

$$\frac{dx_1}{dt}(0) = 0, \quad \frac{dx_2}{dt}(0) = 0$$

Estas condiciones iniciales permiten integrar numéricamente el sistema, estudiar la evolución temporal de ambos osciladores y compararla con las oscilaciones

observadas experimentalmente en el prototipo físico.

Una vez planteadas las ecuaciones que gobiernan el sistema, se sustituyeron los parámetros físicos medidos directamente en el prototipo. Las masas fueron obtenidas con una balanza, registrando además su incertidumbre instrumental. Esto permite expresar los valores como

$$m_1 = (0,050 \pm 0,001) \text{ kg} \quad (\text{masa superior}),$$

$$m_2 = (0,082 \pm 0,001) \text{ kg} \quad (\text{masa inferior}).$$

Las constantes de los resortes se determinaron experimentalmente aplicando cargas conocidas y midiendo la elongación estática resultante. Para cada resorte se obtuvo un conjunto de pares  $(\Delta x, F)$ , donde  $F = mg$ . A partir de la Ley de Hooke se calculó  $k$  para cada punto. Posteriormente, se realizó la técnica estadístico de ajuste mediante mínimos cuadrados para reducir el efecto de ruido aleatorio de medición y obtener una estimación más representativa. El video se encuentra en **ANEXOS**. De este procedimiento se obtuvieron:

$$k_1 = 15,519 \text{ N/m} \quad (\text{resorte superior}),$$

$$k_2 = 187,33 \text{ N/m} \quad (\text{resorte inferior}).$$

con  $r^2 = 0,998$  y  $r^2 = 0,9817$ , respectivamente. Como ejemplo, se añade una tabla y gráfica para el resorte rosa y como se concluyó su propia  $k$ .

**Tabla de Valores: Medición de  $k_1$**

$m$ (kg)	$x$ (m)	$F_g = mg$	$\Delta x$	$k$
0.00	0.087	0.0000	0.000	-
0.02	0.102	0.1962	0.015	13.080
0.04	0.113	0.3924	0.026	15.092
0.054	0.123	0.5297	0.036	14.715
0.068	0.131	0.6671	0.044	15.161
0.088	0.143	0.8633	0.056	15.416

Cuadro I: **Ejemplo Calculando  $k_1$**

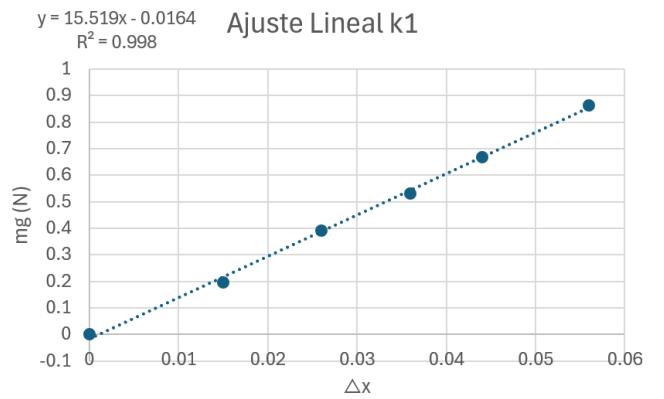


Figura 5: Gráfica de mejor ajuste  $k_1$ . Autoría Propia

La  $k_1$  promedio es equivalente a 14,693 N/m, mientras que la ajustada por mínimos cuadrados es 15,519 N/m. Esta discrepancia se tratará en discusiones, pero se selecciona la segunda opción por el coeficiente de Pearson cercano a 1. Cabe aclarar, se esperaba que la ecuación de ajuste no presente un término constante por la ley de Hooke (no es precisa esta  $k$ ). *El cálculo de  $k_2$  se encuentra en los ANEXOS.*

Reemplazando los valores anteriores en el sistema acoplado planteado previamente (24), se obtiene el modelo particular del prototipo:

$$\begin{cases} 0,050 x_1'' = -31,038 x_1 - 374,66(x_1 - x_2) \\ 0,082 x_2'' = -374,66(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (25)$$

Este sistema es el que emplearemos para comparar el comportamiento teórico con los datos experimentales.

#### *Solución analítica aproximada por modos normales*

El sistema acoplado sin amortiguamiento se puede escribir de forma matricial como

$$M \mathbf{x}''(t) + K \mathbf{x}(t) = 0, \quad (26)$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k_1 + 2k_2 & -2k_2 \\ -2k_2 & 2k_2 \end{bmatrix}$$

Con los valores experimentales

$$m_1 = 0,050 \text{ kg}, \quad m_2 = 0,082 \text{ kg},$$

$$k_1 = 15,519 \text{ N/m}, \quad k_2 = 187,33 \text{ N/m},$$

la ecuación matricial queda completamente determinada. Para encontrar los modos normales se busca una solución del tipo

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v} \cos(\omega t),$$

lo que lleva al problema de autovalores

$$(K - \omega^2 M) \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

o equivalentemente

$$\det(K - \omega^2 M) = 0. \quad (28)$$

Al resolver este problema computacionalmente se obtienen dos frecuencias angulares naturales aproximadas

$$\omega_1 \approx 111,60 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 \approx 15,09 \text{ rad/s},$$

cada una asociada a un modo normal de oscilación (un eigenvector distinto para el par  $(x_1, x_2)$ ).

