

Thermo 1 Formelsammlung

November 20, 2014

1 Achtung

Dieses Dokument umfasst die Notizen, mit der ich für die Thermodynamik 1 Klausur gelernt habe. Es gibt keine Garantie für Vollständigkeit, oder Korrektheit.

Sie dürfen dieses Dokument nach Belieben verändern und weiterverbreiten.

2 Konstanten

$$N_a = 6.02214 * 10^{23}$$

$$R = 8.3143 \frac{kJ}{kmol K}$$

3 Innere Energie und Enthalpie

$$U = \sum \text{thermische und latente Energien}$$

$$H = U + pV$$

4 Zustand im Nassdampfgebiet

$$\text{Masse Wasser} = m'$$

$$\text{Masse Dampf} = m''$$

$$x = \frac{m''}{m' + m''}$$

Damit gilt

$$z. B. u = (1 - x)u' + xu''$$

5 Ideales Gas

Innere Energie nur eine Funktion der Temperatur

Für ein einatomiges, ideales Gas

$$u_m = \frac{3}{2}RT$$

Außerdem ist der Zusammenhang zwischen c_p und R wichtig

$$\text{einatomig} : \frac{c_p}{R} = \frac{5}{2}$$

$$\text{zweiatomig} : \frac{c_p}{R} \approx \frac{7}{2}$$

Enthalpie nur eine Funktion der Temperatur

$$h = u + pv$$

$$pv = RT$$

$$u = u(T)$$

$$h = u + RT = h(T)$$

Important

Für ideale Gase gilt

$$du = c_v dT$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT$$

$$dh = c_p dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

Auch diese spezifischen Wärmekapazitäten sind bei einem idealen Gas reine Temperaturfunktionen

$$h = u + pv = u + RT$$

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

$$\rightarrow c_p = c_v + R$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\kappa}{\kappa - 1}$$

6 Inkompressible Flüssigkeit

Druckänderung wirkt sich nicht auf Volumen aus

Important

$$v = v(T)$$

$$u = u(T)$$

$$h = u + pv = u'(T) + pv'(T) = h'(T) + v'(T)(p - p'(T))$$

Reale Flüssigkeiten nähern sich diesem Verhalten mit sinkender Temperatur immer besser an.

Analog zum idealen Gas kann man spez. Wärmekap. analysieren:

$$du = \left(\frac{\delta u}{\delta T} \right)_v dT + \left(\frac{\delta u}{\delta v} \right)_T dv$$
$$v = \text{const} \rightarrow du = c_v dT, \rightarrow u = u(T)$$

Also ist auch hier die innere Energie eine reine Temperaturfunktion

Important

Außerdem sind die Wärmekapazitäten c_p und c_v für ideale Flüssigkeiten gleich. Die Enthalpie hängt von Temperatur und Druck ab.

$$v = \text{const}$$

$$h = h(T, p)$$

$$\rightarrow dh = c_p dT + v dp$$

7 Energietransfer, Bilanzgleichungen

Arbeits- und Wärmeströme dürfen beliebig orientiert werden. Die Wahl ob Arbeit in das System hereinströmt, oder aus dem System heraus ist frei. Aber sie muss eindeutig angegeben werden und kann dann nicht mehr verändert werden.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$$

in einem Gravitationsfeld

$$W_g = mg(h_2 - h_1)$$

bei einer Feder

$$F = k * x$$

$$W_f = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Bei einem Kolben

$$F = pA$$

$$W_{12} = \int_1^2 F dx$$

7.1 Volumenänderungsarbeit

Außerdem sehr wichtig: Volumenänderungsarbeit. Volumenänderungsarbeit ist reversibel.

Important

$$W_{12}^V = - \int_1^2 p dV$$

Bei Ausdehnung wird Arbeit an die Umgebung abgegeben

$$dV > 0 \rightarrow dW < 0$$

Andere Arbeitsformen sind zum Beispiel elektrische Arbeit oder Wellenarbeit.

