

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Alberto Luiz Coimbra de  
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação

CPS844 - Inteligência Computacional I  
Prof. Dr. Carlos Eduardo Pedreira

*Trabalho prático*

Luiz Henrique Souza Caldas  
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

21 de maio de 2024

# 1 Perceptron

Neste problema, você criará a sua própria função target  $f$  e uma base de dados  $D$  para que possa ver como o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron funciona. Escolha  $d = 2$  pra que você possa visualizar o problema, e assuma  $\chi = [-1, 1] \times [-1, 1]$  com probabilidade uniforme de escolher cada  $x \in \mathcal{X}$ .

Em cada execução, escolha uma reta aleatória no plano como sua função target  $f$  (faça isso selecionando dois pontos aleatórios, uniformemente distribuídos em  $\chi = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , e pegando a reta que passa entre eles), de modo que um lado da reta mapeia pra +1 e o outro pra -1. Escolha os inputs  $x_n$  da base de dados como um conjunto de pontos aleatórios (uniformemente em  $\mathcal{X}$ ), e avalie a função target em cada  $x_n$  para pegar o output correspondente  $y_n$ .

Agora, pra cada execução, use o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron (PLA) para encontrar  $g$ . Inicie o PLA com um vetor de pesos  $w$  zerado (considere que  $\text{sign}(0) = 0$ , de modo que todos os pontos estejam classificados erroneamente ao início), e a cada iteração faça com que o algoritmo escolha um ponto aleatório dentre os classificados erroneamente. Estamos interessados em duas quantidades: o número de iterações que o PLA demora para convergir pra  $g$ , e a divergência entre  $f$  e  $g$  que é  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  (a probabilidade de que  $f$  e  $g$  vão divergir na classificação de um ponto aleatório). Você pode calcular essa probabilidade de maneira exata, ou então aproximá-la ao gerar uma quantidade suficientemente grande de novos pontos para estimá-la (por exemplo, 10.000).

A fim de obter uma estimativa confiável para essas duas quantias, você deverá realizar 1000 execuções do experimento (cada execução do jeito descrito acima), tomando a média destas execuções como seu resultado final.

Para ilustrar os resultados obtidos nos seus experimentos, acrescente ao seu relatório gráficos scatterplot com os pontos utilizados para calcular  $E_{out}$ , assim como as retas correspondentes à função target e à hipótese  $g$  encontrada.

## Implementação:

Para responder os itens referentes a este problema, foi implementado em Python um Perceptron 2D utilizando as fórmulas e procedimentos apresentados na primeira aula do professor Yaser Abu-Mostafa. Foram criadas três classes: uma para gerar a função target (código 1), outra para gerar base de dados(código 2) usando a função target, e a terceira pra criar e treinar o perceptron e classificar utilizando o mesmo (código 3). Os seus códigos estão listados abaixo.

**Código 1:** Geração da função target  $f$

```
1  # Classe para criar a função target
2  class Target:
3      def __init__(self):
4          self.a = 0 # coeficiente angular
5          self.b = 0 # coeficiente linear
6
7      # Método para gerar a linha da função target
8      def generate_random_line(self):
9          point1 = np.random.uniform(-1, 1, 2) # ponto aleatorio no domínio
10         point2 = np.random.uniform(-1, 1, 2) # ponto aleatorio no domínio
11         a = (point2[1] - point1[1]) / (point1[0] - point2[0]) # cálculo do
            coeficiente angular
12         b = point1[1] - a*point1[0] # cálculo do coeficiente linear
13         self.a = a
```

```

14         self.b = b
15         return a, b
16
17     # Método para classificar pontos de acordo a função target
18     def classify_point(self, point):
19         a = self.a
20         b = self.b
21         y_reta = a*point[0] + b
22         return np.sign(point[1] - y_reta) # verifica se a coordenada y do
            ponto está acima ou abaixo da reta

```

### Código 2: Geração do da base de dados $D$

```

1     # Classe para criar o dataset
2     class Dataset:
3         def __init__(self, N):
4             self.N = N # tamanho do dataset
5
6         # Método para gerar a base de dados D
7         def generate_dataset(self, target):
8             N = self.N
9             data = np.random.uniform(-1, 1, (N, 2)) # gera N pontos no R2 com
                coordenadas entre [-1, 1]
10            labels = np.array([target.classify_point(point) for point in data])
11            return data, labels

