

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Alberto Luiz Coimbra de  
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov  
Prof. Daniel Ratton Figueiredo

***1ª Lista de Exercícios***

Luiz Henrique Souza Caldas  
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

21 de março de 2025

## Questão 1: Filhos e filhas

Considere um casal que tem dois descendentes e que as chances de cada um deles ser filho ou filha são iguais. Responda às perguntas abaixo:

1. Calcule a probabilidade dos descendentes formar um casal (ou seja, um filho e uma filha).

Resposta:

Seja  $X_1$  a variável aleatória que representa o sexo do primeiro filho e  $X_2$  a variável aleatória que representa o sexo do segundo filho, as quais assumem valor 0 se for uma filha e 1 se for um filho. O espaço amostral é dado por todas as combinações possíveis de sexos para os dois filhos, ou seja,  $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Já o evento “Formar um casal” ocorre quando há um filho e uma filha, ou seja,  $C = \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Como há  $|C| = 2$  elementos no evento de interesse e  $|\Omega| = 4$  no total, a probabilidade de formar um casal é dada por:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

2. Calcule a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho.

Resposta:

Novamente espaço amostral é dado por todas as combinações possíveis de filhos e filhas, ou seja,  $\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . O evento “Ao menos um filho” ocorre quando há um filho e uma filha ou dois filhos, ou seja,  $F = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Como há  $|F| = 3$  elementos no evento de interesse e  $|\Omega| = 4$  no total, a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho é dada por:

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \underline{\frac{3}{4}}$$

3. Calcule a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha (cuidado!).

Resposta:

Se uma já é filha, o espaço amostral é reduzido para  $\Omega_F = \{(0, 1), (1, 0), (0, 0)\}$  e o evento de interesse é  $D = \{(0, 0)\}$ . Como há  $|D| = 1$  elemento no evento de interesse e  $|\Omega_F| = 3$  no total, a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha é dada por:

$$P(D|F) = \frac{|D|}{|\Omega_F|} = \underline{\frac{1}{3}}$$

4. Calcule a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia (assuma que a chance de nascer em um determinado dia é igual a qualquer outro).

Resposta:

Supondo que o ano não seja bisexto, a probabilidade de nascer em um determinado dia é  $\frac{1}{365}$ . Como os nascimentos são independentes, a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia é dada por:

$$P(\text{Mesmo dia}) = \left(\frac{1}{365}\right)^2 = \frac{1}{133225} \quad |$$

## Questão 2: Dado

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) tal que a chance de sair a face  $i = 1, \dots, 20$  seja linearmente proporcional a  $i$ . Ou seja,  $P[X = i] = ci$  para alguma constante  $c$ , onde  $X$  é uma variável aleatória que denota a face do dado. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine o valor de  $c$ .

Resposta:

A soma da probabilidade de sair cada face do dado deve ser igual a 1, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} ci = 1 \Rightarrow c \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Rightarrow c \frac{20 \cdot 21}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{210} \quad |$$

2. Calcule o valor esperado de  $X$  (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

O valor esperado de uma variável aleatória discreta é dado por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210} \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{210} \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = \frac{41}{3} \approx 13,67 \quad |$$

3. Calcule a probabilidade de  $X$  ser maior do que seu valor esperado.

Resposta:

Como o valor esperado de  $X$  é  $E[X] = 13,67$ , mas  $X$  só pode assumir valores inteiros, a probabilidade de  $X$  ser maior do que seu valor esperado é a mesma de  $X$  ser maior ou igual a 14., dada por:

$$P[X > E[X]] = P[X \geq 14] = \sum_{i=14}^{20} \frac{i}{210}$$

$$P[X > E[X]] = \frac{14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20}{210} \approx \underline{0,5667} \quad |$$

4. Calcule a variância de  $X$  (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

A variância de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Onde  $E[X^2]$  é dado por:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210} \sum_{i=1}^{20} i^3 = \frac{1}{210} \cdot \left( \frac{20 \cdot 21}{2} \right)^2 = 210$$

Portanto, a variância de  $X$  é dada por:

$$\text{Var}[X] = 210 - \left( \frac{41}{3} \right)^2 \approx 210 - 186,77 = \underline{23,23} \quad |$$

5. Repita os últimos três itens para o caso do dado ser uniforme, ou seja,  $P[X = i] = \frac{1}{20}$ ,  $i = 1, \dots, 20$ . Qual dado possui maior variância? Explique intuitivamente sua descoberta.

