Math Notes

Lucas Porto

2025-05-18

Contents


```
bookdown::serve_book()
```

Chapter 1

Definição axiomatica dos números reais

1.1 Axiomas e teoremas de corpo

Axioma 1.1 (Comutatividade)**.**

$$a + b = b + a \;\; e \;\; ab = ba$$

Axioma 1.2 (Associatividade)**.**

$$(a + b) + c = a + (c + b) \;\; e \;\; (ab)c = a(bc)$$

Axioma 1.3 (Elemento Neutro)**.**

$$a + 0 = a \;\; e \;\; 1a = a$$

Axioma 1.4 (Distributividade)**.**

$$a(b + c) = ab + cd$$

Axioma 1.5 (Simétrico ou oposto em relação a adição)**.**

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists ! b \in \mathbb{R} \mid a + b = 0, \;\; b \equiv -a$$

Axioma 1.6 (Recíproco ou oposto em relação a multiplicação)**.**

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists ! b \in \mathbb{R} \mid ab = 1$$

Teorema 1.1 (Simplificação para adição).

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \mid a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

Teorema 1.2 (Subtração).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R} \mid a + (-x) = b, \quad a - x = b$$

Teorema 1.3 (Divisão).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists! x \in \mathbb{R}^* \mid xb = a, \quad \frac{a}{x} = b, \quad \frac{a}{b} = x$$

Teorema 1.4 (Frações iguais).

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Teorema 1.5 (Recíprocos de frações).

$$a, b \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Teorema 1.6 (Soma e subtração de frações).

$$a, c \in \mathbb{R} \wedge b, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad e \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Teorema 1.7 (Multiplicação de frações).

$$a \in \mathbb{R} \wedge b, c, d \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad e \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c}$$

1.2 Axiomas e teoremas de ordem

Axioma 1.7 (Tricotomia).

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad ou \quad a > b \quad ou \quad a = b$$

Teorema 1.8.

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1.9.

$$a, b \in \mathbb{R}^* \mid a < b \Rightarrow a - b < 0$$

Teorema 1.10.

$$\begin{cases} a, b \in \mathbb{R}^{+} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^{+} \\ a \in \mathbb{R}^{+}, b \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^{-} \\ a \in \mathbb{R}^{-}, b \in \mathbb{R}^{+} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^{-} \end{cases}$$

Definição 1.1.

$$a, b \in \mathbb{R}^{-} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^{+}$$

Teorema 1.11.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{*} \begin{cases} |a| < |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \in \left]-1, 1\right[\\ |a| > |b| \Rightarrow \frac{a}{b} \notin \left]-1, 1\right[\\ |a| = |b| \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \end{cases}$$

Teorema 1.12.

$$a, b, c \in \mathbb{R} \mid a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Teorema 1.13.

$$a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{-} \mid a < b \Rightarrow ac > bc$$

Teorema 1.14.

$$a, b \in \mathbb{R}^{*} \mid a < b \Rightarrow -a > -b$$

$$f(x) = x^2$$

Chapter 2

Polinômios Reais

Teorema 2.1 (Função polinomial)**.** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k, \forall a \in \mathbb{R}$

Sendo assim, um polinômio é uma função definida pela soma de uma função constante e n funções potência de x sendo n o **grau** δ do polinômio e os fatores a_k os coeficientes do polinômio, a função constante também pode ser vista como uma uma função potência de expoente 0.

2.1 Operações

Dados os polinômios $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k x^k$ estão definidas as operações:

Definição 2.1 (Polinômio nulo)**.** $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$

Definição 2.2 (Soma)**.** $f(x) + g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{m} b_k x^k = \sum_{k=1}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) x^k$

Definição 2.3 (Igualdade)**.** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{m} b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=1}^{m} b_k x^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\max(m,n)} a_k x^k - b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\max(m,n)} (a_k - b_k) x^k \Leftrightarrow a_k = b_k$

Definição 2.4 (Multiplicação)**.**

$$f(x)g(x) = \begin{aligned} & a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + \cdots + a_0 b_m x^m \\ & + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + \cdots + a_1 b_m x^{m+1} \\ & + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + \cdots + a_2 b_m x^{m+2} \\ & \vdots \\ & + a_n b_0 x^n + a_n b_1 x^{n+1} + a_n b_2 x^{n+2} + \cdots + a_n b_m x^{m+n} \end{aligned} \equiv \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$$