```

### Código 3: Perceptron

```

1     # Classe para criar e treinar o perceptron 2D
2     class Perceptron2D:
3         def __init__(self, weights = np.zeros(3)):
4             self.w = weights # inicializa os pesos (incluindo o w_0)
5
6         # Método para treinar o perceptron usando o algoritmo de aprendizagem
            perceptron (PLA)
7         def fit(self, data, labels):
8             n_samples = len(data)
9             X_bias = np.hstack([np.ones((n_samples, 1)), data]) # adiciona uma
                coluna de 1s para o X_0 (coordenada artificial)
10            iterations = 0
11            errors = 1
12            while errors > 0:
13                errors = 0
14                for i in range(n_samples):
15                    if labels[i] * np.dot(self.w, X_bias[i]) <= 0:
16                        self.w += labels[i] * X_bias[i] # atualiza os pesos
17                        errors += 1
18                iterations += 1
19            return iterations, self.w
20
21        # Método para classificar um dataset com base nos pesos aprendidos.
22        def classificar(self, data):
23            n_samples = len(data)
24            X_bias = np.hstack([np.ones((n_samples, 1)), data]) # adiciona uma
                coluna de 1s para o bias X_0

```

```

25         return np.sign(np.dot(X_bias, self.w)) # verifica o sinal do
           produto escalar entre x e w

```

Para testar as classes, foi feita uma função para plotar uma base de dados de 100 pontos com a função target  $f$  gerada e a hipótese  $g$  com a reta calculada pelo PLA (código 4). O resultado pode ser observado na figura 1.

