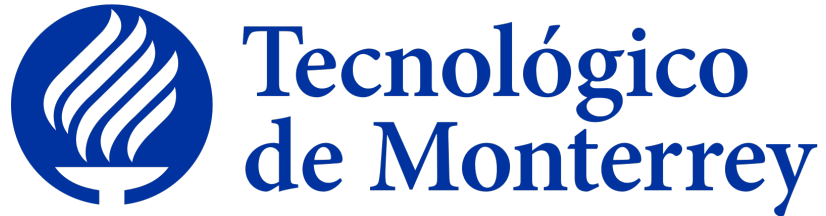


Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey  
Campus Monterrey



Modelación de sistemas con ecuaciones diferenciales

**Nombre del profesor titular:**

*Salvador García Lumbreras*

**Nombre de la profesora cotitular:**

*Mireya Isabel Sanchez Velazquez*

## Situación Reto — Avance 1:

Vehículos autónomos

### Integrantes

Emilio Alejandro González Huerta — A01286440

Laurie Camila Hernández Pacheco — A01286569

Elías Alejandro Corral Rodríguez — A01743624

Hugo Edel Gamboa Sesma — A00841605

Fecha: 25/11/2025

## CONTENTS

Abstract	2
I. Introducción	2
II. Metodología	2
III. Resultados	3
A. Solución analítica	3
B. Solución numérica	5
IV. Discusión	6
V. Referencias	6
VI. Anexos	7

## ABSTRACT

En este documento se plantea un modelo matemático capaz de simular el comportamiento de una columna de  $N$  vehículos automatizados, considerando sensores de velocidad y posición para obtener la aceleración de los autos según los datos que recopila de él mismo y de su predecesor. Debido a la alta complejidad de la solución analítica para nuestro problema, se calculó la solución numérica utilizando Python por medio de Runge Kutta de cuarto orden por su precisión. Con los resultados fue posible determinar el comportamiento de los vehículos y qué parámetros son los ideales para un óptimo comportamiento y con ello evitar colisiones.

## I. INTRODUCCIÓN

La llegada de los vehículos autónomos promete revolucionar el sector del transporte con el potencial de mejorar significativamente la seguridad vial y la eficiencia del flujo de tráfico en las ciudades. Sin embargo, la plena integración de esta tecnología se enfrenta a obstáculos que van más allá de lo técnico, incluyendo la necesidad de restablecer la confianza ciudadana que se ha visto afectada por accidentes mediáticos. Para fomentar la adopción generalizada de estos vehículos, es crucial complementar el desarrollo de los algoritmos con un estudio detallado de la dinámica de tráfico en condiciones reales.

Dicho lo anterior, este reporte se centra en la creación de un modelo para dos escenarios de tráfico en forma de columna de  $N$  vehículos automatizados liderada por uno guía. La suposición fundamental es que cada vehículo autónomo determina su aceleración (función de respuesta) basándose únicamente en los datos del vehículo que tiene justo adelante. Así, se construirá un modelo de

seguimiento de vehículos que establecerá una relación directa entre la aceleración, la diferencia de velocidad con el auto precedente y la distancia relativa que los separa. La naturaleza acoplada del sistema de ecuaciones requerirá el empleo de métodos de simulación numérica para evaluar la estabilidad y el modo en que las perturbaciones se propagan a lo largo de la fila. Los hallazgos de este análisis proveerán el conocimiento base para diseñar sistemas de comunicación vehículo a vehículo eficaces, optimizando la capacidad en las avenidas y fortaleciendo la sensación de seguridad.

## II. METODOLOGÍA

El comportamiento de un flujo de tráfico es fundamental para el diseño de sistemas de transporte inteligentes. El modelo propuesto anteriormente describe cómo un carro seguidor (carro  $i$ ) ajusta su aceleración en respuesta al movimiento del coche que le precede (carro  $i - 1$ ).

