

Math Notes

Lucas Porto

2025-05-18

Contents

1	Definição axiomática dos números reais	5
1.1	Axiomas e teoremas de corpo	5
1.2	Axiomas e teoremas de ordem	6

```
bookdown::serve_book()
```


Chapter 1

Definição axiomática dos números reais

1.1 Axiomas e teoremas de corpo

Axioma 1.1 (Comutatividade).

$$a + b = b + a \text{ e } ab = ba$$

Axioma 1.2 (Associatividade).

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ e } (ab)c = a(bc)$$

Axioma 1.3 (Elemento Neutro).

$$a + 0 = a \text{ e } 1a = a$$

Axioma 1.4 (Distributividade).

$$a(b + c) = ab + ac$$

Axioma 1.5 (Simétrico ou oposto em relação a adição).

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} \mid a + b = 0, \quad b \equiv -a$$

Axioma 1.6 (Recíproco ou oposto em relação a multiplicação).

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R} \mid ab = 1$$

Teorema 1.1 (Simplificação para adição).

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \mid a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

Teorema 1.2 (Subtração).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R} \mid a + (-x) = b, \quad a - x = b$$

Teorema 1.3 (Divisão).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R}^* \mid xb = a, \quad \frac{a}{x} = b, \quad \frac{a}{b} = x$$

Teorema 1.4 (Frações iguais).

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Teorema 1.5 (Recíprocos de frações).

$$a, b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Teorema 1.6 (Soma e subtração de frações).

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Teorema 1.7 (Multiplicação de frações).

$$a \in \mathbb{R} \wedge b, c, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad e \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$$

1.2 Axiomas e teoremas de ordem

Axioma 1.7 ("Tricotomia).

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad ou \quad a > b \quad ou \quad a = b$$

Teorema 1.8.

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1.9.

$$a, b \in \mathbb{R}^* \mid a < b \Rightarrow a - b < 0$$

Teorema 1.10.

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+ \\ a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^- \\ a \in \mathbb{R}^-, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Definição 1.1.

$$a, b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1.11.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^* \begin{cases} |a| < |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \in]-1, 1[\\ |a| > |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \notin]-1, 1[\\ |a| = |b| \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \end{cases}$$

Teorema 1.12.

$$a, b, c \in \mathbb{R} \mid a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Teorema 1.13.

$$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^- \mid a < b \Rightarrow ac > bc$$

Teorema 1.14.

$$a, b \in \mathbb{R}^* \mid a < b \Rightarrow -a > -b$$

$$f(x) = x^2$$