Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov

Prof. Daniel Ratton Figueiredo

1ª Lista de Exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

24 de março de 2025

Questão 1: Filhos e filhas

Considere um casal que tem dois descendentes e que as chances de cada um deles ser filho ou filha são iguais. Responda às perguntas abaixo:

1. Calcule a probabilidade dos descendentes formar um casal (ou seja, um filho e uma filha).

Resposta:

Seja X_1 a variável aleatória que representa o sexo do primeiro filho e X_2 a variável aleatória que representa o sexo do segundo filho, as quais assumem valor 0 se for uma filha e 1 se for um filho. O espaço amostral é dado por todas as combinações possíveis de sexos para os dois filhos, ou seja, $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Já o evento "Formar um casal" ocorre quando há um filho e uma filha, ou seja, $C = \{(0,1),(1,0)\}$. Como há $|C| = 2$ elementos no evento de interesse e $|\Omega| = 4$ no total, a probabilidade de formar um casal é dada por:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \underline{\frac{1}{2}\,\Big|}$$

2. Calcule a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho.

Resposta:

Novamente espaço amostral é dado por todas as combinações possiveis de filhos e filhas, ou seja, $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. O evento "Ao menos um filho" ocorre quando há um filho e uma filha ou dois filhos, ou seja, $F = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Como há $|F| = 3$ elementos no evento de interesse e $|\Omega| = 4$ no total, a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho é dada por:

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \underline{\frac{3}{4}\,\Big|}$$

3. Calcule a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha (cuidado!).

Resposta:

Se uma já é filha, o espaço amostral é reduzido para $\Omega_F = \{(0,1),(1,0),(0,0)\}$ e o evento de interesse é $D = \{(0,0)\}$. Como há $|D| = 1$ elemento no evento de interesse e $|\Omega_F| = 3$ no total, a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha é dada por:

$$P(D|F) = \frac{|D|}{|F|} = \underline{\frac{1}{3}\,\Big|}$$

4. Calcule a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia (assuma que a chance de nascer em um determinado dia é igual a qualquer outro).

Resposta:

Supondo que o ano não seja bisexto, a probabilidade de nascer em um determinado dia é $\frac{1}{365}$. Como os nascimentos são independentes, a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia é dada por:

$$P(\text{Mesmo dia}) = \left(\frac{1}{365}\right)^2 = \frac{1}{133225}$$

Questão 2: Dado

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) tal que a chance de sair a face $i = 1, \ldots, 20$ seja linearmente proporcional a i. Ou seja, $P[X = i] = ci$ para alguma constante c, onde X é uma variável aleatória que denota a face do dado. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine o valor de c.

Resposta:

A soma da probabilidade de sair cada face do dado deve ser igual a 1, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} ci = 1 \Rightarrow c \sum_{i=1}^{20} i = 1 \Rightarrow c\frac{20 \cdot 21}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{210}$$

2. Calcule o valor esperado de X (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

O valor esperado de uma variável aleatória discreta é dado por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210} \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{210} \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = \frac{41}{3} \approx 13,67$$

3. Calcule a probabilidade de X ser maior do que seu valor esperado.

Resposta:

Como o valor esperado de X é $E[X] = 13,67$, mas X só pode assumir valores inteiros, a probabilidade de X ser maior do que seu valor esperado é a mesma de X ser maior ou igual a 14., dada por:

$$P[X > E[X]] = P[X \geq 14] = \sum_{i=14}^{20} \frac{i}{210}$$

$$P[X > E[X]] = \frac{14+15+16+17+18+19+20}{210} \approx \underline{0,5667}$$

4. Calcule a variância de X (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

A variância de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Onde $E[X^2]$ é dado por:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot P[X=i] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210} \sum_{i=1}^{20} i^3 = \frac{1}{210} \cdot \left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 = 210$$

Portanto, a variância de X é dada por:

$$\mathrm{Var}[X] = 210 - \left(\frac{41}{3}\right)^2 \approx 210 - 186,77 = \underline{23,23}$$

5. Repita os últimos três itens para o caso do dado ser uniforme, ou seja, $P[X = i] = \frac{1}{20}$, $i = 1, \ldots, 20$. Qual dado possui maior variância? Explique intuitivamente sua descoberta.

Resposta:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{1}{20} = \frac{21}{2} = \underline{10,5 \quad |}$$

$$P[X > E[X]] = \sum_{i=11}^{20} \frac{1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \underline{0,5 \quad |}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{20 \cdot 6} = \frac{287}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{287}{2} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{287}{2} - \frac{441}{4} = \frac{133}{4} \approx \underline{33,25 \quad |}$$

O dado com $P[X = i] = ci$ possui probabilidades maiores para valores maiores de i, concentrando mais a distribuição em torno de valores maiores. Isso faz com que o valor esperado seja maior e que a variância seja menor em comparação ao dado com distribuição uniforme. Portanto, <u>o dado com distribuição uniforme</u> $P[X = i] = \frac{1}{20}$ <u>possui maior variância</u>.