Suponiendo las condiciones iniciales usadas en el experimento, por eigenvectores de modos normales y la combinación lineal se obtiene la siguiente solución analítica aproximada en metros

$$x_1 \approx -0,0390 \cos(15,106 t) - 0,0370 \cos(111,63 t) \quad (29)$$

$$x_2 \approx -0,0479 \cos(15,106 t) + 0,0270 \cos(111,63 t) \quad (30)$$

## V. REGISTRO DE DATOS EXPERIMENTALES

De acuerdo con las recomendaciones metodológicas del protocolo, se realizó el registro ordenado de los desplazamientos verticales de ambas masas en función del tiempo. Las mediciones se expresan en segundos para la variable temporal y en centímetros para los desplazamientos, obtenidos a partir de la posición de equilibrio estático del sistema. (El video ejemplo se encuentra en **ANEXOS**)

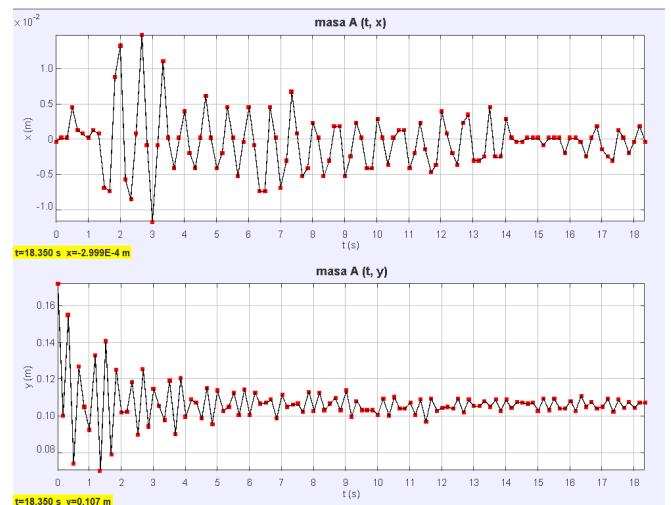


Figura 6:  $x(t)$  de la masa inferior, *Tracker Intento 1*

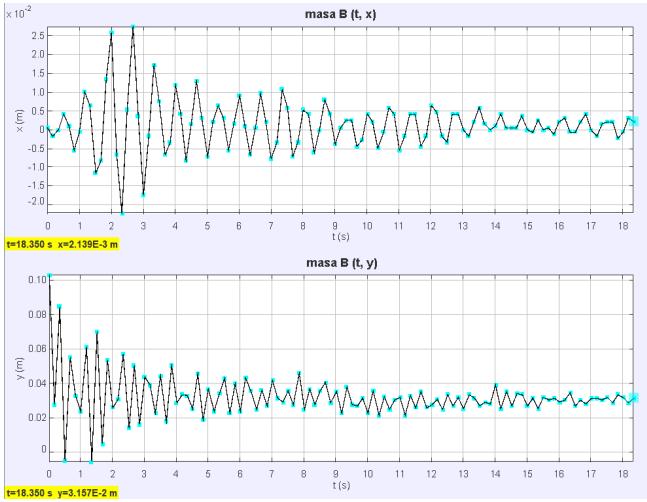


Figura 7:  $x(t)$  de la masa superior, *Tracker Intento 1*

La tabla de los 3 intentos (valores  $t, y_1, y_2$ ) se encuentra en **ANEXOS**. Asimismo, se utilizaron los datos empíricos para realizar una curva de mejor ajuste, utilizando la librería `scipy`, utilizando `curve_fit` con un modelo cosenoidal, pues se utilizará de referencia el modelo resultante en (29) y (30).

Inicialmente, se realizará la curva de mejor ajuste para los datos empíricos, que se encuentran en la tabla de anexos. Por cuestiones de practicidad, únicamente se trabajará con los datos recuperados en el primer intento de oscilación. Es con estos puntos de desplazamiento con respecto al tiempo, que mediante Python y utilizando las librerías mencionadas en el párrafo anterior, se llegó a las siguientes dos ecuaciones para el mejor ajuste de la posición de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ :

$$\begin{cases} x_1(t) = 1,4219 \times 10^{-3} \cos(6,1436t - 0,2328) + 0,1069 \\ x_2(t) = 1,6189 \times 10^{-3} \cos(6,4179t - 0,3976) + 0,0327 \end{cases} \quad (31)$$

Nótese que todo está redondeado a 4 decimales por cuestiones de estética para el reporte, no obstante la simulación se llevó a cabo utilizando la precisión máxima posible por parte de Python. A continuación, se muestra una comparación de los puntos recuperados utilizando Tracker y la curva de mejor ajuste para cada posición respectiva:

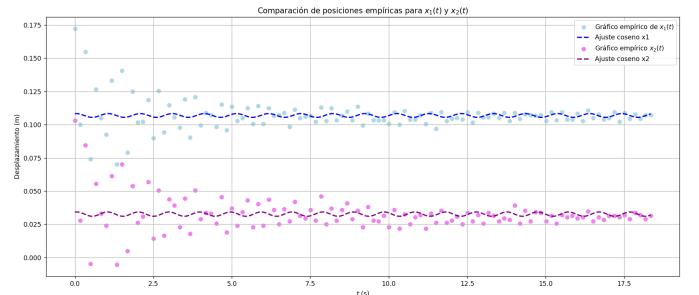


Figura 8: Gráficas de datos empíricos y curva de mejor ajuste de posición. Autoría propia.

Se puede ver como al inicio los puntos se alejan considerablemente de la curva de mejor ajuste en ambas  $x_1$  y  $x_2$ , sin embargo se debe considerar que el modelo de la curva no considera el amortiguamiento existente, por lo tanto su amplitud y frecuencia se mantiene constante, tal cual lo indica (31).