Resposta:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{1}{20} = \frac{21}{2} = \underline{10,5}$$

$$P[X > E[X]] = \sum_{i=11}^{20} \frac{1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \underline{0,5}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{20 \cdot 6} = \frac{287}{2}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{287}{2} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{287}{2} - \frac{441}{4} = \frac{133}{4} \approx \underline{33,25}$$

O dado com  $P[X = i] = ci$  possui probabilidades maiores para valores maiores de  $i$ , concentrando mais a distribuição em torno de valores maiores. Isso faz com que o valor esperado seja maior e que a variância seja menor em comparação ao dado com distribuição uniforme. Portanto, o dado com distribuição uniforme  $P[X = i] = \frac{1}{20}$  possui maior variância.

### Questão 3: Dado em ação

Considere a versão uniforme do dado acima, ou seja,  $P[X = i] = \frac{1}{20}$ ,  $i = 1, \dots, 20$ . Seja  $Y$  uma variável aleatória indicadora da primalidade da face do dado. Ou seja,  $Y = 1$  quando o  $X$  é um número primo, e  $Y = 0$  caso contrário. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine  $P[Y = 1]$ .

Resposta:

Seja  $U$  o espaço amostral com todos os valores possíveis de  $X$ , ou seja,  $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ . Seja  $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$  o evento com os números primos em  $U$ . Como os lançamentos são independentes e a probabilidade de sair um número primo é  $P[x_i] = \frac{1}{20}$ ,  $\forall i \in U$ , a probabilidade de  $Y = 1$  é dada por:

$$P[Y = 1] = \sum_{j \in C} P[X = j] = \sum_{j \in C} \frac{1}{20} = \frac{|C|}{20} = \frac{8}{20} = \underline{\frac{2}{5}}$$

2. Considere que o dado será jogado  $n$  vezes. Seja  $Y_i$  a indicadora da primalidade da  $i$ -ésima rodada, para  $i = 1, \dots, n$ , e defina  $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Repare que  $Z$  é uma variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado é primo. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja,  $P[Z = k]$ , para  $k = 0, \dots, n$ . Que distribuição é esta?

Resposta:

Seja  $S = \{Y_1 = 0, Y_2 = 1, \dots, Y_n = 1\}$  uma sequência de  $n$  lançamentos de dado, com  $k$  sucessos (números primos) e  $n - k$  fracassos (números não primos). Se os lançamentos são independentes, a probabilidade de  $k$  sucessos em  $n$  tentativas é dada por:

$$P[S] = \left( \prod_{i=1}^n P[Y_i] \cdot \mathbb{I}(Y_i = 1) \right) \left( \prod_{i=1}^n P[Y_i] \cdot \mathbb{I}(Y_i = 0) \right),$$

onde  $\mathbb{I}(Y_i = 1)$  é a função indicadora que vale 1 se  $Y_i = 1$  e 0 caso contrário. Como  $P[Y_i = 1] = \frac{2}{5}$  e  $P[Y_i = 0] = \frac{3}{5}$ , a probabilidade de  $k$  sucessos em  $n$  tentativas é dada por:

$$P[S] = \left( \frac{2}{5} \right)^k \left( \frac{3}{5} \right)^{n-k}$$

. Esta é a probabilidade para uma sequência específica  $S$  de  $k$  sucessos e  $n - k$  fracassos. Como há  $\binom{n}{k}$  maneiras de escolher  $k$  sucessos em  $n$  tentativas, a probabilidade de  $Z = k$  é dada por:

$$P[Z = k] = \binom{n}{k} \left( \frac{2}{5} \right)^k \left( \frac{3}{5} \right)^{n-k}$$

Por  $Z$  representar um somatório de  $n$  variáveis aleatórias de Bernoulli  $Y_i$ , a distribuição de  $Z$  é, por definição, uma distribuição Binomial.

3. Considere que o dado será jogado até que um número primo seja obtido. Seja  $Y_i$  a indicadora da primalidade da  $i$ -ésima rodada, para  $i = 1, \dots$ , e defina  $Z = \min\{i | Y_i = 1\}$ . Repare que  $Z$  denota o número de vezes que o dado é jogado até que o resultado seja um número primo. Determine a distribuição de  $Z$ , ou seja  $P[Z = k]$ , para  $k = 1, \dots$ . Que distribuição é esta?