La aceleración del vehículo seguidor  $\ddot{x}_i$  se rige por los siguientes principios, los cuales son proporcionales a las diferencias de velocidad y posición:

(1) La aceleración es proporcional a la velocidad relativa entre el vehículo precedente y el vehículo seguidor,  $(v_{i-1} - v_i)$ . Un valor positivo (el coche de adelante acelera o se aleja) induce una aceleración en el coche seguidor, mientras que un valor negativo induce una desaceleración.

$$\ddot{x}_i \propto \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1} \quad (1)$$

(2) La aceleración es proporcional al espaciamiento: la diferencia entre la distancia observada entre el carro seguidos y el siguiente con una distancia de seguridad deseada.

$$\ddot{x}_i \propto x_i - x_{i-1} - s \quad (2)$$

(3) Se introduce una distancia de seguridad dinámica  $s$ , que depende de la velocidad actual del carro seguidor.

$$s = s_o + L_{i-1} + \gamma v_i = \delta + \gamma v_i \quad (3)$$

donde  $s_o$  es una mínima distancia entre carros,  $L_{i-1}$  es la distancia del siguiente carro. Todo esto se colapsa a únicamente  $\delta$  asumiendo que todos los carros son idénticos y siempre se prioriza la misma distancia.

(4) Se asume que la detección, el procesamiento y la respuesta de la máquina (o del conductor) a un cambio en el carro de adelante e instantáneos. No hay un retardo en la respuesta de la aceleración del carro  $i$  en el tiempo  $t$ .

Combinando los factores de sensibilidad para el espaciamiento y la velocidad, la EDO de segundo orden que

describe la respuesta del movimiento del vehículo  $i$  es

$$\ddot{x}_i = \alpha (x_{i-1}(t) - x_i(t) - \delta - \gamma v_i(t)) + \beta (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) \quad (4)$$

Observe que todo el estado de los carros, tanto la posición y velocidad del carro  $i - 1$  como la distancia de seguridad  $s$ . Para facilitar la solución analítica y la simulación numérica, la EDO de 2do orden se descompone en un sistema acoplado de dos EDOs de 1er orden usando

$$v_i = \dot{x}_i \quad v_{i-1} = \dot{x}_{i-1} \quad (5)$$

$$\dot{v}_i = \ddot{x}_i \quad \dot{v}_{i-1} = \ddot{x}_{i-1} \quad (6)$$

El sistema fundamental que se está modelando es el siguiente

$$\dot{x}_i = v_i \quad (7)$$

$$\dot{v}_i = \alpha (x_{i-1}(t) - x_i(t) - s(v_i(t))) + \beta (v_{i-1}(t) - v_i(t)) \quad (8)$$

$$s = \delta + \gamma v_i(t) \quad (9)$$

Además, es importante señalar que este modelo constituye una linearización de un caso más general. Originalmente, la aceleración podría depender de manera combinada y no lineal de múltiples factores, por ejemplo a través de expresiones del tipo

$$\ddot{x}_i = k f_1(x_{i-1}, x_i, v_i) \cdot f_2(\dot{x}_{i-1}, \dot{x}_i) \quad (10)$$

donde las interacciones entre velocidad relativa, distancia, percepción y decisión del conductor no necesariamente son lineales ni independientes. Sin embargo, para efectos de análisis matemático y para capturar el comportamiento esencial del sistema, se adopta una forma lineal donde dichos factores se tratan como proporcionales por separado. Esta simplificación permite obtener ecuaciones manejables sin perder la estructura fundamental del fenómeno.

Asimismo, el modelo puede interpretarse como un sistema de corrección instantánea más que un sistema de optimización. El vehículo no está buscando una trayectoria óptima ni resolviendo un problema, sino está reaccionando continuamente a los valores actuales de distancia y velocidad proporcionados en la ecuación diferencial. El auto seguidor ajusta su aceleración de forma inmediata en función del error observado en cada instante, reproduciendo el comportamiento de un sistema correctivo local, típico en modelos de seguimiento de carro.

