

**BỘ CÔNG THƯƠNG**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM**  
**KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**

---



**LÊ HOÀNG HÙNG**  
**LÊ VĂN ĐỨC ANH**

**MÔ HÌNH KHỬ NHIỀU ẢNH DỰA TRÊN**  
**PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG SỬ DỤNG**  
**THUẬT TOÁN FAST EXPLICIT DIFFUSION**

Chuyên ngành: Khoa học máy tính

**Giảng viên hướng dẫn: ThS. Hồ Đắc Quán**

TP. HỒ CHÍ MINH, THÁNG 12 NĂM 2023

**INDUSTRIAL UNIVERSITY OF HO CHI MINH CITY**  
**FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY**

---



**LE HOANG HUNG**

**LE VAN DUC ANH**

**AN IMAGE DENOISING MODEL BASED ON  
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION  
USING FAST EXPLICIT DIFFUSION**

Major: Computer science

**Supervisor: MSc. Ho Dac Quan**

HO CHI MINH CITY, DECEMBER 2023

# **AN IMAGE DENOISING MODEL BASED ON PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION USING FAST EXPLICIT DIFFUSION**

## **ABSTRACT**

Image denoising is a basic task of image processing. The purpose of denoising is to improve image quality by eliminating unwanted pixel errors that appear during shooting or scanning. A well-processed denoising step will be a prerequisite for obtaining high-quality images, improving input quality to facilitate higher-level processes such as information extraction, object recognition, image analysis. images, etc. Many approaches to denoising images have been researched, including approaches using partial differential equations to denoise.

The advantage of the denoising method using partial differential equations is high calculation speed, high accuracy and stability. However, during the noise reduction process, edges can become blurred, leading to loss of information. Therefore, in this thesis we have used the fourth-order nonlinear partial differential equation to limit that drawback. Besides, we also introduce the Fast Explicit Diffusion algorithm (FED) and apply it to build a FED scheme for the model to increase the performance of the denoising process.

## LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên chúng em xin bày tỏ sự kính trọng, lòng biết ơn chân thành đến giảng viên hướng dẫn ThS. Hồ Đắc Quán, người đã trực tiếp chỉ bảo, hướng dẫn tận tình, góp ý, cũng như hỗ trợ chúng em trong suốt quá trình xây dựng, phát triển, hoàn thành đề tài.

Chúng em cũng xin gửi lời cảm ơn đến quý thầy, cô giảng dạy chuyên ngành Khoa học máy tính thuộc Khoa Công nghệ thông tin Trường Đại học Công Nghiệp thành phố Hồ Chí Minh đã hướng dẫn, giảng dạy, trang bị các kiến thức cần thiết để chúng em thực hiện khoá luận này.

Trong quá trình phát triển đề tài có thể có những sai sót, do kiến thức hạn hẹp, chưa phát triển tối ưu được đề tài. Nhưng những lời góp ý của thầy cô chính là những tư liệu giúp nhóm chúng em hoàn thiện, tối ưu đề tài cũng như phát triển bản thân hơn trong tương lai.

Nhóm chúng em xin chân thành cảm ơn.

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày .... tháng .... năm 2023

Sinh viên thực hiện

Lê Hoàng Hưng      Lê Văn Đức Anh

## NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày .... tháng .... năm 2023

Chữ ký của giảng viên

## NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN PHẢN BIỆN 1

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày .... tháng .... năm 2023

Chữ ký của giảng viên

## NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN PHẢN BIỆN 2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Thành phố Hồ Chí Minh, ngày .... tháng .... năm 2023

Chữ ký của giảng viên

## MỤC LỤC

ABSTRACT .....	3
LỜI CẢM ƠN .....	4
MỤC LỤC .....	8
DANH MỤC CÁC HÌNH ẢNH .....	11
DANH MỤC CÁC BẢNG.....	12
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT .....	13
Chương 1. GIỚI THIỆU TỔNG QUAN ĐỀ TÀI.....	14
1.1. Giới thiệu đề tài.....	14
1.1.1. Tính cần thiết của việc khử nhiễu ảnh .....	14
1.1.2. Sự cần thiết của phương trình đạo hàm riêng trong khử nhiễu ảnh.....	14
1.2. Mục tiêu nghiên cứu .....	15
1.3. Đối tượng nghiên cứu .....	15
1.4. Phạm vi nghiên cứu .....	15
1.5. Phương pháp nghiên cứu .....	15
1.6. Bố cục của khoá luận .....	16
Chương 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.....	17
2.1. Phương trình đạo hàm riêng.....	17
2.1.1. Khái niệm phương trình đạo hàm riêng.....	17
2.1.2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng .....	17
2.1.3. Phương trình truyền nhiệt.....	17



2.1.4.	Phương pháp sai phân (FDM) .....	20
2.2.	Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng .....	21
2.2.1.	Giới thiệu về khử nhiễu ảnh .....	21
2.2.2.	Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng.....	21
2.3.	Tổng kết chương .....	25
Chương 3.	CÁC LƯỚI ĐỒ VÀ THUẬT TOÁN .....	26
3.1.	Lưới đồ sai phân hữu hạn.....	26
3.2.	Thuật toán Fast Explicit Diffusion (FED) .....	27
3.2.1.	FED cho khuếch tán một chiều đồng nhất.....	27
3.2.2.	Mở rộng cho vấn đề khuếch tán tùy ý .....	28
3.2.3.	Tổng quát về thuật toán FED.....	30
3.2.4.	Áp dụng FED cho mô hình [2.2.2.2] .....	31
3.3.	Tổng kết chương .....	32
Chương 4.	KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM .....	33
4.1.	Phương pháp đánh giá kết quả thực nghiệm.....	33
4.2.	Các kết quả thực nghiệm.....	33
4.2.1.	So sánh với phương pháp sai phân hữu hạn truyền thống.....	33
4.2.2.	So sánh với mô hình Perona-Malik .....	37
4.3.	Tổng kết chương .....	40
Chương 5.	KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN .....	41
5.1.	Tóm tắt nội dung thực hiện.....	41
5.2.	Đánh giá mục tiêu đạt được .....	41

5.3. Hướng phát triển .....	41
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	42

## DANH MỤC CÁC HÌNH ẢNH

Hình 2.1. Tập $\Omega$ và biên $\partial\Omega$ .....	20
Hình 4.1. Kết quả ảnh Cameraman với $\sigma = 30$ .....	34
Hình 4.2. Kết quả ảnh Peppers với $\sigma = 30$ .....	35
Hình 4.3. Kết quả ảnh Cameraman với $\sigma = 20$ .....	35
Hình 4.4. Kết quả ảnh Peppers với $\sigma = 20$ .....	36
Hình 4.5. Kết quả ảnh Barbara với $\sigma = 30$ .....	37
Hình 4.6. Kết quả ảnh Lena với $\sigma = 30$ .....	38
Hình 4.7. Kết quả ảnh Barbara với $\sigma = 20$ .....	38
Hình 4.8. Kết quả ảnh Lena với $\sigma = 20$ .....	40

## **DANH MỤC CÁC BẢNG**

Bảng 4.1. Kết quả thực nghiệm cho ảnh Cameraman, $SD=30$ .....	34
Bảng 4.2. Kết quả thực nghiệm cho ảnh Peppers, $SD=30$ .....	35
Bảng 4.3. Kết quả thực nghiệm cho ảnh Cameraman, $SD=20$ .....	36
Bảng 4.4. Kết quả thực nghiệm cho ảnh Peppers, $SD=20$ .....	36
Bảng 4.5. Kết quả thực nghiệm cho ảnh Barbara và Lena. ....	39

## DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Từ viết tắt	Diễn giải tiếng Anh	Diễn giải tiếng Việt
FDM	Finite difference method	Phương pháp sai phân hữu hạn
FED	Fast Explicit Diffusion	Thuật toán lan truyền nhanh
FEM	Finite element method	Phương pháp phần tử hữu hạn
FVM	Finite volume method	Phương pháp khối hữu hạn
MAE	Mean absolute deviation/error	Trung bình tuyệt đối độ lệch/lỗi
ODE	Ordinary differential equation	Phương trình đạo hàm thông thường
PDE	Partial Differential Equation	Phương trình đạo hàm riêng
PM	Perona-Malik model	Mô hình do Perona và Malik phát triển
PSNR	Peak-signal-to-noise ratio	Tỉ lệ tín hiệu cực đại trên nhiễu
SSIM	Structural similarity index measure	Độ đo chỉ số tương đồng cấu trúc

## **Chương 1.**

### **GIỚI THIỆU TỔNG QUAN ĐỀ TÀI**

#### **1.1. Giới thiệu đề tài**

##### **1.1.1. Tính cần thiết của việc khử nhiễu ảnh**

Khử nhiễu là một tác vụ cơ bản của xử lý ảnh. Mục đích của khử nhiễu là cải thiện chất lượng của hình ảnh bằng cách loại bỏ tối đa các điểm ảnh lỗi không mong muốn xuất hiện trong quá trình chụp hay quét. Bước khử nhiễu được xử lý tốt sẽ là tiền đề có được hình ảnh chất lượng cao, cải thiện chất lượng đầu vào cho các quá trình xử lý ảnh phía sau ví dụ như trích xuất thông tin, nhận dạng đối tượng, phân tích hình ảnh,... Có nhiều cách tiếp cận để khử nhiễu ảnh đã được nghiên cứu, tuy nhiên trong khuôn khổ khóa luận này, chúng tôi sẽ chỉ đề cập đến phương pháp tiếp cận sử dụng phương trình đạo hàm riêng (Partial Differential Equation – PDE) để khử nhiễu.

