Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

Departamento de Engenharia Elétrica

COE782 - Introdução ao Aprendizado de Máquina

Prof. Dr. Markus Vinícius Santos Lima

Lista 3 de exercícios

Luiz Henrique Souza Caldas

email: lhscaldas@cos.ufrj.br

17 de junho de 2024

1 Exercício 1

Considere o experimento computacional denominado "Polynomial Curve Fitting", usado diversas vezes no livro texto (veja páginas 4 e 5 do livro, bem como Apêndice A), considerando a ordem do modelo sendo M = 9 e o tamanho da amostra sendo N = 10. Faça:

(a) Calcule a solução de mínimos quadrados (LS) $\mathbf{w_{LS}}$;

(b) Calcule a solução via regressão ridge (escolha um fator de regularização razoável) $\mathbf{w_{ridge}}$;

(c) Calcule a solução via regressão lasso (escolha um fator de regularização razoável) $\mathbf{w_{lasso}}$;

(d) Monte uma tabela exibindo os 10 coeficientes $\mathbf{w}$ para as 3 soluções obtidas nos itens acima e comente/compare os resultados;

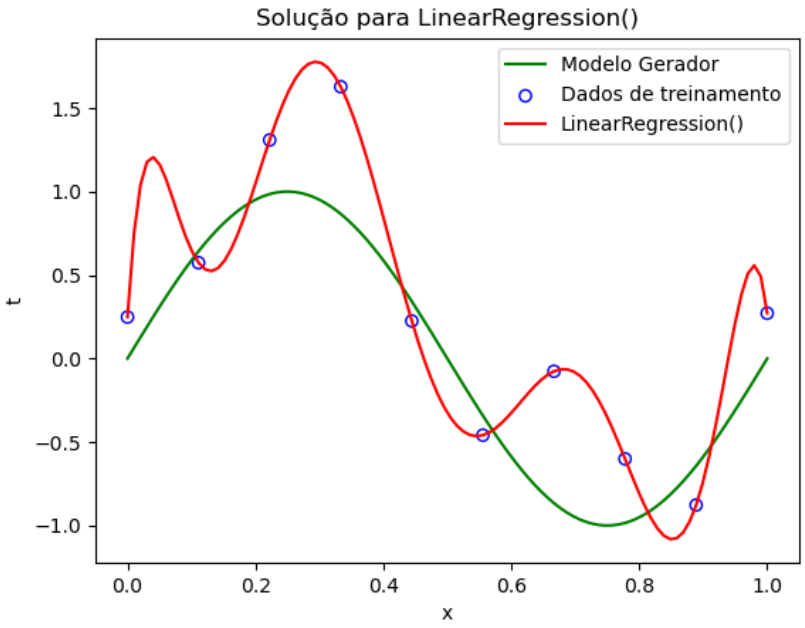
(e) Plote uma figura contendo o processo gerador em verde (a senoide), e suas estimativas y_{LS}, y_{ridge}, e y_{lasso} em preto, azul e vermelho, respectivamente;

(f) Repita todos os itens anteriores para $N = 20$ e $N = 50$.

1.1 Resposta do item (a)

Para responder esse item foi utilizada a classe *LinearRegression*() da biblioteca *sklearn* para linguagem *Python*, que realiza uma regressão linear utilizando mínimos quadrados. Foi escolhido um polinômio de ordem 9 como modelo.

Figura 1: Solução para mínimos quadrados (LS)

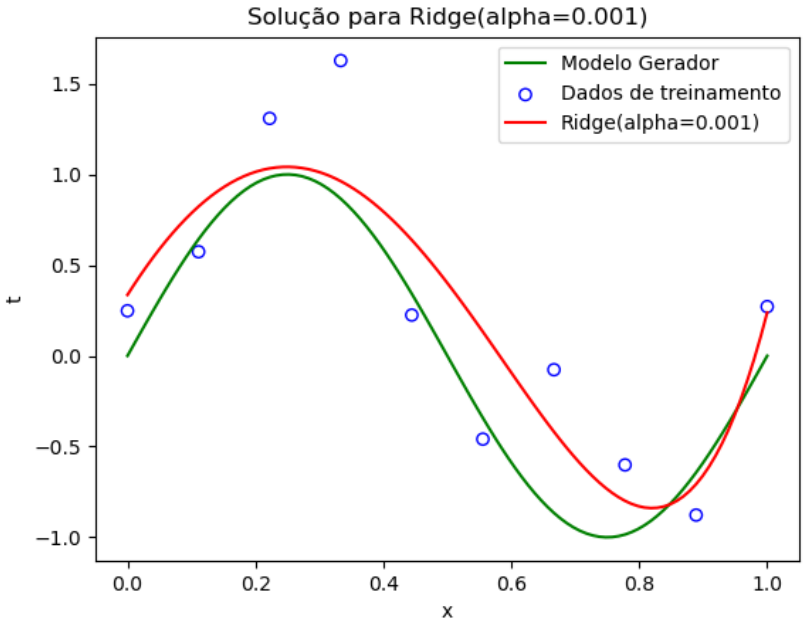


A regressão linear por mínimos quadrados não introduz nenhuma regularização e por isso a curva vermelha passa exatamente pelos dados de treinamento, mostrando que eles foram decorados overfitting.