7.2 Wärmeströme

Ein System heißt wärmedicht, oder adiabet, falls keine Wärme das System verlässt. Wärmetransport ist irreversibel.

Wärmeleitung, immer von warm nach kalt

$$\frac{\dot{Q}}{A} = -\lambda \frac{\delta T}{\delta x}$$

Konvektion

$$\dot{Q} = \alpha A (T_m - T_w)$$

α wird individuell bestimmt

$$[\alpha] = \frac{J}{m^2 s K}$$

T_m ist die mittlere Temperatur

T_w ist die Temperatur außen

Wärmestrahlung

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

7.3 Masseströme

Energie kann auch durch Masseströme transportiert werden. Das System erhält dabei kinetische, potentielle Energie, und die Enthalpie des einströmenden Stoffes.

$$\begin{aligned}dE &= dE^m + dW^V \\&= (e_1 + p_1 v_1) dm \\&= (u_1 + p_1 v_1 + e_{kin,1} + e_{pot,1}) dm \\&= (h_1 + e_{kin,1} + e_{pot,1}) dm\end{aligned}$$

$$h = u + pv$$

Important

Zur Bilanzierung muss die Strömungsarbeit der einströmenden und ausströmenden Masse betrachtet werden.

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \dot{m}_1(e_1 + p_1 v_1) - \dot{m}_2(e_2 + p_2 v_2) \\&= \dot{m}_1 h_1 - \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_1(e_{kin,1} + e_{pot,1}) - \dot{m}_2(e_{kin,2} + e_{pot,2})\end{aligned}$$

Die Enthalpie ist nur eine Hilfsgröße, die für diesen Fall definiert wurde. Sie hat ein vollständiges Differential, und ist eine Zustandsgröße.

Zusätzlich gibt es noch die Tothalenthalpie, die Summe aus Enthalpie + kinetischer und potentieller Energie.

$$\begin{aligned}H_t &= H + E_{kin} + E_{pot} = E + pV \\h_t &= h + e_{kin} + e_{pot} = e + pV\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{m}_1 h_{t,1} - \dot{m}_2 h_{t,2}$$

7.4 Spezifische Wärmekapazitäten

Die spezifische Wärmekapazität bei Betrachten von u liefert c_v :

$$du = \left(\frac{\delta u}{\delta T} \right)_v dT + \left(\frac{\delta u}{\delta v} \right)_T dv$$

spezifische Wärmekapazität bei $V=\text{const}$

$$c_v = \left(\frac{\delta u}{\delta T} \right)_v$$
$$\rightarrow du = c_v dT$$

Analog für die Enthalpie, allerdings diesmal mit konstantem Druck:

$$dh = \left(\frac{\delta h}{\delta T} \right)_p dT + \left(\frac{\delta h}{\delta p} \right)_T dp$$

spezifische Wärmekapazität bei $p=\text{const}$

$$c_p = \left(\frac{\delta h}{\delta T} \right)_p$$
$$\rightarrow dh = c_p dT$$

8 Prozesse

8.1 Stationär

Stationär → Masse und Gesamtenergie konstant

Auch ein offenes System kann stationär sein, auch Fließprozesse können stationär sein. Für diese Klassifikation ist nur wichtig, dass $\frac{dm}{dt} = 0$ und $\delta E = \text{const}$

Für ein stationäres System gilt mit dem 1. Hauptsatz:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= 0 = \dot{H}_{t,e} - \dot{H}_{t,a} + \dot{Q} + \dot{W} \\ 0 &= \dot{m}\left(h + \frac{v^2}{2} + gy\right)_1 - \dot{m}\left(h + \frac{v^2}{2} + gy\right) + \dot{Q} + \dot{W}\end{aligned}$$

spezifisch auf Masse bezogen

$$\rightarrow \frac{de}{dt} = 0 = (h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + g(y_1 - y_2) + q + w$$

Analyse einer Drossel

Was gilt für ein offenes, stationäres, adiabates System mit $\Delta e_{kin} = \Delta e_{pot} \approx 0$?