##### **1.1.2. Sự cần thiết của phương trình đạo hàm riêng trong khử nhiễu ảnh**

Việc ứng dụng phương trình đạo hàm riêng cho xử lý ảnh đã được nghiên cứu từ những năm cuối thế kỷ 20. Ưu điểm của phương pháp này là tốc độ tính toán cao, chính xác và ổn định. Ứng dụng PDE trong xử lý ảnh được xem là hiệu quả khi thực hiện các tác vụ như giảm nhiễu, tìm biên hay phân vùng ảnh. Các thuật toán xử lý ảnh ứng dụng PDE có nhiều ưu điểm:

- PDE đã được nghiên cứu, có nền tảng lý thuyết toán học chặt chẽ, phong phú bao gồm sự hội tụ, tính ổn định, lời giải duy nhất,... Đã có nhiều dạng sơ đồ rời rạc hóa giải PDE được công bố.
- Thuật toán được mô tả ngắn gọn không dài dòng phức tạp và dễ hiểu, dễ dàng khái quát mở rộng số chiều một cách đơn giản bằng cách sử dụng các toán tử Laplace, Divergence và Gradient. PDE được sử dụng trong xử lý ảnh thường ở hai lớp PDE khuếch tán tuyến tính và PDE khuếch tán phi tuyến.

Phương trình đạo hàm riêng khuếch tán phi tuyến đã được áp dụng một cách thông dụng trong xử lý ảnh. Mô hình đầu tiên được đề xuất bởi P. Perona và J. Malik dựa trên phương trình đạo hàm riêng khuếch tán phi tuyến vào tháng 7 năm 1990 [1]. Thông qua

thời gian, sự khuếch tán có thể xóa nhiều đồng thời tăng cường biên ảnh. Kể từ đó các bộ lọc khuếch tán phi tuyến khác nhau đã được đề xuất sử dụng rộng rãi để khử nhiễu và tăng cường biên ảnh [2], [3], [4], [5].

## **1.2. Mục tiêu nghiên cứu**

Bài toán giải phương trình đạo hàm riêng có ý nghĩa và tầm quan trọng trong các lĩnh vực khoa học đặc biệt là xử lý ảnh như khử nhiễu ảnh. Phần lớn các phương pháp giải nghiệm xấp xỉ PDE là phương pháp số như phương pháp sai phân hữu hạn (Finite Difference Method – FDM), phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method – FEM), phương pháp khối hữu hạn (Finite Volume Method – FVM). Các phương pháp này còn nhiều hạn chế. Do đó, mục tiêu chính của khoá luận là áp dụng thuật toán lan truyền nhanh (Fast Explicit Diffusion – FED) để tăng hiệu suất quá trình khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng phi tuyến bậc bốn.

## **1.3. Đối tượng nghiên cứu**

Khoá luận tập trung vào ba đối tượng nghiên cứu chính:

- Phương trình đạo hàm riêng.
- Thuật toán Fast Explicit Diffusion (FED).
- Ảnh hai chiều.

## **1.4. Phạm vi nghiên cứu**

Khoá luận chủ yếu nghiên cứu việc sử dụng PDE phi tuyến bậc bốn để khử nhiễu ảnh và áp dụng FED nhằm tăng hiệu suất quá trình khử ảnh. Do đó, khoá luận tập trung nghiên cứu các đối tượng trong phạm vi:

- PDE phi tuyến bậc bốn.
- Thuật toán FED.
- Ảnh hai chiều.

## **1.5. Phương pháp nghiên cứu**

Các phương pháp được sử dụng để nghiên cứu trong khoá luận này bao gồm:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết: dựa trên tổng hợp các bài báo có liên quan đến việc khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng, dựa trên các tài liệu như sách, báo, tạp chí đã công bố trong cộng đồng khoa học và trên Internet.
- Phương pháp thực nghiệm: Thử nghiệm đánh giá thuật toán, mô hình được thực hiện thông qua sử dụng các phương pháp đánh giá về tính đúng đắn, về độ hiệu quả.

## 1.6. Bố cục của khoá luận

Bố cục của khoá luận gồm có 5 chương, trong đó:

**Chương 1:** Giới thiệu tổng quan đề tài: Chương này chúng tôi trình bày về sự cần thiết của việc khử nhiễu ảnh cũng như sự cần thiết của phương trình đạo hàm riêng trong việc khử nhiễu ảnh.

**Chương 2:** Cơ sở lý thuyết: Chương này chúng tôi trình bày cơ sở lý thuyết bao gồm: (i) Tổng quan về phương trình đạo hàm riêng và phương pháp sai phân giải phương trình đạo hàm riêng; (ii) Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng.

**Chương 3:** Các lược đồ và thuật toán: Chương này chúng tôi trình bày về lược đồ số cho mô hình [2], áp dụng thuật toán FED để tăng hiệu suất quá trình khử nhiễu.

**Chương 4:** Kết quả thực nghiệm: Chương này chúng tôi trình bày về các kết quả khử nhiễu và số liệu nhằm làm rõ, chứng minh sự vượt trội của FED trong quá trình khử nhiễu.

**Chương 5:** Kết luận và hướng phát triển: Chương này chúng tôi trình bày tổng kết việc thực hiện mục tiêu đề ra thông qua nội dung đã trình bày ở các chương 3,4. Từ đó đưa ra hướng phát triển.



## Chương 2.

### CƠ SỞ LÝ THUYẾT

#### 2.1. Phương trình đạo hàm riêng

##### 2.1.1. Khái niệm phương trình đạo hàm riêng

Phương trình đạo hàm riêng bậc hai với hai biến độc lập  $x, y$  có dạng tổng quát:

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad x, y \in \Omega \quad (2.1)$$

trong đó,  $F$  là hàm số bất kỳ,  $\Omega$  là tập con mở bị chặn của  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$  là số chiều không gian.

Trong khoá luận, khi xét các bài toán phương trình đạo hàm riêng, chúng tôi sử dụng các ký hiệu tương đương sau:  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  để chỉ đạo hàm riêng cấp một của hàm số  $u(x, y)$ . Tương tự,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  để chỉ đạo hàm riêng cấp hai của hàm số  $u(x, y)$ .

##### 2.1.2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng

Các phương trình đạo hàm riêng bậc hai, hai biến độc lập  $x, y$  có dạng tổng quát (2.1) có thể được viết dưới dạng:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Lu = 0, \quad (2.2)$$

trong đó,  $A, B, C, D, E, L$  là các hệ số của phương trình.

Dựa vào biệt thức  $d = B^2 - 4AC$  mà phương trình dạng (2.2) được phân thành một trong ba loại sau:

- Nếu  $d > 0$  thì phương trình (2.2) thuộc loại hyperbolic.
- Nếu  $d = 0$  thì phương trình (2.2) thuộc loại parabolic.
- Nếu  $d < 0$  thì phương trình (2.2) thuộc loại elliptic.

##### 2.1.3. Phương trình truyền nhiệt

Trong lĩnh vực vật lý, quá trình khuếch tán và truyền nhiệt là một ứng dụng quan

trọng và thực tế, thường được mô tả bằng phương trình đạo hàm riêng biến thiên theo thời gian và không gian. Phương trình truyền nhiệt, được Joseph Fourier công bố vào năm 1822, là lý thuyết cơ bản giải thích về nhiệt độ được dẫn truyền, đẳng hướng và duy trì tính đồng nhất trong không gian.

Phương trình truyền nhiệt không chỉ là một công cụ mô tả sự chuyển động của nhiệt độ, mà còn là cơ sở lý thuyết quan trọng để hiểu về cân bằng nhiệt và mật độ nhiệt độ (biểu diễn qua biến  $u$ ) tại các vùng không gian và trong một khoảng thời gian nhất định. Đây không chỉ là một phương trình khuếch tán đơn thuần mà còn là một bức tranh phức tạp về cách nhiệt độ tương tác và di chuyển trong không gian, giúp ta hiểu rõ hơn về hiện tượng truyền nhiệt trong thực tế.

Phương trình truyền nhiệt được biểu diễn dưới dạng:

$$I_t = \text{div}(c(x, y, t) \cdot \nabla I) = c(x, y, t) \Delta I + \nabla c \cdot \nabla I, \quad x, y \in \Omega, t \in (0, T] \quad (2.3)$$

trong đó  $\nabla$  và  $\Delta$  lần lượt đại diện cho toán tử gradient và toán tử laplacian,  $I_t = u(x, y, t)$ .

Nếu hệ số  $c$  là hằng số thì (2.3) chính là phương trình Laplace, biểu thị quá trình khuếch tán nhiệt tuyến tính đẳng hướng. Nếu hệ số  $c$  là hàm số thì (2.3) chính là phương trình khuếch tán nhiệt phi tuyến tính đẳng hướng [1].

Trong thực tế, để xác định quy luật truyền nhiệt trong vật thể thì phương trình (2.3) cần có thêm điều kiện đầu và điều kiện biên của bài toán.