Resposta:

Seja  $S = \{Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_{k-1} = 0, Y_k = 1\}$  uma sequência de  $k$  lançamentos de dado, com  $k-1$  fracassos (números não primos) e 1 sucesso (número primo), na última posição. Como os lançamentos são independentes, a probabilidade de  $S$  é dada por:

$$P[S] = \left( \prod_{i=1}^{k-1} P[Y_i = 0] \right) P[Y_k = 1]$$

$$P[S] = \left( \frac{3}{5} \right)^{k-1} \frac{2}{5}$$

Pela definição do enunciado, a sequência  $S$  é a única possível, então:

$$P[Z = k] = \left( \frac{3}{5} \right)^{k-1} \frac{2}{5}$$

Por  $Z$  representar o número de tentativas até o primeiro sucesso, a distribuição de  $Z$  é, por definição, uma distribuição Geométrica.

## Questão 4: Cobra

Considere três imagens tiradas em uma floresta,  $I_1, I_2$ , e  $I_3$ . Em apenas uma das imagens existe uma pequena cobra. Um algoritmo de detecção de cobras em imagens detecta a cobra na imagem  $i$  com probabilidade  $\alpha_i$ . Suponha que o algoritmo não encontrou a cobra na imagem  $I_1$ . Defina o espaço amostral e os eventos apropriados e use a regra de Bayes para determinar:

1. A probabilidade da cobra estar na imagem  $I_1$ .

Resposta:

Seja  $D_i$  o evento de o algoritmo detectar a cobra na imagem  $I_i$ , e  $\bar{D}_i$  o evento complementar (o algoritmo não detectar a cobra na imagem  $I_i$ ). Seja  $C_i$  o evento de a cobra estar na imagem  $I_i$ , e  $\bar{C}_i$  o evento complementar (a cobra não estar na imagem  $I_i$ ). O problema pede  $P[C_1|\bar{D}_1]$ , ou seja, a probabilidade de a cobra estar na imagem  $I_1$ , dado que o algoritmo não a detectou nessa imagem (Falso Negativo). Pela regra de Bayes, temos:

$$P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_1]P[C_1]}{P[\bar{D}_1]}$$

Onde:

- $P[\bar{D}_1|C_1] = 1 - \alpha_1$  é a probabilidade de o algoritmo não detectar a cobra na imagem  $I_1$ , dado que a cobra está em  $I_1$ ;
- $P[C_1] = P[C_2] = P[C_3] = \frac{1}{3}$  é a probabilidade a priori de a cobra estar na imagem  $I_1$ , assumindo que ela está em uma, e apenas uma, das três imagens com igual probabilidade;
- $P[\bar{D}_1]$  é a probabilidade total de o algoritmo não detectar a cobra na imagem  $I_1$ , calculada por  $P[\bar{D}_1] = \sum_{i=1}^3 P[\bar{D}_1|C_i]P[C_i]$ .

Sabemos que:

- Se a cobra está em  $I_1$ ,  $P[\bar{D}_1|C_1] = 1 - \alpha_1$ ;
- Se a cobra está em  $I_2$  ou  $I_3$ , o algoritmo não pode detectá-la em  $I_1$ , pois ela não está lá (assumindo que não há Falsos Positivos). Portanto,  $P[\bar{D}_1|C_2] = P[\bar{D}_1|C_3] = 1$ .

Substituindo esses valores, temos:

$$P[\bar{D}_1] = (1 - \alpha_1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 - \alpha_1}{3}$$

Portanto, a probabilidade de a cobra estar na imagem  $I_1$ , dado que o algoritmo não a detectou nessa imagem, é:

$$P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_1]P[C_1]}{P[\bar{D}_1]} = \frac{(1 - \alpha_1) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3 - \alpha_1}{3}}$$

$$\boxed{P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{1 - \alpha_1}{3 - \alpha_1}}$$



2. A probabilidade da cobra estar na imagem  $I_2$ .

Resposta:

Este item pede  $P[C_2|\bar{D}_1]$ , ou seja, a probabilidade de a cobra estar na imagem  $I_2$ , dado que o algoritmo não a detectou na imagem  $I_1$ . Pela regra de Bayes, temos:

$$P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_2]P[C_2]}{P[\bar{D}_1]}$$

