Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

CPS767 - Algoritmos de Monte Carlo e Cadeias de Markov

Prof. Daniel Ratton Figueiredo

1ª Lista de Exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

14 de março de 2025

Questão 1: Filhos e filhas

Considere um casal que tem dois descendentes e que as chances de cada um deles ser filho ou filha são iguais. Responda às perguntas abaixo:

1. Calcule a probabilidade dos descendentes formar um casal (ou seja, um filho e uma filha).

Resposta:

Seja X_1 a variável aleatória que representa o sexo do primeiro filho e X_2 a variável aleatória que representa o sexo do segundo filho, as quais assumem valor 0 se for uma filha e 1 se for um filho. O espaço amostral é dado por todas as combinações possíveis de sexos para os dois filhos, ou seja, $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Já o evento "Formar um casal" ocorre quando há um filho e uma filha, ou seja, $C = \{(0,1),(1,0)\}$. Como há $|C| = 2$ elementos no evento de interesse e $|\Omega| = 4$ no total, a probabilidade de formar um casal é dada por:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \underline{\frac{1}{2}\ \Big|}$$

2. Calcule a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho.

Resposta:

Novamente espaço amostral é dado por todas as combinações possiveis de filhos e filhas, ou seja, $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. O evento "Ao menos um filho" ocorre quando há um filho e uma filha ou dois filhos, ou seja, $F = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Como há $|F| = 3$ elementos no evento de interesse e $|\Omega| = 4$ no total, a probabilidade de ao menos um dos descendentes ser filho é dada por:

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \underline{\frac{3}{4}\ \Big|}$$

3. Calcule a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha (cuidado!).

Resposta:

Se uma já é filha, o espaço amostral é reduzido para $\Omega_F = \{(0,1),(1,0),(0,0)\}$ e o evento de interesse é $D = \{(0,0)\}$. Como há $|D| = 1$ elemento no evento de interesse e $|\Omega_F| = 3$ no total, a probabilidade das duas serem filhas dado que uma é filha é dada por:

$$P(D|F) = \frac{|D|}{|F|} = \underline{\frac{1}{3}\ \Big|}$$

4. Calcule a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia (assuma que a chance de nascer em um determinado dia é igual a qualquer outro).

Resposta:

Supondo que o ano não seja bisexto, a probabilidade de nascer em um determinado dia é $\frac{1}{365}$. Como os nascimentos são independentes, a probabilidade dos descendentes nascerem no mesmo dia é dada por:

$$P(\text{Mesmo dia}) = \left(\frac{1}{365}\right)^2 = \underline{\frac{1}{133225}}$$

Questão 2: Dado

Considere um icosaedro (um sólido Platônico de 20 faces) tal que a chance de sair a face $i = 1, \ldots, 20$ seja linearmente proporcional a i. Ou seja, $P[X = i] = ci$ para alguma constante c, onde X é uma variável aleatória que denota a face do dado. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine o valor de c.

Resposta:

A soma da probabilidade de sair cada face do dado deve ser igual a 1, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{20} P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} ci = 1 \Rightarrow c\sum_{i=1}^{20} i = 1 \Rightarrow c\frac{20 \cdot 21}{2} = 1 \Rightarrow c = \underline{\frac{1}{210}}$$

2. Calcule o valor esperado de X (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

O valor esperado de uma variável aleatória discreta é dado por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210}\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{210} \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = \frac{41}{3} \approx \underline{13{,}67}$$

3. Calcule a probabilidade de X ser maior do que seu valor esperado.

Resposta:

Como o valor esperado de X é $E[X] = 13,67$, mas X só pode assumir valores inteiros, a probabilidade de X ser maior do que seu valor esperado é a mesma de X ser maior ou igual a 14., dada por:

$$P[X > E[X]] = P[X \geq 14] = \sum_{i=14}^{20} \frac{i}{210}$$

$$P[X > E[X]] = \frac{14+15+16+17+18+19+20}{210} \approx \underline{0,5667 \quad |}$$

4. Calcule a variância de X (obtenha também o valor numérico).

Resposta:

A variância de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Onde $E[X^2]$ é dado por:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot P[X = i] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{i}{210} = \frac{1}{210} \sum_{i=1}^{20} i^3 = \frac{1}{210} \cdot \left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 = 210$$

Portanto, a variância de X é dada por:

$$\text{Var}[X] = 210 - \left(\frac{41}{3}\right)^2 \approx 210 - 186,77 = \underline{23,23 \quad |}$$

5. Repita os últimos três itens para o caso do dado ser uniforme, ou seja, $P[X = i] = \frac{1}{20}$, $i = 1, \ldots, 20$. Qual dado possui maior variância? Explique intuitivamente sua descoberta.