Tại thời điểm ban đầu  $t = 0$  nhiệt độ của vật thể thỏa mãn phương trình (2.3) theo điều kiện đầu:

$$u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) \quad (2.4)$$

Phương trình (2.3) với điều kiện (2.4) được gọi là bài toán giá trị đầu hay bài toán Cauchy. Bài toán có thể phát biểu cho biết phân bố nhiệt của vật thể tạo thời điểm  $t_0$  và xác định nhiệt độ của vật thể theo phương trình khuếch tán nhiệt (2.3) tại thời điểm  $t_i$  nào đó.

Điều kiện (2.4) có thể mở rộng để xác định đường biên  $\partial\Omega$  của miền không gian  $\Omega$

trên toàn khoảng thời gian  $(0, T]$ , với  $0 < T < \infty$ , từ đó xác định nhiệt (nghiệm) tại  $\partial\Omega \times (0, T]$ .

Điều kiện cho phương trình nhiệt bao gồm:

*Điều kiện Dirichlet*

Giá trị biên của hàm  $u$  sao cho thỏa mãn phương trình (2.3) tại  $t > 0$  với điều kiện đầu (2.4) đã cho:

$$u(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (2.5)$$

Điều kiện được cho khi phân bố nhiệt trên biên trong trạng thái biến đổi của điều kiện nhiệt bên ngoài.

*Điều kiện Neumann*

Xác định pháp tuyến  $n$  theo các biến không gian, thời gian  $(x, y, t)$  của nhiệt độ trên biên

$$\partial_n u(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (2.6)$$

Trong điều kiện loại này ngầm định đạo hàm  $\partial_n u$  mô tả dòng nhiệt xuyên qua biên theo hướng pháp tuyến, trong trường hợp biên cách lý theo điều kiện (2.6), điều kiện biên được đặt với  $f = 0$ .

Trong lĩnh vực xử lý ảnh, khái niệm về khuếch tán là quá trình làm cho đồng đều mức xám  $u$  tại một khu vực cụ thể  $(x, y)$  theo thời gian. Cách thực hiện quá trình khuếch tán có thể là tuyến tính và đẳng hướng, hoặc có thể là phi tuyến và đẳng hướng, điều này phụ thuộc chủ yếu vào cấu trúc của mô hình và giá trị của hệ số khuếch tán trong mô hình.

Dựa trên đặc điểm của hệ số khuếch tán, chúng ta có thể phân loại mô hình khuếch tán và khử nhiễu ảnh như sau:

Nếu hệ số khuếch tán là hằng số, chúng ta coi mô hình là khuếch tán tuyến tính và đẳng hướng.

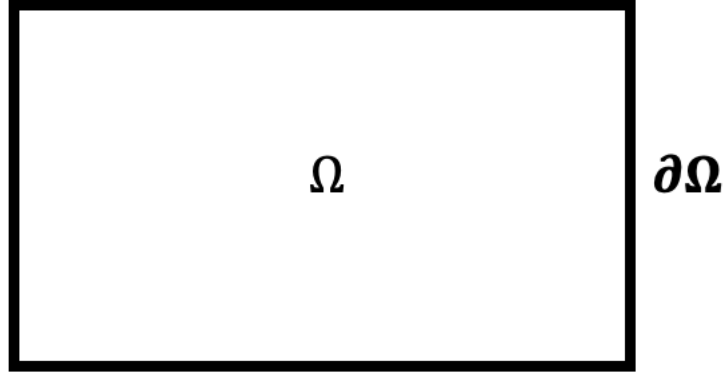
Ngược lại, nếu hệ số khuếch tán thay đổi theo một hàm phụ thuộc vào cấu trúc ảnh

cục bộ, chúng ta gọi mô hình là khuếch tán phi tuyến và đẳng hướng.

#### 2.1.4. Phương pháp sai phân (FDM)

Trong mặt phẳng cho miền chữ nhật  $\Omega$ :

$\Omega = \{(x, y) | a < x < b, d < y < e\}$  với  $a, b, d, e$  là các số dương cho trước,  $\partial\Omega$  là ký hiệu biên  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  nằm trên các đường thẳng  $x = a, x = b, x = d, x = e$ .



**Hình 2.1.** Tập  $\Omega$  và biên  $\partial\Omega$

$$\partial\Omega = \{x = a \cap x = b \cap x = d \cap x = e\} \in \Omega$$

Trong mặt phẳng  $(x, y)$  miền chữ nhật  $\Omega$  xét bài toán:

$$u_t = c\Delta u = c(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (2.7)$$

$$\text{với điều kiện đầu } u(x, y, t = 0) = g(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$\text{và điều kiện biên } u(x, y, t) = h(x, y, t) \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \quad (2.9)$$

trong đó  $c$  là hằng số,  $f, g, h$  là hàm số cho trước.

*Lưới sai phân:*

Cho ba số nguyên lớn hơn một  $N, M, P$ . Chia miền  $\Omega$  thành các ô lưới như sau:

Gọi  $h_1 = \frac{b-a}{N}$  với  $a < b$  là bước lưới theo phương  $x$  với tọa độ  $x_i = a + ih_1$ ,  
 $0 \leq i \leq N$ ;  $h_2 = \frac{e-d}{M}$  với  $d < e$  là bước lưới theo phương  $y$  với tọa độ  $y_i = d + ih_2$ ,  
 $0 \leq i \leq M$ ,  $\tau = \frac{T}{P}$  là bước lưới theo thời gian với tọa độ các điểm  $t_k = k\tau, 0 \leq k \leq P$ .

Mỗi điểm  $(x_i, y_j, t_k)$  tương ứng với một nút lưới  $(i, j, k)$ .

Mỗi hàm số xác định tại các nút lưới gọi là hàm lưới. Giá trị của hàm lưới tại  $u$  tại nút lưới  $(x_i, y_j, t_k)$  ký hiệu  $u_{i,j}^k$ . Mỗi hàm  $u(x, y, t)$  tại mọi  $(x, y, t)$  tạo ra hàm lưới xác định bởi  $u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k)$ .

Tập  $\Omega_{h_1, h_2} = \{(x_i, y_j) | (x_i, y_j) \in \Omega\}$  gọi là tập *nút trong*.

Tập  $\partial\Omega_{h_1, h_2} = \{(x_i, y_j) | (x_i, y_j) \in \partial\Omega\}$  gọi là tập *nút biên*.

Tập  $\Omega_\tau = \{t_k | k = 1..P \in \partial\Omega\}$  gọi là tập *nút trong* trong khoảng  $\{t | 0 < t < T\}$ .

Tập  $\Omega_{h_1, h_2, \tau} = \Omega_{h_1, h_2} \times \Omega_\tau$  gọi là tập các *nút trong*  $\{\Omega \times (0, T)\}$ .

## **2.2. Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng**

### **2.2.1. Giới thiệu về khử nhiễu ảnh**

Hình ảnh sau khi chụp hoặc quét có thể sẽ chứa một số lỗi không mong muốn, các lỗi này gây ảnh hưởng trực tiếp đến quá trình xử lý ảnh. Các lỗi này có thể là ảnh bị thừa sáng, ảnh bị thiếu sáng hoặc một lỗi thường hay gặp phải là ảnh bị nhiễu hạt. Việc loại bỏ các lỗi không mong muốn này nhưng vẫn giữ lại tối đa các cấu trúc đặc trưng của ảnh là rất cần thiết để có thể thực hiện tốt những giai đoạn sau. Có rất nhiều phương pháp được dùng để khử nhiễu ảnh có thể kể đến như phương pháp khử nhiễu áp dụng bộ lọc (bộ lọc trung bình, bộ lọc trung vị, bộ lọc Gaussian,...), phương pháp khử nhiễu sử dụng mạng nơron, phương pháp khử nhiễu ảnh sử dụng phương trình đạo hàm riêng. Mỗi phương pháp đều có các ưu, nhược điểm khác nhau. Tuy nhiên trong quá trình khử nhiễu có thể làm biến ảnh bị mờ đi dẫn đến mất mát thông tin của ảnh.

### **2.2.2. Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng**

#### **2.2.2.1. Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng bậc hai**

Các phương pháp phi tuyến dựa trên truyền nhiệt bậc hai đã được sử dụng trong khử nhiễu ảnh kể từ khi Perona và Malik giới thiệu mô hình truyền nhiệt không đối xứng của họ vào năm 1990 [1]. Phương trình biểu diễn mô hình này như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(g(|\nabla u|^2)\nabla u) = 0, \quad (2.10)$$

trong đó,  $g(s^2)$  được chọn sao cho  $g(s^2) \rightarrow 0$  khi  $s \rightarrow \infty$  và  $g(s^2) \rightarrow 1$  khi  $s \rightarrow 0$ .