Questão 3: Dado em ação

Considere a versão uniforme do dado acima, ou seja, $P[X = i] = \frac{1}{20}$, $i = 1, \ldots, 20$. Seja Y uma variável aleatória indicadora da primalidade da face do dado. Ou seja, $Y = 1$ quando o X é um número primo, e $Y = 0$ caso contrário. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine $P[Y = 1]$.

Resposta:

Seja U o espaço amostral com todos os valores possíveis de X, ou seja, $U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Seja $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ o evento com os números primos em U. Como os lançamentos são intependentes e a probabilidade de sair um número primo é $P[x_i] = \frac{1}{20}, \quad \forall i \in U$, a probabilidade de $Y = 1$ é dada por:

$$P[Y = 1] = \sum_{j \in C} P[X = j] = \sum_{j \in C} \frac{1}{20} = \frac{|C|}{20} = \frac{8}{20} = \underline{\frac{2}{5} \quad |}$$

2. Considere que o dado será jogado n vezes. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \ldots, n$, e defina $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Repare que Z é uma variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado é primo. Determine a distribuição de Z, ou seja, $P[Z = k]$, para $k = 0, \ldots, n$. Que distribuição é esta?

Resposta:

Seja $S = \{Y_1 = 0, Y_2 = 1, ..., Y_n = 1\}$ uma sequêcia de n lançamentos de dado, com k sucessos (números primos) e $n - k$ fracassos (números não primos). Se os lançamentos são independentes, a probabilidade de k sucessos em n tentativas é dada por:

$$P[S] = \left(\prod_{i=1}^{n} P[Y_i] \cdot \mathbb{I}(Y_i = 1) \right) \left(\prod_{i=1}^{n} P[Y_i] \cdot \mathbb{I}(Y_i = 0) \right),$$

onde $\mathbb{I}(Y_i = 1)$ é a função indicadora que vale 1 se $Y_i = 1$ e 0 caso contrário. Como $P[Y_i = 1] = \frac{2}{5}$ e $P[Y_i = 0] = \frac{3}{5}$, a probabilidade de k sucessos em n tentativas é dada por:

$$P[S] = \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$$

. Esta é a probabilidade para uma sequência específica S de k sucessos e $n-k$ fracassos. Como há $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher k sucessos em n tentativas, a probabilidade de $Z = k$ é dada por:

$$\boxed{P[Z = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}}$$

Por Z representar um somatório de n variáveis aleatórias de Bernoulli Y_i, a distribuição de Z é, por definição, uma distribuição Binomial.

3. Considere que o dado será jogado até que um número primo seja obtido. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \ldots,$ e defina $Z = \min\{i|Y_i = 1\}$. Repare que Z denota o número de vezes que o dado é jogado até que o resultado seja um número primo. Determine a distribuição de Z, ou seja $P[Z = k]$, para $k = 1, \ldots$. Que distribuição é esta?

Resposta:

Seja $S = \{Y_1 = 0, Y_2 = 0, ..., Y_{k-1} = 0, Y_k = 1\}$ uma sequência de k lançamentos de dado, com $k-1$ fracassos (números não primos) e 1 sucesso (número primo), na última posição. Como os lançamentos são independentes, a probabilidade de S é dada por:

$$P[S] = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P[Y_i = 0]\right) P[Y_k = 1]$$

$$P[S] = \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \frac{2}{5}$$

Pela definição do enunciado, a sequencia S é a única possível, então:

$$\boxed{P[Z = k] = \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \frac{2}{5}}$$

Por Z representar o número de tentativas até o primeiro sucesso, a distribuição de Z é, por definição, uma distribuição Geométrica.

Questão 4: Cobra

Considere três imagens tiradas em uma floresta, I_1, I_2, e I_3. Em apenas uma das imagens existe uma pequena cobra. Um algoritmo de detecção de cobras em imagens detecta a cobra na imagem i com probabilidade α_i. Suponha que o algoritmo não encontrou a cobra na imagem I_1. Defina o espaço amostral e os eventos apropriados e use a regra de Bayes para determinar:

1. A probabilidade da cobra estar na imagem I_1.

Resposta:

Seja D_i o evento de o algoritmo detectar a cobra na imagem I_i, e $\bar{D}_i$ o evento complementar (o algoritmo não detectar a cobra na imagem I_i). Seja C_i o evento de a cobra estar na imagem I_i, e $\bar{C}_i$ o evento complementar (a cobra não estar na imagem I_i). O problema pede $P[C_1|\bar{D}_1]$, ou seja, a probabilidade de a cobra estar na imagem I_1, dado que o algoritmo não a detectou nessa imagem (Falso Negativo). Pela regra de Bayes, temos:

$$P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_1]P[C_1]}{P[\bar{D}_1]}$$

