Math Notes

Lucas Porto

2025-05-16

Contents


```r
bookdown::serve_book()
```

Chapter 1

Números reais

1.1 Axiomas e teoremas

[Anton and Rorres, 2000]

1.1.1 Corpo

Defini-se como **corpo** qualquer conjunto $\mathbb{K}$ no qual estão definidas as operações de soma e multiplicação que satisfazem as propriedades:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \mid x = a + b, x = cd \tag{1.1}$$

$$(a + b) + c = a + (c + b) \text{ e } (ab)c = a(bc) \tag{1.2}$$

$$a + b = b + a \text{ e } ab = ba \tag{1.3}$$

$$a + 0 = a \text{ e } 1a = a \tag{1.4}$$

$$a(b + c) = ab + cd \tag{1.5}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} \mid a + b = 0 \tag{1.6}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} \mid ab = 1 \tag{1.7}$$

$$-(-a) = a \tag{1.8}$$

São exemplos de corpos os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, sendo que $\mathbb{N}$ não considerado um corpo por não ter definido o elemento neutro multiplicativo e aditivivo e $\mathbb{Z}$ não é um corpo por não possuir recíproco.

Das propriedades definidas acima, pode-se deduzir os teoremas:

Teorema 1.1 (Simplificação para adição)**.**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \mid a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

Proof. Por (1.6) temos que $\exists! y \in \mathbb{R} \mid a + y = 0 \Rightarrow y + a + b = y + a + c$ e por (1.3) $0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$ □

Teorema 1.2 (Subtração)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R} \mid a + (-x) = b, \quad a - x = b$$

Proof. Sabe-se que $\exists! y \mid a + y = 0$, esse y é chamado $-a$ logo $a + (-x) + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow -x = b + (-a)$, então podemos reescrever a equação como $a + b + (-a) = a + b + (-a) \equiv b = b$ que é verdadeira. □

Teorema 1.3 (Divisão)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R}^* \mid xb = a, \quad \frac{a}{x} = b, \quad \frac{a}{b} = x$$

Proof. $\exists! y \mid by = 1 \Rightarrow xby = ay \Rightarrow x = ay \Rightarrow ayb = ayb$ Sendo que essa ultima igualdade resulta em uma expressão verdadeira □

Teorema 1.4 (Frações iguais)**.**

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Proof. Temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0$ e por 1.6 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ab-bc}{bd} = 0 \Leftrightarrow ab - bc = 0 \equiv ad = bc$ □

Teorema 1.5 (Recíprocos de frações)**.**

$$a, b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Demonstração. Por (1.7) $\exists! x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{a}{b} x = 1 \Leftrightarrow ax = b$ Logo $x = \frac{b}{a}$ □

Teorema 1.6 (Soma e subtração de frações)**.**

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Proof. \$\$

\$\$ □

Teorema 1.7 (Multiplicação de frações)**.**

$$a \in \mathbb{R} \wedge b, c, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad e \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$$

Proof. Temos por (1.7) que $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = a \frac{1}{b} c \frac{1}{d}$ e por (1.3) $a \frac{1}{b} c \frac{1}{d} = ac \frac{1}{b} \frac{1}{d} = \frac{ac}{db}$. Ja para $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$, por 1.5 □

1.1.2 Ordem

Um **corpo** K é dito ordenado se apartir de seu eixo de simetria, chamado 0, e seus subconjuntos $K^+|\forall k \in K \Rightarrow a > 0$ e $K^-|\forall k \in K \Rightarrow a < 0$, quaisquer dos elementos $a, b, c \in K$, satisfazem as propriedades:

$$a, b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a > b \\ a = b \end{cases} \tag{1.9}$$

Teorema 1.8.

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1.9.

$$a, b \in \mathbb{R}^* \mid a < b \Rightarrow a - b < 0$$

Teorema 1.10.

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+ \\ a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^- \\ a \in \mathbb{R}^-, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Definição 1.1.

$$a, b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1.11.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^* \begin{cases} |a| < |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \in \,]-1, 1[\\ |a| > |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \notin \,]-1, 1[\\ |a| = |b| \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \end{cases}$$

Teorema 1.12.

$$a, b, c \in \mathbb{R} \mid a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Teorema 1.13.

$$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^- \mid a < b \Rightarrow ac > bc$$

Teorema 1.14.

$$a, b \in \mathbb{R}^* \mid a < b \Rightarrow -a > -b$$

Bibliography

Howard Anton and Chris Rorres. *Elementary linear algebra: applications version.* Wiley, 8. ed edition, 2000. ISBN 978-0-471-17052-5 978-0-555-11869-6.