

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Alberto Luiz Coimbra de  
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação

CPS863 - Aprendizado de Máquina  
Prof. Dr. Edmundo de Souza e Silva  
(PESC/COPPE/UFRJ)

***Lista de Exercícios 6***

Luiz Henrique Souza Caldas  
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

16 de dezembro de 2024

## Questão 1

*Value Iteration*, *Policy Iteration* e *Q-Learning* são algoritmos utilizados para encontrar a política ótima em problemas de decisão sequencial, como um Processo de Decisão de Markov (MDP). A diferença entre eles é a forma como a política ótima é encontrada. A descrição de cada um deles abaixo e as equações seguem a notação do livro *Reinforcement Learning: An Introduction* de Sutton e Barto [1].

### Value Iteration

Calcula iterativamente a função de valor  $V(s)$  para cada estado  $s$  até convergir para a função de valor ótima  $V^*(s)$ . A função de valor é calculada tornando a equação de Bellman de otimalidade em uma regra de atualização iterativa:

$$V_{k+1}(s) = \max_a \sum_{s',r} p(s', r|s, a)[r + \gamma V_k(s')] \quad (1)$$

onde  $V_k(s)$  é a função de valor no passo  $k$ ,  $p(s', r|s, a)$  é a probabilidade de transição para o estado  $s'$  e recompensa  $r$  dado o estado  $s$  e ação  $a$  e  $\gamma$  é o fator de desconto, que regula a importância dada as recompensas futuras.

A convergência da função de valor é dada pela condição de parada:

$$\Delta = \max_s |V_{k+1}(s) - V_k(s)| < \theta \quad (2)$$

onde  $\theta$  é um pequeno limiar (*threshold*), que determina a acurácia da convergência. Ao ser atingida esta condição, podemos considerar que a função de valor ótima  $V^*(s)$  foi encontrada:

$$V^*(s) \approx V_k(s) \quad (3)$$

Após a convergência da função de valor, a política ótima  $\pi^*(s)$  é obtida a partir da função de valor ótima:

$$\pi^*(s) = \arg \max_a \sum_{s',r} p(s', r|s, a)[r + \gamma V^*(s')] \quad (4)$$

onde  $\arg \max$  é o operador que retorna o argumento que maximiza a função.

### Policy Iteration

Calcula iterativamente a política ótima  $\pi^*(s)$  em duas etapas: **avaliação** e **melhoria da política**.

- Na etapa de avaliação, a função de valor  $V(s)$  é calculada para a política atual  $\pi(s)$  a partir da equação de Bellman:

$$V_{k+1}(s) = \sum_{s',r} p(s', r|s, \pi(s))[r + \gamma V_k(s')] \quad (5)$$

onde  $V(s)$  é a função de valor para o estado  $s$ ,  $p(s', r|s, \pi(s))$  é a probabilidade de transição para o estado  $s'$  e recompensa  $r$  dado o estado  $s$  e ação  $\pi(s)$  e  $\gamma$  é o fator de desconto. Este processo é repetido até que se atinja o critério de convergência  $\Delta = \max_s |V_{k+1}(s) - V_k(s)| < \theta$ .

- Na etapa de melhoria da política, feita após a avaliação da função de valor, a política é atualizada para a ação que maximiza a função de valor:

$$\pi_{k+1}(s) = \arg \max_a \sum_{s', r} p(s', r|s, a) [r + \gamma V_k(s')] \quad (6)$$

O algoritmo inicializa com uma política  $\pi(s)$  arbitrária e continua iterando entre a avaliação e melhoria da política até que a política não mude mais. Neste ponto, a política ótima  $\pi^*(s)$  foi encontrada.

