

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e
Computação

CPS844 - Inteligência Computacional I
Prof. Dr. Carlos Eduardo Pedreira

Trabalho prático

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

21 de maio de 2024

1 Perceptron

Neste problema, você criará a sua própria função target f e uma base de dados D para que possa ver como o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron funciona. Escolha $d = 2$ pra que você possa visualizar o problema, e assuma $\chi = [-1, 1] \times [-1, 1]$ com probabilidade uniforme de escolher cada $x \in \mathcal{X}$.

Em cada execução, escolha uma reta aleatória no plano como sua função target f (faça isso selecionando dois pontos aleatórios, uniformemente distribuídos em $\chi = [-1, 1] \times [-1, 1]$, e pegando a reta que passa entre eles), de modo que um lado da reta mapeia pra +1 e o outro pra -1. Escolha os inputs x_n da base de dados como um conjunto de pontos aleatórios (uniformemente em \mathcal{X}), e avalie a função target em cada x_n para pegar o output correspondente y_n .

Agora, pra cada execução, use o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron (PLA) para encontrar g . Inicie o PLA com um vetor de pesos w zerado (considere que $\text{sign}(0) = 0$, de modo que todos os pontos estejam classificados erroneamente ao início), e a cada iteração faça com que o algoritmo escolha um ponto aleatório dentre os classificados erroneamente. Estamos interessados em duas quantidades: o número de iterações que o PLA demora para convergir pra g , e a divergência entre f e g que é $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ (a probabilidade de que f e g vão divergir na classificação de um ponto aleatório). Você pode calcular essa probabilidade de maneira exata, ou então aproximá-la ao gerar uma quantidade suficientemente grande de novos pontos para estimá-la (por exemplo, 10.000).

A fim de obter uma estimativa confiável para essas duas quantias, você deverá realizar 1000 execuções do experimento (cada execução do jeito descrito acima), tomando a média destas execuções como seu resultado final.

Para ilustrar os resultados obtidos nos seus experimentos, acrescente ao seu relatório gráficos scatterplot com os pontos utilizados para calcular E_{out} , assim como as retas correspondentes à função target e à hipótese g encontrada.

Implementação:

Para responder os itens referentes a este problema, foi implementado em Python um Perceptron 2D utilizando as fórmulas e procedimentos apresentados na primeira aula do professor Yaser Abu-Mostafa. Foram criadas três classes: uma para gerar a função target (código 1), outra para gerar base de dados(código 2) usando a função target, e a terceira pra criar e treinar o perceptron e classificar utilizando o mesmo (código 3). Os seus códigos estão listados abaixo.

Código 1: Geração da função target f

```
1  # Classe para criar a função target
2  class Target:
3      def __init__(self):
4          self.a = 0 # coeficiente angular
5          self.b = 0 # coeficiente linear
6
7      # Método para gerar a linha da função target
8      def generate_random_line(self):
9          point1 = np.random.uniform(-1, 1, 2) # ponto aleatorio no domínio
10         point2 = np.random.uniform(-1, 1, 2) # ponto aleatorio no domínio
11         a = (point2[1] - point1[1]) / (point1[0] - point2[0]) # cálculo do
            coeficiente angular
12         b = point1[1] - a*point1[0] # cálculo do coeficiente linear
13         self.a = a
```

```

14         self.b = b
15         return a, b
16
17     # Método para classificar pontos de acordo a função target
18     def classify_point(self, point):
19         a = self.a
20         b = self.b
21         y_reta = a*point[0] + b
22         return np.sign(point[1] - y_reta) # verifica se a coordenada y do
            ponto está acima ou abaixo da reta

```

Código 2: Geração do da base de dados D

```

1     # Classe para criar o dataset
2     class Dataset:
3         def __init__(self, N):
4             self.N = N # tamanho do dataset
5
6         # Método para gerar a base de dados D
7         def generate_dataset(self, target):
8             N = self.N
9             data = np.random.uniform(-1, 1, (N, 2)) # gera N pontos no R2 com
                coordenadas entre [-1, 1]
10            labels = np.array([target.classify_point(point) for point in data])
11            return data, labels