Existen otros modelos de seguimiento vehicular mucho más elaborados, como el Intelligent Driver Model (IDM), los modelos de Gipps, formulaciones con retardos, efectos estocásticos, funciones de saturación o controles más avanzados. Todos ellos comparten la misma premisa: describir cómo un auto decide su aceleración en función

del estado del vehículo precedente. El presente modelo conserva esta idea, pero se mantiene deliberadamente en una forma más analítica y tratable.

Finalmente, el objetivo de este estudio es obtener la solución analítica de la dinámica del sistema, o al menos aproximarse a la expresión cerrada más cercana posible. Esta formulación permitirá no solo comprender la solución y el movimiento interno de cada carro, sino también comparar directamente con simulaciones numéricas implementadas en Python. Al final, la solución numérica servirá como validación de la dinámica teórica, asegurando conclusiones sólidas sobre el comportamiento del flujo vehicular descrito.

### III. RESULTADOS

#### A. Solución analítica

Para iniciar el planteamiento de la solución analítica se retoma la ecuación diferencial que expresa la dinámica del sistema:

$$\ddot{x}_i = \alpha (x_{i-1}(t) - x_i(t) - \delta - \gamma v_i(t)) + \beta (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) \quad (11)$$

Tras manipular la expresión, se obtiene una forma en la que uno de los lados de la igualdad depende exclusivamente de el vehículo actual, y el otro depende únicamente del coche delantero y términos constantes:

$$\ddot{x}_i + (\beta + \alpha\gamma) \dot{x}_i + \alpha x_i = \alpha x_{i-1} + \beta \dot{x}_{i-1} - \delta\alpha \quad (12)$$

Este modelo tiene muchas bondades. Es fácilmente resoluble de manera analítica, permite modelar el primer coche como la solución a la parte homogénea del problema y definir de manera secuencial la mecánica de cada automóvil posterior, y tiene soluciones cerradas, simples y continuas, sin embargo, ofrece algunos problemas. Este sistema tendrá soluciones exponenciales. Esto supondría que tanto la posición, como la rapidez y la aceleración del vehículo aumentan indefinidamente. Este comportamiento no es realista para el flujo de vehículos, por lo que se optó por modelar la aceleración de una manera diferente.

Para este modelo se presupuso que la velocidad aumentaba de forma logística, esto es, crecimiento que se detiene al llegar a un límite. El modelo se basa en la siguiente expresión:

$$\frac{dv}{dt} = a_i = \rho (v_{i-1} - v_i) \left(1 - \frac{v_i}{\Lambda}\right) \quad (13)$$

o en términos de  $x_i$

$$\ddot{x}_i = \rho (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \left(1 - \frac{\dot{x}_i}{\Lambda}\right) \quad (14)$$

siendo  $\rho$  una constante de capacidad de reacción del conductor y  $\Lambda$  la velocidad límite escogida.

Tras definir la aceleración de este modo se hicieron las sustituciones pertinentes en la ecuación diferencial antes mostrada

$$\begin{aligned} \rho (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) \left( 1 - \frac{\dot{x}_i}{\Lambda} \right) + (\beta + \alpha\gamma) \dot{x}_i + \alpha x_i \\ = \alpha (x_{i-1} - \delta) + \beta \dot{x}_{i-1} \end{aligned} \quad (15)$$

Expandiendo se llega a la expresión.

$$\begin{aligned} \rho \left( \dot{x}_{i-1} - \frac{\dot{x}_{i-1}\dot{x}_i}{\Lambda} - \dot{x}_i + \frac{\dot{x}_i^2}{\Lambda} \right) + (\beta + \alpha\gamma) \dot{x}_i + \alpha x_i \\ = \alpha (x_{i-1} - \delta) + \beta \dot{x}_{i-1} \end{aligned} \quad (16)$$