Con base en el sistema de ecuaciones (31), se puede obtener la curva de mejor ajuste de la velocidad, derivando la posición obtenida. A continuación, se muestra el sistema de velocidades para las dos masas distintas, derivando con respecto a  $t$  cada una de las posiciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ :

$$\begin{cases} v_1(t) = 8,7356 \times 10^{-3} \sin(6,1436t - 0,2328) \\ v_2(t) = 1,0390 \times 10^{-2} \sin(6,4179t - 0,3976) \end{cases} \quad (32)$$

A continuación, se encuentra el gráfico con las velocidades de la masa 1 y masa 2:

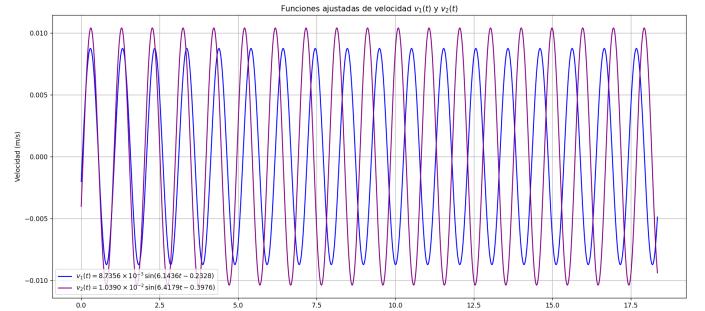


Figura 9: Curva de mejor ajuste de velocidad. Autoría propia.

Estos gráficos muestran el comportamiento de los datos obtenidos al oscilar el prototipo durante la recolección de datos.

## VI. SIMULACIÓN NUMÉRICA

*El repositorio completo se encuentra en ANEXOS.*

Adicional a la solución analítica, se realizará el cálculo numérico para la resolución del sistema de ecuaciones planteado en (25). Para la solución numérica, se utilizó el método de Runge Kutta de 4to orden, pues permite una alta precisión para sistemas con pendientes variables, como resulta ser una oscilación. Además, se conoce que el comportamiento de ondas tiende a ser sinusoidal, por lo tanto este método numérico permite reducir el error total.

Es importante, sin embargo, antes de utilizar el método de Runge Kutta, tener un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. A continuación, se muestra el proceso de cambio de orden para (25), utilizando  $v'_n = x''_n$ :

$$\begin{cases} x'_1(t) = v(t) \\ v'_1(t) = \frac{-k_1 x_1(t) - k_2(x_1(t) - x_2(t))}{m_1} \\ x'_2(t) = v_2(t) \\ v'_2(t) = \frac{-k_2(x_2(t) - x_1(t))}{m_2} \end{cases} \quad (33)$$

Entonces, tomando esto en consideración y sustituyendo los valores de las constantes, se obtiene:

$$\begin{cases} v'_1(t) = \frac{-31,038x_1(t) - 374,66(x_1(t) - x_2(t))}{0,050} \\ v'_2(t) = \frac{-374,66(x_2(t) - x_1(t))}{0,082} \end{cases} \quad (34)$$

Es mediante (34), que se puede llevar a cabo la resolución numérica del sistema mediante Runge Kutta de 4to Orden. A continuación se muestran las gráficas resultantes de la solución analítica obtenida en (29) y (30), comparada con la solución obtenida con Runge Kutta:

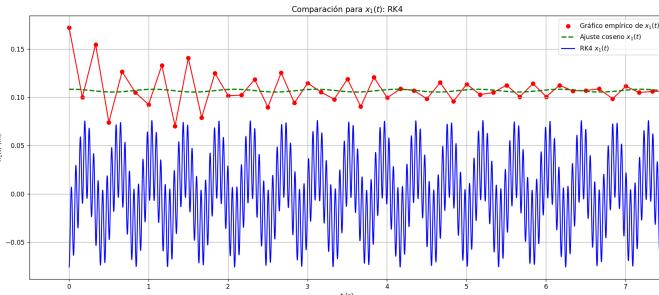


Figura 10: Comparación de solución para  $x'_1(t)$  con Runge Kutta de 4to orden, con respecto a los datos empíricos y curva de mejor ajuste de posición de los mismos. En un rango de 0 a 7.5 s. Autoría propia.

Los datos empíricos, marcados por el color rojo, muestran amplitud inicial de entre 0.09 y 0.13 m, que va decreciendo conforme avanza el tiempo. El ajuste cosenoidal, representado por la línea punteada verde, representa una tendencia suave que describe una oscilación de baja frecuencia y amplitud, pues es un modelo de ajuste generalizado para la amortiguación del sistema. Finalmente, la solución de Runge Kutta

de 4to orden que se visualiza en la línea azul fuerte, se visualiza una oscilación mucho más rápida y con mayor amplitud. No obstante, para RK la amplitud inicial se asemeja considerablemente a la amplitud de los datos empíricos, no obstante debido a que el modelo con RK no tiene amortiguamiento, se mantienen las frecuencias, periodo y oscilaciones constantes, a diferencia de los datos empíricos.

