# Universidade Federal do Rio de Janeiro Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



## Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov Prof. Daniel Ratton Figueiredo

### 4ª Lista de Exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas email: lhscaldas@cos.ufrj.br

21 de maio de 2025

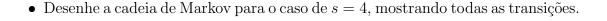
#### Questão 1: Sequências binárias restritas

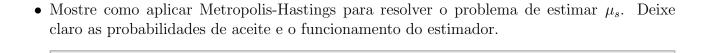
Considere uma sequência de dígitos binários (0s e 1s) de comprimento s. Uma sequência é dita válida se ela não possui 1s adjacentes. Considerando a distribuição uniforme, queremos determinar o valor esperado do número de 1s de uma sequência válida, denotado por  $\mu_s$ .

• Considerando s=4, determine todas as sequências válidas e calcule  $\mu_4$ .

As sequências válidas de comprimento 4 são: 0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0101, 1010. Portanto, temos um total de 7 sequências válidas. O número total de 1s nessas sequências é: 0+1+1+1+1+2+2=8. Assim,  $\mu_4=\frac{8}{7}\approx 1{,}14$ .

•	Construa uma cadeia de Markov sobre o conjunto de sequências válidas, deixando claro como
	funcionam as transições de estado. Argumente que a cadeia é irredutível.





#### Questão 2: Amostras de Modelos de Mistura

Considere a seguinte função de probabilidade:

$$p(x) = \alpha p_B(x; n, p_1) + (1 - \alpha) p_B(x; n, p_2),$$

onde  $p_B(x; n, p)$  é a probabilidade associada ao valor x da binomial com parâmetros n e p, e  $\alpha \in [0, 1]$  é um peso. Trata-se de um modelo de mistura de duas binomiais com diferentes valores de p, com pesos dados por  $\alpha$  e  $1 - \alpha$ . Considere duas variáveis aleatórias X e K, representando o valor de  $X \in [0, n]$  e a binomial utilizada  $K \in \{1, 2\}$ . Queremos gerar amostras de acordo com p(x).

	a regra de Bayes no segundo caso.	
•	Determine as distribuições de probabilidade condicionais $P(X K)$ e $P(K X)$ . Dica:	utilize

- $\bullet\,$  Determine a distribuição de probabilidade conjunta P(X,K).
- ullet Utilize a técnica de Gibbs Sampling para gerar amostras de X. Mostre como construir a cadeia de Markov e determine a transição entre os estados.
- $\bullet$  Para  $n=2,\ p_1=0,1,\ p_2=0,8,\ \alpha=0,3,$  desenhe a cadeia de Markov com todas as transições.
- Descreva como utilizar a cadeia de Markov para gerar amostras.

### Questão 3: Amostrando triângulos

Considere um grafo conexo qualquer. Desejamos gerar amostras de triângulos deste grafo (cliques de tamanho 3), tal que todo triângulo tenha igual probabilidade de ser amostrado — ou seja, uma distribuição uniforme sobre o conjunto de triângulos do grafo.

<ul> <li>Mostre como gerar amostras de forma direta, utilizando a distribuição uniforme em amostragem por rejeição. Determine a eficiência desse método.</li> </ul>	e. Dica: pense
• Mostre como gerar amostras utilizando Metropolis-Hastings. Determine os esta de Markov, as transições da cadeia base (que deve ser irredutível) e a proaceitação na cadeia modificada pelo método Metropolis-Hastings.	
• Intuitivamente, discuta quando a abordagem via Metropolis-Hastings é mais ponto de vista computacional) do que a abordagem via amostragem por rejeição.	`

#### Questão 4: Quebrando o código

Você encontrou uma mensagem cifrada com o código de substituição (neste código, cada letra é mapeada em outra letra de forma bijetiva). Você deseja encontrar a chave do código para ler a mensagem. Repare que a chave é um mapeamento  $\sigma$  entre as letras, por exemplo  $\sigma(a) = x$ ,  $\sigma(b) = h$ ,  $\sigma(c) = e$ , etc. Considere uma função  $f: \Omega \to [0,1]$  que avalia a capacidade de uma pessoa entender a mensagem cifrada dado um mapeamento  $\sigma \in \Omega$ . Repare que  $f(\sigma) = 1$  significa que é possível entender por completo a mensagem decifrada com o mapeamento  $\sigma$ , e  $f(\sigma) = 0$  se o mapeamento não revela nenhuma informação sobre a mensagem. Mostre como a técnica de Simulated Annealing pode ser utilizada para ler a mensagem cifrada. Mostre todos os passos necessários para aplicar a técnica neste problema (não é necessário implementar).

## Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub: https://github.com/lhscaldas/CPS767\_MCMC/