1.2 Resposta do item (b)

Para responder esse item foi utilizada a classe *Ridge*() da biblioteca *sklearn* para linguagem *Python*, que realiza uma regressão linear utilizando mínimos quadrados e regularização de norma L_2 (Ridge). Foi escolhido um polinômio de ordem 9 como modelo e o fator de regularização λ, que na classe *Ridge*() é chamado de *alpha*, que melhor adaptou a curva ao modelo gerador foi $1^{-0.5}$.

Figura 2: Solução para Ridge com $\lambda = 1^{-0.5}$

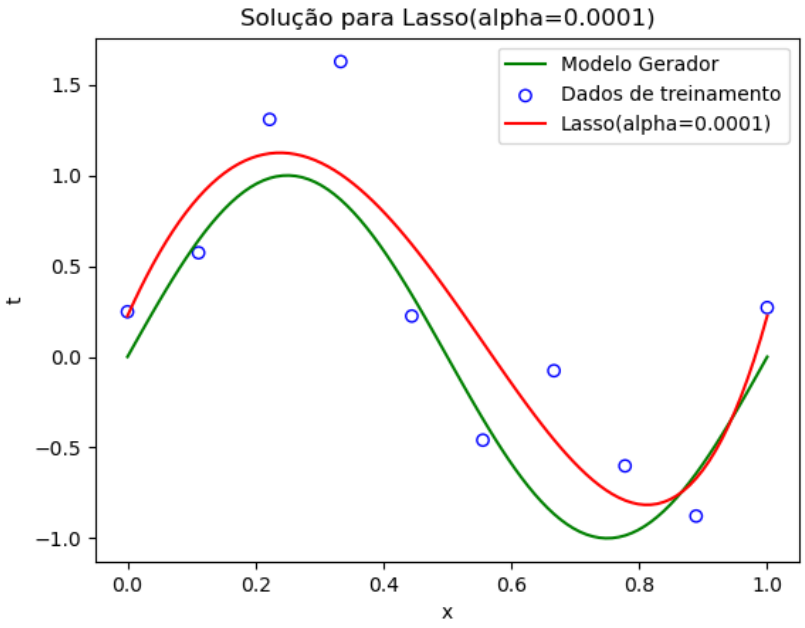


A regressão Ridge introduz uma penalização nos coeficientes através do fator de regularização, ajudando a evitar overfitting.

1.3 Resposta do item (c)

Para responder esse item foi utilizada a classe *Lasso*() da biblioteca *sklearn* para linguagem *Python*, que realiza uma regressão linear utilizando mínimos quadrados e regularização de norma L_1 (Lasso). Foi escolhido um polinômio de ordem 9 como modelo e o fator de regularização λ, que na classe *Lasso*() é chamado de *alpha*, que melhor adaptou a curva ao modelo gerador foi $1^{-0.5}$.

Figura 3: Solução para Lasso com $\lambda = 10^{-0.6}$



A regressão Lasso, assim como a Ridge, introduz uma penalização nos coeficientes através do fator de regularização, ajudando a evitar overfitting.

1.4 Resposta do item (d)

A tabela abaixo exibindo os coeficientes para as três soluções permite comparar diretamente o impacto da regularização nos coeficientes.

Tabela 1: Coeficientes para $N = 10$

Modelo	LS	Ridge	Lasso
w_0	0.00000	0.00000	0.00000
w_1	61.35162	5.57635	7.87333
w_2	-1305.39950	-10.39014	-18.23029
w_3	10864.20021	-3.32097	2.98646
w_4	-43958.48661	2.24588	5.01574
w_5	96013.72998	3.46376	2.15551
w_6	-116795.01934	2.37258	0.11133
w_7	75859.90079	0.81213	0.00000
w_8	-22103.99856	-0.27544	-0.00000
w_9	1363.74433	-0.58096	0.08759

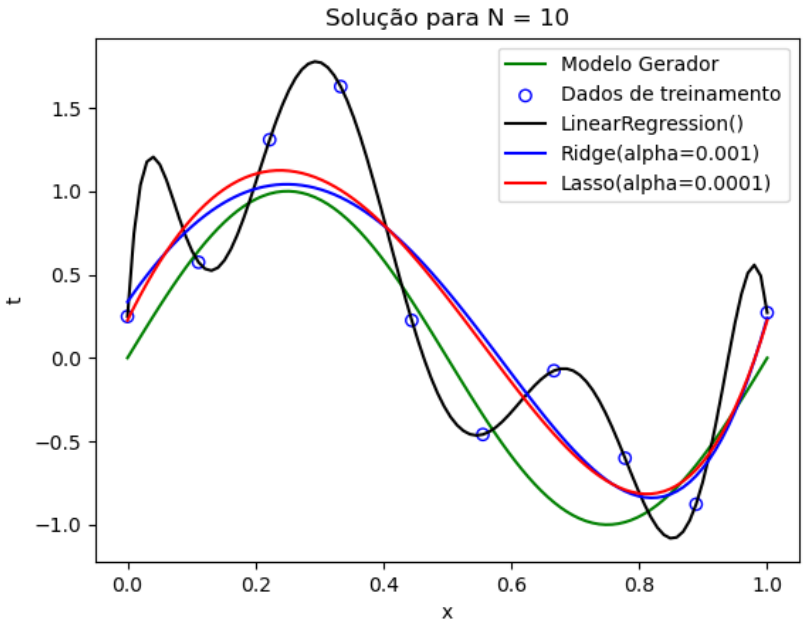
A regressão por mínimos quadrados sem regularização tende a produzir coeficientes maiores, um dos sinais que indicam overfitting ou pelo menos uma alta sensibilidade aos dados de treinamento. Enquanto que os coeficientes produzidos pela Ridge e pela Lasso são menores.