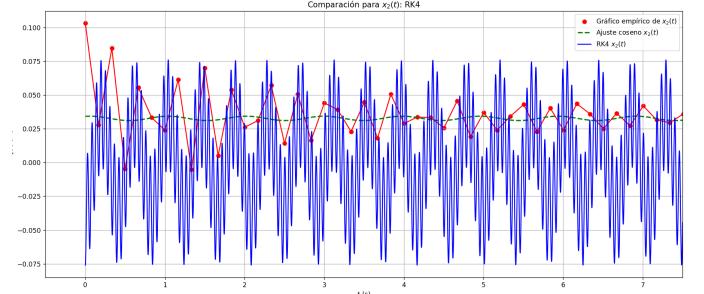


Figura 11: Comparación de solución para  $x'_2(t)$  con Runge Kutta de 4to orden, con respecto a los datos empíricos y curva de mejor ajuste de posición de los mismos. En un rango de 0 a 7.5 s. Autoría propia.

Los datos empíricos, representados nuevamente por los puntos rojos, presentan oscilaciones inicialmente con gran amplitud, que decrece conforme avanza el tiempo para después oscilar muy cerca a la posición de reposo. Mientras tanto, el ajuste cosenoidal indica nuevamente una frecuencia y amplitud baja, pues se ajusta nuevamente a todos los datos empíricos. Además, la solución de RK4 presenta oscilaciones intensas y de alta frecuencia nuevamente, con una alta amplitud, similar a aquella de Runge Kutta de  $x_1(t)$ .

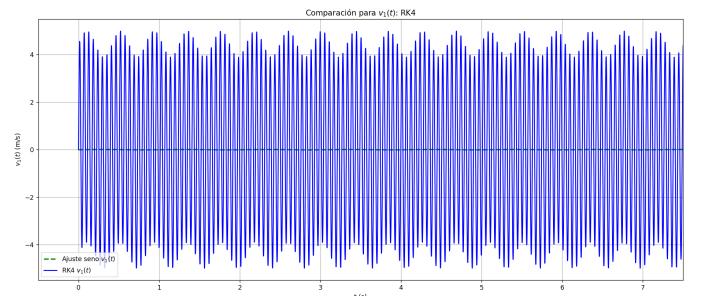


Figura 12: Comparación de solución para  $v'_1(t)$  con Runge Kutta de 4to orden, con respecto a los datos empíricos y curva de mejor ajuste de posición de los mismos. En un rango de 0 a 7.5 s. Autoría propia.

En este gráfico de la velocidad, el ajuste senoidal perteneciente a la derivada del ajuste cosenoidal de la ecuación (32). Se puede notar cómo la solución con Runge Kutta tiene una amplitud mucho mayor que la función de ajuste, además de oscilar con mucha mayor velocidad.

Además, la amplitud de la onda ajustada en color verde es casi imperceptible, pues se ajusta a que el sistema, debido al amortiguamiento, tiende a regresar a su posición de reposo y por ende disminuye la amplitud de la velocidad.

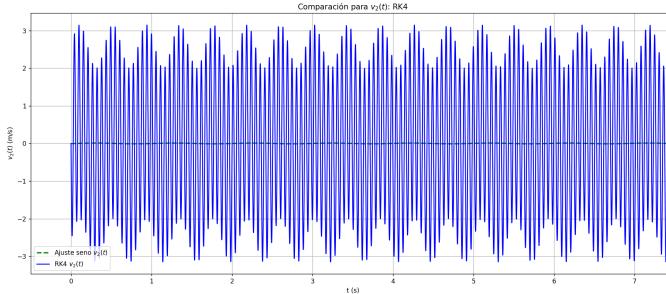


Figura 13: Comparación de solución para  $v'_2(t)$  con Runge Kutta de 4to orden, con respecto a los datos empíricos y curva de mejor ajuste de posición de los mismos. En un rango de 0 a 7.5 s. Autoría propia.

Finalmente, en este gráfico se visualiza un comportamiento similar al de  $v_1(t)$ , pues la amplitud aproximada de la onda senoidal ajustada es casi despreciable, nuevamente porque el sistema tiende al reposo. Mientras tanto, para la solución de RK, se visualiza una oscilación de alta frecuencia y amplitud, aproximadamente de 3 m/s.

En general, para los datos empíricos  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  muestran pequeñas variaciones, predominando baja frecuencia y amplitud. Mientras tanto, las soluciones RK4, tanto en posiciones como en velocidades, contienen oscilaciones demasiado rápidas, con frecuencia alta y de amplitud significativamente mayor a los datos empíricos, especialmente aquellas de velocidad, pues no se considera el amortiguamiento del sistema.

Además, los ajustes de seno y coseno únicamente capturan el comportamiento general del sistema a lo largo del tiempo, no cómo el comportamiento en sí cambia conforme aumenta el tiempo. Esto es algo importante a mencionar, pues genera una discrepancia significativa entre la velocidad y posición ajustada con respecto a aquellos resultados obtenidos con la solución numérica de Runge Kutta.

Finalmente, la diferencia entre el modelo y datos indica la importancia de consideración del amortiguamiento, pues se visualiza cómo el comportamiento de los datos gira en torno a regresar a su posición de reposo, mientras que para el modelo resuelto por Runge Kutta, no se considera esa naturaleza del sistema. Además, puede influir el hecho de que el sistema real no presenta el mismo modo rápido del modelo teórico.

## VII. CONCLUSIONES

El análisis comparativo entre datos empíricos, los ajustes sinusoidales y la solución numérica mediante Runge Kutta permitió un mayor acercamiento al comportamiento dinámico de un sistema masa-resorte con 2 masas distintas. Visualizar las diferencias entre la teoría y práctica es un paso importante, pues considerar cómo distintas variables o factores pueden alterar el comportamiento práctico de algún sistema permite ser más críticos al momento de modelar sistemas.

