Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov – CPS 767
2025/1

Prof. Daniel R. Figueiredo

Primeira Lista de Exercícios

Dica: Para ajudar no processo de aprendizado responda às perguntas integralmente, mostrando o desenvolvimento das respostas.

Questão 1: Filhos e filhas

Considere um casal que tem dois descendentes e que as chances de cada um deles ser filho ou filha são iguais. Responda às perguntas abaixo:

1. Calcule a probabilidade dos descendentes formar um casal (ou seja, um filho e uma filha).
2. Calcule a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho.
3. Calcule a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha (cuidado!).
4. Calcule a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia (assuma que a chance de nascer em um determinado dia é igual a qualquer outro)

Questão 2: Dado

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) tal que a chance de sair a face $i = 1, \dots, 20$ seja linearmente proporcional a i. Ou seja, $P[X = i] = ci$ para alguma constante c, onde X é uma variável aleatória que denota a face do dado. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine o valor de c.
2. Calcule o valor esperado de X (obtenha também o valor numérico)
3. Calcule a probabilidade de X ser maior do que seu valor esperado.
4. Calcule a variância de X (obtenha também o valor numérico).
5. Repita os últimos três itens para o caso do dado ser uniforme, ou seja, $P[X = i] = 1/20$, $i = 1, \dots, 20$. Qual dado possui maior variância? Explique intuitivamente sua descoberta.

Questão 3: Dado em ação

Considere a versão uniforme do dado acima, ou seja, $P[X = i] = 1/20$, $i = 1, \dots, 20$. Seja Y uma variável aleatória indicadora da primalidade da face do dado. Ou seja, $Y = 1$ quando o X é um número primo, e $Y = 0$ caso contrário. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine $P[Y = 1]$.
2. Considere que o dado será jogado n vezes. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \dots, n$, e defina $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Repare que Z é uma variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado é primo. Determine a distribuição de Z, ou seja, $P[Z = k]$, para $k = 0, \dots, n$. Que distribuição é esta?
3. Considere que o dado será jogado até que um número primo seja obtido. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \dots,$ e defina $Z = \min\{i | Y_i = 1\}$. Repare que Z denota o número de vezes que o dado é jogado até que o resultado seja um número primo. Determine a distribuição de Z, ou seja $P[Z = k]$, para $k = 1, \dots$. Que distribuição é esta?

Questão 4: Cobra
Considere três imagens tiradas em uma floresta, I_1, I_2, e I_3. Em apenas uma das imagens existe uma pequena cobra. Um algoritmo de detecção de cobras em imagens detecta a cobra na imagem i com probabilidade α_i. Suponha que o algoritmo não encontrou a cobra na imagem I_1. Defina o espaço amostral e os eventos apropriados e use regra de Bayes para determinar:

1. A probabilidade da cobra estar na imagem I_1.
2. A probabilidade da cobra estar na imagem I_2.

Questão 5: Sem memória
Seja $X \sim Geo(p)$ uma variável aleatória Geométrica com parâmetro p. Mostre que a distribuição geométrica não tem memória. Ou seja dado que $X > k$, o número de rodadas adicionais até que o evento de interesse ocorra possui a mesma distribuição (dica: formalize esta afirmação).

Questão 6: Ônibus
Considere que o processo de chegada do ônibus 485 no ponto do CT seja bem representado por um processo de Poisson. Ou seja, $X \sim Poi(\lambda, t)$ denota o número (aleatório) de ônibus que chegam ao ponto em um intervalo de tempo t com taxa média de chegada igual a λ. Assuma que $\lambda = 10$ ônibus por hora.

1. Determine a probabilidade de não chegar nenhum ônibus em um intervalo de 30 minutos (inclusive numericamente).
2. Determine a probabilidade da média ocorrer, ou seja, de chegarem exatamente 10 ônibus em uma hora (inclusive numericamente).
3. Determine a taxa λ tal que a probabilidade de chegar ao menos um ônibus em um intervalo de 5 minutos seja maior que 90% (inclusive numericamente).

Questão 7: Propriedades
Seja X e Y duas variáveis aleatórias discretas. Mostre as seguintes equivalências usando as definições:

1. $E[X] = E[E[X|Y]]$, conhecida como regra da torre da esperança.
2. $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

Questão 8: Paradoxo do Aniversário
Considere um grupo com n pessoas e assuma que a data de nascimento de cada uma é uniforme dentre os 365 dias do ano. Vamos calcular a chance de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.

1. Seja $c(n)$ a probabilidade de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia. Determine explicitamente $c(n)$.
2. Usando a aproximação $e^x \approx 1 + x$, determine o valor aproximado para $c(n)$.
3. Usando o valor aproximado de $c(n)$, determine o menor valor de n tal que a chance de colisão na data de aniversário seja maior do que $1/2$. Você considera este número alto ou baixo?

Questão 9: Caras em sequência
Considere uma moeda enviesada, tal que o probabilidade do resultado ser cara é p (e coroa $1 - p$). Considere o número de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas. Por exemplo, na sequência "COCOCCOOCOCCC" a moeda teve que ser jogada 13 vezes até o aparecimento de $k = 3$ caras consecutivas, onde C = cara e O = coroa.

1. Seja N_k a variável aleatória que denota esta quantidade. Qual é o numero médio de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas, ou seja, qual é o valor esperado de N_k? Dica: comece com $k = 1$, monte uma recursão em k, e use a regra da torre da esperança.