Além disso, é possível observar a presença de alguns coeficientes praticamente nulos para a Lasso. Esse resultado era esperado, uma vez que a Lasso, por utilizar a norma L_1, tende a produzir uma solução mais esparsa, selecionando atributos mais importantes.

Enquanto isso, a regressão Ridge, apesar de não selecionar atributos como a Lasso, tende a penalizar ainda mais os coeficientes grandes, consequentemente fazendo com que os maiores coeficientes fiquem menores que os produzidos pela Lasso.

1.5 Resposta do item (e)

Figura 4: Comparação entre as soluções para $N = 10$



1.6 Resposta do item (f)

Figura 5: Comparação entre as soluções para $N = 20$

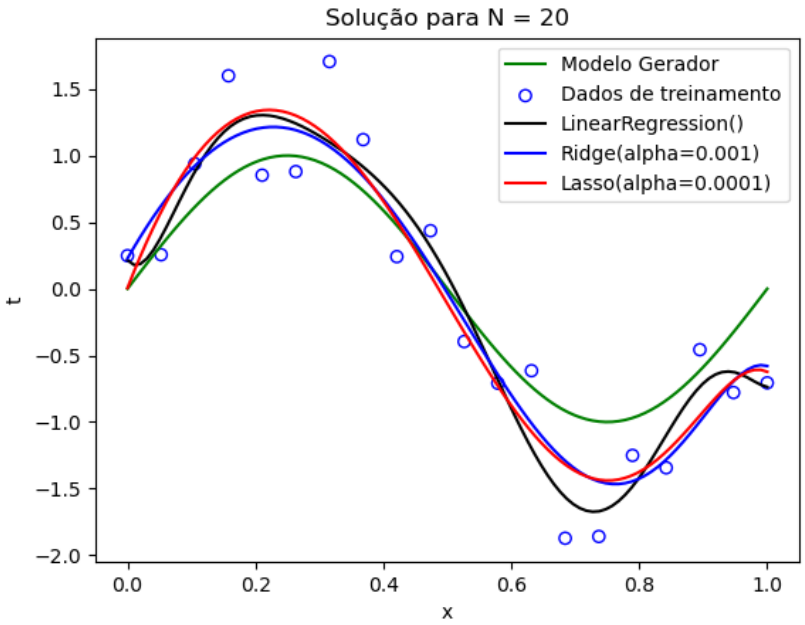


Tabela 2: Coeficientes para $N = 20$

Modelo	LS	Ridge	Lasso
w_0	0.00000	0.00000	0.00000
w_1	-6.01368	8.39435	12.41611
w_2	266.50406	-16.21245	-29.59271
w_3	-2042.90037	-8.39927	0.72172
w_4	7178.62334	2.98152	10.38544
w_5	-13245.77187	9.30126	8.97546
w_6	11993.83639	9.76174	4.54743
w_7	-3017.56404	5.62434	0.00000
w_8	-2424.08815	-1.60172	-1.35976
w_9	1296.42241	-10.65716	-6.72254