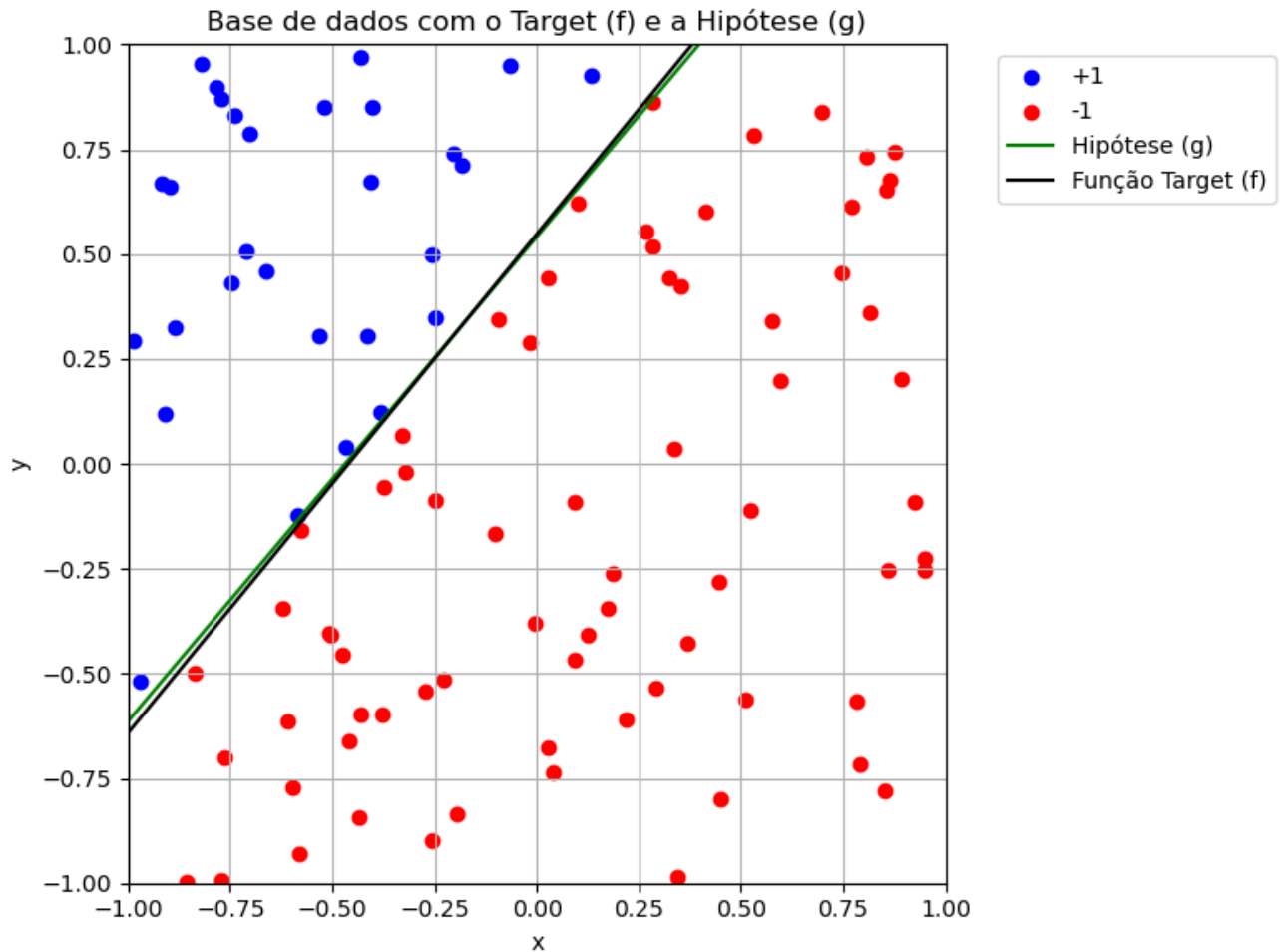
#### Código 4: Teste das classes

```

1  def teste():
2      # Criar a função target
3      target = Target()
4      a, b = target.generate_random_line()
5      # Criar o dataset e a função target
6      num_points = 100
7      dataset = Dataset(num_points)
8      data, labels = dataset.generate_dataset(target)
9      # Criar e treinar o perceptron
10     perceptron = Perceptron2D()
11     _, w = perceptron.fit(data, labels)
12     # Plotar resultados
13     plt.figure(figsize=(8, 6))
14     x_pos = [data[i][0] for i in range(len(data)) if labels[i] == 1]
15     y_pos = [data[i][1] for i in range(len(data)) if labels[i] == 1]
16     x_neg = [data[i][0] for i in range(len(data)) if labels[i] == -1]
17     y_neg = [data[i][1] for i in range(len(data)) if labels[i] == -1]
18     plt.scatter(x_pos, y_pos, c='blue', label='+1')
19     plt.scatter(x_neg, y_neg, c='red', label='-1')
20     x = np.linspace(-1, 1, 100)
21     y_target = a*x+b
22     y_g = -(w[1] * x + w[0]) / w[2]
23     plt.plot(x, y_g, 'g-', label='Hipótese (g)')
24     plt.plot(x, y_target, 'k-', label='Função Target (f)')
25     plt.xlim(-1, 1)
26     plt.ylim(-1, 1)
27     plt.xlabel('x')
28     plt.ylabel('y')
29     plt.title('Base de dados com o Target (f) e a Hipótese (g)')
30     plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
31     plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 1])
32     plt.grid(True)
33     plt.show()

```

**Figura 1:** Base de dados com o Target ( $f$ ) e a Hipótese ( $g$ )



Pela figura 1, é possível observar que a Hipótese ( $g$ ) gera uma linha que, apesar de não sobrepor completamente a linha da Função Target ( $f$ ), separa os pontos perfeitamente, resultado já esperado pelo treinamento utilizando o PLA, uma vez que esse algoritmo só converge quando o erro dentro da amostra  $E_{in}$  é nulo.

1. Considere  $N = 10$ . Quantas iterações demora, em média, para que o PLA convirja com  $N = 10$  pontos de treinamento? Escolha o valor mais próximo do seu resultado.

- (a) 1
- (b) 15
- (c) 300
- (d) 5000
- (e) 10000

### Justificativa:

Para responder a esse item foi implementada a seguinte função:

**Código 5:** Cálculo do número de iterações

```
1 def calc_num_iter(num_points, verbose = True):
2     lista_iter = list()
3     for _ in range(1000):
4         target = Target()
5         target.generate_random_line()
6         dataset = Dataset(num_points)
7         data, labels = dataset.generate_dataset(target)
8         perceptron = Perceptron2D()
9         iter, _ = perceptron.fit(data, labels)
10        lista_iter.append(iter)
11    if verbose: print(f"{np.mean(lista_iter)} iterações com desvio
12                  padrão {np.std(lista_iter):.4f} (min:{np.min(lista_iter)}, máx
                  :{np.max(lista_iter)})")
13    return lista_iter
```