```

Código 3: Perceptron

```

1     # Classe para criar e treinar o perceptron 2D
2     class Perceptron2D:
3         def __init__(self, weights = np.zeros(3)):
4             self.w = weights # inicializa os pesos (incluindo o w_0)
5
6         # Método para treinar o perceptron usando o algoritmo de aprendizagem
            perceptron (PLA)
7         def pla(self, data, labels):
8             n_samples = len(data)
9             X_bias = np.hstack([np.ones((n_samples, 1)), data]) # adiciona uma
                coluna de 1s para o X_0 (coordenada artificial)
10            iterations = 0
11            errors = 1
12            while errors > 0:
13                errors = 0
14                for i in range(n_samples):
15                    if labels[i] * np.dot(self.w, X_bias[i]) <= 0:
16                        self.w += labels[i] * X_bias[i] # atualiza os pesos
17                        errors += 1
18                iterations += 1
19            return iterations, self.w
20
21        # Método para classificar um dataset com base nos pesos aprendidos.
22        def classificar(self, data):
23            n_samples = len(data)
24            X_bias = np.hstack([np.ones((n_samples, 1)), data]) # adiciona uma
                coluna de 1s para o bias X_0

```

```

25         return np.sign(np.dot(X_bias, self.w)) # verifica o sinal do
           produto escalar entre x e w

```

Para testar as classes, foram feitas duas funções: uma para plotar uma base de dados junto com uma função target f e uma hipótese g (código 4) e outra para gerar uma função target f , uma base de dados, e uma hipótese g (um perceptron com pesos calculados pelo PLA) para serem plotadas pela primeira função (código 5). O resultado pode ser observado na figura 1.

Código 4: Plotagem de dataset com função target (f) e hipótese (g)

```

1  def scatterplot(data, labels, target, hipotese):
2      a, b = target.a, target.b
3      w = hipotese.w
4      # Plotar resultados
5      plt.figure(figsize=(8, 6))
6      x_pos = [data[i][0] for i in range(len(data)) if labels[i] == 1]
7      y_pos = [data[i][1] for i in range(len(data)) if labels[i] == 1]
8      x_neg = [data[i][0] for i in range(len(data)) if labels[i] == -1]
9      y_neg = [data[i][1] for i in range(len(data)) if labels[i] == -1]
10     plt.scatter(x_pos, y_pos, c='blue', label='+1')
11     plt.scatter(x_neg, y_neg, c='red', label='-1')
12     x = np.linspace(-1, 1, 100)
13     y_target = a*x+b
14     y_g = -(w[1] * x + w[0]) / w[2]
15     plt.plot(x, y_g, 'g-', label='Hipótese (g)')
16     plt.plot(x, y_target, 'k-', label='Função Target (f)')
17     plt.xlim(-1, 1)
18     plt.ylim(-1, 1)
19     plt.xlabel('x')
20     plt.ylabel('y')
21     plt.title('Base de dados com a Função Target (f) e a Hipótese (g)')
22     plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
23     plt.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 1])
24     plt.grid(True)
25     plt.show()