Esta ecuación que modela la dinámica del automóvil  $i$ -ésimo es de primer orden, pero no es lineal. Para encontrar una solución analítica se concentrará en el coche 0. En primer lugar, sea  $v_{i-1} = \Lambda, i = 0$  ya que esta es la velocidad a la que espera llegar el automóvil y sea  $x_{i-1} = \delta, i = 0$ , para guardar una distancia de seguridad. Tras plantear esto la ecuación queda:

$$\begin{aligned} \left( \rho\Lambda - \rho \frac{\Lambda\dot{x}_0}{\Lambda} - \rho\dot{x}_0 + \rho \frac{\dot{x}_0^2}{\Lambda} \right) + (\beta + \alpha\gamma) \dot{x}_0 + \alpha x_0 \\ = \alpha (\delta - \delta) + \beta\Lambda \end{aligned} \quad (17)$$

Reordenando:

$$\left( \frac{\rho\dot{x}_0}{\Lambda} - 2\rho + \beta + \alpha\gamma \right) \dot{x}_0 + \alpha x_0 = (\beta - \rho) \Lambda \quad (18)$$

Para eliminar el grado 2, se deriva respecto a t:

$$\frac{2\dot{x}_0\ddot{x}_0\rho}{\Lambda} + (-2\rho + \beta + \alpha\gamma) \ddot{x}_0 + \alpha\dot{x}_0 = 0 \quad (19)$$

reescribiendo en términos de v:

$$\frac{2v_0\dot{v}_0\rho}{\Lambda} + (-2\rho + \beta + \alpha\gamma) \dot{v}_0 + \alpha v_0 = 0 \quad (20)$$

y recordando que  $\dot{v}_0 = \frac{dv}{dt}$  se separan variables:

$$\frac{dv}{dt} \left( \frac{2v_0\rho}{\Lambda} - 2\rho + \beta + \alpha\gamma \right) = -\alpha v_0 \quad (21)$$

$$\frac{1}{v_0} \left( \frac{2v_0\rho}{\Lambda} - 2 + \beta + \alpha\gamma \right) dv = -\alpha dt \quad (22)$$

lo cual tras integrar queda:

$$\frac{2\rho}{\Lambda} v_0 + (-2\rho + \beta + \alpha\gamma) \ln v_0 = -\alpha t + C_1 \quad (23)$$

Dividiendo entre  $(-2\rho + \beta + \alpha\gamma)$  por ambos lados se llega a:

$$\frac{2\rho v_0}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} + \ln v = \frac{-\alpha t + C_1}{(-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} \quad (24)$$

Tras aplicar la exponencial se llega a la siguiente expresión:

$$v e^{\frac{2\rho v_0}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)}} = e^{\frac{-\alpha t + C_1}{-2\rho + \beta + \alpha\gamma}} \quad (25)$$

Se identifica que corresponde con la definición de la función W de Lambert

$$xe^x = K \Rightarrow x = W(K)$$

Para ajustar a la definición, se multiplica por  $\frac{2\rho}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)}$  por ambos lados, quedando:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho v_0}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} e^{\frac{2\rho v_0}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)}} \\ = \frac{2\rho}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} e^{\frac{2\rho}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)}} \end{aligned} \quad (26)$$

aplicando la definición:

$$\frac{2\rho v_0}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} = W \left( \frac{2\rho}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} e^{\frac{-\alpha t + C_1}{-2\rho + \beta + \alpha\gamma}} \right) \quad (27)$$

por último, despejando  $v_0$

$$v_0 = \left( \frac{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)}{2\rho} \right) W \left( \frac{2\rho}{\Lambda (-2\rho + \beta + \alpha\gamma)} e^{\frac{-\alpha t + C_1}{-2\rho + \beta + \alpha\gamma}} \right) \quad (28)$$

Llegando así a una función explícita de  $v$  Esta función de  $v$  no es fácilmente integrable, ya que no se puede asegurar que una primitiva para una función que incluye la función W exista. De existir tal integral, esta sería la posición  $x_i(t)$

Esta solución aplica para el Auto 0, por lo que es importante considerar que para los siguientes coches  $i$ , se debe calcular de manera iterativa el desarrollo del sistema, utilizando como componentes de la solución particular los valores obtenidos de la solución anterior.