Onde:

- $P[\bar{D}_1|C_1] = 1 - \alpha_1$ é a probabilidade de o algoritmo não detectar a cobra na imagem I_1, dado que a cobra está em I_1;
- $P[C_1] = P[C_2] = P[C_3] = \frac{1}{3}$ é a probabilidade a priori de a cobra estar na imagem I_1, assumindo que ela está em uma, e apenas uma, das três imagens com igual probabilidade;
- $P[\bar{D}_1]$ é a probabilidade total de o algoritmo não detectar a cobra na imagem I_1, calculada por $P[\bar{D}_1] = \sum_{i=1}^{3} P[\bar{D}_1|C_i]P[C_i]$.

Sabemos que:

- Se a cobra está em I_1, $P[\bar{D}_1|C_1] = 1 - \alpha_1$;
- Se a cobra está em I_2 ou I_3, o algoritmo não pode detectá-la em I_1, pois ela não está lá (assumindo que não há Falsos Positivos). Portanto, $P[\bar{D}_1|C_2] = P[\bar{D}_1|C_3] = 1$.

Substituindo esses valores, temos:

$$P[\bar{D}_1] = (1 - \alpha_1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 - \alpha_1}{3}$$

Portanto, a probabilidade de a cobra estar na imagem I_1, dado que o algoritmo não a detectou nessa imagem, é:

$$P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_1]P[C_1]}{P[\bar{D}_1]} = \frac{(1 - \alpha_1) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3-\alpha_1}{3}}$$

$$\boxed{P[C_1|\bar{D}_1] = \frac{1 - \alpha_1}{3 - \alpha_1}}$$

2. A probabilidade da cobra estar na imagem I_2.

Resposta:

Este item pede $P[C_2|\bar{D}_1]$, ou seja, a probabilidade de a cobra estar na imagem I_2, dado que o algoritmo não a detectou na imagem I_1. Pela regra de Bayes, temos:

$$P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{P[\bar{D}_1|C_2]P[C_2]}{P[\bar{D}_1]}$$

Como todos os termos já foram calculados no item anterior, temos:

$$P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3-\alpha_1}{3}} = \frac{1}{3-\alpha_1}$$

$$\boxed{P[C_2|\bar{D}_1] = \frac{1}{3-\alpha_1}}$$

Questão 5: Sem memória

Seja $X \sim \text{Geo}(p)$ uma variável aleatória Geométrica com parâmetro p. Mostre que a distribuição geométrica não tem memória. Ou seja, dado que $X > k$, o número de rodadas adicionais até que o evento de interesse ocorra possui a mesma distribuição (dica: formalize esta afirmação).

Resposta:

Se $X \sim \text{Geo}(p)$ é uma variável aleatória Geométrica com parâmetro p, temos:

$$P[X > k] = \prod_{i=1}^{k}(1-p) = (1-p)^k$$

Ou seja, k fracassos seguidos em uma sequência de variáveis aleatórias de Bernoulli, pois o restante da sequência para $i > k$ é irrelevante. Seja m um número inteiro positivo, pela regra do produto, temos:

$$P[X > k+m|X > k] = \frac{P[(X > k+m) \cap (X > k)]}{P[X > k]}$$

Porém m e k são inteiros positivos, então $P[(X > k+m) \cap (X > k)] = P[X > k+m]$. Portanto:

$$P[X > k+m|X > k] = \frac{P[X > k+m]}{P[X > k]} = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m$$

$$\boxed{P[X > k+m|X > k] = (1-p)^m = P[X > m]}$$

Questão 6: Ônibus

Considere que o processo de chegada do ônibus 485 no ponto do CT seja bem representado por um processo de Poisson. Ou seja, $X \sim \text{Poi}(\lambda, t)$ denota o número (aleatório) de ônibus que chegam ao ponto em um intervalo de tempo t com taxa média de chegada igual a λ. Assuma que $\lambda = 10$ ônibus por hora.

1. Determine a probabilidade de não chegar nenhum ônibus em um intervalo de 30 minutos (inclusive numericamente).

Resposta:

A distribuição de Poisson é dada por

$$P[X = k|\lambda, t] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

Para $k = 0$, $\lambda = 10$ ônibus por hora e $t = 0.5$ horas (30 minutos), temos:

$$P[X = 0|10, 0.5] = \frac{e^{-10\cdot 0.5}(10 \cdot 0,5)^0}{0!} = e^{-5} \approx \underline{6.74 \times 10^{-3}}$$

2. Determine a probabilidade da média ocorrer, ou seja, de chegarem exatamente 10 ônibus em uma hora (inclusive numericamente).

