Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov

Prof. Daniel Ratton Figueiredo

4ª Lista de Exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

21 de maio de 2025

Questão 1: Sequências binárias restritas

Considere uma sequência de dígitos binários (0s e 1s) de comprimento s. Uma sequência é dita válida se ela não possui 1s adjacentes. Considerando a distribuição uniforme, queremos determinar o valor esperado do número de 1s de uma sequência válida, denotado por μ_s.

- Considerando $s = 4$, determine todas as sequências válidas e calcule μ_4.

  As sequências válidas de comprimento 4 são: 0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0101, 1010. Portanto, temos um total de 7 sequências válidas. O número total de 1s nessas sequências é: $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 8$. Assim, $\mu_4 = \frac{8}{7} \approx 1{,}14$.

- Construa uma cadeia de Markov sobre o conjunto de sequências válidas, deixando claro como funcionam as transições de estado. Argumente que a cadeia é irredutível.

- Desenhe a cadeia de Markov para o caso de $s = 4$, mostrando todas as transições.

- Mostre como aplicar Metropolis-Hastings para resolver o problema de estimar μ_s. Deixe claro as probabilidades de aceite e o funcionamento do estimador.

Questão 2: Amostras de Modelos de Mistura

Considere a seguinte função de probabilidade:

$$p(x) = \alpha p_B(x; n, p_1) + (1 - \alpha) p_B(x; n, p_2),$$

onde $p_B(x; n, p)$ é a probabilidade associada ao valor x da binomial com parâmetros n e p, e $\alpha \in [0, 1]$ é um peso. Trata-se de um modelo de mistura de duas binomiais com diferentes valores de p, com pesos dados por α e $1 - \alpha$. Considere duas variáveis aleatórias X e K, representando o valor de $X \in [0, n]$ e a binomial utilizada $K \in \{1, 2\}$. Queremos gerar amostras de acordo com $p(x)$.

- Determine as distribuições de probabilidade condicionais $P(X|K)$ e $P(K|X)$. Dica: utilize a regra de Bayes no segundo caso.

- Determine a distribuição de probabilidade conjunta $P(X, K)$.

- Utilize a técnica de Gibbs Sampling para gerar amostras de X. Mostre como construir a cadeia de Markov e determine a transição entre os estados.

- Para $n = 2$, $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}8$, $\alpha = 0{,}3$, desenhe a cadeia de Markov com todas as transições.

- Descreva como utilizar a cadeia de Markov para gerar amostras.

Questão 3: Amostrando triângulos

Considere um grafo conexo qualquer. Desejamos gerar amostras de triângulos deste grafo (cliques de tamanho 3), tal que todo triângulo tenha igual probabilidade de ser amostrado — ou seja, uma distribuição uniforme sobre o conjunto de triângulos do grafo.

- Mostre como gerar amostras de forma direta, utilizando a distribuição uniforme. Dica: pense em amostragem por rejeição. Determine a eficiência desse método.

- Mostre como gerar amostras utilizando Metropolis-Hastings. Determine os estados da cadeia de Markov, as transições da cadeia base (que deve ser irredutível) e a probabilidade de aceitação na cadeia modificada pelo método Metropolis-Hastings.

- Intuitivamente, discuta quando a abordagem via Metropolis-Hastings é mais eficiente (do ponto de vista computacional) do que a abordagem via amostragem por rejeição.

Questão 4: Quebrando o código

Você encontrou uma mensagem cifrada com o código de substituição (neste código, cada letra é mapeada em outra letra de forma bijetiva). Você deseja encontrar a chave do código para ler a mensagem. Repare que a chave é um mapeamento σ entre as letras, por exemplo $\sigma(a) = x$, $\sigma(b) = h$, $\sigma(c) = e$, etc. Considere uma função $f : \Omega \to [0, 1]$ que avalia a capacidade de uma pessoa entender a mensagem cifrada dado um mapeamento $\sigma \in \Omega$. Repare que $f(\sigma) = 1$ significa que é possível entender por completo a mensagem decifrada com o mapeamento σ, e $f(\sigma) = 0$ se o mapeamento não revela nenhuma informação sobre a mensagem. Mostre como a técnica de Simulated Annealing pode ser utilizada para ler a mensagem cifrada. Mostre todos os passos necessários para aplicar a técnica neste problema (não é necessário implementar).

Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub: `https://github.com/lhscaldas/CPS767_MCMC/`