Figura 6: Comparação entre as soluções para $N = 50$

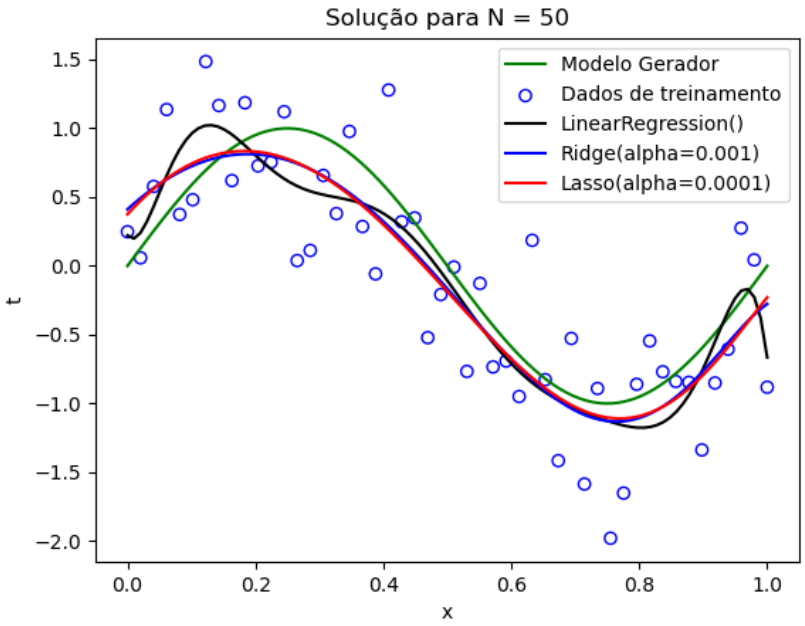


Tabela 3: Coeficientes para $N = 50$

Modelo	LS	Ridge	Lasso
w_0	0.00000	0.00000	0.00000
w_1	-6.39374	4.21035	5.11672
w_2	455.99223	-10.53780	-14.48266
w_3	-5270.52166	-3.22874	0.35582
w_4	27669.16750	1.83804	4.73458
w_5	-80097.04531	4.61815	4.18727
w_6	135776.45582	5.20904	2.22228
w_7	-134351.92251	3.52870	0.00000
w_8	71926.93850	-0.30771	-0.00000
w_9	-16103.55817	-6.01761	-2.73785

Pelas figuras, podemos observar que a solução para mínimos quadrados começa a sofrer menos com o overfitting à medida que o tamanho da amostra aumenta. Isso se deve ao fato de que o ruído nos dados de treinamento possui uma distribuição gaussiana com média zero. Pela lei dos grandes números, quanto maior a quantidade de dados de treinamento, mais a média da amostra se aproxima da média da distribuição original, que é zero, reduzindo assim o efeito do ruído.

Consequentemente, com mais dados, a solução de mínimos quadrados consegue capturar melhor o padrão subjacente dos dados, e o impacto do ruído diminui. Esse comportamento explica por que a solução de mínimos quadrados apresenta um ajuste mais estável e menos propenso ao overfitting quando o tamanho da amostra aumenta.

No entanto, é importante notar que, mesmo com um aumento no tamanho da amostra, métodos de regularização como a regressão ridge e lasso continuam a fornecer soluções mais robustas e generalizáveis, especialmente em situações onde o ruído pode não ser perfeitamente gaussiano ou quando a complexidade do modelo ainda é alta em relação ao tamanho da amostra.

2 Exercício 2

Data Source:

- (info) `https://web.stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/datasets/prostate.info.txt`
- (database) `https://web.stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/datasets/prostate.data`

"The data for this example come from a study by Stamey et al. (1989). They examined the correlation between the level of prostate-specific antigen (lpsa) and a number of clinical measures in men who were about to receive a radical prostatectomy. The variables are log cancer volume (lcavol), log prostate weight (lweight), age, log of the amount of benign prostatic hyperplasia (lbph), seminal vesicle invasion (svi), log of capsular penetration (lcp), Gleason score (gleason), and percent of Gleason scores 4 or 5 (pgg45)."

Considere a variável (lpsa) como 'target' e as variáveis (lcavol), (lweight), (age), (lbph), (svi), (lcp), (gleason) e (pgg45) como 'entradas'. Siga o roteiro abaixo:

(a) Padronize os atributos de entrada para que eles tenham média 0 e variância 1;

(b) Divida o dataset em dois conjuntos, treinamento e teste, conforme indicado nos índices da última coluna (T = treinamento, F = teste);

(c) Encontre o modelo linear de regressão ótimo no critério de mínimos quadrados (solução LS);

(d) Implemente modelos lineares regularizados pelos métodos 'Ridge' e 'Lasso' que minimizam a função objetivo $L(w) = \frac{1}{2N} RSS(w) + \lambda ||w||^q$. Apresente resultados para $\lambda = 0.25$;

(e) Aplicando as regressões 'Ridge' e 'Lasso' e utilizando k-fold cross-validation, é possível selecionar um valor para λ que resulta em um modelo com melhor capacidade de generalização. Isso é feito selecionando o λ relativo à menor estimativa do erro de predição quadrático médio (usualmente chamado de validation score) ao longo dos k-folds. Também é possível selecionar um valor de λ que seleciona o modelo mais simples dentro de uma tolerância da estimativa do erro de predição quadrático médio. Isso é particularmente útil quando se deseja encontrar soluções esparsas (no caso do Lasso) ou de menor norma L2 (no caso do Ridge). Para tal, um critério comumente adotado é a 'Regra de 1 desvio padrão', onde escolhe-se o maior λ cujo validation score seja igual ou pouco menor do que o 'score mínimo' + '1 desvio padrão do score mínimo'.

   - Monte as curvas de validation score de k-fold cross-validation em função de λ para os modelos regularizados por 'ridge' e 'lasso' (Sugestão: use k = 10, e procure λ em um intervalo [0, 0.5]);
   - Calcule o desvio padrão do 'score' mínimo em cada respectiva curva e desenhe-o como barra de erro em torno daquele ponto;
   - Determine o λ que resulta no modelo mais simples de acordo com a 'Regra de 1 desvio padrão';
   - Treine o modelo final 'ridge' e 'lasso' utilizando todos os dados (de treinamento) e o respectivo λ encontrado e apresente os resultados;

(f) Utilizando o conjunto de teste construído no item (b), calcule a estimativa do erro de predição quadrático médio do conjunto de teste para cada modelo (mínimos quadrados, 'ridge' e 'lasso'). Disserte sobre os resultados obtidos.