Resposta:

Para $k = 10$, $\lambda = 10$ ônibus por hora e $t = 1$ hora, temos:

$$P[X = 10|10, 1] = \frac{e^{-10\cdot 1}(10 \cdot 1)^{10}}{10!} = \frac{e^{-10} \cdot 10^{10}}{3628800} \approx \underline{0.1251}$$

3. Determine a taxa λ tal que a probabilidade de chegar ao menos um ônibus em um intervalo de 5 minutos seja maior que 90% (inclusive numericamente).

Resposta:

$$P[X > 1|\lambda, t] = 1 - P[X = 0|\lambda, t] = 1 - \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Para $t = 1/12$ horas (5 minutos), temos:

$$1 - e^{-\lambda \cdot 1/12} > 0.9 \Rightarrow e^{-\lambda \cdot 1/12} < 0.1$$

$$-\lambda \cdot 1/12 < \ln(0.1) \Rightarrow \lambda > 12 \ln(10)$$

$$\boxed{\lambda > 27.63 \quad \text{ônibus/hora}}$$

Questão 7: Propriedades

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. Mostre as seguintes equivalências usando as definições:

1. $E[X] = E[E[X|Y]]$, conhecida como regra da torre da esperança.

Resposta:

Aplicando a definição de valor esperado no lado esquerdo da equação, temos:

$$E[E[X|Y]] = \sum_y E[X|Y = y] \cdot P[Y = y]$$

Aplicando a definição de valor esperado condicional, temos:

$$E[E[X|Y]] = \sum_y \left(\underbrace{\sum_x x \cdot P[X = x|Y = y]}_{E[X|Y]} \right) \cdot P[Y = y]$$

$$E[E[X|Y]] = \sum_y \sum_x x \cdot P[X = x|Y = y] \cdot P[Y = y]$$

Como x não é função de y, podemos trocar a ordem dos somatórios e remover x do somatório interno:

$$E[E[X|Y]] = \sum_x x \sum_y P[X = x|Y = y] \cdot P[Y = y]$$

Pela Regra do Produto, temos:

$$E[E[X|Y]] = \sum_x x \sum_y \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} \cdot P[Y = y] = \sum_x x \sum_y P[X = x, Y = y]$$

Pela regra da soma (marginalização), temos:

$$E[E[X|Y]] = \sum_x x \cdot P[X = x]$$

Sendo que, por definição:

$$E[X] = \sum_x x \cdot P[X = x]$$

Portanto:

$$\boxed{E[E[X|Y]] = E[X]}$$

2. $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

Resposta:

Pela definição de variância:

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2]$$

Pela definição de valor esperado, temos:

$$\text{Var}[X] = \sum_x (x^2 - 2xE[X] + E[X]^2)P[X = x]$$

Separando o somatório, temos:

$$\text{Var}[X] = \sum_x x^2 P[X = x] - 2E[X] \sum_x xP[X = x] + E[X]^2 \sum_x P[X = x]$$

Porém, por definição, temos:

$$E[X] = \sum_x xP[X = x] \quad \text{e} \quad \sum_x P[X = x] = 1$$

Assim:

$$\text{Var}[X] = \sum_x x^2 P[X = x] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = \sum_x x^2 P[X = x] - E[X]^2$$

Mas:

$$\sum_x x^2 P[X = x] = E[X^2]$$

Portanto:

$$\boxed{\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2}$$

Questão 8: Paradoxo do Aniversário

Considere um grupo com n pessoas e assuma que a data de nascimento de cada uma é uniforme dentre os 365 dias do ano. Vamos calcular a chance de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.

1. Seja $c(n)$ a probabilidade de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia. Determine explicitamente $c(n)$.

Resposta:

2. Usando a aproximação $e^x \approx 1 + x$, determine o valor aproximado para $c(n)$.

Resposta:

3. Usando o valor aproximado de $c(n)$, determine o menor valor de n tal que a chance de colisão na data de aniversário seja maior do que $1/2$. Você considera este número alto ou baixo?

Resposta:

Questão 9: Caras em sequência

Considere uma moeda enviesada, tal que a probabilidade do resultado ser cara é p (e coroa $1-p$). Considere o número de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas. Por exemplo, na sequência "COCOCCOOCOCCC" a moeda teve que ser jogada 13 vezes até o aparecimento de $k=3$ caras consecutivas, onde C = cara e O = coroa.

1. Seja N_k a variável aleatória que denota esta quantidade. Qual é o número médio de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas, ou seja, qual é o valor esperado de N_k? Dica: comece com $k=1$, monte uma recursão em k, e use a regra da torre da esperança.

Resposta:

Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub: `https://github.com/lhscaldas/CPS767_MCMC/`