Trong tài liệu [6], các tác giả đã chọn hàm  $g$  như là tích chập của một kernel Gaussian  $G_\sigma$  và gradient của hình ảnh  $\nabla u$ . Do đó, mô hình dựa trên phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(g(|G_\sigma * \nabla u|^2)\nabla u) = 0. \quad (2.11)$$

Và trong tài liệu [5], các tác giả đã đề xuất hai phiên bản thích ứng của mô hình PM, mô hình đầu tiên là phương trình  $\alpha$ -PM, có dạng sau đây:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \left( \frac{\nabla u}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{K}\right)^\alpha} \right) = 0, \quad (2.12)$$

trong đó  $0 \leq \alpha \leq 2$  là một hằng số cố định. Mô hình thứ hai là  $\alpha(x)$ -PM có dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \left( \frac{\nabla u}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{K}\right)^{\alpha(x)}} \right) = 0, \quad (2.13)$$

trong đó  $\alpha(x)$  được lựa chọn dựa trên giá trị:

$$\alpha(|\nabla G_\sigma * u_0|) = 2 - \frac{2}{1 + k|\nabla G_\sigma * u_0|^2}, \quad (2.14)$$

hoặc:

$$\alpha(|\nabla G_\sigma * u|) = 2 - \frac{2}{1 + k|\nabla G_\sigma * u|^2}. \quad (2.15)$$

Chuẩn tổng biến thiên (TV) trong tài liệu [7] là hàm chính quy hoá có dạng:

$$TV = \int_\Omega |\nabla u| dx. \quad (2.16)$$

Nhiều biến thể đã được đề xuất để khắc phục nhược điểm của mô hình TV. Trong

công trình của Strong và Chan [8] đã đề xuất một mô hình điều chỉnh dựa trên TV, có dạng:

$$I(u) = \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u(x)| dx, \quad (2.17)$$

trong đó, hệ số  $\alpha(x)$  được tối ưu hóa để kiểm soát tốc độ truyền nhiệt. Một mô hình khác đã được giới thiệu bởi Blomgren và đồng nghiệp [9], trong mô hình này, họ đề xuất một hàm số khử nhiễu ảnh theo dạng:

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx, \quad (2.18)$$

trong đó,  $p(s)$  là một hàm số không giảm,  $p(s) \rightarrow 1$  khi  $s \rightarrow \infty$ , và  $p(s) \rightarrow 2$  khi  $s \rightarrow 0$ . Có nhiều mô hình điều chỉnh khác có thể tham khảo tài liệu [10], [11].

Sự khác biệt giữa các mô hình đạo hàm riêng bậc hai nằm ở tốc độ khuếch tán, được mô tả bằng các hệ số kiểm soát. Các hệ số này được xác định dựa trên độ lớn gradient [12]. Mô hình khử nhiễu ảnh bằng các phương trình đạo hàm riêng bậc hai có thể gây ra hiện tượng răng cưa trong hình ảnh sau khi xử lý. Tuy nhiên, chúng hiệu quả trong việc khử nhiễu ảnh và giữ nguyên các đặc trưng của ảnh bằng cách thực hiện sự lọc dọc theo biên thay vì xuyên qua biên.

Để tránh những vấn đề của các mô hình đạo hàm riêng bậc hai, You và Kaveh [4] đã sử dụng toán tử Laplace của hình ảnh thay vì gradient để tạo ra một mô hình đạo hàm riêng bậc bốn. Phương trình đạo hàm riêng bậc bốn trong mô hình này có dạng như sau:

$$u_t = -\Delta(g(\Delta u)\Delta u), \quad (2.19)$$

trong đó,  $\Delta$  là toán tử Laplace và  $g(s) = \frac{k^2}{k^2 + s^2}$ ,  $k$  là một tham số phụ thuộc vào hình ảnh. Kể từ đó, các mô hình đạo hàm riêng bậc bốn đã được sử dụng phổ biến trong việc khử nhiễu ảnh. Các mô hình bậc bốn mang lại ưu điểm hơn so với các mô hình bậc hai trong việc khôi phục các vùng trơn của hình ảnh.

Trong nghiên cứu [2], tác giả giới thiệu một mô hình bậc bốn để giải quyết vấn đề khử nhiễu ảnh bị bổ sung nhiễu Gaussian. Lý do sử dụng mô hình này là khắc phục các hạn

chế của các mô hình bậc hai trong việc khôi phục các khu vực trơn và xử giữ lại chi tiết hình ảnh hiệu quả hơn. Mô hình giải quyết một phương trình đạo hàm bậc bốn phi tuyến với dữ liệu ban đầu là hình ảnh nhiễu. Tác giả [2] áp dụng phương pháp điểm cố định để chứng minh sự tồn tại của giải pháp. Mặc dù kỹ thuật này phổ biến trong các lĩnh vực toán ứng dụng khác, nó không dễ tìm thấy trong tài liệu xử lý ảnh. Trong phần lược đồ số, tác giả [2] tận dụng một kỹ thuật nhanh mới để đẩy nhanh toàn bộ việc thực hiện số học của mô hình bậc bốn. Phương pháp Lan truyền Nhanh gọi là Fast Explicit Diffusion (FED), được đề xuất bởi Grewenig và cộng sự [13], FED là một phương pháp ổn định, nhanh chóng và dễ thực hiện.

#### 2.2.2.2. Khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng bậc bốn

Tác giả của nghiên cứu [2] lấy cảm hứng từ các nghiên cứu [3], [4], [6], [14], [15], [16] để đề xuất một mô hình khử nhiễu ảnh bậc bốn thích ứng. Mô hình này giải quyết bài toán giá trị biên bậc bốn như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + D_{ij}^2 \left( \frac{\alpha(u) D_{ij}^2 u}{|D_{ij}^2 u|} \right) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T = (0, T) \times \Omega, \quad (2.20)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in (0, T) \times \partial \Omega, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega T = (0, T) \times \Omega, \quad (2.22)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.23)$$

trong đó,  $\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + |G_\sigma * \nabla u|^2}}$ ,  $G_\sigma(\mathbf{x})$  là bộ lọc Gaussian có tham số  $\sigma$ ,  $u_0(\mathbf{x})$  là ảnh gốc,  $\Omega$  là miền giới hạn của  $\mathbb{R}^2$  với biên mịn phù hợp,  $T > 0$  là hằng số,  $\vec{n}$  ký hiệu đơn vị pháp tuyến ra ngoài của biên  $\partial \Omega$ .

Chức năng của  $\alpha(u)$  là kiểm soát tốc độ khuếch tán. Trên thực tế, trong khu vực trơn nơi  $|\nabla u|$  là nhỏ, quá trình khuếch tán diễn ra mạnh mẽ. Tuy nhiên, gần các biên có thể xuất hiện nơi  $|\nabla u|$  lớn, tốc độ khuếch tán sẽ thấp. Việc tích chập với  $G_\sigma$  nên làm dịu mọi dao



động lớn của nhiễu. Do đó, chúng ta có thể có được hình ảnh mượt mà với các biên được giữ lại tối đa. Hàm khuếch tán giá trị tuyệt đối của Laplacian sẽ nhạy với nhiễu hơn so với hàm khuếch tán của mô đun gradient với hình ảnh đã được phát triển. Mặt khác, trong trường hợp hàm khuếch tán là một hàm của giá trị tuyệt đối của Laplace, xác suất phát hiện phần sai cạnh bằng hàm khuếch tán sẽ cao hơn đáng kể so với trường hợp khi hàm khuếch tán là một hàm của mô đun của gradient [17]. Khác với các hàm khuếch tán  $g(\Delta u)$  trong [4], kiểm soát khuếch tán của  $\alpha(u)$  cho kết quả tốt hơn so với kết quả thu được bởi mô hình đó.

Chi tiết chứng minh bài toán trên được trình bày ở tài liệu [2].

### **2.3. Tổng kết chương**

Chương này đã trình bày cơ sở lý thuyết nền tảng để thực hiện khoá luận. Các kiến thức này là tiền đề, cơ sở lý thuyết cho các nội dung sẽ được trình bày ở chương 3. Trong chương 3, chúng tôi sẽ trình bày về lược đồ sai phân hữu hạn để giải quyết bài toán đã được nêu ở mục 2.2.2.2 và thuật toán FED để tăng hiệu suất khử nhiễu.

### Chương 3.

## CÁC LƯỢC ĐỒ VÀ THUẬT TOÁN

#### 3.1. Lược đồ sai phân hữu hạn

Giả sử  $\tau$  là kích thước bước thời gian và  $h$  là kích thước lưới không gian, chúng ta rời rạc hóa thời gian và không gian như sau:

$$t = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x = ih, i = 0, 1, 2, \dots, I,$$

$$y = jh, j = 0, 1, 2, \dots, J,$$

trong đó  $Ih \times Jh$  là kích thước của hình ảnh gốc. Đặt  $u_{ij}^n$  là sự xấp xỉ của  $u(n\tau, ih, jh)$ . Định nghĩa sự xấp xỉ rời rạc:

$$D_{xx}^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2},$$

$$D_{yy}^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2}.$$

$$D_{xy}^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i,j}^n - u_{i,j+1}^n - u_{i+1,j}^n}{h^2}.$$

Lược đồ sai phân hiện của bài toán trình bày ở mục 2.2.2.1 có thể được viết như sau:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \tau \left[ D_{xx}^2 \left( \frac{\alpha_{i,j}^n D_{xx}^2 u_{i,j}^n}{|D_{xx}^2 u_{i,j}^n|_\epsilon} \right) + D_{yy}^2 \left( \frac{\alpha_{i,j}^n D_{yy}^2 u_{i,j}^n}{|D_{yy}^2 u_{i,j}^n|_\epsilon} \right) + D_{xy}^2 \left( \frac{\alpha_{i,j}^n D_{xy}^2 u_{i,j}^n}{|D_{xy}^2 u_{i,j}^n|_\epsilon} \right) \right],$$

$$\alpha_{i,j}^n = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla G_\sigma * u_{i,j}^n|^2}}, \quad |\cdot|_\epsilon = |\cdot| + \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

$$u_{i,j}^n = u_0(ih, jh), \quad 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J,$$

$$u_{i,0}^n = u_{i,1}^n, \quad u_{0,j}^n = u_{1,j}^n, \quad u_{I,j}^n = u_{I-1,j}^n, \quad u_{i,J}^n = u_{i,J-1}^n,$$

$$u_{i,0}^n = 0, \quad u_{0,j}^n = 0, \quad u_{I,j}^n = 0, \quad u_{i,J}^n = 0.$$