- *Offen* → Es gibt möglicherweise einen Massestrom
- *Adiabat* → $\dot{Q} = 0$
- In einem adiabaten, stationären System, in dem außerdem keine Arbeit verrichtet wird, gilt:

$$\begin{aligned}\Delta e_{kin} &= \Delta e_{pot} \approx 0 \\ 0 &= \dot{m}(h_1 - h_2) \\ \rightarrow h_2 &= h_1\end{aligned}$$

Also ist dieses System isenthalp

8.2 Instationär, 3.4

Es kann Energie aufgenommen, oder abgegeben werden.

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \dot{m}_e - \dot{m}_a \\ \frac{dE}{dt} &= \dot{m}_e h_{t,e} - \dot{m}_a h_{t,a} + \dot{W} + \dot{Q}\end{aligned}$$

8.3 Isobar

Important

$$\Delta E = W_{12} + Q_{12}$$

$$E_2 - E_1 = W_{12} + Q_{12}$$

$$U_2 - U_1 = W_{12} + Q_{12}$$

Der Prozess ist isobar, also gilt

$$\rightarrow W = - \int_1^2 p dV = -p(V_2 - V_1)$$

Damit kann man die Gleichung nach Q umformen

$$U_2 - U_1 + pV_2 - pV_1 = H_2 - H_1 = Q_{12}$$

Außerdem kann man die ideale Gasgleichung verwenden:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

8.4 Isotherm und Reversibel

Important

Geschlossen	Offen
$W_{12}^{rev} = U_2 - U_1 - T(S_2 - S_1)$ $= U_2 - TS_2 - U_1 + TS_1 = A_2 - A_1$	$W_{12}^{rev} = \dot{H}_2 - \dot{H}_1 - T(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)$ $= \dot{H}_2 - T\dot{S}_2 - \dot{H}_1 + T\dot{S}_1 = \dot{G}_2 - \dot{G}_1$
Differenz der freien inneren Energie	Differenz der freien Enthalpieströme

Vor allem die Gleichung für ein geschlossenes System ist interessant.

Es gilt $U_{12} = W_{12} + Q_{12}$,

angenommen, dieser Prozess läuft reversibel ab, dann wird nur durch Q

Entropie übertragen. Und man weiß: $ds = \frac{dq}{T}$, umformen:

$$S = QT$$

Damit hat man eine einfache Gleichung, um Q , W und U in Relation zu setzen, für $T = const$

8.5 Isochor

Man kann auch hier die ideale Gasgleichung verwenden:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

Important

Gase leisten hier keine Arbeit,

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$Q_{12} = TS_{12}$$

8.6 Isentrop

Hier ist der Isentropenexponent wichtig, bei einem Gas gilt $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$. Luft hat $\kappa = 1.4$

Es gilt $pV^\kappa = \text{const}$

Important

Für ein ideales Gas, das einen isentropen Prozess durchläuft, gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$$

8.7 Kreisprozesse, 3.3.4

Definition: *Ändert ein System den Zustand so, dass es in seinen Anfangszustand zurückkehrt, hat das System einen Kreisprozess durchlaufen*

Für jede Zustandsgröße z gilt $\oint dz = 0$ Damit geht auch der Umkehrschluss: Wenn das Umlaufintegral bei einem Kreisprozess verschwindet, hat man es mit einer Zustandsgröße zu tun.

Volumenänderungsarbeit ist zum Beispiel keine Zustandsgröße, Wärme auch nicht. Beide hängen vom Prozessverlauf ab.