## B. Solución numérica

Como complemento a la solución analítica, se optó por la elaboración de una solución numérica para el sistema de ecuaciones diferenciales. A partir de (7), (8) y (9), se planteó en Python una solución con el método numérico de Runge Kutta de 4to orden. Esto debido a que es el método numérico de mayor precisión disponible, que logró facilitar de manera adecuada la resolución del sistema. Mediante esta solución numérica, se pudieron obtener visualizaciones de los gráficos de posición y velocidad con respecto al tiempo.

Inicialmente, se determinaron valores iniciales para las constantes dentro de la ecuación diferencial:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  y  $\gamma$ . A continuación, se incluyen los valores predeterminados para dichas constantes, así como una breve definición de su función.

Variable	Definición	Valor
$\alpha$	Sensibilidad al espaciamiento	0.5
$\beta$	Sensibilidad a la velocidad relativa	0.8
$\delta$	Distancia mínima entre vehículos	5.0 m
$\gamma$	Distancia dinámica entre vehículos	0.5 m

Cuadro I: Parámetros predeterminados en la simulación. Autoría propia

Además, se incluyen variables como `dinicial = 10` que representa la distancia inicial entre los vehículos en metros, `t0 = 0` y `tf = 30` que representan los tiempos iniciales y finales para la simulación en segundos, y finalmente `N = 5` que guarda el valor de la cantidad de vehículos que se simularán en el programa. De la mano, es importante mencionar que para el cálculo mediante el método de Runge Kutta, se hizo uso de un paso  $h = 0,01$  en la simulación, con el objetivo de mantener alta precisión en los gráficos.

A continuación se muestran los dos gráficos principales con los parámetros predeterminados dentro del programa:

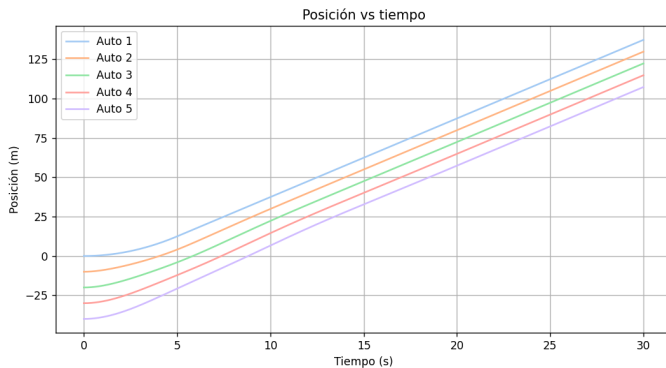


Figura 1: Gráfica de posición contra tiempo de los vehículos en un lapso de 30 segundos. Autoría propia.

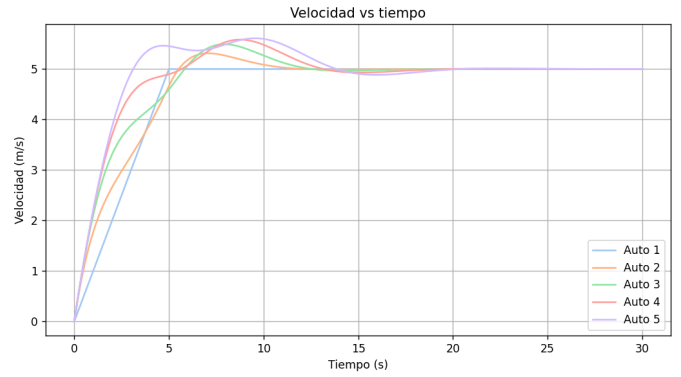


Figura 2: Gráfica de velocidad contra tiempo de los vehículos en un lapso de 30 segundos. Autoría propia.