O resultado após 1000 execuções do experimento, com a variável  $num\_points = 10$ , foi uma média de 5.0490 ( $\approx 5$ ) iterações, com desvio padrão de 7.7770 ( $\approx 8$ ) iterações, mínimo de 2 iterações e máximo de 99 iterações. Nota-se que o número de iterações pode variar bastante entre uma execução e outra, o que se deve ao alto grau de aleatoriedade presente no problema, uma vez que tanto os pontos quanto a reta da Função Target são gerados de forma aleatória, podendo levar a configurações de diferentes níveis de dificuldade para o PLA convergir. Como 5 está mais próximo de 1 do que de 15, o **item a** foi selecionado.

2. Qual das alternativas seguintes é mais próxima de  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  para  $N = 10$ ?

- (a) 0.001
- (b) 0.01
- (c) 0.1
- (d) 0.5
- (e) 1

### Justificativa:

$\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  pode ser estimada computacionalmente gerando-se uma quantidade suficientemente grande de pontos novos e calculando o percentual de erro na classificação desses pontos. Para responder esse item foram realizadas 1000 execuções, nas quais foram gerados 10010 pontos, sendo 10 utilizados para o treinamento do perceptron e 10 mil utilizados para teste. A cada execução foi calculado o percentual de erro, isto é, a quantidade de vezes que a classificação do perceptron foi diferente da função target dividido pela quantidade de pontos. No final das execuções,  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  foi estimada fazendo a média do percentual de erro em cada execução. A Implementação pode ser vista abaixo:

**Código 6:** Cálculo da probabilidade de erro

```

1 def calc_p_erro(num_points, verbose = True):
2     lista_erro = list()
3     for _ in range(1000):
4         target = Target()
5         target.generate_random_line()
6         dataset_train = Dataset(num_points)
7         x_train, y_train = dataset_train.generate_dataset(target)
8         dataset_test = Dataset(10000) # mais 10mil pontos
9         x_test, y_test = dataset_test.generate_dataset(target)
10        perceptron = Perceptron2D()
11        perceptron.fit(x_train, y_train)
12        y_predicted = perceptron.classificar(x_test)
13        erro = np.mean(y_test != y_predicted)
14        lista_erro.append(erro)
15    if verbose: print(f"P[f(x) \u2260 g(x)] = {np.mean(lista_erro):.4f}")
16    return lista_erro

```

O resultado após 1000 execuções, com  $num\_points = 10010$  e  $train\_size = 10$ , foi  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)] = 0.0671 = 6.71\%$ . Como 0.0671 está mais próximo de 0.1 do que de 0.01, o **item c** foi selecionado.

3. Agora considere  $N = 100$ . Quantas iterações demora, em média, para que o PLA convirja com  $N = 100$  pontos de treinamento? Escolha o valor mais próximo do seu resultado.

- (a) 50
- (b) 100
- (c) 500
- (d) 1000
- (e) 5000

**Justificativa:**

Para responder a este item foi utilizada a mesma função do item 1 (código 5), com  $num\_points = 100$ .

O resultado após 1000 execuções do experimento foi uma média de 32.981 ( $\approx 33$ ) iterações, com desvio padrão de 164.5924 ( $\approx 165$ ) iterações, mínimo de 2 iterações e máximo de 4149 iterações. Nota-se que novamente o número de iterações pode variar bastante entre uma execução e outra, conforme já observado e explicado no item 1. Como 33 está abaixo de 50 e não existe alternativa menor, o **item a** foi selecionado.

4. Qual das alternativas seguintes é mais próxima de  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  para  $N = 100$ ?

- (a) 0.001
- (c) 0.01
- (c) 0.1
- (d) 0.5

(e) 1

### Justificativa:

Para responder a este item foi utilizada a mesma função do item 2 (código 6), com *num\_points* = 100.

O resultado após 1000 execuções foi  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)] = 0.0069 = 0.69\%$ . Como 0.0069 está mais próximo de 0.01 do que de 0.001, o **item b** foi selecionado.

5. É possível estabelecer alguma regra para a relação entre  $N$ , o número de iterações até a convergência, e  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ ?