En el sistema, mientras el modelo numérico presentaba oscilaciones con una amplitud moderada y constante, así como oscilaciones de alta frecuencia, los datos experimentales reflejaban un movimiento más lento y suavizado, siendo resultado del filtrado, submuestreo y manejo humano. Es esta discrepancia entre lo empírico y teórico que permite reflexionar sobre la eficiencia energética del sistema, pues la energía vibratoria permanece activa por más tiempo, mientras que en el experimento se disipa casi inmediatamente.

Entre los aprendizajes principales del proyecto destaca la importancia en identificar las diferencias entre modelos teóricos y reales, entender el rol de la frecuencia natural en sistemas acoplados, y también reconocer cómo el muestreo, manejo de datos, e incluso pequeños redondeos, pueden alterar por completo la calidad de los datos y su capacidad de ajustar a modelos armónicos. Adicional, fue clave observar cómo la velocidad es más sensible a estos errores numéricos debidos a la tendencia del sistema a estar en reposo, lo que motiva a buscar formas de llevar a cabo un análisis más riguroso y cuidadoso al respecto.

Finalmente, este trabajo es una gran oportunidad de implementar mejoras y aplicaciones futuras. Una extensión al trabajo sería incorporar el amortiguamiento en las ecuaciones diferenciales para lograr un modelo más exacto. Además, se podría mejorar la forma de manejo de los datos, pues utilizar funcionalidades en Tracker para obtener la velocidad exacta en un punto e incluso la función de velocidad ajustada, sería óptimo para mejorar la visualización de los gráficos.

Algunas aplicaciones que tiene el modelo es en el diseño de sistemas mecánicos que requieren control de vibraciones, estudio de modos naturales e incluso el análisis de eficiencia energética en estructuras. Principalmente con la mejora de incluir el amortiguamiento, se podría ver una mejora significativa en la relación entre el modelo numérico y empírico.

## VIII. DISCUSIONES

### A. Cálculo y análisis de errores

Uno de principales puntos es analizar la calidad de los datos. Dicho esto, el objetivo es evaluar qué tan consistentes fueron las mediciones y qué tan bien se ajustan al modelo lineal de la Ley de Hooke. Para evaluar la consistencia de los valores obtenidos para la constante elástica  $k$ , se calcularon tres métricas fundamentales: el error absoluto, el error relativo y la desviación estándar de los valores individuales  $k_i$ .

#### Error absoluto

El error absoluto se definió como la diferencia entre el valor de  $k$  obtenido por mínimos cuadrados ( $k_{\text{LS}}$ ) y el valor promedio de los valores individuales ( $k_{\text{prom}}$ ):

$$E_{\text{abs}} = |k_{\text{LS}} - k_{\text{prom}}|.$$

Los resultados obtenidos fueron:

$$E_{\text{abs, rosa}} = |15,519 - 14,692786| = 0,826214 \text{ N/m},$$

$$E_{\text{abs, gris}} = |187,33 - 146,22568| = 41,10432 \text{ N/m}.$$

Esto muestra que el resorte rosa presenta una diferencia mínima entre ambos métodos, mientras que el resorte gris presenta una discrepancia considerable.

#### Error relativo

El error relativo indica qué tan grande es el error absoluto respecto al valor de referencia ( $k_{\text{LS}}$ ):

$$E_{\text{rel}} = \frac{E_{\text{abs}}}{k_{\text{LS}}}.$$

Los resultados fueron:

$$E_{\text{rel, rosa}} = \frac{0,826214}{15,519} = 0,0532 = 5,32\%,$$

$$E_{\text{rel, gris}} = \frac{41,10432}{187,33} = 0,2193 = 21,93\%.$$

Esto confirma que el resorte rosa presenta mediciones mucho más consistentes que el gris.

#### Desviación estándar

La desviación estándar mide la dispersión de los valores individuales de  $k$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2}.$$

Los valores experimentales arrojaron:

$$\sigma_{\text{rosa}} = 0,83701 \text{ N/m},$$

$$\sigma_{\text{gris}} = 30,14093 \text{ N/m}.$$

La diferencia entre las desviaciones es enorme. El resorte rosa tiene valores muy cercanos entre sí, mientras que el resorte gris presenta mediciones altamente dispersas.

#### Causas de discrepancias

Una vez obtenidos los valores de la constante elástica para ambos resortes y analizada su consistencia mediante los errores y la desviación estándar, es necesario identificar los factores que explican por qué los resultados difieren entre sí y por qué un resorte presenta mayor dispersión que el otro.

En primer lugar, los errores instrumentales representan una fuente directa de discrepancia. La báscula utilizada tiene una incertidumbre de  $\pm 1 \text{ g}$ , lo que afecta el valor de la fuerza calculada ( $F = mg$ ). De igual forma, la regla presenta un error de  $\pm 0,1 \text{ cm}$ , el cual influye directamente en la medición de la elongación  $\Delta x$ . Estos errores se propagan al cálculo final de  $k$ .

También se debe considerar el comportamiento no perfectamente lineal de los resortes. Mientras que el resorte rosa mostró una desviación estándar pequeña y un ajuste lineal adecuado, el resorte gris presentó una desviación estándar muy grande ( $\sigma = 30,14 \text{ N/m}$ ). Esto puede ser indicio de que el resorte gris no responde de manera estrictamente lineal en el rango de elongaciones utilizado o que existen otros tipos de factores que afectaron su comportamiento.

Además, el modelo físico empleado hace ciertas simplificaciones, como considerar despreciable la masa del resorte, la masa de la cinta y la ausencia de fricción o resistencia del aire. Aunque estas aproximaciones son necesarias para el modelo teórico, pueden introducir discrepancias entre la teoría y el experimento.