Es mediante estas gráficas que se visualizan condiciones ideales del sistema, donde los carros en un lapso de 30 segundos en el tráfico no tienen colisiones, y sus velocidades fluctúan con respecto a la posición de los carros vecinos. Este modelo de ecuación diferencial permite predecir posibles accidentes entre los vehículos y cuándo puede haber colisiones. Por ejemplo, se incluye a continuación un ejemplo en el que los autos colisionan, con los parámetros que se incluyen a continuación:

Variable	Definición	Valor
$\alpha$	Sensibilidad al espaciamiento	0.1
$\beta$	Sensibilidad a la velocidad relativa	0.3
$\delta$	Distancia mínima entre vehículos	1.0 m
$\gamma$	Distancia dinámica entre vehículos	0.3 m

Cuadro II: Parámetros para colisión en la simulación. Autoría propia

Adicional a esto, se modificó la distancia inicial entre los vehículos a 3.0 m, y los gráficos de posición y velocidad ante una colisión se muestran a continuación:

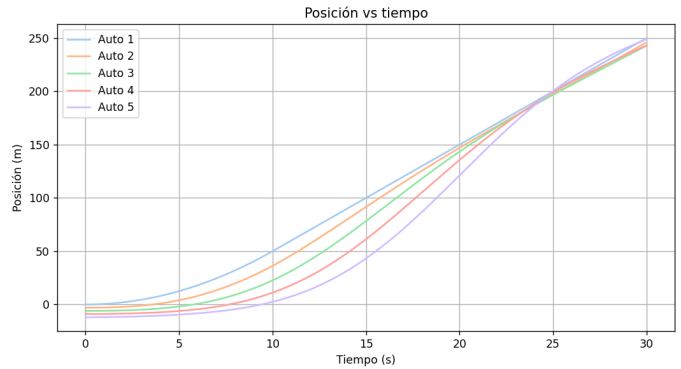


Figura 3: Gráfica de posición contra tiempo de los vehículos en un lapso de 30 segundos en condiciones de colisión. Autoría propia.

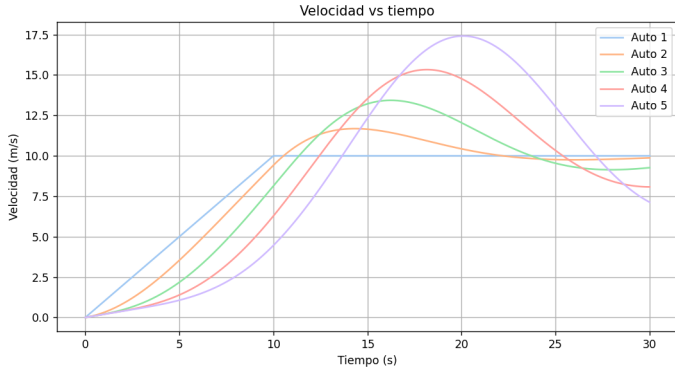


Figura 4: Gráfica de velocidad contra tiempo de los vehículos en un lapso de 30 segundos en condiciones de colisión. Autoría propia.

Finalmente, el programa indicó que la primera colisión entre los vehículos ocurrió entre Auto 2 y Auto 3, después de aproximadamente 22.91 s.

#### IV. DISCUSIÓN

Se planteó un modelo matemático con el que fuera posible analizar el comportamiento del modelo matemático propuesto para describir el movimiento de  $N$  vehículos automatizados en una columna guiados por un auto líder. Una solución analítica no resulta apropiada debido a la complejidad del cálculo mediante la  $W$  de Lambert, por lo que se realizó una solución numérica en Python mediante el método de Runge Kutta de orden 4.