(g) (Bônus) Estime o desvio padrão dos coeficientes do modelo obtido pelo método de bootstrap dos resíduos;

Dica: Veja os slides 9 e 10 de `http://www.est.ufmg.br/~cristianocs/MetComput/Aula8.pdf`

2.1 Resposta do item (a)

Para padronizar os dados de entrada com média zero e variância um, foram selecionadas as colunas 'lcavol', 'lweight', 'age', 'lbph', 'svi', 'lcp', 'gleason' e 'pgg45' como features e depois utilizada a classe *StandardScaler* da biblioteca *sklearn* para *python*, que realiza a padronização dos dados pelo método *z-score*.

2.2 Resposta do item (b)

O dataset foi dividido utilizando a última coluna (T = treinamento, F = teste), como pedido no enunciado.

2.3 Resposta do item (c)

Para implementar o método dos mínimos quadrados foi utilizada a classe $Linear Regression$ da biblioteca *sklearn* para *python*. Pelo critério de mínimos quadrados (LS) foram obtidos os seguintes resultados ao se calcular o erro quadrático médio (MSE):

- MSE - Treinamento (LS): 0.4391997680583344
- MSE - Teste (LS): 0.5212740055076001

O modelo de mínimos quadrados (LS) foi ajustado e apresentou um erro quadrático médio (MSE) de 0.4392 no conjunto de treinamento e 0.5213 no conjunto de teste. A diferença entre os MSE sugere que o modelo tem uma boa capacidade de generalização, mas há espaço para melhoria, possivelmente através de regularização.

2.4 Resposta do item (d)

Para implementar o método dos mínimos quadrados foram utilizadas as classe *Ridge* e *Lasso* da biblioteca *sklearn* para *python*, ambos utilizando $\lambda = 0.25$. Foram obtidos os seguintes reesultados para cada método ao se calcular o erro quadrático médio:

- MSE - Treinamento (Ridge): 0.4392308191154076
- MSE - Teste (Ridge): 0.5189192261819305
- MSE - Treinamento (Lasso): 0.6207140544187021

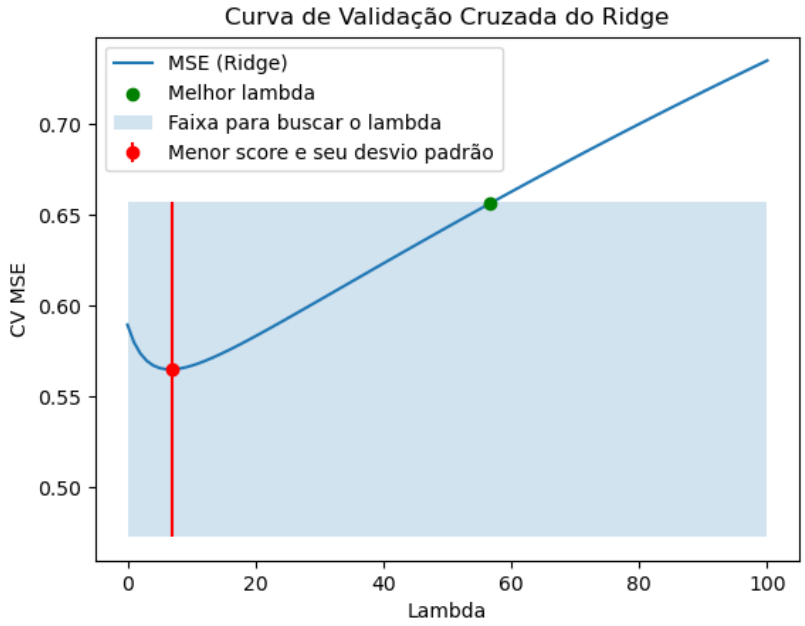
- MSE - Teste (Lasso): 0.5031909828714028

O Ridge apresentou MSE de 0.4392 (treinamento) e 0.5189 (teste), enquanto o Lasso apresentou MSE de 0.6207 (treinamento) e 0.5032 (teste). Os resultados indicam que o Lasso, apesar de ter um MSE de treinamento mais alto, generaliza melhor para o conjunto de teste do que o Ridge para este valor de λ.