```

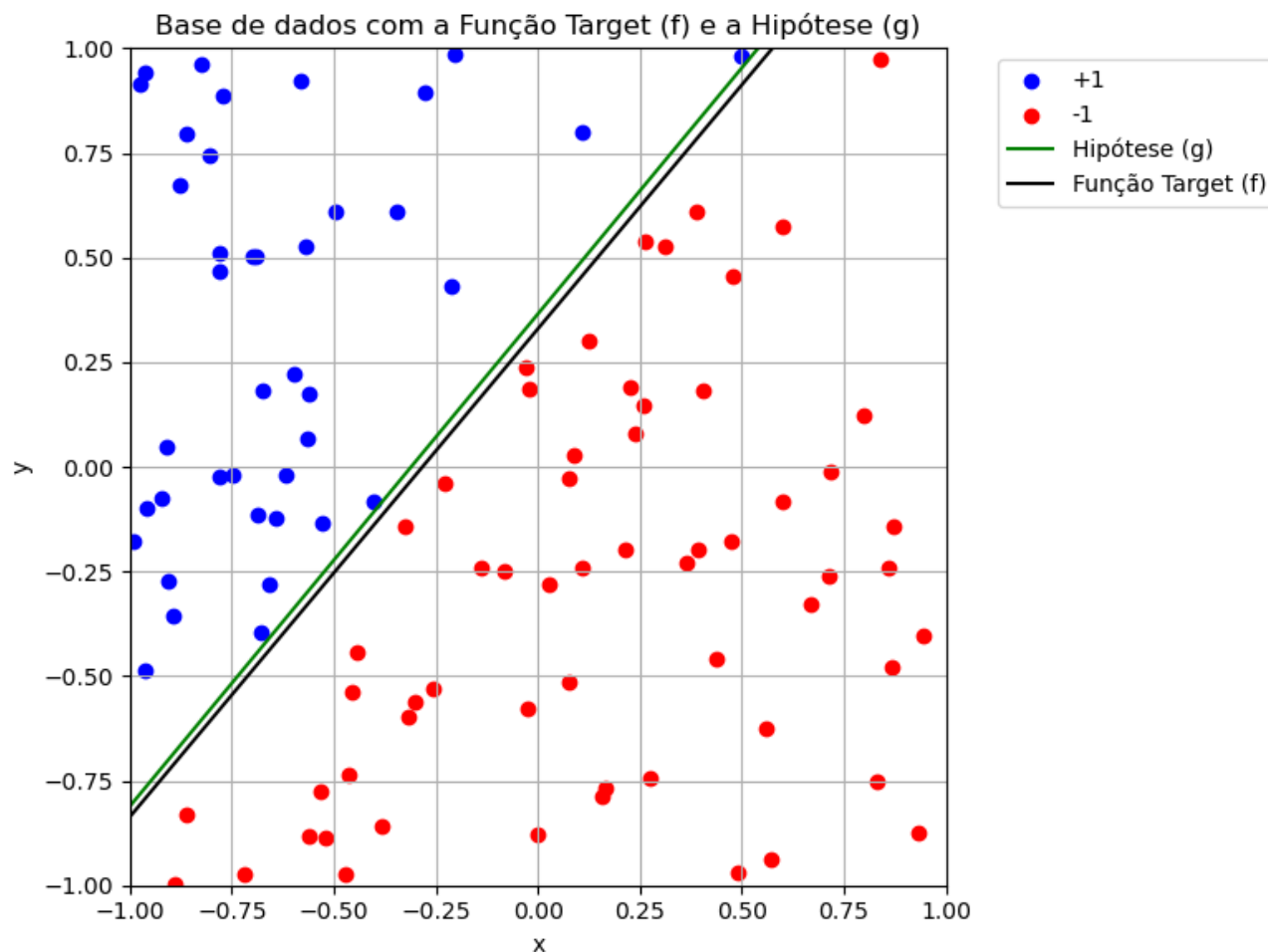
Código 5: Teste das classes

```

1  def teste():
2      # Criar a função target
3      target = Target()
4      a, b = target.generate_random_line()
5      # Criar o dataset e a função target
6      num_points = 100
7      dataset = Dataset(num_points)
8      data, labels = dataset.generate_dataset(target)
9      # Criar e treinar o perceptron
10     perceptron = Perceptron2D()
11     _, w = perceptron.pla(data, labels)
12     # Plotar resultados
13     scatterplot(data, labels, target, perceptron)

```

Figura 1: Base de dados com o Target (f) e a Hipótese (g)



Pela figura 1, é possível observar que a Hipótese (g) gera uma linha que, apesar de não sobrepor completamente a linha da Função Target (f), separa os pontos perfeitamente, resultado já esperado pelo treinamento utilizando o PLA, uma vez que esse algoritmo só converge quando o erro dentro da amostra E_{in} é nulo.

1. Considere $N = 10$. Quantas iterações demora, em média, para que o PLA convirja com $N = 10$ pontos de treinamento? Escolha o valor mais próximo do seu resultado.

- (a) 1
- (b) 15
- (c) 300
- (d) 5000
- (e) 10000

Justificativa:

Para responder a esse item foi implementada a seguinte função:

Código 6: Cálculo do número de iterações

```
1 def calc_num_iter(num_points, verbose = True):
2     lista_iter = list()
3     for _ in range(1000):
4         target = Target()
5         target.generate_random_line()
6         dataset = Dataset(num_points)
7         data, labels = dataset.generate_dataset(target)
8         perceptron = Perceptron2D()
9         iter, _ = perceptron.pla(data, labels)
10        lista_iter.append(iter)
11    if verbose: print(f"{np.mean(lista_iter)} iterações com desvio
12                  padrão {np.std(lista_iter):.4f} (min:{np.min(lista_iter)}, máx
                  :{np.max(lista_iter)})")
13    return lista_iter
```