Nếu giả định rằng  $\mathbf{u}^k$  là một vector chứa các giá trị tại mỗi điểm ảnh ở mức thời gian thứ  $k$  và  $\mathbf{I}$  biểu thị ma trận đơn vị, có thể thấy rằng  $\mathbf{u}^{k+1}$  có thể được tính toán một cách rõ ràng từ  $\mathbf{u}^k$  mà không cần đảo ngược ma trận như sau:

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{I} - \tau \mathbf{A}(\mathbf{u}^k)) \mathbf{u}^k, \quad (3.1)$$

với  $\mathbf{A}(\mathbf{u}^k) = \sum_{l=1}^4 \mathbf{A}_l(\mathbf{u}^k)$ , ở đó  $\mathbf{A}_l(\mathbf{u}^k) = [a_{i,j}(\mathbf{u}^k)]$  và

$$a_{i,j}(\mathbf{u}^k) := \begin{cases} C_{i-2,j}^k, & (j = i - 2), \\ C_{i-1,j}^k, & (j = i - 1), \\ - \sum_{j \in N(i)} C_{i,j}^k, & [j = i], \\ C_{i+1,j}^k, & (j = i + 1), \\ C_{i+2,j}^k, & (j = i + 2), \\ 0, & (else), \end{cases}$$

$$\text{và } C_{i,j}^k := \frac{\alpha_{i,j}^n}{|\cdot|_\epsilon}$$

trong đó  $N(i)$  là tập hợp của bốn điểm liền kề của điểm ảnh  $i$  (điểm ảnh biên chỉ có hai điểm liền kề),  $\epsilon > 0$ . Vì sơ đồ yêu cầu các bước thời gian  $\tau$  rất nhỏ để đảm bảo tính ổn định. Do đó, chúng ta sẽ sử dụng các công cụ hiệu quả hơn để tăng tốc việc thực hiện mô hình.

### 3.2. Thuật toán Fast Explicit Diffusion (FED)

#### 3.2.1. FED cho khuếch tán một chiều đồng nhất

Phương trình khuếch tán một chiều  $\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t)$  với các điều kiện biên Neumann đồng nhất được biểu diễn rời rạc hoá không gian với kích thước lưới  $h > 0$  và  $N$  điểm lưới  $x_j := \left(j - \frac{1}{2}\right) h$ ,  $j = 1, \dots, N$ , khi đó PDE trở thành một hệ liên tục theo thời gian của các phương trình đạo hàm thông thường (ODE):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (3.2)$$

trong đó,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^N$  là vector với các giá trị  $u_j(t) \approx u(x_j, t)$ . Ma trận đối xứng  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  xấp xỉ toán tử đạo hàm không gian bậc hai và tính đến các điều kiện biên Neumann đồng nhất:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Nếu hệ ODE ở (3.2) được rời rạc hoá theo thời gian bằng cách đạo hàm tiến với kích thước bước thời gian  $\tau > 0$  và phía bên phải được đánh giá bằng giá trị ở thời gian liền trước, ta thu được sơ đồ số:

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}) \mathbf{u}^k \quad (k \geq 0), \quad (3.4)$$

trong đó,  $\mathbf{u}^k \in \mathbb{R}^N$  chứa các giá trị  $u_j(t) \approx u(x_j, t)$ ,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  là ma trận đơn vị, với

$$\tau \leq \frac{h^2}{2} =: \tau_{max}. \quad (3.5)$$

Theo định lý Gershgorin [18], các giá trị riêng của ma trận  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  sẽ nằm trong khoảng  $\left[-\frac{4}{h^2}, 0\right]$ . Các giá trị riêng này xác định sự ổn định trong chuẩn Euclidean: Một bước ổn định rõ ràng cần một kích thước bước thời gian  $\tau$  sao cho các giá trị riêng của ma trận lặp  $\mathbf{I} + \tau \mathbf{A}$  thuộc vào khoảng  $[-1, 1]$ .

### 3.2.2. Mở rộng cho vấn đề khuếch tán tùy ý

Chúng ta có thể tăng tốc một lược đồ hiện bằng cách thay thế các vòng lặp với kích thước bước thời gian  $\tau$  cố định bởi chu kỳ với các kích thước bước thời gian khác nhau  $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$ . Mục tiêu là tăng tốc một lược đồ hiện tuyến tính tổng quát

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{P}) \mathbf{u}^k \quad (k \geq 0), \quad (3.6)$$

trong đó, ma trận cụ thể  $A$  từ (3.3) đã được thay thế bằng một ma trận đối xứng, bán xác định, âm  $P$  - là kết quả từ quá trình rời rạc không gian của một PDE parabol tuyến tính phù hợp. PDE này có thể là một hoặc đa chiều, đẳng hướng hoặc dị hướng, bậc hai hoặc cao hơn.

Lược đồ hiện (3.6) ổn định trong chuẩn Euclidean nếu các giá trị riêng của ma trận lặp  $I + \tau P$  nằm trong khoảng  $[-1, 1]$ . Do đó, kích thước bước thời gian  $\tau > 0$  phải thỏa mãn giới hạn

$$\tau \leq \frac{2}{\mu_{\max}(P)} =: \tau_{\max}, \quad (3.7)$$

trong đó,  $\mu_{\max}(P)$  biểu thị bán kính quang phổ của ma trận đối xứng  $P$ , tức là mô đun lớn nhất của các giá trị riêng của nó. Thực tế,  $\mu_{\max}(P)$  có thể được thay thế bằng một ước lượng trường hợp tệ nhất đơn giản với định lý Gershgorin.

Khi thay kích thước bước thời gian cố định trong (3.6) bởi  $n$  kích thước bước thời gian khác nhau, ta có được lược đồ FED:

$$\mathbf{u}^{k+1,0} = \mathbf{u}^k, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}^{k+1,i+1} = (I + \tau_i P) \mathbf{u}^{k+1,i} \quad (i = 0, \dots, n-1), \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1,n}, \quad (3.10)$$

với  $k = 0, 1, \dots$  và các kích thước bước thời gian thay đổi theo chu kỳ:

$$\tau_i = \tau \cdot \frac{1}{2 \cos^2\left(\pi \cdot \frac{2i+1}{4n+2}\right)} \quad i = (0, \dots, n-1), \quad (3.11)$$

ổn định trong chuẩn Euclidean, tức là:

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\|_2 \leq \|\mathbf{u}^k\|_2 \quad (k \geq 0), \quad (3.12)$$

giá trị  $\tau$  được tính bằng công thức:

$$\tau = \frac{3T}{M(n^2+n)}. \quad (3.13)$$

Mỗi chu kỳ FED (3.8) – (3.10) với  $n$  bước lặp bên trong tương ứng với một bước siêu thời gian có kích thước

$$\theta_n = \tau \cdot \frac{n^2 + n}{3}, \quad (3.14)$$

với số lượng bước lặp trong mỗi bước siêu thời gian được tính bằng công thức:

$$n = \left\lceil -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{12T}{M\tau_{max}}} \right\rceil. \quad (3.15)$$

Trong trường hợp bài toán phi tuyến, ma trận  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  sẽ phụ thuộc vào sự thay đổi giá trị của  $\mathbf{u}(t)$ , lúc này, (3.9) sẽ được thay thế bằng

$$\mathbf{u}^{k+1,i+1} = (\mathbf{I} + \tau_i \mathbf{P}(\mathbf{u}^k)) \mathbf{u}^{k+1,i} \quad (i = 0, \dots, n-1), \quad (3.16)$$

các giá trị phi tuyến của  $\mathbf{P}(\mathbf{u}^k)$  được giữ không đổi trong suốt chu kỳ, tức là thực hiện một bước siêu thời gian với  $\mathbf{P}(\mathbf{u}^k)$  để thu được  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1,n}$ .

### 3.2.3. Tổng quát về thuật toán FED

Chúng ta có thể thấy rằng FED là một lược đồ hiện với một số chi phí không quan trọng về thời gian. Bên cạnh việc sắp xếp lại trình tự, một điều cực kỳ quan trọng là chỉ cập nhật lại các giá trị phi tuyến sau khi hoàn tất một chu kỳ hoàn chỉnh. Việc cập nhật lại trong một chu kỳ không được khuyến khích do sự ổn định của các kết quả trung gian không được đảm bảo cho các chu kỳ được sắp xếp lại.

Các bước của thuật toán FED có thể được tóm tắt như sau:

#### 1. Dữ liệu đầu vào:

Ảnh  $f$ , thời gian dừng  $T$ , số lượng chu kỳ FED  $M$ , ngưỡng ổn định  $\tau_{max}$  cho lược đồ.

## 2. Khởi tạo:

- (a) Gán giá trị  $u^0 := f$ ,
- (b) Tính độ dài một chu kỳ  $n$  dựa vào (3.15),
- (c) Tính  $\tau$  dựa vào (3.13),
- (d) Tính  $\tau_0, \dots, \tau_{n-1}$  theo (3.11),
- (e) Chọn trình tự hợp lý cho các kích thước bước thời gian  $\tau_i$  (có thể sử dụng K-cycles hoặc trình tự Leja),
- (f) Tính ma trận tương ứng  $\mathbf{P}$  nếu là bài toán tuyến tính.

