- Arithmétique - PGCD, PPCM

Version initiale le 19 mai 2020. Dernière mise à jour le 5 juin 2020

Sommaire

1.1. PGCD

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) −> HORS PROGRAMME

Si a et b sont deux nombres entiers positifs, on note PGCD(a ;b) le **plus grand diviseur qui soit commun à a et à b.**

Méthode 1: Déterminer le PGCD de deux nombres en écrivant la liste de leurs diviseurs

On cherche PGCD(72 ;40). On écrit la liste complète des diviseurs de ces deux nombres : Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, $\boxed{8}$, 10, 20 et 40. Ceux de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, $\boxed{8}$, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. On en déduit que PGCD(72 ;40)=8

Méthode 2: Déterminer le PGCD de deux nombres par soustractions successives

On cherche PGCD(72 ;40).
$72 - 40 = 32$; $40 - 32 = 8$; $32 - 8 = 24$; $24 - 8 = 16$; $16 - 8 = 8$; $8 - 8 = 0$;
On a donc PGCD(72 ;40)=8

Méthode 3: Déterminer le PGCD par l'algorithme d'Euclide

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
72	40	1	32
40	32	1	$\boxed{8}$
32	8	4	0

On cherche PGCD(72 ;40). Le PGCD est le dernier reste non nul, c'est-à-dire PGCD(72 ;40)=8.

Nombres premiers entre eux et fractions irréductibles

Deux nombres a et b sont dits **premiers entre eux** si PGCD(a ;b)=1.

Si a et b sont premiers entre eux, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible**.

Remarque :

Si on simplifie une fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD de a et de b, alors on obtient une fraction irréductible.

Exemples : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

PGCD(72 ;40)=8 nous permet de rendre irréductible $\frac{40}{72} = \frac{40 \div 8}{72 \div 8} = \frac{5}{9}$

1.2. PPCM

Plus Petit Commun Multiple (PPCM) –> HORS PROGRAMME

Si a et b sont deux nombres entiers positifs, on note PPCM(a ;b) le **plus petit multiple non nul qui soit commun à a et à b.**

Méthode 4: Déterminer le PPCM de deux nombres en écrivant la liste de leurs multiples

- Liste des premiers multiples de 54 :
  $0\times 54 = 0$; $1\times 54 = 54$; $2\times 54 = 108$; $3\times 54 = 162$; $4\times 54 = 216$; $5\times 54 = 270$; $6\times 54 = 324$; $7\times 54 = 378$; $8\times 54 = 432$; $9\times 54 = 486$; $10\times 54 = 540$; $11\times 54 = 594$; $12\times 54 = 648$; $13\times 54 = 702$; $14\times 54 = 756$; $15\times 54 = 810$; ...
- Liste des premiers multiples de 45 :
  $0\times 45 = 0$; $1\times 45 = 45$; $2\times 45 = 90$; $3\times 45 = 135$; $4\times 45 = 180$; $5\times 45 = 225$; $6\times 45 = 270$; $7\times 45 = 315$; $8\times 45 = 360$; $9\times 45 = 405$; $10\times 45 = 450$; $11\times 45 = 495$; $12\times 45 = 540$; $13\times 45 = 585$; $14\times 45 = 630$; $15\times 45 = 675$; ...

Les multiples communs sont 0 ; 270 ; 540 puis viendraient 810, 1 080, 1 350, ...

Le plus petit multiple commun non nul est donc 270. On écrit ppcm(54 ;45)=270.

Méthode 5: Déterminer le PPCM de deux nombres en écrivant les décompositions en facteurs premiers

- Décomposition de 54 en produit de facteurs premiers : $3^3 \times 2$
- Décomposition de 45 en produit de facteurs premiers : $3^2 \times 5$

En prenant tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits, s'ils ont des exposants, on prend le plus grand exposant !

Le plus petit multiple commun non nul est donc $3^3\times2\times5 = 270$. On écrit ppcm(54 ;45)=270.