Resposta:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{20} i \cdot \frac{1}{20} = \frac{21}{2} = \underline{10,5 \quad |}$$

$$P[X > E[X]] = \sum_{i=11}^{20} \frac{1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = \underline{0,5 \quad |}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{20 \cdot 6} = \frac{287}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{287}{2} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{287}{2} - \frac{441}{4} = \frac{133}{4} \approx \underline{33,25 \quad |}$$

O dado uniforme possui uma variância maior, ou seja, é esperado que haja uma distância numérica maior entre seus valores tirados em comparação com o outro dado.

Questão 3: Dado em ação

Considere a versão uniforme do dado acima, ou seja, $P[X = i] = \frac{1}{20}$, $i = 1, \dots, 20$. Seja Y uma variável aleatória indicadora da primalidade da face do dado. Ou seja, $Y = 1$ quando o X é um número primo, e $Y = 0$ caso contrário. Responda às perguntas abaixo:

1. Determine $P[Y = 1]$.

Resposta:

2. Considere que o dado será jogado n vezes. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \dots, n$, e defina $Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Repare que Z é uma variável aleatória que denota o número de vezes que o resultado é primo. Determine a distribuição de Z, ou seja, $P[Z = k]$, para $k = 0, \dots, n$. Que distribuição é esta?

Resposta:

3. Considere que o dado será jogado até que um número primo seja obtido. Seja Y_i a indicadora da primalidade da i-ésima rodada, para $i = 1, \dots,$ e defina $Z = \min\{i | Y_i = 1\}$. Repare que Z denota o número de vezes que o dado é jogado até que o resultado seja um número primo. Determine a distribuição de Z, ou seja $P[Z = k]$, para $k = 1, \dots$. Que distribuição é esta?

Resposta:

Questão 4: Cobra

Considere três imagens tiradas em uma floresta, I_1, I_2, e I_3. Em apenas uma das imagens existe uma pequena cobra. Um algoritmo de detecção de cobras em imagens detecta a cobra na imagem i com probabilidade α_i. Suponha que o algoritmo não encontrou a cobra na imagem I_1. Defina o espaço amostral e os eventos apropriados e use a regra de Bayes para determinar:

1. A probabilidade da cobra estar na imagem I_1.

   Resposta:

2. A probabilidade da cobra estar na imagem I_2.

   Resposta:

Questão 5: Sem memória

Seja $X \sim \text{Geo}(p)$ uma variável aleatória Geométrica com parâmetro p. Mostre que a distribuição geométrica não tem memória. Ou seja, dado que $X > k$, o número de rodadas adicionais até que o evento de interesse ocorra possui a mesma distribuição (dica: formalize esta afirmação).

Resposta:

Questão 6: Ônibus

Considere que o processo de chegada do ônibus 485 no ponto do CT seja bem representado por um processo de Poisson. Ou seja, $X \sim \text{Poi}(\lambda, t)$ denota o número (aleatório) de ônibus que chegam ao ponto em um intervalo de tempo t com taxa média de chegada igual a λ. Assuma que $\lambda = 10$ ônibus por hora.

1. Determine a probabilidade de não chegar nenhum ônibus em um intervalo de 30 minutos (inclusive numericamente).

   Resposta:

2. Determine a probabilidade da média ocorrer, ou seja, de chegarem exatamente 10 ônibus em uma hora (inclusive numericamente).

   Resposta:

3. Determine a taxa λ tal que a probabilidade de chegar ao menos um ônibus em um intervalo de 5 minutos seja maior que 90% (inclusive numericamente).

Resposta:

Questão 7: Propriedades

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. Mostre as seguintes equivalências usando as definições:

1. $E[X] = E[E[X|Y]]$, conhecida como regra da torre da esperança.

   Resposta:

2. $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

   Resposta:

Questão 8: Paradoxo do Aniversário

Considere um grupo com n pessoas e assuma que a data de nascimento de cada uma é uniforme dentre os 365 dias do ano. Vamos calcular a chance de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.

1. Seja $c(n)$ a probabilidade de duas ou mais pessoas fazerem aniversário no mesmo dia. Determine explicitamente $c(n)$.

   Resposta:

2. Usando a aproximação $e^x \approx 1 + x$, determine o valor aproximado para $c(n)$.

   Resposta:

3. Usando o valor aproximado de $c(n)$, determine o menor valor de n tal que a chance de colisão na data de aniversário seja maior do que $1/2$. Você considera este número alto ou baixo?

   Resposta:

Questão 9: Caras em sequência

Considere uma moeda enviesada, tal que a probabilidade do resultado ser cara é p (e coroa $1 - p$). Considere o número de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas. Por exemplo, na sequência "COCOCCOOCOCCC" a moeda teve que ser jogada 13 vezes até o aparecimento de $k = 3$ caras consecutivas, onde C = cara e O = coroa.

1. Seja N_k a variável aleatória que denota esta quantidade. Qual é o número médio de vezes que a moeda precisa ser jogada para obtermos k caras consecutivas, ou seja, qual é o valor esperado de N_k? Dica: comece com $k = 1$, monte uma recursão em k, e use a regra da torre da esperança.

   Resposta: