Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov

Prof. Daniel Ratton Figueiredo

2ª Lista de Exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

28 de abril de 2025

Questão 1: Passeios aleatórios enviesados

Considere um grafo não direcionado $G = (V, E)$ com peso nas arestas, tal que $w_{ij} > 0$ para toda aresta $(i, j) \in E$. Considere um andarilho aleatório que caminha por este grafo em tempo discreto, mas cujos passos são enviesados pelos pesos das arestas. Em particular, a probabilidade do andarilho ir do vértice i para o vértice j é dada por w_{ij}/W_i, onde $W_i = \sum_j w_{ij}$ (soma dos pesos das arestas incidentes ao vértice $i \in V$). Temos assim um passeio aleatório enviesado linearmente pelos pesos das arestas.

1. Mostre que este passeio aleatório induz uma cadeia de Markov calculando a matriz de transição de probabilidade.

Conforme o enunciado, temos que a probabilidade de transição do estado i para o estado j é dada por:

$$P_{ij} = \frac{w_{ij}}{W_i},$$

onde $W_i = \sum_j w_{ij}$ é a soma dos pesos das arestas incidentes ao vértice i e $w_{ij} > 0$ é o peso da aresta que liga os vértices i e j.

Como $w_{ij} > 0$ para todas as arestas $(i, j) \in E$ e $W_i > 0$, temos que $P_{ij} \geq 0$, sendo estritamente positivo sempre que houver uma aresta entre i e j.

Além disso,

$$\sum_j P_{ij} = \sum_j \frac{w_{ij}}{W_i} = \frac{1}{W_i} \sum_j w_{ij} = \frac{W_i}{W_i} = 1$$

Assim, temos que a soma das probabilidades de transição do estado i para todos os outros estados j é igual a 1, o que caracteriza uma matriz de transição de probabilidade.

Portanto, o passeio aleatório enviesado induz uma cadeia de Markov.

2. Determine a distribuição estacionária desta cadeia de Markov (dica: use o método da inspeção).

Uma distribuição estacionária π é uma distribuição de probabilidade que satisfaz a seguinte equação:

$$\pi P = \pi$$

Para cada estado i da distribuição estacionária, temos que:

$$\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ji}$$

Usando o resultado do item anterior, temos que:

$$\pi_i = \sum_j \pi_j \frac{w_{ji}}{W_j}$$

Supondo que a distribuição estacionária é proporcional à soma do peso das arestas incidentes ao vértice j, ou seja, $\pi_j = ZW_j$, onde $Z > 0$ é uma constante, temos que:

$$\pi_i = \sum_j (ZW_j) \frac{w_{ji}}{W_j} = Z \sum_j w_{ji}$$

Como o grafo é não direcionado, temos que $w_{ij} = w_{ji}$, ou seja:

$$\pi_i = Z \sum_j w_{ji} = Z \sum_j w_{ij} = ZW_i$$

Porém, sabemos que $\sum_k \pi_k = 1$, ou seja:

$$\sum_k \pi_k = \sum_k ZW_k = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\sum_k W_k}$$

Portanto, a distribuição estacionária é dada por:

$$\boxed{\pi_i = \frac{W_i}{\sum_k W_k}}$$

3. Determine se esta cadeia de Markov é reversível no tempo.

Uma Cadeia de Markov é dita reversível no tempo se, e somente se, satizfaz a equação de fluxo de massa de probabilidade:

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

Aplicando a distribuição estacionária que encontramos no item anterior, temos que:

$$\pi_i P_{ij} = \frac{W_i}{\sum_k W_k} \cdot \frac{w_{ij}}{W_i} = \frac{w_{ij}}{\sum_k W_k} \quad \text{e} \quad \pi_j P_{ji} = \frac{W_j}{\sum_k W_k} \cdot \frac{w_{ji}}{W_j} = \frac{w_{ji}}{\sum_k W_k}$$

Como $w_{ij} = w_{ji}$, temos que:

$$\boxed{\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}}$$

Portanto, a cadeia de Markov é reversível no tempo.

Questão 2: Convergência de passeios aleatórios

Considere um passeio aleatório preguiçoso (com $p = 1/2$) caminhando sobre um grafo com n vértices. Estamos interessados em entender a convergência da distribuição $\pi(t)$ em diferentes grafos. Assuma que o passeio sempre inicia sua caminhada no vértice 1, ou seja, $\pi_1(0) = 1$. Considere os seguintes grafos: grafo em anel ($n = 125$), árvore binária cheia ($n = 127$), grafo em reticulado (grid) com duas dimensões ($n = 121$).

1. Para cada grafo, construa a matriz de transição de probabilidade (ou seja, determine P_{ij} para todo vértice i, j do grafo). Atenção com a numeração dos vértices!

2. Determine analiticamente a distribuição estacionária para cada grafo (ou seja, determine π_i para cada vértice i do grafo).

3. Para cada grafo, calcule numericamente a variação total entre $\pi(t)$ e a distribuição estacionária, para $t = 0, 1, \ldots$. Trace um gráfico onde cada curva corresponde a um grafo (preferencialmente em escala log-log, com $t \in [1, 10^3]$).

4. O que você pode concluir sobre a convergência em função da estrutura do grafo?

Questão 3: Tempo de mistura

Considere um processo estocástico que inicia no estado 1 e a cada instante de tempo incrementa o valor do estado em uma unidade com probabilidade p ou retorna ao estado inicial (estado 1) com probabilidade $1 - p$. No estado n o processo não cresce mais, e se mantém neste estado com probabilidade p. Assuma que $n = 10$ e que $p \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$.

1. Construa a cadeia de Markov deste processo mostrando a matriz de transição de probabilidade em função de p.

2. Determine numericamente o vão espectral da cadeia de Markov para cada valor de p.

3. Determine numericamente a distribuição estacionária para cada valor de p, e indique o estado de menor probabilidade.

4. Utilizando os dados acima, determine um limitante inferior e superior para o tempo de mistura quando $\epsilon = 10^{-6}$ para cada valor de p.

5. O que você pode concluir sobre a influência de p no tempo de mistura?

Questão 4: Voltando à origem

Considere uma cadeia de Markov cujo espaço de estados é um láttice de duas dimensões sobre os números naturais, ou seja, $S = \{(i, j) \mid i \geq 1, j \geq 1\}$. Cada estado pode transicionar para um de seus vizinhos no láttice. Entretanto, se afastar da origem (se movimentar para o norte ou para o leste) tem probabilidade $p/2$, e se aproximar da origem tem probabilidade $(1-p)/2$, onde p é um parâmetro do modelo (nas bordas, utilize self-loops). Assuma que $p \in \{0.25, 0.35, 0.45\}$.

1. Construa um simulador para essa cadeia de Markov.
2. Utilize o simulador para estimar a distribuição estacionária da origem (estado $(1,1)$), ou seja $\pi_{1,1}$, para cada valor de p. Dica: utilize os tempos de retorno!
3. Seja $d(t)$ o valor esperado da distância (de Manhattan) entre X_t (o estado no tempo t) e a origem. Utilize o simulador para estimar $d(t)$ para $t \in \{10, 100, 1000\}$, para cada valor de p. O que você pode concluir?

Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub:
`https://github.com/lhscaldas/CPS767_MCMC/`