## B. Reflexión sobre los Objetivos de Desarrollo Sostenible

Este proyecto también nos permitió ver cómo un tema aparentemente simple, como estudiar un resorte, puede relacionarse con problemas y metas mucho más grandes. En particular, esta experiencia conecta con varios Objetivos de Desarrollo Sostenible, sobre todo los que tienen que ver con energía y tecnología (ODS 7 y 9), y con el desarrollo de ciudades e infraestructuras más seguras y eficientes (ODS 11).

Al analizar cómo funciona un sistema mecánico y cómo se puede optimizar, estamos practicando exactamente la clase de pensamiento que se necesita para diseñar tecnologías que usen mejor la energía y reduzcan desperdicios. Esto puede ir desde mecanismos que almacenen energía de manera más eficiente, hasta sistemas que reduzcan vibraciones o mejoren la estabilidad de estructuras.

También vimos cómo el trabajo experimental, el análisis de datos y la modelación matemática ayudan a desarrollar habilidades que son clave para la innovación. Esto se relaciona directamente con el ODS 9, que busca que las nuevas tecnologías y las infraestructuras sean más sostenibles y estén mejor diseñadas. Dicho esto, aprender a mejorar un sistema físico nos prepara para enfrentar retos tecnológicos más grandes en el futuro.

## C. Reflexión sobre el Uso de IA

Nosotros abordamos el desarrollo de este proyecto de dinámica de dos masas acopladas integrando la Inteligencia Artificial, específicamente Gemini, como un soporte. Además de haber consultado las fuentes bibliográficas convencionales y recurrir a estudiantes de semestres superiores de IFI, utilizamos la IA para resolver dudas puntuales sobre la formulación precisa del modelo de resorte acoplado y para validar la rigurosidad de nuestra solución. En la parte de implementación, Gemini fue usado para aprender y optimizar funciones específicas de Python, esencial para la comparación empírica-analítica/numérica, ayudándonos con la aproximación de una función cosenoide y la generación de gráficas específicas de visualización. En el ámbito teórico, nos aseguramos que la resolución analítica tuviera sentido físico al utilizar la IA para verificar los cálculos de las frecuencias naturales y los eigenvectores de los modos normales, confirmando así que la combinación lineal de la solución mostrara la aparición pura de senos (ausencia de funciones seno). De esta forma, la IA nos permitió enfocarnos en la interpretación y validación de los resultados, sin detenernos mucho tiempo en asuntos técnicos.

## IX. REFERENCIAS

De Gruyter. (2022). *Vibration energy harvesting systems*. De Gruyter.

SimScale. (2023). *What is natural frequency?* Recuperado de <https://www.simscale.com>

University of Massachusetts. (2021). *Small Oscillations and Normal Modes*. UMass Physics Department.

Zill, D. G. (2016). *Advanced Engineering Mathematics (6th ed.)*. Jones & Bartlett Learning.

## X. ANEXOS

### A. Recursos Tracker Analysis

#### Primer intento de medición

t (s)	Masa inf. (m)	Masa sup. (m)
0.0000	0.1722	0.1031
0.1667	0.1001	0.0278
0.3333	0.1549	0.0847
0.5000	0.0741	-0.0047
0.6667	0.1267	0.0554
0.8333	0.1050	0.0332
1.0000	0.0925	0.0240
1.1667	0.1332	0.0614
1.3333	0.0703	-0.0053
1.5000	0.1408	0.0700
1.6683	0.0790	0.0050
1.8350	0.1250	0.0538
2.0017	0.1017	0.0262
2.1683	0.1023	0.0310
2.3350	0.1185	0.0570
2.5017	0.0898	0.0142
2.6683	0.1256	0.0505
2.8350	0.0942	0.0164
3.0017	0.1148	0.0440
3.1683	0.1055	0.0392
3.3367	0.0980	0.0229
3.5033	0.1191	0.0446
3.6700	0.0904	0.0180
3.8367	0.1207	0.0505
4.0033	0.0996	0.0289
4.1700	0.1088	0.0337
4.3367	0.1072	0.0332
4.5033	0.0985	0.0256
4.6700	0.1153	0.0457
4.8367	0.0958	0.0191
5.0033	0.1137	0.0370
5.1717	0.1028	0.0240
5.3383	0.1050	0.0343
5.5050	0.1126	0.0430
5.6717	0.1007	0.0229
5.8383	0.1142	0.0402
6.0050	0.1007	0.0240
6.1717	0.1126	0.0435

6.3383	0.1066	0.0359	17.0167	0.1050	0.0316
6.5050	0.1072	0.0251	17.1833	0.1093	0.0316
6.6717	0.1088	0.0365	17.3500	0.1023	0.0305
6.8400	0.0985	0.0272	17.5167	0.1088	0.0321
7.0067	0.1115	0.0419	17.6833	0.1045	0.0289
7.1733	0.1050	0.0316	17.8500	0.1077	0.0337
7.3400	0.1061	0.0294	18.0167	0.1045	0.0321
7.5067	0.1066	0.0359	18.1833	0.1072	0.0289
7.6733	0.1023	0.0278	18.3500	0.1072	0.0316