8.8 Wirkungsgrade, 3.3.5

- Arbeitsmaschine: thermischer Wirkungsgrad η_{th}
 $\rightarrow \eta_{th} = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$
- Kühlprozesse, Wärmepumpen: Leistungszahl ϵ
- Kältepumpe $\rightarrow \epsilon = \frac{Q_{zu}}{W_{zu}}$
- Wärmepumpe $\rightarrow \epsilon = \frac{Q_{ab}}{W_{zu}}$
- Thermischer Wirkungsgrad $\eta_{th} = 1 - \left| \frac{Q_{ab}}{Q_{zu}} \right|$

9 Entropie

Important

$$ds = \frac{\delta q_{rev}}{T} = \frac{du + pdv}{T} = \frac{dh - vdp}{T}$$

$$\Delta S = S_e - S_a + S_Q + S_{irr}$$

$$S_{irr} = S_{prod} = S_a - S_e = ds_c - ds_r$$

ideales Gas

$$ds = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

$$ds = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

Man verwendet die spezifische Gaskonstante für die Änderung der spezifischen Entropie

und die allgemeine Gaskonstante für die Änderung der molaren Entropie

ideale Flüssigkeit

$$ds = c_{if} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

Nassdampf

Vorsicht, es muss gezeigt werden,

dass der Prozess nur im Nassdampfgebiet verläuft

$$s'' - s' = \frac{h'' - h'}{T}$$

10 Verlustbehaftete Prozesse

Natürliche Prozesse laufen zwar nicht isentrop ab, häufig wird aber ein *isentropen Wirkungsgrad* angegeben, n_{st}

Important

Für ein ideales Gas, das einen adiabaten, aber nicht reibungsfreien Prozess durchläuft, gilt:

1. Bei einer Turbine, Arbeit wird entzogen

$$n_{st} = \frac{reell}{ideal}$$

$$w_{12} = h_2 - h_1$$

$$w_{12}^{rev} = h_2^* - h_1^*$$

$$n_{st} = \frac{w_{12}}{w_{12}^{rev}} = \frac{h_2 - h_1}{h_2^* - h_1^*} = \frac{c_p dT}{c_p dT^*}$$

2. Bei einem Verdichter, Arbeit wird geleistet

$$n_{st} = \frac{ideal}{reell}$$

$$n_{st} = \frac{w_{12}^{rev}}{w_{12}} = \frac{h_2^* - h_1^*}{h_2 - h_1} = \frac{c_p dT^*}{c_p dT}$$

11 Wichtige Prozesse

11.1 Otto-Prozess

Läuft in einem Zylinder ab.

- $1 \rightarrow 2$ Isentrope Kompression, der Kolben wird reibungsfrei eingedrückt. Arbeit fließt in das System
- $2 \rightarrow 3$ Isochore Wärmezufuhr, der Kolben ist fixiert
- $3 \rightarrow 4$ Isentrope Expansion, der Kolben wird reibungsfrei herausgezogen. Das System leistet Arbeit
- $4 \rightarrow 1$ Isochore Wärmeabfuhr, der Kolben ist fixiert

11.2 Carnot-Prozess

Ähnlich wie der Otto-Prozess, läuft ebenfalls in einem Zylinder ab, der allerdings aufwendig gekühlt/erwärmt wird.

- $1 \rightarrow 2$ Isentrope Kompression, reibungsfrei
- $2 \rightarrow 3$ Isotherme Wärmezufuhr, in einem Wärmebad
- $3 \rightarrow 4$ Isentrope Expansion, reibungsfrei
- $4 \rightarrow 1$ Isotherme Wärmeabfuhr, in einem Kältebad

11.3 Rankine-Prozess

Typischer Prozess in einem Kraftwerk, Kreisprozess

- $1 \rightarrow 2$ Isentrope Kompression, Speisepumpe
- $2 \rightarrow 3$ Isobare Wärmezufuhr, Kessel
- $3 \rightarrow 4$ Isentrope Expansion, Turbine
- $4 \rightarrow 1$ Isobare Wärmeabfuhr, Kondensator