## Q-Learning

Calcula a política ótima  $\pi^*(s)$  aprendendo a função de ação-valor  $Q(S, A)$ , que estima o retorno esperado ao tomar a ação  $a$  no estado  $s$ , sem depender de conhecimento prévio de um modelo do ambiente (transições e recompensas). O algoritmo atualiza a função de ação-valor iterativamente a partir da equação de Bellman para a função de ação-valor:

$$Q(S_t, A_t) = Q(S_t, A_t) + \alpha [R_{t+1} + \gamma \max_a Q(S_{t+1}, a) - Q(S_t, A_t)] \quad (7)$$

onde a ação  $A$  é escolhida de acordo com uma política de exploração,  $\alpha$  é a taxa de aprendizado,  $R$  é a recompensa imediata,  $\gamma$  é o fator de desconto e  $S_{t+1}$  é o estado resultante da ação  $A_t$  no estado  $S_t$ .

A política de exploração é diferente da política ótima, e é usada para explorar o ambiente e evitar a convergência prematura para uma política subótima. Isso faz com que o algoritmo *Q-Learning* seja considerado um algoritmo de aprendizado por reforço *off-policy*. Uma política de exploração comum é a política  $\epsilon$ -gulosa, que escolhe a ação que maximiza a função de ação-valor com probabilidade  $1 - \epsilon$  e uma ação aleatória com probabilidade  $\epsilon$ .

O termo  $R_{t+1} + \gamma \max_a Q(S_{t+1}, a) - Q(S_t, A_t)$  é o erro TD (*Temporal Difference*), que é usado para atualizar a função de ação-valor. Isso faz com que o algoritmo *Q-Learning* seja incluído na categoria de métodos de aprendizado por reforço baseados em diferenças temporais (*Temporal Difference Learning*).

$Q(S, A)$  é inicializado arbitrariamente e atualizado a cada passo da simulação, até que a função de ação-valor convirja para a função de ação-valor ótima  $Q^*(S, A)$ . A política ótima  $\pi^*(s)$  é obtida a partir da função de ação-valor ótima:

$$\pi^*(s) = \arg \max_a Q^*(s, a) \quad (8)$$

## Comparação

A principal diferença entre *Value Iteration* e *Policy Iteration* é que o primeiro calcula a função de valor diretamente, iterando sobre ela até encontrar o valor ótimo, para então derivar a política ótima. Já o segundo calcula a função de valor para a política atual e, em seguida, atualiza a política

para a ação que maximiza a função de valor. Este processo é repetido até que a política não mude mais. Ambos métodos assumem o conhecimento prévio de um modelo do ambiente (transições e recompensas).

Por outro lado, o *Q-Learning* não precisa de um modelo do ambiente para calcular a política ótima. Ele aprende interagindo com o ambiente (ou uma simulação), atualizando a função de ação-valor iterativamente. Além disso, o *Q-Learning* é um algoritmo *off-policy*, utilizando uma política de exploração (como  $\epsilon$ -gulosa) para explorar o ambiente enquanto converge para a política ótima, que é obtida escolhendo a ação que maximiza o valor estimado.

## Questão 2

### Definição da Cadeia de Markov

A cadeia de Markov para este problema é definida pelos seguintes elementos:

1. **Estados:** Representados pela tupla  $(c, s)$ , onde:
    - $c$  é o número de clientes no sistema (limitado entre 0 e 8).
    - $s$  é o número de servidores disponíveis (limitado entre 1 e 3).
  2. **Ações:** As ações disponíveis em cada estado são:
    - $-1$ : Remover um servidor.
    - $0$ : Manter o número atual de servidores.
    - $+1$ : Adicionar um servidor (respeitando os limites).
  3. **Transições:** Determinadas pelas probabilidades de chegada de novos clientes no final de cada intervalo de tempo:
    - $p_0 = 0.4$ : Probabilidade de 0 clientes chegarem.
    - $p_2 = 0.2$ : Probabilidade de 2 clientes chegarem.
    - $p_4 = 0.4$ : Probabilidade de 4 clientes chegarem.
- A transição entre estados considera:
- Atendimento:  $\min(c, s)$  clientes são atendidos no início de cada intervalo.
  - Clientes restantes: Permanecem no sistema para o próximo intervalo.
  - Restrições: O número total de clientes no sistema é limitado a 8.
4. **Ordem dos eventos:** Para cada intervalo de tempo, a ordem dos eventos considerada é:
    - i. Atendimento de clientes.
    - ii. Adição/remoção de servidores.
    - iii. Chegada de clientes.
  5. **Recompensas:** A recompensa para cada transição é composta por:
    - Ganho por cliente atendido:  $T \cdot \min(c, s)$ , com  $T = 10$ .
    - Custo por servidor:  $-R_s \cdot s'$ , com  $R_s = 5$ .
    - Penalidade por fila:  $-R_q$  se  $c' > 4$ , caso contrário 0, com  $R_q = 10$ .
    - Penalidade por ociosidade:  $-R_0$  por servidor não utilizado,  $\max(s' - c', 0)$ , com  $R_0 = 2$ .