O resultado após 1000 execuções do experimento, com a variável $num_points = 10$, foi uma média de 5.0490 (≈ 5) iterações, com desvio padrão de 7.7770 (≈ 8) iterações, mínimo de 2 iterações e máximo de 99 iterações. Nota-se que o número de iterações pode variar bastante entre uma execução e outra, o que se deve ao alto grau de aleatoriedade presente no problema, uma vez que tanto os pontos quanto a reta da Função Target são gerados de forma aleatória, podendo levar a configurações de diferentes níveis de dificuldade para o PLA convergir. Como 5 está mais próximo de 1 do que de 15, o **item a** foi selecionado.

2. Qual das alternativas seguintes é mais próxima de $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ para $N = 10$?

- (a) 0.001
- (b) 0.01
- (c) 0.1
- (d) 0.5
- (e) 1

Justificativa:

$\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ pode ser estimada computacionalmente gerando-se uma quantidade suficientemente grande de pontos novos e calculando o percentual de erro na classificação desses pontos. Para responder esse item foram realizadas 1000 execuções, nas quais foram gerados 10010 pontos, sendo 10 utilizados para o treinamento do perceptron e 10 mil utilizados para teste. A cada execução foi calculado o percentual de erro, isto é, a quantidade de vezes que a classificação do perceptron foi diferente da função target dividido pela quantidade de pontos. No final das execuções, $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ foi estimada fazendo a média do percentual de erro em cada execução. A Implementação pode ser vista abaixo:

Código 7: Cálculo da probabilidade de erro

```

1  def calc_p_erro(num_points, verbose = True):
2      lista_erro = list()
3      for _ in range(1000):
4          target = Target()
5          target.generate_random_line()
6          dataset_train = Dataset(num_points)
7          x_train, y_train = dataset_train.generate_dataset(target)
8          dataset_test = Dataset(10000) # mais 10mil pontos
9          x_test, y_test = dataset_test.generate_dataset(target)
10         perceptron = Perceptron2D()
11         perceptron.pla(x_train, y_train)
12         y_predicted = perceptron.classificar(x_test)
13         erro = np.mean(y_test != y_predicted)
14         lista_erro.append(erro)
15     if verbose: print(f"P[f(x) \u2260 g(x)] = {np.mean(lista_erro):.4f}")
16     return lista_erro

```

O resultado após 1000 execuções, com $num_points = 10010$ e $train_size = 10$, foi $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)] = 0.0671 = 6.71\%$. Como 0.0671 está mais próximo de 0.1 do que de 0.01, o **item c** foi selecionado.

3. Agora considere $N = 100$. Quantas iterações demora, em média, para que o PLA convirja com $N = 100$ pontos de treinamento? Escolha o valor mais próximo do seu resultado.

- (a) 50
- (b) 100
- (c) 500
- (d) 1000
- (e) 5000

Justificativa:

Para responder a este item foi utilizada a mesma função do item 1 (código 6), com $num_points = 100$.

O resultado após 1000 execuções do experimento foi uma média de 32.981 (≈ 33) iterações, com desvio padrão de 164.5924 (≈ 165) iterações, mínimo de 2 iterações e máximo de 4149 iterações. Nota-se que novamente o número de iterações pode variar bastante entre uma execução e outra, conforme já observado e explicado no item 1. Como 33 está abaixo de 50 e não existe alternativa menor, o **item a** foi selecionado.

4. Qual das alternativas seguintes é mais próxima de $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ para $N = 100$?

- (a) 0.001
- (c) 0.01
- (c) 0.1
- (d) 0.5

(e) 1

Justificativa:

Para responder a este item foi utilizada a mesma função do item 2 (código 7), com *num_points* = 100.

O resultado após 1000 execuções foi $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)] = 0.0069 = 0.69\%$. Como 0.0069 está mais próximo de 0.01 do que de 0.001, o **item b** foi selecionado.

5. É possível estabelecer alguma regra para a relação entre N , o número de iterações até a convergência, e $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$?

Resposta:

Para responder a este item foram implementadas duas funções: uma para calcular o número de iterações e $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ para uma faixa de diferentes números de pontos (código 8) e outra para plotar os resultados (código 9). O código das duas pode ser observado abaixo.