2.5 Resposta do item (e)

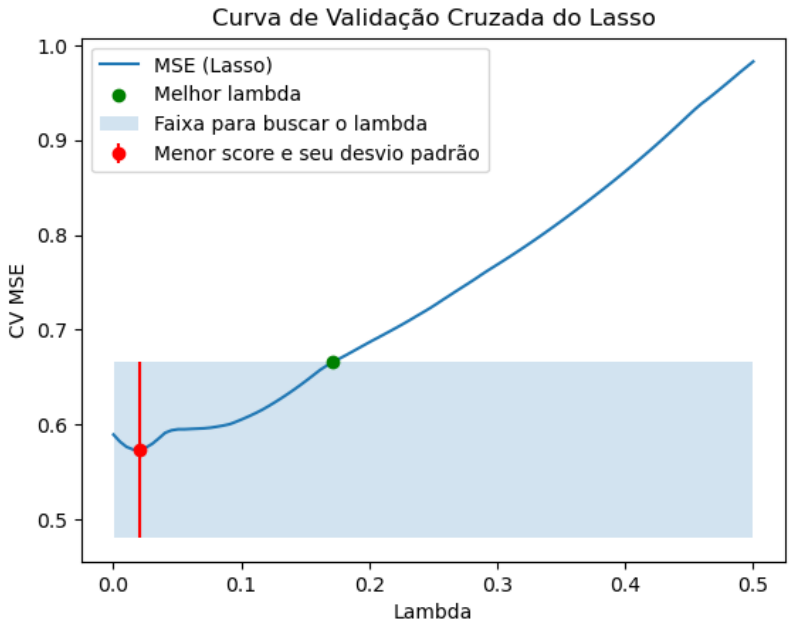
Para implementar o k-fold cross-validation foi utilizada a classe $KFold$ e o método $cross_val_score$ da biblioteca *sklearn* para *python*, utilizando $k = 10$. As curvas abaixo mostram os resultados para os dois métodos:

Figura 7: Seleção do λ para o Ridge



- Melhor lambda (Ridge): 56.56570000000001

Figura 8: Seleção do λ para o Lasso



- Melhor lambda (Lasso): 0.17178282828282826

O melhor λ para Ridge foi 56.5657 e para Lasso foi 0.1718. Isso mostra a importância da validação cruzada para selecionar o hiperparâmetro λ, que controla o grau de regularização, melhorando a capacidade de generalização dos modelos.

2.6 Resposta do item (f)

Utilizando os valores de λ obtidos no item (e) para treinar os modelos e avaliando eles no conjunto de teste, foram obtidos os seguintes resultados:

- MSE - Teste (Final Ridge): 0.5168573674734896
- MSE - Teste (Final Lasso): 0.46269599870385136

Os modelos Ridge e Lasso ajustados com os melhores valores de λ apresentaram MSE no conjunto de teste de 0.5169 e 0.4627, respectivamente. O Lasso, com λ selecionado pela validação cruzada, teve o menor MSE no conjunto de teste, indicando melhor performance de generalização e sugerindo que ele é mais adequado para este problema específico, o que pode ser explicado pela capacidade do Lasso de realizar a seleção de atributos, na qual ele zera o peso de atributos considerados menos importantes durante o treinamento do modelo.

2.7 Resposta do item (g) (bônus)

Estimando-se o desvio padrão dos modelos utilizando o método de bootstrap, como explicado no slide fornecido, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 4: Desvio padrão dos coeficientes estimado pelo método de bootstrap

Coeficiente	LS	Ridge	Lasso
$\sigma(w_{lcavol})$	0.88759121	0.05376307	0.02682624
$\sigma(w_{lweight})$	0.49864616	0.0616933	0.0177683
$\sigma(w_{age})$	0.83638015	0.05619426	0.0135523
$\sigma(w_{lbph})$	1.50354526	0.05841666	0.00873325
$\sigma(w_{svi})$	1.29119818	0.05347875	0.01242236
$\sigma(w_{lcp})$	1.41932171	0.05059043	0.01094835
$\sigma(w_{gleason})$	1.14078834	0.05271173	0.00885585
$\sigma(w_{pgg45})$	1.4496714	0.04933459	0.01082586

A estimação do desvio padrão dos coeficientes utilizando o método de bootstrap mostrou que o Lasso resulta em coeficientes com menor variabilidade comparado aos métodos LS e Ridge. Isso sugere que o Lasso, além de promover sparsidade (coeficientes nulos), também pode proporcionar coeficientes mais estáveis, o que pode ser uma vantagem em termos de interpretabilidade e robustez do modelo.

Códigos

Código 1: Exercício 1

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression, Ridge, Lasso
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
import pandas as pd

def fitar_curva(x, t, model):
    X = np.linspace(0,1,100)
    # regressão
    poly = PolynomialFeatures(degree=9)
    A = poly.fit_transform(x.reshape(-1, 1)) # calculo da matriz A
    model.fit(A, t) # treinamento
    A = poly.fit_transform(X.reshape(-1, 1))
    y=model.predict(A) # predição

    return y, model.coef_

def plotar_curva(x,y,modelo):
    # função geradora
    X = np.linspace(0,1,100)
    modelo_gerador = np.sin(2*np.pi*X)

    # resultados
    plt.figure()
    plt.plot(X,modelo_gerador,color='green', label='Modelo Gerador')
    plt.scatter(x, t, facecolors='none', edgecolors="blue", label ='Dados de
       treinamento')
    plt.plot(X,y,color='red', label = modelo)
    plt.title(f'Solução para {modelo}')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('t')
    plt.legend()
    plt.show()

def plotar_tudo(x,y_list,modelos,N):
    # função geradora
    X = np.linspace(0,1,100)
    modelo_gerador = np.sin(2*np.pi*X)

