Chapitre

# - Arithmétique -
# Nombres premiers

**Version initiale le 25 mai 2020. Dernière mise à jour le 25 mai 2020**

### Nombres Premiers

Un nombre entier supérieur à 1 est un **nombre premier** s'il admet EXACTEMENT deux diviseurs, 1 et lui-même.

### Exemples :

- $\rightsquigarrow$ Liste de quelques nombres premiers : $2\,;\,3\,;\,5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,23\,;\,\ldots$
- $\rightsquigarrow$ 119 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 9 d'après les critères de divisibilité. Pour autant, il n'est pas premier car $7 \times 17 = 119$

### Méthode 0: Primalité ou pas

- $\rightsquigarrow$ Pour savoir si un nombre entier est premier, il est nécessaire de tester sa divisibilité par tous les nombres premiers qui lui sont inférieurs,
- $\rightsquigarrow$ Mais il peut être suffisant de tester par beaucoup moins que ça si le nombre entier n'est pas premier, puisque dès lors qu'il a un autre diviseur que 1 et lui-même, il n'est pas premier dans ce cas il a alors au moins trois diviseurs.

### Exemples :

$\rightsquigarrow$ 29 est un nombre premier, en effet :
On teste sa divisibilité par 2,3,5,7,11,13,17,19 et 23
$29 = 14 \times 2 + 1$ donc 2 ne divise pas 29
$29 = 9 \times 3 + 2$ donc 29 n'est pas divisible par 3
$29 = 5 \times 5 + 4$ donc 29 n'est pas un multiple de 5
$29 = 4 \times 7 + 1$ donc 7 n'est pas un diviseur de 29
$29 = 2 \times 11 + 7$ donc 11 ne divise pas 29
$29 = 2 \times 13 + 3$ donc 29 n'est pas divisible par 13
$29 = 1 \times 17 + 12$ donc 29 n'est pas un multiple de 17
$29 = 1 \times 19 + 10$ donc 19 n'est pas un diviseur de 29
$29 = 1 \times 23 + 6$ donc 23 n'est pas un diviseur de 29

$\rightsquigarrow$ 27 ne l'est pas, en effet :
On teste sa divisibilité au plus par 2,3,5,7,11,13,17,19 et 23
$27 = 13 \times 2 + 1$ donc 2 ne divise pas 27
$27 = 9 \times 3 + 0$ donc 3 est donc un diviseur de 27 !
Inutile de continuer, 27 a au moins trois diviseurs 1, 3 et 27, il n'est donc pas premier.

## Critères de divisibilité

⇝ Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
⇝ Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
⇝ Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
⇝ Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
⇝ Un nombre est **divisible par 7** si la somme de son nombre de dizaines et de cinq fois son chiffre des unités l'est.
⇝ Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
⇝ Un nombre est **divisible par 10** s'il se termine par 0.
⇝ Un nombre est **divisible par 11** si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est nulle ou égale à une multiple de 11.

## Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout nombre entier $n$ supérieur à 1 admet une unique **décomposition en** produit de **facteurs premiers** : $n = p_1^{a_1} \times ... \times p_k^{a_k}$

## Méthode 1: Décomposition en facteurs premiers

Étant donné un nombre entier, noté N pour fixer les idées, dont on cherche la décomposition en facteurs premiers :

⇝ On teste successivement la divisibilité de N par les nombres premiers en commençant par 2

⇝ Si N est divisible par 2, on teste à nouveau la divisibilité par 2 du quotient de N par 2

⇝ Tant que c'est possible on continue avec 2

⇝ Lorsque le quotient n'est plus divisible par 2, on teste avec 3

⇝ Ainsi de suite avec les nombres premiers

⇝ L'algorithme se termine au plus tard avec le nombre premier qui précède N.

## Exemples :

⇝ **Décomposons 3 626 en facteurs premiers**

3 626 = $\boxed{2} \times 1\,813$
1 813 = $\boxed{7} \times 259$
259 = $\boxed{7} \times \boxed{37}$
d'où 3 626 = $\boxed{2} \times \boxed{7^2} \times \boxed{37}$

⇝ **Décomposition en facteur premiers de 504**

504 = $\boxed{2} \times 252$ car 504 est pair donc divisible par 2 !
252 = $\boxed{2} \times 126$ car 252 est pair !
126 = $\boxed{2} \times 63$ car 126 est pair !
63 = $\boxed{3} \times 21$ car 6+3=9 donc 63 est multiple de 3
21 = $\boxed{3} \times \boxed{7}$
Il ne reste qu'à écrire la décomposition en facteurs premiers de 504
504 = $\boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times \boxed{7}$
Puis on utilise les notations puissances : 504 = $\boxed{2^3} \times \boxed{3^2} \times \boxed{7}$

⇝ **Décomposons 4 680 en produit de facteurs premiers**

4 680 = $\boxed{2} \times 2\,340$

$2\ 340 = \boxed{2} \times 1\ 170$
$1\ 170 = \boxed{2} \times 585$
$585 = \boxed{3} \times 195$
$195 = \boxed{3} \times 65$
$65 = \boxed{5} \times \boxed{13}$
d'où $4\ 680 = \boxed{2^3} \times \boxed{3^2} \times \boxed{5} \times \boxed{13}$ ;