Código 8: Cálculo da probabilidade de erro e do número de iterações

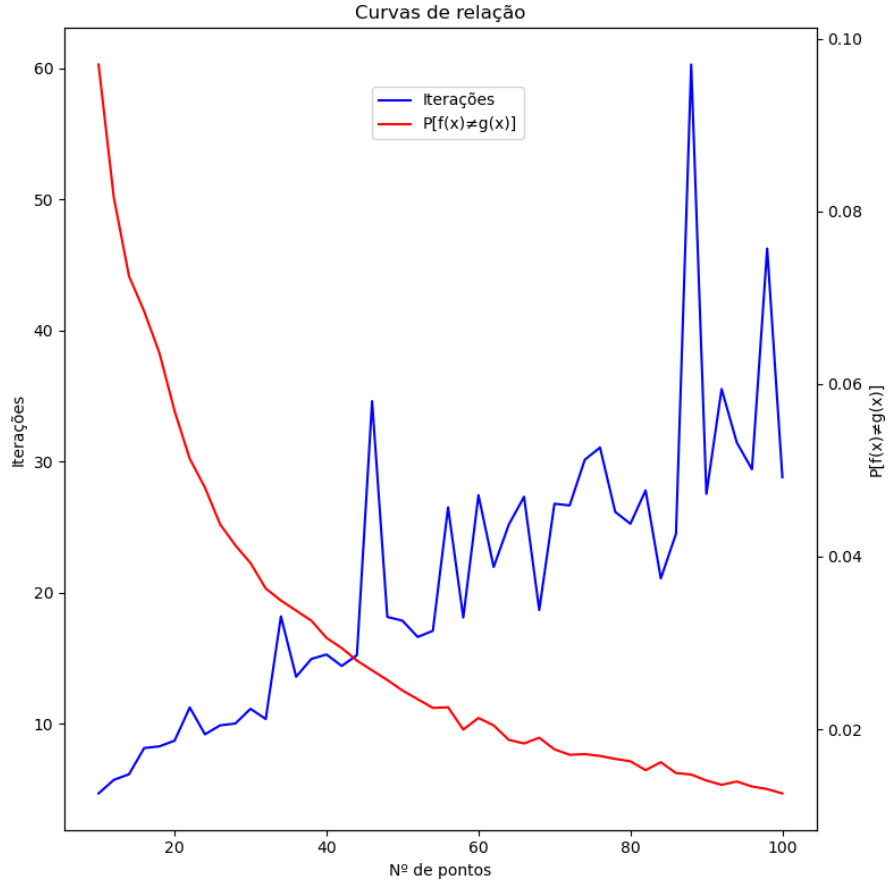
```
1 def relationship(lista_num_points):
2     lista_iter_medio = list()
3     lista_erro_medio = list()
4     for num_points in lista_num_points:
5         lista_iter = calc_num_iter(num_points, verbose=False)
6         lista_erro = calc_p_erro(num_points, verbose=False)
7         lista_iter_medio.append(np.mean(lista_iter))
8         lista_erro_medio.append(np.mean(lista_erro))
9     return lista_iter_medio, lista_erro_medio
```

Código 9: Plot da probabilidade de erro e do número de iterações

```
1 def plot_relationship(num_points_list, lista_iter_medio,
2     lista_erro_medio):
3     fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(8, 8))
4     ax.plot(num_points_list, lista_iter_medio, c="blue", label="Itera
5     ções")
6     ax.set_title("Curvas de relação")
7     ax.set_xlabel('Nº de pontos')
8     ax.set_ylabel('Iterações')
9     ax2=ax.twinx()
10    ax2.plot(num_points_list, lista_erro_medio, c="red", label='P[f(
11    x)\u2260g(x)]')
12    ax2.set_ylabel('P[f(x)\u2260g(x)]')
13    fig.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, 0.9))
14    fig.tight_layout()
15    plt.show()
```

O resultado para o tamanho N da amostra variando de 10 a 100 com passo 2 pode ser observado na figura 2.

Figura 2: Resultado para N variando de 10 a 100 com passo 2



A quantidade de iterações para o PLA convergir, como constatado nos itens 1 e 3, oscila bastante, porém, pela figura, é possível observar que ela tem uma tendencia de alta conforme N aumenta. Já a probabilidade de erro $\mathbb{P}[f(x) \neq g(x)]$ visivelmente apresenta uma queda exponencial com o aumento de N . Conclui-se que, com o aumento de N , o algoritmo se torna mais confiável, porém demora mais para ser treinado.