Cuadro II: Primer intento de medición

Segundo intento de medición					
		t (s)	Masa inf. (m)	Masa sup. (m)	
8.3400	0.1131	0.0462	0.0000	0.1817	0.1120
8.0067	0.1028	0.0251	0.1667	0.0752	0.0067
8.1733	0.1126	0.0370	0.3350	0.1661	0.1000
8.3400	0.1034	0.0278	0.5017	0.1029	0.0052
8.5083	0.1066	0.0359	0.6683	0.1342	0.0751
8.6750	0.1099	0.0408	0.8350	0.1336	0.0390
8.8417	0.1034	0.0289	1.0017	0.1011	0.0390
9.0083	0.1137	0.0354	1.1683	0.1564	0.0661
9.1750	0.0996	0.0229	1.3350	0.0891	0.0135
9.3417	0.1082	0.0381	1.5017	0.1498	0.0834
9.5083	0.1034	0.0278	1.6683	0.1107	0.0353
9.6750	0.1034	0.0272	1.8350	0.1288	0.0616
9.8417	0.1034	0.0316	2.0033	0.1348	0.0511
10.0083	0.1007	0.0229	2.1700	0.1035	0.0451
10.1767	0.1093	0.0359	2.3367	0.1438	0.0759
10.3433	0.1001	0.0218	2.5033	0.1065	0.0300
10.5100	0.1104	0.0327	2.6700	0.1366	0.0631
10.6767	0.1039	0.0251	2.8367	0.1191	0.0330
10.8433	0.1039	0.0305	3.0033	0.1234	0.0548
11.0100	0.1072	0.0321	3.1700	0.1252	0.0586
11.1767	0.1007	0.0218	3.3367	0.1089	0.0368
11.3433	0.1088	0.0332	3.5033	0.1378	0.0593
11.5100	0.0969	0.0262	3.6717	0.1131	0.0368
11.6767	0.1093	0.0354	3.8383	0.1276	0.0661
11.8450	0.1028	0.0262	4.0050	0.1209	0.0654
12.0117	0.1045	0.0278	4.1717	0.1179	0.0405
12.1783	0.1050	0.0310	4.3383	0.1318	0.0571
12.3450	0.1039	0.0251	4.5050	0.1131	0.0420
12.5117	0.1093	0.0337	4.6717	0.1306	0.0631
12.6783	0.1017	0.0272	4.8383	0.1203	0.0458
12.8450	0.1088	0.0321	5.0050	0.1203	0.0458
13.0117	0.1055	0.0256	5.1717	0.1264	0.0541
13.1783	0.1055	0.0337	5.3400	0.1149	0.0420
13.3450	0.1082	0.0316	5.5067	0.1324	0.0639
13.5133	0.1050	0.0272	5.6733	0.1125	0.0390
13.6800	0.1088	0.0294	5.8400	0.1282	0.0526
13.8467	0.1028	0.0283	6.0067	0.1191	0.0443
14.0133	0.1088	0.0392	6.1733	0.1234	0.0496
14.1800	0.1045	0.0256	6.3400	0.1282	0.0586
14.3467	0.1077	0.0354	6.5067	0.1149	0.0428
14.5133	0.1072	0.0272	6.6733	0.1300	0.0571
14.6800	0.1066	0.0343	6.8400	0.1131	0.0420
14.8467	0.1072	0.0337	7.0083	0.1276	0.0548
15.0133	0.1028	0.0272	7.1750	0.1203	0.0496
15.1817	0.1093	0.0316	7.3417	0.1185	0.0451
15.3483	0.1034	0.0256	7.5083	0.1276	0.0526
15.5150	0.1093	0.0321	7.6750	0.1155	0.0428
15.6817	0.1039	0.0305	7.8417	0.1300	0.0571
15.8483	0.1039	0.0316			
16.0150	0.1082	0.0294			
16.1817	0.1028	0.0305			
16.3483	0.1110	0.0348			
16.5150	0.1050	0.0272			
16.6817	0.1077	0.0305			
16.8483	0.1039	0.0283			

8.0083	0.1197	0.0420
8.1750	0.1252	0.0496
8.3417	0.1215	0.0435
8.5083	0.1197	0.0481
8.6767	0.1252	0.0578
8.8433	0.1167	0.0398
9.0100	0.1276	0.0503
9.1767	0.1179	0.0405
9.3433	0.1246	0.0518
9.5100	0.1234	0.0481
9.6767	0.1173	0.0405
9.8433	0.1264	0.0518
10.0100	0.1149	0.0383
10.1767	0.1270	0.0518
10.3450	0.1203	0.0413
10.5117	0.1221	0.0451
10.6783	0.1227	0.0473
10.8450	0.1203	0.0451
11.0117	0.1276	0.0541
11.1783	0.1179	0.0451
11.3450	0.1270	0.0533
11.5117	0.1191	0.0473
11.6783	0.1264	0.0511
11.8450	0.1252	0.0496
12.0117	0.1203	0.0420
12.1800	0.1264	0.0511
12.3467	0.1191	0.0420
12.5133	0.1276	0.0518
12.6800	0.1215	0.0443
12.8467	0.1246	0.0496
13.0133	0.1252	0.0466
13.1800	0.1221	0.0458
13.3467	0.1276	0.0511
13.5133	0.1203	0.0420
13.6800	0.1252	0.0503
13.8483	0.1197	0.0435
14.0150	0.1240	0.0526
14.1817	0.1221	0.0488
14.3483	0.1203	0.0451
14.5150	0.1227	0.0511
14.6817	0.1215	0.0435
14.8483	0.1252	0.0526
15.0150	0.1191	0.0435
15.1817	0.1252	0.0481
15.3483	0.1227	0.0473
15.5167	0.1203	0.0458
15.6833	0.1270	0.0511
15.8500	0.1203	0.0435
16.0167	0.1258	0.0481
16.1833	0.1209	0.0420
16.3500	0.1252	0.0496
16.5167	0.1234	0.0481
16.6833	0.1215	0.0451
16.8500	0.1234	0.0488
17.0167	0.1203	0.0435
17.1850	0.1246	0.0511
17.3517	0.1246	0.0428
17.5183	0.1227	0.0473
17.6850	0.1215	0.0466
17.8517	0.1227	0.0481
18.0183	0.1264	0.0511
18.1850	0.1203	0.0435
18.3517	0.1264	0.0458