## 3. Lặp bộ lọc:

Tiến hành lặp:  $k = 0, \dots, M - 1$

- (a) Tính ma trận tương ứng  $\mathbf{P}(\mathbf{u}^k)$  nếu là bài toán phi tuyến tính.
- (b) Thực hiện một chu kỳ FED tuyến tính (3.8)–(3.10) hoặc một chu kỳ FED phi tuyến (3.8), (3.16), (3.10) với trình tự  $n$  kích thước bước thời gian  $\tau_i$  ở trên.

### 3.2.4. Áp dụng FED cho mô hình [2.2.2.2]

#### 1. Dữ liệu đầu vào:

Ảnh nhiễu  $u_0$ , thời gian dừng  $T$ , số lượng chu kỳ FED  $M$

#### 2. Khởi tạo:

- (a) Tính giá trị  $n$  nhỏ nhất sao cho thời gian hoàn thành một chu kỳ FED  $t_n$  thỏa  $t_n \leq T/M$  và định nghĩa  $q = T/(M * t_n) \leq 1$
- (b) Tính kích thước bước thời gian  $\hat{\tau}_i = q * \tau_i$

(c) Chọn thứ tự thích hợp cho  $\hat{\tau}_i$  dựa theo thứ tự Leja [19].

3. *Lặp bộ lọc*: ( $k = 0, \dots, M - 1$ )

(a) Tính toán ma trận tương ứng  $\mathbf{P}(\mathbf{u}^k)$

(b) Thực hiện một chu kỳ FED với thứ tự ở trên của  $n$  bước thời gian  $\hat{\tau}_i$  và tăng  $k$  lên 1.

(c) Quay trở lại (a), nếu chưa đến thời gian dừng  $T$  ( $k \leq M - 1$ ).

### 3.3. Tổng kết chương

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày về lược đồ sai phân hữu hạn để giải quyết bài toán đã nêu (2.2.2.2). Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đã giới thiệu về thuật toán FED cũng như lược đồ áp dụng FED vào bài toán nhằm tăng hiệu suất của quá trình khử nhiễu ảnh. Các kết quả thực nghiệm về độ hiệu quả của mô hình, sự tối ưu của FED sẽ được chúng tôi trình bày ở chương 4.



## Chương 4.

### KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM

Trong chương này, chúng tôi trình bày các thực nghiệm: (i) Khử nhiễu ảnh sử dụng mô hình sai phân hữu hạn đã trình bày ở 3.1; (ii) Áp dụng FED để đẩy nhanh quy trình khử nhiễu; (iii) So sánh các kết quả, số liệu với mô hình PM. Toàn bộ các thực nghiệm được triển khai bằng Python 3.10 trên vi xử lý Apple M1 Pro 3.2 GHz. Trong các thực nghiệm chúng tôi đều sử dụng kích thước lưới không gian  $h = 1$ .

#### 4.1. Phương pháp đánh giá kết quả thực nghiệm

Vào cuối quá trình khử nhiễu, chúng tôi đo hiệu suất khử nhiễu bằng tỉ lệ tín hiệu cực đại trên nhiễu (peak-signal-to-noise ratio – PSNR), trung bình tuyệt đối độ lệch/lỗi (mean absolute deviation/error - MAE) và độ đo chỉ số tương đồng cấu trúc (structural similarity index measure – SSIM). Các giá trị PSNR và MAE được tính bằng công thức cung cấp bởi Durand và cộng sự [20]

$$PSNR(u, u_0) = 10 \log_{10} \frac{IJ |max u_0 - min u_0|^2}{\|u - u_0\|_{L^2}^2} \text{ db},$$

$$MAE(u, u_0) = \frac{\|u - u_0\|_{L^1}}{IJ},$$

trong đó,  $|max u_0 - min u_0|$  là khoảng giá trị điểm ảnh của ảnh gốc,  $u_0$  và  $u$  lần lượt ký hiệu cho ảnh gốc và ảnh đã được khử nhiễu,  $I \times J$  là kích thước của ảnh. Giá trị SSIM được tính bằng công thức được cung cấp bởi Wang và cộng sự [21]

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

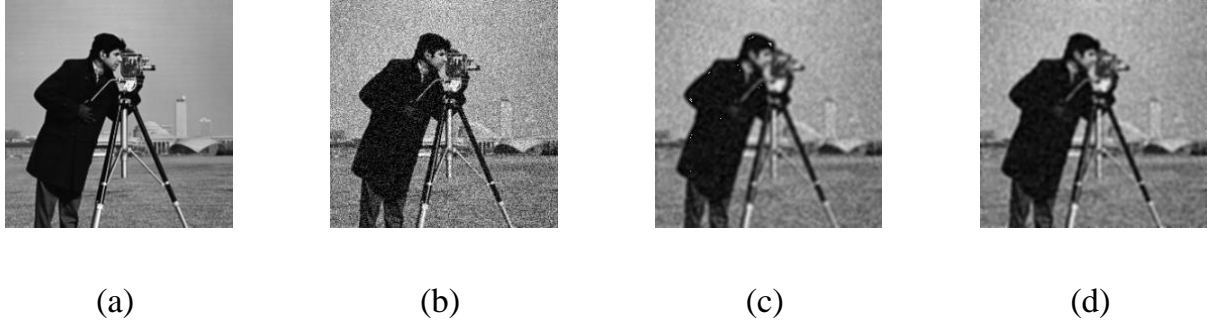
trong đó,  $C_1 = (K_1L)^2$ ,  $C_2 = (K_2L)^2$ ,  $K$  là một hằng số nhỏ ( $K \ll 1$ , thông thường chọn  $K_1 = 0.01$  và  $K_2 = 0.03$ ),  $L$  là dải động của các giá trị điểm ảnh (225 cho ảnh xám 8-bit).

#### 4.2. Các kết quả thực nghiệm

##### 4.2.1. So sánh với phương pháp sai phân hữu hạn truyền thống

Thuật toán khử nhiễu được đánh giá trên các bức ảnh: “Cameraman” và “Peppers”

được xử lý thêm nhiễu trắng Gaussian với độ lệch chuẩn (standard deviation – SD) là 30 (Hình 4.1, 4.2). Bảng 4.1 và Bảng 4.2 trình bày kết quả khử nhiễu của ảnh Cameraman (Hình 4.1) và Peppers (Hình 4.2). Các kết quả được so sánh dựa vào chỉ số PSNR, MAE, SSIM và thời gian tính toán của CPU.



**Hình 4.1.** Kết quả ảnh Cameraman bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 30$ . (c) CFD. (d) FED.

**Bảng 4.1.** Kết quả thực nghiệm cho ảnh Cameraman kích thước (251x251), Hình 4.1.

Thuật toán	$\sigma$	PSNR	MAE	SSIM	Thời gian (giây)
CFD	30	23.55	10.87	0.60	67.68
FED	30	<b>24.71</b>	<b>9.89</b>	<b>0.67</b>	<b>38.22</b>

So với ảnh gốc (Hình 4.1.a và Hình 4.2.a), ảnh khử nhiễu bởi thuật toán được đề xuất (Hình 4.1.d và Hình 4.2.d) cho ra kết quả khôi phục tương đối tốt. Các chỉ số PSNR, SSIM cao hơn, MAE thấp hơn và thời gian thực thi nhanh hơn đáng kể. Tuy nhiên, thuật toán vẫn cần phải được kiểm tra ở các mức độ nhiễu khác nhau. Do đó, chúng tôi đã đánh giá các bức ảnh trên nhưng được xử lý thêm nhiễu trắng Gaussian với độ lệch chuẩn là 20, kết quả được trình bày ở Hình 4.3, Bảng 4.3 (ảnh Cameraman) và Hình 4.4, Bảng 4.4 (ảnh Peppers).