Onde  $c$  e  $s$  são os valores de clientes e servidores no estado atual e  $c'$  e  $s'$  são os valores no próximo estado.

## Solução por *Value Iteration*

Foi implementado em Python uma função que calcula a política ótima para a cadeia de Markov descrita. O código fonte está disponível no repositório indicado no final deste relatório, na pasta `lista_6`, arquivo `value_itaration.py`. O código principal, onde são definidas as probabilidades de transição e as recompensas, está disponível no arquivo `main.py`. O código segue o seguinte fluxo:

1. Inicializa  $V[s] = 0$  para todos os estados  $s$ .
2. Iterativamente calcula os valores  $V[s]$  para cada estado, atualizando-os com base na equação de Bellman:

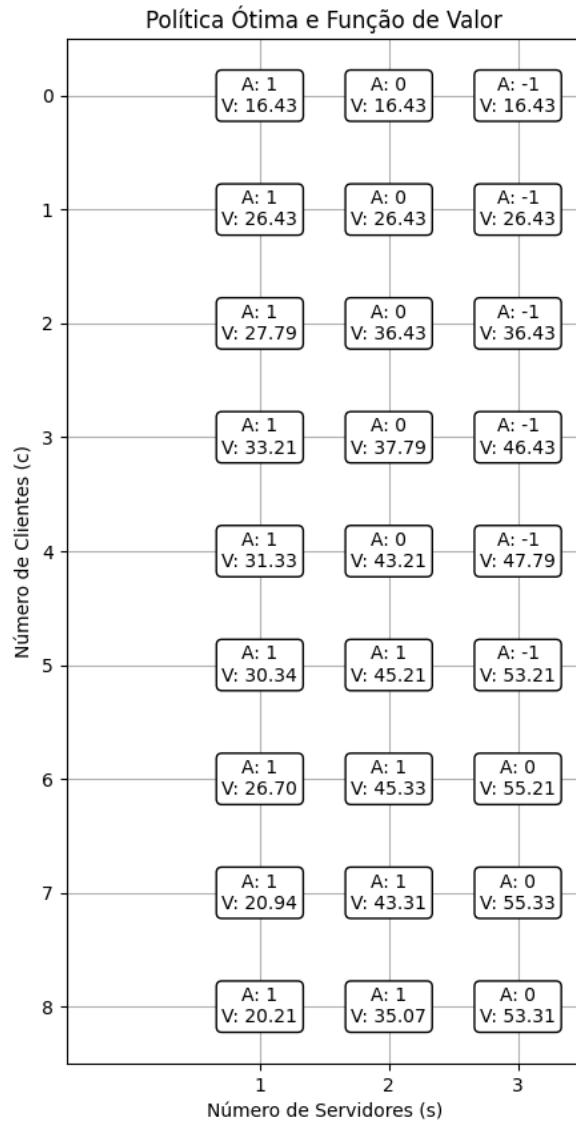
$$V(s) = \max_a \sum_{s', r} P(s', r \mid s, a) \cdot (r + \gamma \cdot V(s')).$$

3. Em cada iteração, verifica a convergência comparando a maior mudança ( $\Delta$ ) entre os valores antigos e novos. O loop termina quando  $\Delta < \theta$ , o limiar definido.
4. Após convergir, calcula a política ótima  $\pi^*(s)$  para cada estado, escolhendo a ação  $a$  que maximiza o valor esperado  $V(s)$ :