    # resultados
    plt.figure()
    plt.plot(X,modelo_gerador,color='green', label='Modelo Gerador')
    plt.scatter(x, t, facecolors='none', edgecolors="blue", label ='Dados de
       treinamento')
    color_list = ["k","b", "r"]
    for i, y in enumerate(y_list):
        plt.plot(X,y,color=color_list[i],label=modelos[i])
        # plt.plot(X,y,label=modelos[i])
    plt.title(f'Solução para N = {N}')
    plt.xlabel('x')
```

```
    plt.ylabel('t')
    plt.legend()
    plt.show()

def listar_coefs(coef_list):
    model_names = ['LS', 'Ridge', 'Lasso']

    coef_dict = {'Modelo': model_names}
    for i in range(10):
        coef_dict[f'$w_{i}$'] = [f'{coef[i]:.5f}' for coef in coef_list]

    coef_table = pd.DataFrame(coef_dict)
    coef_table = coef_table.set_index('Modelo').transpose()
    print(coef_table.to_latex(index=True))



if __name__=="__main__":
    # amostra
    np.random.seed(42) # congelando a seed para gerar os mesmos dados de treinamento para todos os itens
    N = 10 # tamanho da amostra
    x = np.linspace(0,1,N)
    t = np.sin(2*np.pi*x) + np.random.normal(0, 0.5, size=N)
    # curve fitting
    lambda_ridge = 1e-3
    lambda_lasso = 1e-4
    modelos = [LinearRegression(), Ridge(alpha=lambda_ridge), Lasso(alpha=lambda_lasso)]
    # modelos = [Ridge(alpha=1e-1),Ridge(alpha=1e-2),Ridge(alpha=1e-3),Ridge(alpha=1e-4),Ridge(alpha=1e-5),Ridge(alpha=1e-6)]
    # modelos = [Lasso(alpha=1e-2),Lasso(alpha=1e-3),Lasso(alpha=1e-4),Lasso(alpha=1e-5),Lasso(alpha=1e-6),Lasso(alpha=1e-7)]
    y_list = list()
    w_list = list()
    for model in modelos:
        y, w = fitar_curva(x, t, model)
        y_list.append(y)
        w_list.append(w)
        plotar_curva(x,y,model)

    listar_coefs(w_list)
    plotar_tudo(x,y_list,modelos,N)
```

Código 2: Exercício 2

```
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression, Ridge, Lasso
from sklearn.preprocessing import StandardScaler, PolynomialFeatures
from sklearn.model_selection import train_test_split, cross_val_score, KFold
from sklearn.metrics import mean_squared_error, make_scorer
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.pipeline import Pipeline
```

```
9
10 # Carregar o dataset
11 # data = pd.read_csv('prostatedata.txt', delimiter='\t')
12 url = 'https://hastie.su.domains/ElemStatLearn/datasets/prostate.data'
13 data = pd.read_csv(url, delimiter='\t')
14
15 # (a) Padronização dos atributos de entrada para que eles tenham média 0 e vari
   ância 1
16 features = ['lcavol', 'lweight', 'age', 'lbph', 'svi', 'lcp', 'gleason', 'pgg45
   ']
17 X = data[features]
18 y = data['lpsa']
19 scaler = StandardScaler()
20 X_scaled = scaler.fit_transform(X)
21
22 # (b) Divisão o dataset em dois conjuntos, treinamento e teste, conforme
   indicado nos índices da última coluna
23 train_indices = data['train'] == 'T'
24 test_indices = data['train'] == 'F'
25 X_train, X_test = X_scaled[train_indices], X_scaled[test_indices]
26 y_train, y_test = y[train_indices], y[test_indices]
27
28 # (c) Encontre o modelo linear de regressão ótimo no critério de mínimos
   quadrados (solução LS)
29 linear_model = LinearRegression()
30 linear_model.fit(X_train, y_train)
31 y_pred_train_linear = linear_model.predict(X_train)
32 y_pred_test_linear = linear_model.predict(X_test)
33 mse_train_linear = mean_squared_error(y_train, y_pred_train_linear)
34 mse_test_linear = mean_squared_error(y_test, y_pred_test_linear)
35 print(f'MSE - Treinamento (LS): {mse_train_linear}')
36 print(f'MSE - Teste (LS): {mse_test_linear}')
37
38 # (d) Implementação modelos lineares regularizados pelos métodos Ridge e Lasso
   com lambda = 0.25
39 lambda_val = 0.25
40 ridge_model = Ridge(alpha=lambda_val)
41 ridge_model.fit(X_train, y_train)
42 y_pred_train_ridge = ridge_model.predict(X_train)
43 y_pred_test_ridge = ridge_model.predict(X_test)
44 lasso_model = Lasso(alpha=lambda_val)
45 lasso_model.fit(X_train, y_train)
46 y_pred_train_lasso = lasso_model.predict(X_train)
47 y_pred_test_lasso = lasso_model.predict(X_test)
48 mse_train_ridge = mean_squared_error(y_train, y_pred_train_ridge)
49 mse_test_ridge = mean_squared_error(y_test, y_pred_test_ridge)
50 mse_train_lasso = mean_squared_error(y_train, y_pred_train_lasso)
51 mse_test_lasso = mean_squared_error(y_test, y_pred_test_lasso)
52 print(f'MSE - Treinamento (Ridge): {mse_train_ridge}')
53 print(f'MSE - Teste (Ridge): {mse_test_ridge}')
54 print(f'MSE - Treinamento (Lasso): {mse_train_lasso}')
55 print(f'MSE - Teste (Lasso): {mse_test_lasso}')
56
57 # (e) Aplicação do k-fold cross-validation para selecionar o melhor valor de
```