(a)



(b)



(c)



(d)

**Hình 4.2.** Kết quả ảnh Peppers bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 30$ . (c) CFD. (d) FED.

**Bảng 4.2.** Kết quả thực nghiệm cho ảnh Peppers kích thước (251x251), Hình 4.2.

Thuật toán	$\sigma$	PSNR	MAE	SSIM	Thời gian (giây)
CFD	30	25.66	9.47	0.72	67.98
FED	30	<b>27.63</b>	<b>7.02</b>	<b>0.83</b>	<b>34.58</b>



(a)



(b)



(c)



(d)

**Hình 4.3.** Kết quả ảnh Cameraman bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 20$ . (c) CFD. (d) FED.

**Bảng 4.3.** Kết quả thực nghiệm cho ảnh Cameraman kích thước (251x251), hình 4.3.

Thuật toán	$\sigma$	PSNR	MAE	SSIM	Thời gian (giây)
CFD	20	23.58	9.53	0.66	67.17
FED	20	<b>25.34</b>	<b>8.30</b>	<b>0.75</b>	<b>42.91</b>



(a)



(b)



(c)



(d)

**Hình 4.4.** Kết quả ảnh Peppers bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 20$ . (c) CFD. (d) FED.

**Bảng 4.4.** Kết quả thực nghiệm cho ảnh Peppers kích thước (251x251), hình 4.4.

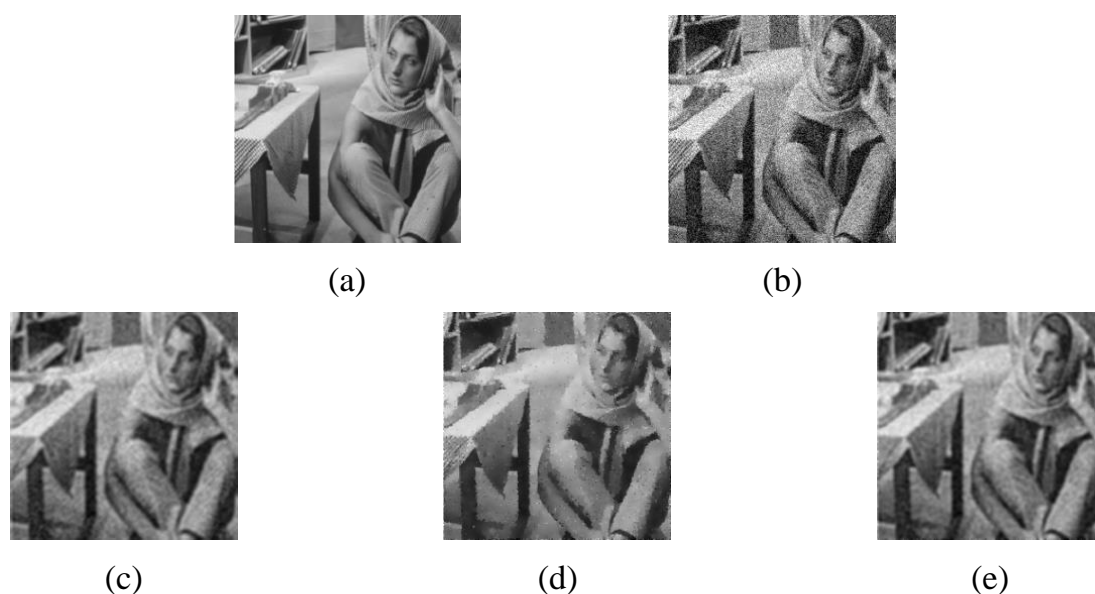
Thuật toán	$\sigma$	PSNR	MAE	SSIM	Thời gian (giây)
CFD	20	26.09	8.26	0.77	67.87
FED	20	<b>27.63</b>	<b>7.02</b>	<b>0.83</b>	<b>35.33</b>

Dựa vào kết quả được trình bày ở Bảng 4.3 và Bảng 4.4 với mức nhiễu  $SD = 20$ , ta thấy mức độ ảnh nhiễu được khôi phục so với ảnh gốc tương đối tốt. Thời gian tính toán cũng là một thông tin quan trọng trong hiệu suất khử nhiễu. Kết quả thực nghiệm ở các

bảng đều cho thấy rằng thời gian tính toán cho việc khử nhiễu khi sử dụng FED cho kết quả nhanh hơn so với khi sử dụng sai phân hữu hạn truyền thống cho cùng thuật toán. Cả hai phương pháp đều được triển khai trên cùng một thiết bị đã được nêu phía trên.

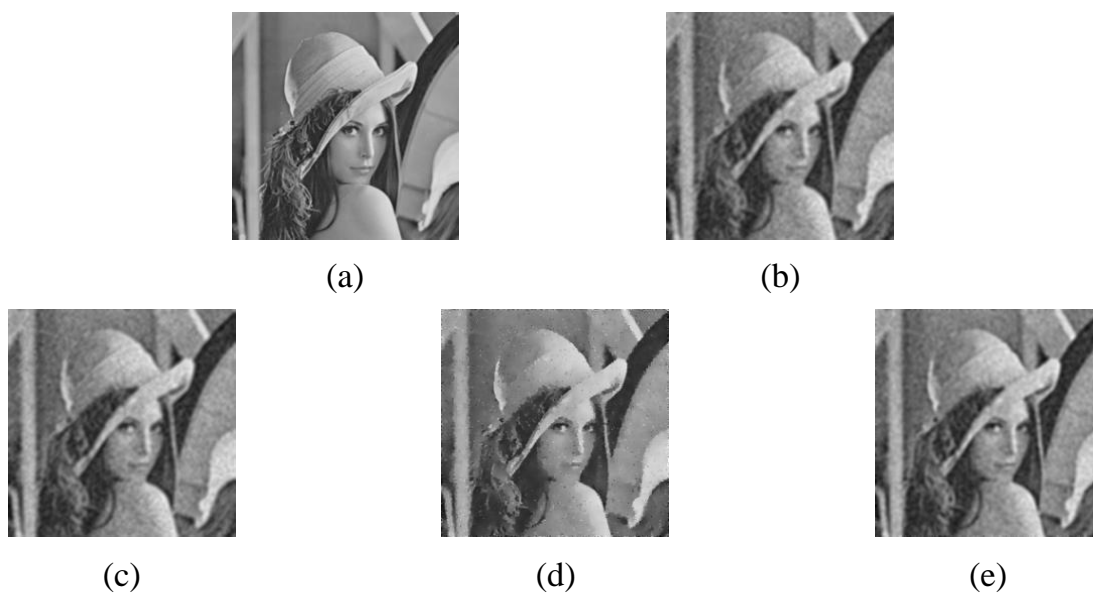
#### 4.2.2. So sánh với mô hình Perona-Malik

Tại đây, chúng tôi so sánh kết quả của thuật toán với nghiên cứu liên quan [1]. Thực nghiệm dựa trên ảnh Barbara và Lena được xử lý thêm nhiễu Gaussian với  $SD = 30$  (Hình 4.5, 4.6) và  $SD = 20$  (Hình 4.7, 4.8). Các thông số của kết quả được so sánh ở bảng 4.5. Mục tiêu ở đây là minh họa lợi ích của việc kiểm soát tốc độ khuếch tán  $\alpha(u)$  so với  $g(\Delta u)$  ở (2.10).

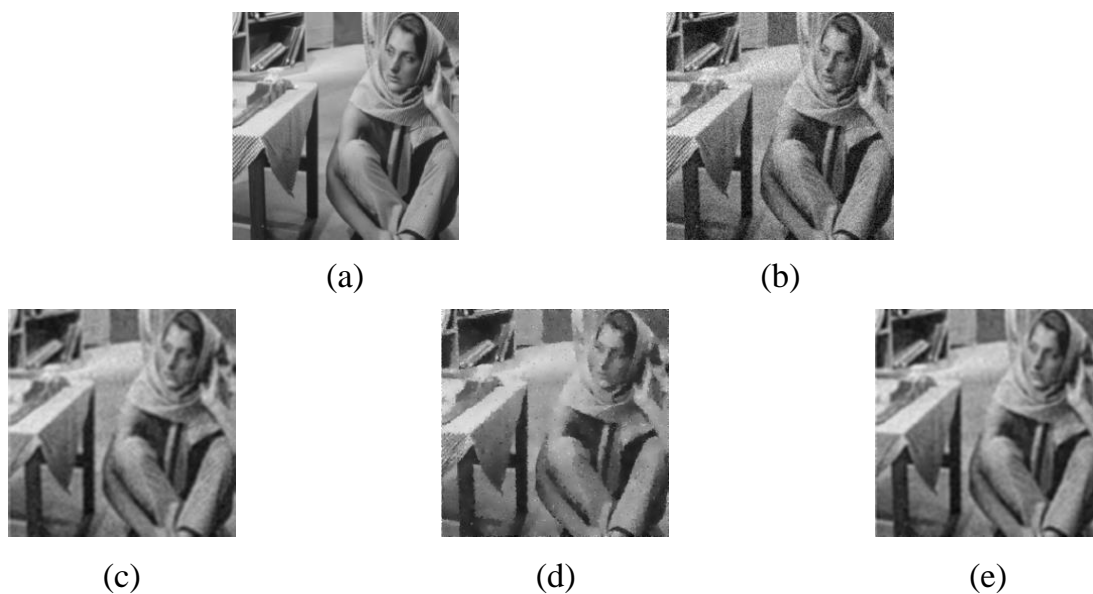


**Hình 4.5.** Kết quả ảnh Barbara bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 30$ . (c) CFD. (d). PM. (e) FED.

Kết quả khử nhiễu được xử lý bởi thuật toán PM cho thấy ảnh được khôi phục khá tốt, các đặc trưng của ảnh vẫn được giữ lại tuy nhiên ở vị trí các biên lại xuất hiện hiện tượng răng cưa. Mô hình sử dụng FED đã cho thấy được sự tốt hơn trong việc khử nhiễu mà vẫn giữ lại các đặc trưng và không gây ra các răng cưa ở biên ảnh so với mô hình PM [1]. Ở Bảng 4.5 có thể thấy được FED cho ra kết quả tốt hơn so với PM, các chỉ số PSNR, SSIM cao hơn, MAE thấp hơn.