### Resposta:

Para responder a este item foram implementadas duas funções: uma para calcular o número de iterações e  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  para uma faixa de diferentes números de pontos (código 7) e outra para plotar os resultados (código 8). O código das duas pode ser observado abaixo.

**Código 7:** Cálculo da probabilidade de erro e do número de iterações

```
1 def relationship(lista_num_points):
2     lista_iter_medio = list()
3     lista_erro_medio = list()
4     for num_points in lista_num_points:
5         lista_iter = calc_num_iter(num_points, verbose=False)
6         lista_erro = calc_p_erro(num_points, verbose=False)
7         lista_iter_medio.append(np.mean(lista_iter))
8         lista_erro_medio.append(np.mean(lista_erro))
9     return lista_iter_medio, lista_erro_medio
```

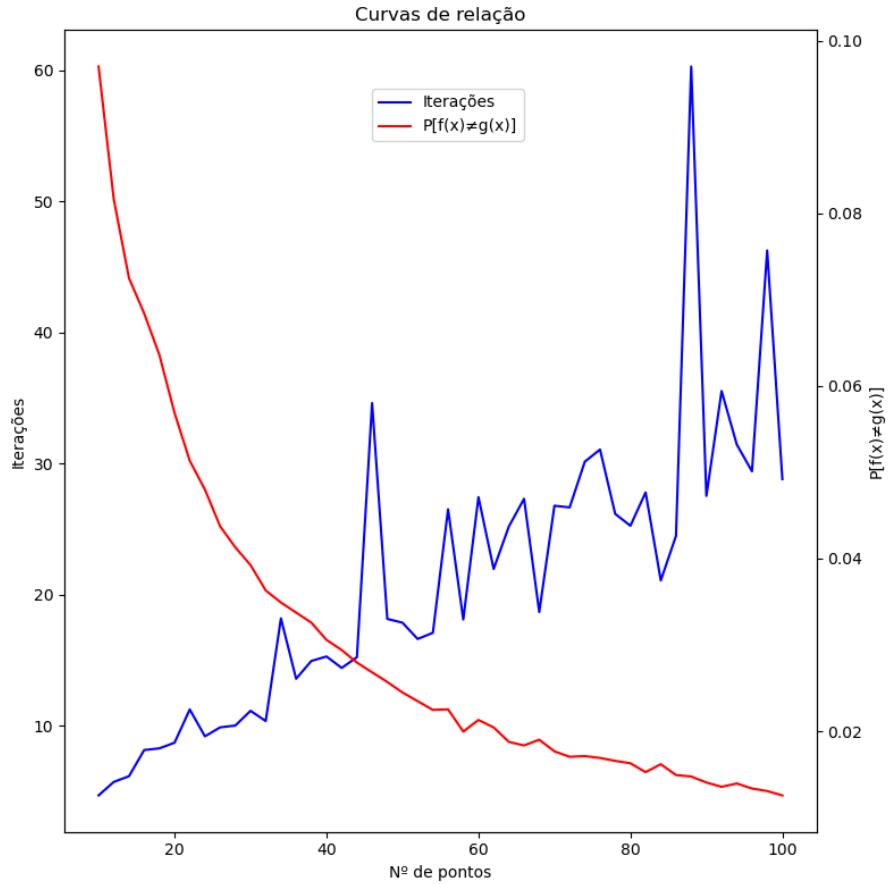
**Código 8:** Plot da probabilidade de erro e do número de iterações

```
1 def plot_relationship(num_points_list, lista_iter_medio,
2     lista_erro_medio):
3     fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(8, 8))
4     ax.plot(num_points_list, lista_iter_medio, c="blue", label="Itera
5     ções")
6     ax.set_title("Curvas de relação")
7     ax.set_xlabel('Nº de pontos')
8     ax.set_ylabel('Iterações')
9     ax2=ax.twinx()
10    ax2.plot(num_points_list, lista_erro_medio, c="red", label='P[f(
11    x)\u2260g(x)]')
12    ax2.set_ylabel('P[f(x)\u2260g(x)]')
13    fig.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, 0.9))
14    fig.tight_layout()
15    plt.show()
```

O resultado para o tamanho  $N$  da amostra variando de 10 a 100 com passo 2 pode ser observado na figura 2.