Cuadro III: Segundo intento de medición

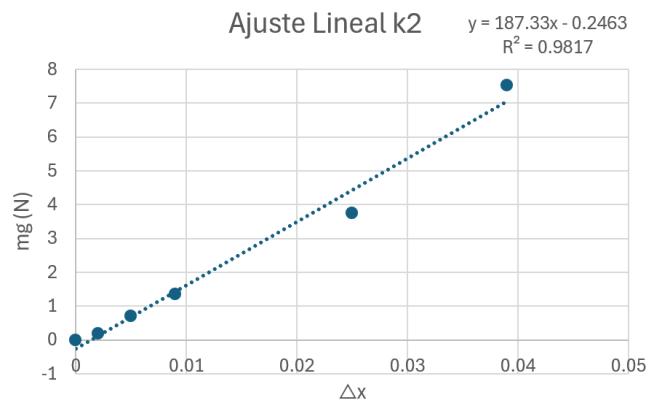
Tercer intento de medición		
t (s)	Masa inf. (m)	Masa sup. (m)
0.0000	0.1849	0.1213
0.1667	0.0888	0.0144
0.3333	0.1717	0.0990
0.5000	0.1147	0.0384
0.6683	0.1405	0.0642
0.8350	0.1435	0.0714
1.0017	0.1080	0.0354
1.1683	0.1657	0.0912
1.3350	0.0966	0.0132
1.5017	0.1549	0.0846
1.6683	0.1141	0.0378
1.8350	0.1261	0.0510
2.0017	0.1405	0.0624
2.1683	0.1080	0.0342
2.3367	0.1501	0.0774
2.5033	0.1092	0.0372
2.6700	0.1092	0.0702
2.8367	0.1261	0.0468
3.0033	0.1297	0.0594
3.1700	0.1363	0.0702
3.3367	0.1153	0.0432
3.5033	0.1441	0.0690
3.6700	0.1171	0.0402
3.8367	0.1375	0.0666
4.0050	0.1261	0.0546
4.1717	0.1243	0.0498
4.3383	0.1357	0.0582
4.5050	0.1195	0.0468
4.6717	0.1351	0.0762
4.8383	0.1183	0.0522
5.0050	0.1339	0.0522
5.1717	0.1291	0.0540
5.3383	0.1255	0.0522
5.5050	0.1339	0.0618
5.6733	0.1177	0.0426
5.8400	0.1321	0.0570
6.0067	0.1219	0.0432
6.1733	0.1249	0.0522
6.3400	0.1297	0.0564
6.5067	0.1207	0.0420
6.6733	0.1327	0.0546
6.8400	0.1219	0.0402
7.0067	0.1333	0.0582
7.1733	0.1243	0.0504
7.3417	0.1279	0.0486
7.5083	0.1321	0.0564
7.6750	0.1207	0.0498
7.8417	0.1327	0.0600
8.0083	0.1201	0.0450
8.1750	0.1291	0.0516
8.3417	0.1273	0.0474
8.5083	0.1243	0.0522
8.6750	0.1303	0.0588
8.8417	0.1195	0.0426
9.0100	0.1219	0.0546
9.1767	0.1207	0.0444
9.3433	0.1267	0.0546
9.5100	0.1303	0.0492

9.6767	0.1231	0.0432
9.8433	0.1309	0.0522
10.0100	0.1225	0.0426
10.1767	0.1333	0.0546
10.3433	0.1267	0.0456
10.5100	0.1267	0.0492
10.6767	0.1315	0.0504
10.8450	0.1261	0.0492
11.0117	0.1309	0.0582
11.1783	0.1243	0.0498
11.3450	0.1321	0.0546
11.5117	0.1267	0.0474
11.6783	0.1303	0.0570
11.8450	0.1321	0.0522
12.0117	0.1267	0.0444
12.1783	0.1315	0.0522
12.3450	0.1237	0.0480
12.5133	0.1297	0.0582
12.6800	0.1255	0.0474
12.8467	0.1285	0.0516
13.0133	0.1279	0.0498
13.1800	0.1255	0.0522
13.3467	0.1309	0.0558

Cuadro IV: Tercer intento de medición

**B. Constante  $k_2$** **Tabla de Valores: Medición de  $k_2$** 

$m$ (kg)	$x$ (m)	$F_g = mg$	$\Delta x$	$k$
0.000	0.061	0.0000	0.000	-
0.020	0.063	0.1962	0.002	98.100
0.072	0.066	0.7063	0.005	141.264
0.137	0.070	1.3440	0.009	149.330
0.381	0.086	3.7376	0.025	149.504
0.767	0.100	7.5243	0.039	192.930

Cuadro V: Ejemplo Calculando  $k_2$ Figura 14: Gráfica de mejor ajuste  $k_1$ . Autoría Propia

### C. Hipervínculos

**Video Calculando K del Resorte**

[Enlace al Video de YouTube](#)

[Enlace al Video de YouTube](#)

**Repositorio GITHUB**

**Video Ejemplo Prototipo**

[Enlace al Código](#)