Los resultados obtenidos mediante la solución numérica nos permiten simular el comportamiento de los autos de forma suficientemente precisa y con ello identificar los patrones del sistema, así como sus limitaciones y las condiciones en las que el modelo predice un comportamiento estable o colisiones dentro del flujo de vehículos.

En el primer caso mostramos que bajo condiciones ideales (Cuadro I), los gráficos de posición y velocidad muestran que los vehículos se mantienen en una línea estable, ajustando su velocidad de forma coordinada sin generar colisiones. Mientras que, en el segundo caso con parámetros más chicos (Cuadro II), las simulaciones demuestran una colisión entre los vehículos 2 y 3 tras 22.91 segundos de simulación, siendo este un caso no estable.

Comparando estos comportamientos observamos que el modelo es muy sensible a sus parámetros, ya sea la sensibilidad al espaciamiento o a la velocidad relativa, incluso un cambio entre la distancia mínima o la distancia dinámica entre vehículos puede resultar en un sistema propenso a colisiones. Debido a que mientras menores sean estos parámetros disminuye la capacidad de reacción del vehículo seguidor, causando que los

autos no logren ajustar su aceleración de forma óptima para mantener la distancia de seguridad, causando una colisión.

Es importante mencionar que en el modelo se asumió que los vehículos no pueden cambiar de carril y reaccionan de forma instantánea al comportamiento del auto precedente, pero en situaciones reales, los sistemas autónomos pueden presentar retardos debido al procesamiento y captura de datos o problemas derivados de los sensores. Como no se toman en cuenta estos posibles eventos, el modelo muestra un comportamiento muy idealizado, por lo que se puede sobrestimar la capacidad de reacción del sistema y con ello perder la capacidad de prevenir ciertas colisiones, siendo mayor el error mientras los parámetros se acerquen más a la frontera entre los casos “ideales” y los cuales se demuestran que no son estables mediante las simulaciones. Además se ignoran otros tipos de eventos más complejos que podrían afectar al tráfico, sean condiciones climáticas, interrupción externa de la fila (peatones o semáforos), entre otros factores que serían importantes poner a prueba y observar cómo afectan al modelo para poder hacer las mejoras necesarias hasta obtener un modelo más general donde se consideren estas limitantes que se pueden presentar en la vida real.

Como recomendación, sería ideal incluir funciones específicas para dichas situaciones y agregar parámetros que contrarresten cierta incertidumbre en las mediciones y la velocidad en la que estas se procesan. Esto mejoraría en gran medida la estabilidad del sistema y permitiría estudiar hasta qué punto se puede evitar colisiones mediante modelos matemáticos.

De igual forma, pese a las limitaciones de nuestro modelo, sirve como un acercamiento a cómo funcionan sistemas más complejos como el Intelligent Driver Model (IDM) y nos resulta útil como una herramienta para analizar la estabilidad del tráfico bajo condiciones específicas, permitiéndonos descartar con total seguridad los escenarios que pueden ser peligrosos o representar algún tipo de riesgo, manteniéndonos únicamente enfocados en aquellos que sigan una simulación segura. Y se demuestra que la dinámica entre los autos autónomos depende completamente de la sensibilidad a la distancia y la velocidad relativa entre ellos.

#### V. REFERENCIAS

De Gruyter. (2022). *Vibration energy harvesting systems*. De Gruyter.

SimScale. (2023). *What is natural frequency?* Recuperado de <https://www.simscale.com>

University of Massachusetts. (2021). *Small Oscilla-*

*tions and Normal Modes*. UMass Physics Department.

## VI. ANEXOS

Zill, D. G. (2016). *Advanced Engineering Mathematics (6th ed.)*. Jones & Bartlett Learning.

Liga del repositorio de GitHub del proyecto:  
<https://github.com/lhdz12/MA1002B-Vehiculos-Autonomos>