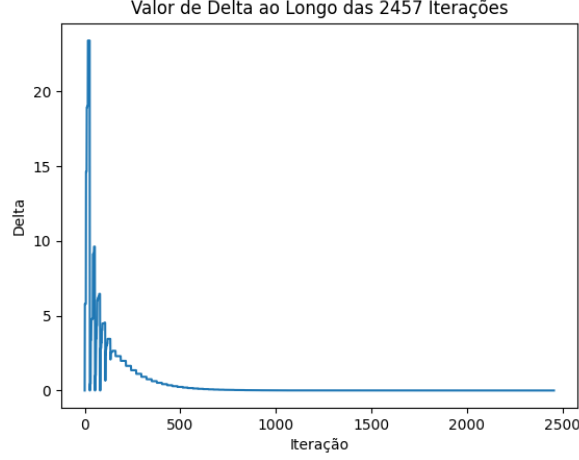
$$\pi^*(s) = \arg \max_a \sum_{s', r} P(s', r \mid s, a) \cdot (r + \gamma \cdot V(s')).$$

5. Retorna a função de valor ótima  $V(s)$  e a política ótima  $\pi^*(s)$ .

Foi utilizado um fator de desconto  $\gamma = 0.9$  e um limiar de convergência  $\theta = 1e - 6$ . Para esses valores, a convergência ocorreu em 2457 iterações. A função de valor ótima calculada e a política ótima derivada dela são apresentadas na figura 1. A variação de  $\Delta$  ao longo das iterações é apresentada na figura 2.



**Figura 1:** Função de valor ótima e política ótima calculadas por *Value Iteration*.



**Figura 2:** Variação de  $\Delta$  ao longo das iterações de *Value Iteration*.

## Solução por *Policy Iteration*

Foi implementado em Python uma função que calcula a política ótima para a cadeia de Markov descrita. O código fonte está disponível no repositório indicado no final deste relatório, na pasta `lista_6`, arquivo `policy_itaration.py`. O código principal, onde são definidas as probabilidades de transição e as recompensas, está disponível no arquivo `main.py`. O código segue o seguinte fluxo:

1. Inicializa uma política arbitrária  $\pi(s) = -1$  e uma função de valor  $V(s) = 0$  para todos os estados  $s$ .

### 2. Etapa 1 - Avaliação da Política:

- (a) Para cada estado  $s$ , atualiza  $V(s)$  usando a equação:

$$V(s) = \sum_{s', r} P(s', r \mid s, \pi(s)) \cdot (r + \gamma \cdot V(s')).$$

- (b) Repete as atualizações até que a maior mudança em  $V(s)$  entre duas iterações seja menor que um limiar  $\theta$ .

### 3. Etapa 2 - Melhoria da Política:

- (a) Para cada estado  $s$ , identifica a melhor ação  $a$  que maximiza o valor esperado:

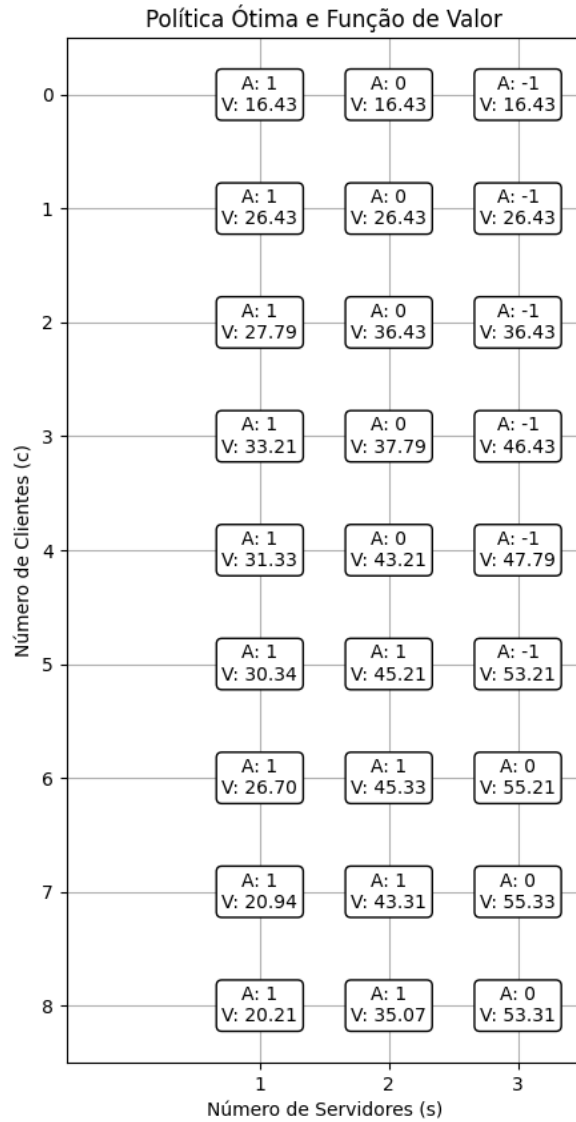
$$\pi(s) = \arg \max_a \sum_{s', r} P(s', r \mid s, a) \cdot (r + \gamma \cdot V(s')).$$