```
    lambda
def plot_cv_curve(model_class, X, y, lambdas, model_name):
    # k-fold cross-validation
    mean_scores = list()
    std_scores = list()
    kf = KFold(n_splits=10, shuffle=True, random_state=3)
    for alpha in lambdas:
        scores = cross_val_score(model_class(alpha=alpha), X, y, cv=kf, scoring
            ='neg_mean_squared_error')
        mean_scores.append(-scores.mean())
        std_scores.append(scores.std())
    mean_scores = np.array(mean_scores)
    std_scores = np.array(std_scores)
    # Regra de 1 desvio padrão
    min_score = np.min(mean_scores)
    min_score_index = np.argmin(mean_scores)
    min_score_std = std_scores[min_score_index]/np.sqrt(10)
    min_score_lambda = lambdas[min_score_index]
    lambda_1se_index = np.where(mean_scores <= min_score + min_score_std)
        [0][-1]
    lambda_1se = lambdas[lambda_1se_index]
    lambda_1se_score = mean_scores[lambda_1se_index]
    # plot
    plt.figure()
    plt.plot(lambdas, mean_scores, label=f'MSE ({model_name})')
    plt.scatter(lambda_1se, lambda_1se_score, c='g', label='Melhor lambda',
        zorder=3)
    plt.fill_between(lambdas, min_score - min_score_std, min_score +
        min_score_std, alpha=0.2, label='Faixa para buscar o lambda')
    plt.errorbar(min_score_lambda, min_score, yerr=min_score_std, fmt='o',
        color='r', label='Menor score e seu desvio padrão')

    plt.xlabel('Lambda')
    # plt.xscale('log')
    plt.ylabel('CV MSE')
    plt.title(f'Curva de Validação Cruzada do {model_name}')
    plt.legend()
    plt.show()
    return lambda_1se

best_lambda_ridge = plot_cv_curve(Ridge, X_train, y_train, np.linspace
    (0.0001,100,100), 'Ridge')
best_lambda_lasso = plot_cv_curve(Lasso, X_train, y_train, np.linspace
    (0.0001,0.5,100), 'Lasso')

print(f'Melhor lambda (Ridge): {best_lambda_ridge}')
print(f'Melhor lambda (Lasso): {best_lambda_lasso}')

# (f) Calculando o MSE para o conjunto de teste
final_ridge_model = Ridge(alpha=best_lambda_ridge)
final_ridge_model.fit(X_train, y_train)
final_lasso_model = Lasso(alpha=best_lambda_lasso)
final_lasso_model.fit(X_train, y_train)
y_pred_test_final_ridge = final_ridge_model.predict(X_test)
```

```python
y_pred_test_final_lasso = final_lasso_model.predict(X_test)
mse_test_final_ridge = mean_squared_error(y_test, y_pred_test_final_ridge)
mse_test_final_lasso = mean_squared_error(y_test, y_pred_test_final_lasso)
print(f'MSE - Teste (Final Ridge): {mse_test_final_ridge}')
print(f'MSE - Teste (Final Lasso): {mse_test_final_lasso}')

# (g) (Bônus) Estimando o desvio padrão dos coeficientes do modelo pelo método de bootstrap dos resíduos
def bootstrap_residuals(model, X_train, y_train, n_bootstrap=1000):
    residuals = y_train - model.predict(X_train)
    coefs = []
    for _ in range(n_bootstrap):
        sampled_residuals = np.random.choice(residuals, size=len(residuals), replace=True)
        y_bootstrap = model.predict(X_train) + sampled_residuals
        model.fit(X_train, y_bootstrap)
        coefs.append(model.coef_)
    coefs = np.array(coefs)
    return np.std(coefs, axis=0)

bootstrap_std_linear = bootstrap_residuals(linear_model, X_train, y_train)
bootstrap_std_ridge = bootstrap_residuals(final_ridge_model, X_train, y_train)
bootstrap_std_lasso = bootstrap_residuals(final_lasso_model, X_train, y_train)
print(f'Desvio padrão dos coeficientes (LS): {bootstrap_std_linear}')
print(f'Desvio padrão dos coeficientes (Ridge): {bootstrap_std_ridge}')
print(f'Desvio padrão dos coeficientes (Lasso): {bootstrap_std_lasso}')
```