Como todos os termos já foram calculados no item anterior, temos:

$$P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3-\alpha_1}{3}} = \frac{1}{3-\alpha_1}$$

$$P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{1}{3-\alpha_1}$$

## Questão 5: Sem memória

Seja  $X \sim \text{Geo}(p)$  uma variável aleatória Geométrica com parâmetro  $p$ . Mostre que a distribuição geométrica não tem memória. Ou seja, dado que  $X > k$ , o número de rodadas adicionais até que o evento de interesse ocorra possui a mesma distribuição (dica: formalize esta afirmação).

Resposta:

Se  $X \sim \text{Geo}(p)$  é uma variável aleatória Geométrica com parâmetro  $p$ , temos:

$$P[X > k] = \prod_{i=1}^k (1-p) = (1-p)^k$$

Ou seja,  $k$  fracassos seguidos em uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli, pois o restante da sequência para  $i > k$  é irrelevante. Seja  $m$  um número inteiro positivo, pela regra do produto, temos:

$$P[X > k+m|X > k] = \frac{P[(X > k+m) \cap (X > k)]}{P[X > k]}$$

Porém  $m$  e  $k$  são inteiros positivos, então  $P[(X > k+m) \cap (X > k)] = P[X > k+m]$ . Portanto:

$$P[X > k+m|X > k] = \frac{P[X > k+m]}{P[X > k]} = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m$$

$$P[X > k+m|X > k] = (1-p)^m = P[X > m]$$

## Questão 6: Ônibus

Considere que o processo de chegada do ônibus 485 no ponto do CT seja bem representado por um processo de Poisson. Ou seja,  $X \sim \text{Poi}(\lambda, t)$  denota o número (aleatório) de ônibus que chegam ao ponto em um intervalo de tempo  $t$  com taxa média de chegada igual a  $\lambda$ . Assuma que  $\lambda = 10$  ônibus por hora.

1. Determine a probabilidade de não chegar nenhum ônibus em um intervalo de 30 minutos (inclusive numericamente).

Resposta:

2. Determine a probabilidade da média ocorrer, ou seja, de chegarem exatamente 10 ônibus em uma hora (inclusive numericamente).

Resposta:

3. Determine a taxa  $\lambda$  tal que a probabilidade de chegar ao menos um ônibus em um intervalo de 5 minutos seja maior que 90% (inclusive numericamente).

Resposta:

## Questão 7: Propriedades

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias discretas. Mostre as seguintes equivalências usando as definições:

1.  $E[X] = E[E[X|Y]]$ , conhecida como regra da torre da esperança.

Resposta:

2.  $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ .

Resposta:

## Questão 8: Paradoxo do Aniversário

Considere um grupo com  $n$  pessoas e assuma que a data de nascimento de cada uma é uniforme dentre os 365 dias do ano. Vamos calcular a chance de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.

1. Seja  $c(n)$  a probabilidade de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia. Determine explicitamente  $c(n)$ .

Resposta:

2. Usando a aproximação  $e^x \approx 1 + x$ , determine o valor aproximado para  $c(n)$ .

Resposta:

3. Usando o valor aproximado de  $c(n)$ , determine o menor valor de  $n$  tal que a chance de colisão na data de aniversário seja maior do que  $1/2$ . Você considera este número alto ou baixo?

Resposta:

## Questão 9: Caras em sequência

Considere uma moeda enviesada, tal que a probabilidade do resultado ser cara é  $p$  (e coroa  $1 - p$ ). Considere o número de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos  $k$  caras consecutivas. Por exemplo, na sequência “COCOCCOOCOC” a moeda teve que ser jogada 13 vezes até o aparecimento de  $k = 3$  caras consecutivas, onde C = cara e O = coroa.

1. Seja  $N_k$  a variável aleatória que denota esta quantidade. Qual é o número médio de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos  $k$  caras consecutivas, ou seja, qual é o valor esperado de  $N_k$ ? Dica: comece com  $k = 1$ , monte uma recursão em  $k$ , e use a regra da torre da esperança.

Resposta:

## Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub: [https://github.com/lhscaldas/CPS767\\_MCMC/](https://github.com/lhscaldas/CPS767_MCMC/)