- (b) Se a nova política  $\pi(s)$  for igual à política anterior para todos os estados, o algoritmo termina. Caso contrário, retorna à etapa de avaliação.

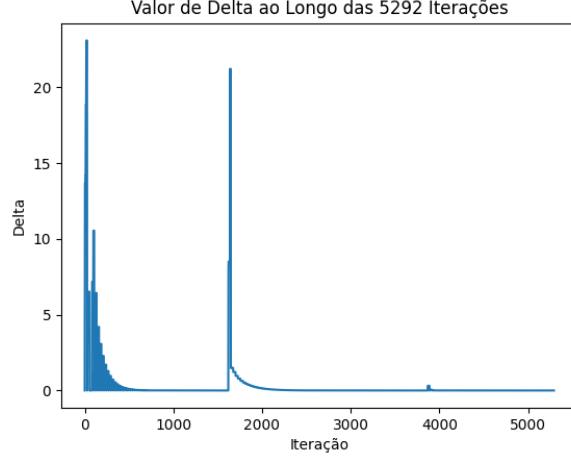
4. Retorna a política ótima  $\pi^*(s)$  e a função de valor ótima  $V^*(s)$ .



Foi utilizado um fator de desconto  $\gamma = 0.9$  e um limiar de convergência  $\theta = 1e - 6$ . Para esses valores, a convergência ocorreu em 4 iterações do laço externo *while principal*, porém foram contabilizadas um total de 5292 iterações internas da etapa de avaliação da política. A função de valor ótima calculada e a política ótima derivada dela são apresentadas na figura 3. A variação de  $\Delta$  ao longo das iterações é apresentada na figura 4.



**Figura 3:** Função de valor ótima e política ótima calculadas por *Policy Iteration*.



**Figura 4:** Variação de  $\Delta$  ao longo das iterações de *Policy Iteration*.

## Q-Learning

Foi implementado em Python um algoritmo de *Q-Learning* para resolver o problema da cadeia de Markov descrita. O código fonte está disponível no repositório indicado no final deste relatório, na pasta `lista_6`, arquivo `q_learning.py`. O código principal, onde são definidas as probabilidades de transição e as recompensas, está disponível no arquivo `main.py`. Como o problema em questão não possui estado terminal, o algoritmo foi adaptado para, a cada episódio, limitar o número de passos. Além disso, foi implementada uma classe `EnvironmentSimulator` para simular o ambiente, recebendo como entrada o estado atual e a ação tomada e retornando o próximo estado e a recompensa obtida. O código segue o seguinte fluxo:

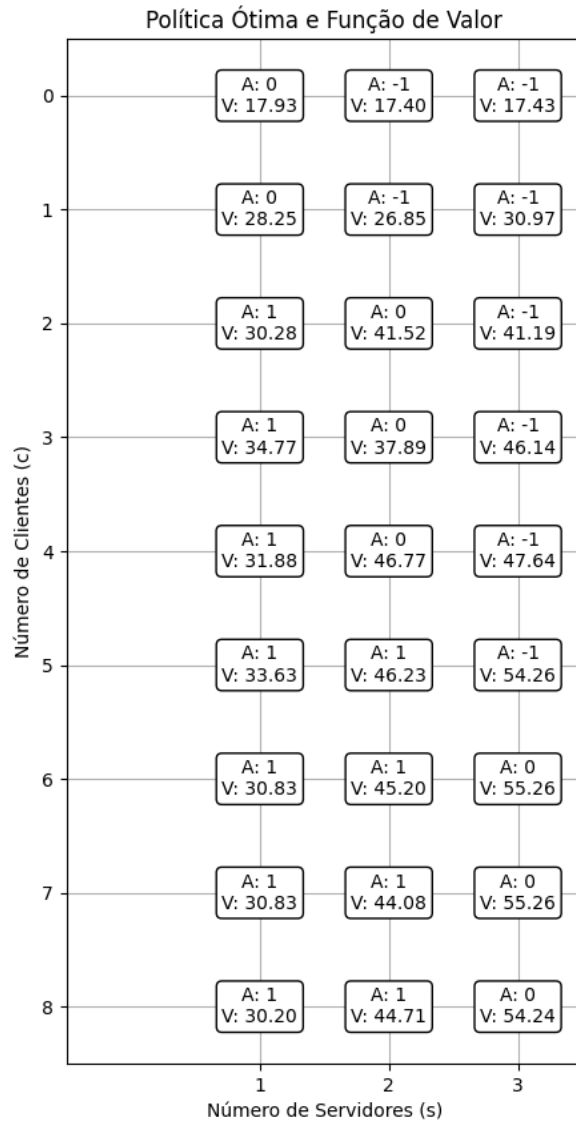
1. Inicializa  $Q(s, a)$  com zeros para todos os estados e ações.
2. Para cada episódio:
  - (a) Escolhe um estado inicial aleatório.
  - (b) Para cada passo no episódio:
    - i. Escolhe uma ação:
      - Com probabilidade  $\epsilon$ , escolhe uma ação aleatória (*exploration*).
      - Caso contrário, escolhe a ação que maximiza  $Q(s, a)$  (*exploitation*).
    - ii. Simula o ambiente com a ação escolhida para obter:
      - O próximo estado  $s'$ .
      - A recompensa  $r$ .
    - iii. Atualiza  $Q(s, a)$  usando a equação de aprendizado por diferença temporal (TD):

$$Q(s, a) \leftarrow Q(s, a) + \alpha \left[ r + \gamma \max_{a'} Q(s', a') - Q(s, a) \right]$$

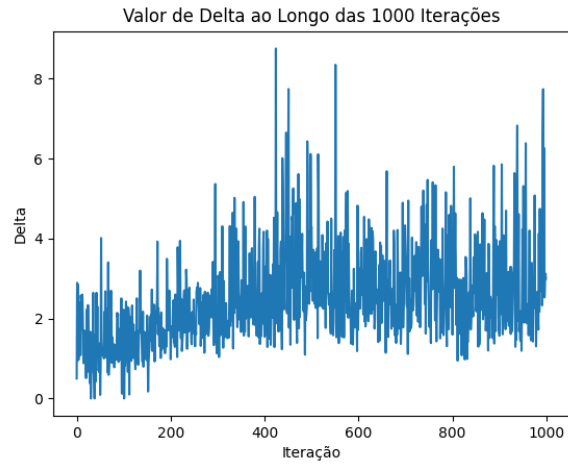
- iv. Atualiza o estado atual para  $s'$ .

- v. Se atingir o número máximo de passos, termina o episódio.
- (c) Após o episódio, calcula:
- A nova função de valor  $V(s) = \max_a Q(s, a)$ .
  - A mudança absoluta máxima  $\Delta V = \max_s |V_{\text{novo}}(s) - V(s)|$ .
- (d) Atualiza  $V(s)$  e armazena  $\Delta V$  para análise de convergência.
3. Deriva a política ótima  $\pi^*(s)$  escolhendo, para cada estado, a ação que maximiza  $Q(s, a)$ .
  4. Retorna a política ótima  $\pi^*(s)$ , a função de valor  $V(s)$ , e a lista de  $\Delta V$  ao longo dos episódios.