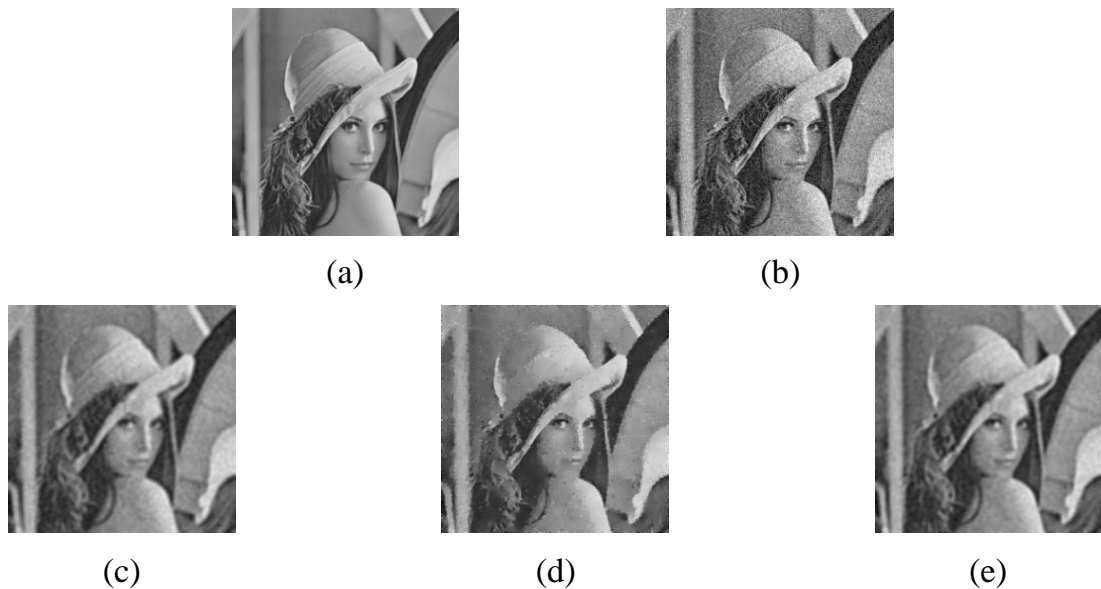
**Hình 4.6.** Kết quả ảnh Lena bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 30$ . (c) CFD. (d). PM. (e) FED.



**Hình 4.7.** Kết quả ảnh Barbara bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 20$ . (c) CFD. (d). PM. (e) FED.

**Bảng 4.5.** Kết quả thực nghiệm cho ảnh Barbara và Lena kích thước (251x251).

Hình ảnh	Thuật toán	$\sigma$	PSNR	MAE	SSIM
Barbara	CFD	20	26.01	9.18	0.74
	FED	20	<b>26.94</b>	<b>8.16</b>	<b>0.79</b>
	PM	20	26.58	8.64	0.77
	CFD	30	25.35	10.21	0.70
	FED	30	<b>26.10</b>	<b>9.34</b>	<b>0.74</b>
	PM	30	24.68	10.33	0.68
Lena	CFD	20	26.40	8.31	0.74
	FED	20	<b>27.29</b>	<b>7.32</b>	<b>0.79</b>
	PM	20	27.14	7.75	0.76
	CFD	30	25.69	9.50	0.68
	FED	30	<b>26.35</b>	<b>8.72</b>	<b>0.72</b>
	PM	30	25.34	9.03	0.67



**Hình 4.8.** Kết quả ảnh Lena bởi các thuật toán khử nhiễu, kích thước (251x251). (a) ảnh gốc. (b) ảnh được thêm nhiễu Gaussian với  $\sigma = 20$ . (c) CFD. (d). PM. (e) FED.

### 4.3. Tổng kết chương

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày các kết quả thực nghiệm liên quan đến mô hình 2.2.2.2. Chúng tôi cũng đã so sánh hiệu suất khử nhiễu của FED so với phương pháp sai phân hữu hạn truyền thống. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng so sánh với mô hình PM để cho thấy sự tối ưu khi xử lý ở biên ảnh của mô hình đã nêu.



## **Chương 5.**

### **KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN**

#### **5.1. Tóm tắt nội dung thực hiện**

Trong khoá luận “Mô hình khử nhiễu ảnh dựa trên phương trình đạo hàm riêng sử dụng thuật toán Fast Explicit Diffusion”, các công việc được thực hiện chủ yếu được trình bày trong chương 3 và chương 4 có thể tổng kết như sau:

Trong chương 3, chúng tôi đã nêu ra lược đồ sai phân hữu hạn để giải bài toán PDE 2.2.2.2, giới thiệu về thuật toán FED và xây dựng lược đồ áp dụng FED cho mô hình PDE đã nêu.

Trong chương 4, chúng tôi đã trình bày các kết quả thực nghiệm đã thực hiện cho các nội dung được nêu ở chương 3.

#### **5.2. Đánh giá mục tiêu đạt được**

Như đã được trình bày trong chương 1, mục tiêu chính của khoá luận là áp dụng thuật toán FED để tăng hiệu suất quá trình khử nhiễu dựa trên phương trình đạo hàm riêng. Thực nghiệm cho thấy thời gian xử lý khi áp dụng FED đã giảm đi đáng kể, các chỉ số của FED đều thể hiện sự tối ưu hơn so với sai phân hữu hạn. Do đó, chúng tôi đã đạt được mục tiêu đề ra ban đầu của khoá luận.

#### **5.3. Hướng phát triển**

Trong tương lai, khoá luận vẫn còn nhiều vấn đề chưa giải quyết và phát triển. Chi tiết hướng mở rộng, phát triển cho khoá luận là:

- Tiếp tục thực nghiệm trên nhiều loại ảnh khác nhau và trong các điều kiện nhiễu đa dạng để đảm bảo độ linh hoạt của mô hình.
- Nghiên cứu cách tối ưu hóa hiệu suất của mô hình để áp dụng xử lý trong thời gian ngắn, đặc biệt là đối với ứng dụng yêu cầu xử lý nhanh.
- Khám phá tích hợp các kỹ thuật học máy mới và cải tiến để nâng cao hiệu suất và độ chính xác của mô hình khử nhiễu.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] P. Perona and J. Malik, “Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, July 1990.
- [2] Abdelgader Siddig, Zhichang Guo, Zhenyu Zhou, Boying Wu, “An image denoising model based on a fourth-order nonlinear partial differential equation,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 76, no. 5, pp. 1056-1074, 2018.
- [3] Lysaker M., Lundervold A., Tai X.-C., “Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 12, pp. 1679-1590, 2003.
- [4] You Y.-L., Kaveh M., “Fourth-order partial differential equations for noise removal,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 9, no. 10, pp. 1723-1730, 2000.
- [5] Zhichang Guo, Jiebao Sun, Dazhi Zhang, and Boying Wu, “Adaptive Perona–Malik Model Based on the Variable Exponent for Image Denoising,” *IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING*, vol. 21, no. 3, pp. 958-967, March 2012.
- [6] F. Catté, P. Lions, J. Morel, T. Coll, “Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion,” *SIAM J. NUMER. ANAL.*, vol. 29, no. 1, pp. 182-193, February 1992.
- [7] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, Emad Fatemi, “Nonlinear total variation based noise removal algorithms,” *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1-4, pp. 259-268, November 1992.
- [8] Strong D.M., Chan T.F, “Spatially and Scale Adaptive Total Variation Based Regularization and Anisotropic Diffusion in Image Processing,” *Diffusion in Image Processing, UCLA Math Department CAM Report, Citeseer*, 1996.

- [9] P. Blomgren, T.F. Chan, P. Mulet, "Extensions to total variation denoising," *Optical Science, Engineering and Instrumentation '97*, 1997.
- [10] Chen Y., Levine S., Rao M., "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 66, no. 4, pp. 1383-1406, 2006.
- [11] Chen Y., Wunderli T., "Adaptive total variation for image restoration in BV space," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 272, no. 1, pp. 117-137, 2002.
- [12] T.F. Chan, S. Esedoglu, F. Park, "A fourth order dual method for staircase reduction in texture extraction and image restoration problems," *2010 IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 4137-4140, 2010.
- [13] Grewenig S., Weickert J., Bruhn A., "From box filtering to fast explicit diffusion," *Joint Pattern Recognition Symposium*, pp. 533-542, 2010.
- [14] Liu X., Huang L., Guo Z., "Adaptive fourth-order partial differential equation filter for image denoising," *Appl. Math. Lett.*, vol. 24, pp. 1282-1288, 2011.
- [15] Greer J.B., Bertozzi A.L., " $H^1$  Solutions of a class of fourth order nonlinear equations for image processing," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 10, pp. 349-366, 2004.
- [16] Lysaker M., Osher S., Tai X.-C., "Noise removal using smoothed normals and surface fitting," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, no. 10, pp. 1345-1357, 2004.
- [17] H. M.R., "A self-governing fourth-order nonlinear diffusion filter for image noise removal," *IPSJ Trans. Comput. Vision Appl.*, vol. 2, pp. 94-103, 2010.
- [18] V. R.S., "Matrix Iterative Analysis," *Springer Science & Business Media*, 2009.
- [19] Calvetti D., Reichel L., "Adaptive Richardson iteration based on Leja points," *J.*

*Comput. Appl. Math.*, vol. 71, pp. 267-286, 1996.

- [20] Durand S., Fadili J., Nikolova M., “Multiplicative noise removal using l1 fidelity on frame coefficients,” *J. Math. Imaging Vision*, vol. 36, no. 3, pp. 201-226, 2010.
- [21] Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P., “Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 13, pp. 600-612, 2004.
- [22] Weickert, J., Grewenig, S., Schroers, C. *et al.* ”Cyclic Schemes for PDE-Based Image Analysis”, *Int J Comput Vis*, vol. 118, pp. 275–299, 2016.