2 Regressão Linear

Nestes problemas, nós vamos explorar como Regressão Linear pode ser usada em tarefas de classificação. Você usará o mesmo esquema de produção de pontos visto na parte acima do Perceptron, com $d = 2$, $\mathcal{X} = [-1, 1] \times [-1, 1]$, e assim por diante.

1. Considere $N = 100$. Use Regressão Linear para encontrar g e calcule E_{in} , a fração de pontos dentro da amostra que foram classificados incorretamente (armazene os g 's pois eles serão usados no item seguinte). Repita o experimento 1000 vezes. Qual dos valores abaixo é mais próximo do E_{in} médio?
 - (a) 0
 - (b) 0.001
 - (c) 0.01
 - (d) 0.1
 - (e) 0.5
2. Agora, gere 1000 pontos novos e use eles para estimar o E_{out} dos g 's que você encontrou no item anterior. Novamente, realize 1000 execuções. Qual dos valores abaixo é mais próximo do E_{out} médio?
 - (a) 0
 - (b) 0.001
 - (c) 0.01
 - (d) 0.1
 - (e) 0.5
3. Agora, considere $N = 10$. Depois de encontrar os pesos usando Regressão Linear, use-os como um vetor de pesos iniciais para o Algoritmo de Aprendizagem Perceptron (PLA). Execute o PLA até que ele convirja num vetor final de pesos que separa perfeitamente os pontos dentro-de-amostra. Dentre as opções abaixo, qual é mais próxima do número médio de iterações (sobre 1000 execuções) que o PLA demora para convergir?
 - (a) 1
 - (b) 15
 - (c) 300
 - (d) 5000
 - (e) 10000
4. Vamos agora avaliar o desempenho da versão pocket do PLA em um conjunto de dados que não é linearmente separável. Para criar este conjunto, gere uma base de treinamento com N_1 pontos como foi feito até agora, mas selecione aleatoriamente 10% dos pontos e inverta

seus rótulos. Em seguida, implemente a versão pocket do PLA, treine-a neste conjunto não-linearmente separável, e avalie seu E_{out} numa nova base de N_2 pontos na qual você não aplicará nenhuma inversão de rótulos. Repita para 1000 execuções, e mostre o E_{in} e E_{out} médios para as seguintes configurações (não esqueça dos gráficos scatterplot, como anteriormente):

- (a) Inicializando os pesos com 0; $i = 10$; $N_1 = 100$; $N_2 = 1000$.
- (b) Inicializando os pesos com 0; $i = 50$; $N_1 = 100$; $N_2 = 1000$.
- (c) Inicializando os pesos com Regressão Linear; $i = 10$; $N_1 = 100$; $N_2 = 1000$.
- (d) Inicializando os pesos com Regressão Linear; $i = 50$; $N_1 = 100$; $N_2 = 1000$.

3 Regressão Não-Linear

Nestes problemas, nós vamos novamente aplicar Regressão Linear para classificação. Considere a função target

$$f(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1^2 + x_2^2 - 0.6)$$

Gere um conjunto de treinamento de $N = 1000$ pontos em $\mathcal{X} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ com probabilidade uniforme escolhendo cada $x \in \mathcal{X}$. Gere um ruído simulado selecionando aleatoriamente 10% do conjunto de treinamento e invertendo o rótulo dos pontos selecionados.

1. Execute a Regressão Linear sem nenhuma transformação, usando o vetor de atributos $(1, x_1, x_2)$ para encontrar o peso w . Qual é o valor aproximado de classificação do erro médio dentro da amostra E_{in} (medido ao longo de 1000 execuções)?
2. agora, transforme os $N = 1000$ dados de treinamento seguindo o vetor de atributos não-linear $(1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2)$. Encontre o vetor \tilde{w} que corresponda à solução da Regressão Linear. Quais das hipóteses a seguir é a mais próxima à que você encontrou? Avalie o resultado médio obtido após 1000 execuções.
3. Qual o valor mais próximo do erro de classificação fora da amostra E_{out} de sua hipótese na questão anterior? (Estime-o gerando um novo conjunto de 1000 pontos e usando 1000 execuções diferentes, como antes).