Foram utilizados os seguintes hiperparâmetros: fator de desconto  $\gamma = 0.9$ , taxa de aprendizado  $\alpha = 0.1$ , probabilidade de exploração  $\epsilon = 0.1$ , número de episódios 1000 e limite de passos por episódio 100. Como não há um critério de convergência, o algoritmo executa 100 mil iterações. A função de valor ótima calculada e a política ótima derivada dela são apresentadas na figura 5. A variação de  $\Delta V$  ao longo dos episódios é apresentada na figura 6.



**Figura 5:** Função de valor ótima e política ótima calculadas por *Q-Learning*.

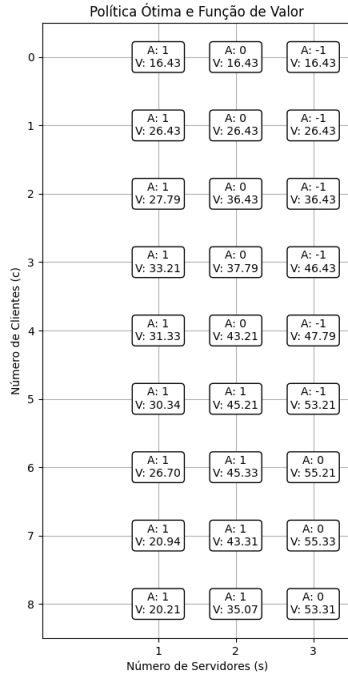


**Figura 6:** Variação de  $\Delta V$  ao longo dos episódios de *Q-Learning*.

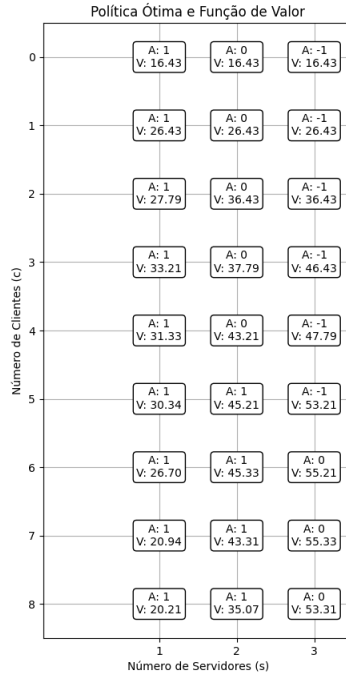
OBS: devido a aleatoriedade do algoritmo, e a falta de um estado terminal, não é possível observar uma convergência clara na figura 6, como nos métodos anteriores. Entretanto é possível observar que os valores de  $V^*(s)$  para cada estado na figura 5 são próximos dos valores obtidos pelos métodos anteriores e as ações da política ótima também são semelhantes.

## Comparação dos Métodos

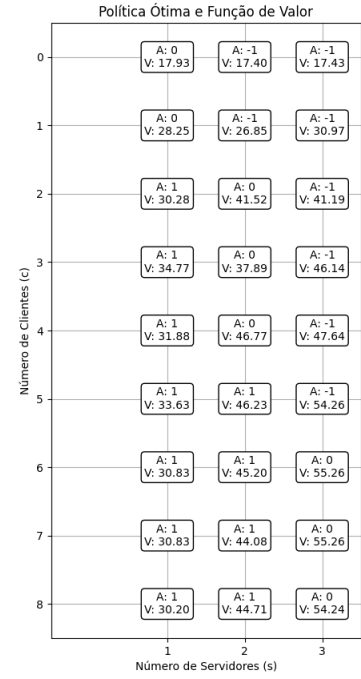
Abaixo vemos as figuras 1, 3 e 5 exibidas lado a lado.



(a) Value Iteration



(b) Policy Iteration



(c) Q-Learning

**Figura 7:** Comparação das políticas e funções de valor ótimas calculadas pelos métodos.

## Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub:  
<https://github.com/lhscaldas/cps863/>

## Referências

- [1] SUTTON, R. S.; BARTO, A. G. *Reinforcement Learning: An Introduction*. 2nd. ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2018. ISBN 978-0262039246.