**Figura 2:** Resultado para  $N$  variando de 10 a 100 com passo 2



A quantidade de iterações para o PLA convergir, como constatado nos itens 1 e 3, oscila bastante, porém, pela figura, é possível observar que ela tem uma tendencia de alta conforme  $N$  aumenta. Já a probabilidade de erro  $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$  visivelmente apresenta uma queda exponencial com o aumento de  $N$ . Conclui-se que, com o aumento de  $N$ , o algoritmo se torna mais confiável, porém demora mais para ser treinado.

## 2 Regressão Linear

Nestes problemas, nós vamos explorar como Regressão Linear pode ser usada em tarefas de classificação. Você usará o mesmo esquema de produção de pontos visto na parte acima do Perceptron, com  $d = 2$ ,  $\mathcal{X} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , e assim por diante.

1. Considere  $N = 100$ . Use Regressão Linear para encontrar  $g$  e calcule  $E_{in}$ , a fração de pontos dentro da amostra que foram classificados incorretamente (armazene os  $g$ 's pois eles serão usados no item seguinte). Repita o experimento 1000 vezes. Qual dos valores abaixo é mais próximo do  $E_{in}$  médio?
  - (a) 0
  - (b) 0.001
  - (c) 0.01
  - (d) 0.1
  - (e) 0.5
2. Agora, gere 1000 pontos novos e use eles para estimar o  $E_{out}$  dos  $g$ 's que você encontrou no item anterior. Novamente, realize 1000 execuções. Qual dos valores abaixo é mais próximo do  $E_{out}$  médio?
  - (a) 0
  - (b) 0.001
  - (c) 0.01
  - (d) 0.1
  - (e) 0.5
3. Agora, considere  $N = 10$ . Depois de encontrar os pesos usando Regressão Linear, use-os como um vetor de pesos iniciais para o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron (PLA). Execute o PLA até que ele convirja num vetor final de pesos que separa perfeitamente os pontos dentro-de-amostra. Dentre as opções abaixo, qual é mais próxima do número médio de iterações (sobre 1000 execuções) que o PLA demora para convergir?
  - (a) 1
  - (b) 15
  - (c) 300
  - (d) 5000
  - (e) 10000
4. Vamos agora avaliar o desempenho da versão pocket do PLA em um conjunto de dados que não é linearmente separável. Para criar este conjunto, gere uma base de treinamento com  $N=2$  pontos como foi feito até agora, mas selecione aleatoriamente 10% dos pontos e inverta

seus rótulos. Em seguida, implemente a versão pocket do PLA, treine-a neste conjunto não-linearmente separável, e avalie seu  $E_{out}$  numa nova base de  $N/2$  pontos na qual você não aplicará nenhuma inversão de rótulos. Repita para 1000 execuções, e mostre o  $E_{in}$  e  $E_{out}$  médios para as seguintes configurações (não esqueça dos gráficos scatterplot, como anteriormente):

- (a) 0
- (b) 0.001
- (c) 0.01
- (d) 0.1
- (e) 0.5

### 3 Regressão Não-Linear

Nestes problemas, nós vamos novamente aplicar Regressão Linear para classificação. Considere a função target

$$f(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1^2 + x_2^2 - 0.6)$$

Gere um conjunto de treinamento de  $N = 1000$  pontos em  $\mathcal{X} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  com probabilidade uniforme escolhendo cada  $x \in \mathcal{X}$ . Gere um ruído simulado selecionando aleatoriamente 10% do conjunto de treinamento e invertendo o rótulo dos pontos selecionados.

1. Execute a Regressão Linear sem nenhuma transformação, usando o vetor de atributos  $(1, x_1, x_2)$  para encontrar o peso  $w$ . Qual é o valor aproximado de classificação do erro médio dentro da amostra  $E_{in}$  (medido ao longo de 1000 execuções)?
2. agora, transforme os  $N = 1000$  dados de treinamento seguindo o vetor de atributos não-linear  $(1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2)$ . Encontre o vetor  $\tilde{w}$  que corresponda à solução da Regressão Linear. Quais das hipóteses a seguir é a mais próxima à que você encontrou? Avalie o resultado médio obtido após 1000 execuções.
3. Qual o valor mais próximo do erro de classificação fora da amostra  $E_{out}$  de sua hipótese na questão anterior? (Estime-o gerando um novo conjunto de 1000 pontos e usando 1000 execuções diferentes, como antes).