

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e
Computação

CPS863 - Aprendizado de Máquina
Prof. Dr. Edmundo de Souza e Silva
(PESC/COPPE/UFRJ)

Lista de Exercícios 1a

Luiz Henrique Souza Caldas
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

16 de outubro de 2024

Questão 1

(Recordação)

Uma caixa contém três moedas: duas são normais e uma moeda falsa com duas caras ($P(\text{Ca})=1$). Se você pegar uma moeda da caixa e jogá-la, qual a probabilidade de sair cara? Se você pegar uma moeda da caixa e jogá-la, e sair cara, qual a probabilidade de ser a moeda falsa?

Questão 2

(Material introdutório)

Uma urna UA tem $N = 1000$ bolas sendo 25% delas azuis e o restante pretas. Uma outra urna UB também contém $N = 1000$ bolas, mas apenas 10% delas são azuis (e o restante pretas). As urnas são idênticas externamente, exceto por uma marcação, UA , UB , que permite a identificação de cada uma. Entretanto, essa identificação está na parte inferior das urnas, de forma que não é possível visualizar o rótulo, exceto se a urna for levantada.

- João tira (de olhos vendados) 2 bolas azuis de uma das urnas. Você vai ter que adivinhar a urna escolhida. Se a probabilidade de João escolher uma das urnas for a mesma, qual a aposta que você fará? Note que, para fazer a aposta, você precisa determinar qual a probabilidade das bolas serem provenientes da urna UA . Você tem confiança na sua aposta? Por que?
- Um amigo seu diz que João sabe a posição das urnas e escolhe a urna UA com probabilidade 0.15. Sua aposta mudaria? Você teria confiança na sua aposta? Justifique a resposta.

Questão 3

Considere um dataset cujas amostras são obtidas independentemente a partir de uma distribuição discreta uniforme $U(1, 5)$. Considere um dataset com as seguintes amostras: $\{2, 2, 4, 3, 2\}$.

1. Qual a verossimilhança (likelihood) de observar essas amostras?
2. E o log-likelihood?

Questão 4

Assuma que você tem uma moeda viciada tal que com probabilidade p você obtém caras (H) e $(1 - p)$ coroas (T). Você joga a moeda N vezes e obtém N_H caras (e $N - N_H$ coroas, é claro).

1. Obtenha a função de verossimilhança $L(\theta|D) = p(D|\theta)$ onde θ é o vetor de parâmetros. Qual é o valor de $p(D|\theta)$ se $D = \{HHTHTTHTTT\}$ e $p = 0.2$? E se $p = 0.6$?
2. Para D dado no item acima, encontre p que otimiza o log-likelihood. De maneira geral, encontre p como uma função de N e N_H para qualquer conjunto D dado.

Questão 5

Suponha agora que suas amostras são obtidas ou de uma distribuição discreta $U(1, 5)$ ou a partir de um dado (seis faces), sendo que todas as amostras são obtidas da mesma distribuição. Suponha que a probabilidade das amostras serem obtidas do dado é igual a p . Considere o conjunto de dados $\{2, 2, 4, 3, 2\}$, e seja $p = 0.7$.

1. Qual a likelihood das amostras serem retiradas a partir: (a) do dado se seis faces, ou (b) de uma $U(1, 5)$ discreta?
2. Qual a distribuição posterior?
3. Uma vez que o dataset acima foi observado, qual a probabilidade de se retirar o número 5?
4. Uma vez que o dataset acima foi observado, qual a probabilidade de se retirar o número 6?
5. Qual o MLE?
6. Qual o MAP?
7. Caso $p = 0.5$, quais das respostas acima mudam de valor? Explique.

Questão 6

Suponha agora que suas amostras são obtidas ou de uma distribuição discreta $U(1, 5)$ ou a partir de um dado (seis faces) com probabilidade $(1 - p)$ e p , respectivamente. Entretanto, nesta questão, a sequência pode conter amostras de ambas distribuições (mistura de distribuições). Considere o mesmo conjunto de dados $\{2, 2, 4, 3, 2\}$, e seja $p = 0.7$.

1. Qual a likelihood de observar essas amostras?
2. Uma vez que o dataset acima foi observado, qual a probabilidade de se retirar o número 5?
3. Uma vez que o dataset acima foi observado, qual a probabilidade de se retirar o número 6?
4. Qual a probabilidade de **todas** as amostras serem retiradas a partir: (a) do dado se seis faces, ou (b) de uma $U(1, 5)$ discreta?
5. Calcule a função de likelihood para as amostras em função de p , o log likelihood e obtenha o valor de p que melhor explica o conjunto de dados. Comente a sua resposta.
6. Repita o item anterior, supondo que o conjunto de dados tem cardinalidade 20 e apenas uma única amostra tenha valor igual a 6.