Definição 2.5 (Divisão)**.** Na divisão $\frac{f(x)}{g(x)}$ o objetivo é definir outros dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$, chamados quociente e resto respectivamente, tais que:

1. $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$
2. $\delta r < \delta g$

Por [**?**] temos que $\delta f = \max(\delta qg, \delta r)$ e como $\delta r < \delta g \Rightarrow \delta f = \delta gq = \delta g + \delta q \Rightarrow \delta q = |\delta f - \delta g|$

Chapter 3

Simetria de funções

Definição 3.1 (Domínio simétrico em relação à origem)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que f tem domínio simétrico em relação à origem se, e somente se, $\forall x \in Df \Leftrightarrow -x \in Df$

Definição 3.2 (Função par e ímpar)**.** Seja a função real f com domínio simétrico na origem, temos que:

- $f(x)$ é **par** $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$
- $f(x)$ é **ímpar** $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

3.1 Propriedades

Sejam $\jmath$ e $\Im$ classes de funções tal que $\forall f \in \jmath$ é par e $\forall g \in \Im$ é ímpar, temos as seguintes propriedades.

Teorema 3.1 (Elemento oposto)**.** $f(x) - f(-x) = 0$ *e* $g(x) + g(-x) = 0$

Teorema 3.2 (Somas internas à classe)**.** ***1)*** $f_i(x) + f_j(x) \in \jmath$ *e* $f_i(x) - f_j(x) \in \jmath$

2) $g_i(x) + g_j(x) \in \Im$ *e* $g_i(x) - g_j(x) \in \Im$

Proof.

$$h(x) = f_i(x) + f_j(x) = f_i(-x) + f_j(-x) = h(-x)$$

$$h(x) = f_i(x) - f_j(x) = f_i(-x) - f_j(-x) = h(-x)$$

$$h(x) = g_i(x) + g_j(x) = -g_i(-x) - g_j(-x) = -h(-x)$$

$$h(x) = g_i(x) - g_j(x) = g_i(x) + g_j(-x) = -h(-x)$$

$\square$

Teorema 3.3 (Produto interno à classe)**.** *$f_i(x)f_j(x) \in \jmath$ e $g_i(x)g_j(x) \in \jmath$*

Proof.

$$f_i(x)f_j(x) = f_i(-x)f_j(-x)$$

$$g_i(x)g_j(x) = (-g_i(-x))(-g_j(-x)) = g_i(-x)g_j(-x)$$

$\square$

Teorema 3.4 (Produto interclasse)**.** *$f(x)g(x) \in \Im$*

Proof.

$$fg(x) = f(x)g(x) = f(-x)(-g(-x)) = -fg(-x)$$

$\square$

Teorema 3.5 (Soma interclasse)**.** *Se $\operatorname{Im} f \neq 0$ e $\operatorname{Im} g \neq 0$, então seja $h(x) = f(x) + g(x)$, temos que $h(x) \notin \jmath$ e $h(x) \notin \Im$*

Proof.

$$h(x) = f(x) + g(x) = f(-x) - g(-x) \therefore h(x) \neq h(-x) \wedge h(x) \neq -h(-x)$$

$\square$

Teorema 3.6 (Decomposição em função par e ímpar)**.** *$\forall h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com domínio simétrico em relação à origem, podemos definir as funções $h_{ímpar} = h(x) - h(-x)$ e $h_{par} = h(x) + h(-x)$ de modo que $2h = h_{par} + h_{ímpar}$*

Proof. **Parte 1:** Mostremos que $h_{\text{par}}(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ é par.

$$h_{\text{par}}(-x) = \frac{h(-x) + h(--x)}{2} = \frac{h(-x) + h(x)}{2} = h_{\text{par}}(x)$$

Parte 2: Mostremos que $h_{\text{impar}}(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$ é ímpar.

$$h_{\text{impar}}(-x) = \frac{h(-x) - h(--x)}{2} = \frac{h(-x) - h(x)}{2} = -\frac{h(x) - h(-x)}{2} = -h_{\text{impar}}(x)$$

Parte 3: Soma das partes par e ímpar:

$$h_{\text{par}}(x) + h_{\text{impar}}(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} = \frac{2h(x)}{2} = h(x)$$

Logo,

$$h(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2}$$

$\square$

Bibliography