

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Alberto Luiz Coimbra de  
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov  
Prof. Daniel Ratton Figueiredo

***2ª Lista de Exercícios***

Luiz Henrique Souza Caldas  
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

25 de abril de 2025

## Questão 1: Passeios aleatórios enviesados

Considere um grafo não direcionado  $G = (V, E)$  com peso nas arestas, tal que  $w_{ij} > 0$  para toda aresta  $(i, j) \in E$ . Considere um andarilho aleatório que caminha por este grafo em tempo discreto, mas cujos passos são enviesados pelos pesos das arestas. Em particular, a probabilidade do andarilho ir do vértice  $i$  para o vértice  $j$  é dada por  $w_{ij}/W_i$ , onde  $W_i = \sum_j w_{ij}$  (soma dos pesos das arestas incidentes ao vértice  $i \in V$ ). Temos assim um passeio aleatório enviesado linearmente pelos pesos das arestas.

1. Mostre que este passeio aleatório induz uma cadeia de Markov calculando a matriz de transição de probabilidade.
2. Determine a distribuição estacionária desta cadeia de Markov (dica: use o método da inspeção).
3. Determine se esta cadeia de Markov é reversível no tempo.

## Questão 2: Convergência de passeios aleatórios

Considere um passeio aleatório preguiçoso (com  $p = 1/2$ ) caminhando sobre um grafo com  $n$  vértices. Estamos interessados em entender a convergência da distribuição  $\pi(t)$  em diferentes grafos. Assuma que o passeio sempre inicia sua caminhada no vértice 1, ou seja,  $\pi_1(0) = 1$ . Considere os seguintes grafos: grafo em anel ( $n = 125$ ), árvore binária cheia ( $n = 127$ ), grafo em reticulado (grid) com duas dimensões ( $n = 121$ ).

1. Para cada grafo, construa a matriz de transição de probabilidade (ou seja, determine  $P_{ij}$  para todo vértice  $i, j$  do grafo). Atenção com a numeração dos vértices!
2. Determine analiticamente a distribuição estacionária para cada grafo (ou seja, determine  $\pi_i$  para cada vértice  $i$  do grafo).
3. Para cada grafo, calcule numericamente a variação total entre  $\pi(t)$  e a distribuição estacionária, para  $t = 0, 1, \dots$ . Trace um gráfico onde cada curva corresponde a um grafo (preferencialmente em escala log-log, com  $t \in [1, 10^3]$ ).
4. O que você pode concluir sobre a convergência em função da estrutura do grafo?

### Questão 3: Tempo de mistura

Considere um processo estocástico que inicia no estado 1 e a cada instante de tempo incrementa o valor do estado em uma unidade com probabilidade  $p$  ou retorna ao estado inicial (estado 1) com probabilidade  $1 - p$ . No estado  $n$  o processo não cresce mais, e se mantém neste estado com probabilidade  $p$ . Assuma que  $n = 10$  e que  $p \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ .

1. Construa a cadeia de Markov deste processo mostrando a matriz de transição de probabilidade em função de  $p$ .
2. Determine numericamente o vão espectral da cadeia de Markov para cada valor de  $p$ .
3. Determine numericamente a distribuição estacionária para cada valor de  $p$ , e indique o estado de menor probabilidade.
4. Utilizando os dados acima, determine um limitante inferior e superior para o tempo de mistura quando  $\epsilon = 10^{-6}$  para cada valor de  $p$ .
5. O que você pode concluir sobre a influência de  $p$  no tempo de mistura?

## Questão 4: Voltando à origem

Considere uma cadeia de Markov cujo espaço de estados é um látice de duas dimensões sobre os números naturais, ou seja,  $S = \{(i, j) \mid i \geq 1, j \geq 1\}$ . Cada estado pode transicionar para um de seus vizinhos no látice. Entretanto, se afastar da origem (se movimentar para o norte ou para o leste) tem probabilidade  $p/2$ , e se aproximar da origem tem probabilidade  $(1 - p)/2$ , onde  $p$  é um parâmetro do modelo (nas bordas, utilize self-loops). Assuma que  $p \in \{0.25, 0.35, 0.45\}$ .

1. Construa um simulador para essa cadeia de Markov.
2. Utilize o simulador para estimar a distribuição estacionária da origem (estado  $(1, 1)$ ), ou seja  $\pi_{1,1}$ , para cada valor de  $p$ . Dica: utilize os tempos de retorno!
3. Seja  $d(t)$  o valor esperado da distância (de Manhattan) entre  $X_t$  (o estado no tempo  $t$ ) e a origem. Utilize o simulador para estimar  $d(t)$  para  $t \in \{10, 100, 1000\}$ , para cada valor de  $p$ . O que você pode concluir?

## Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub:  
[https://github.com/lhscaldas/CPS767\\_MCMC/](https://github.com/lhscaldas/CPS767_MCMC/)