

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Instituto Alberto Luiz Coimbra de  
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia



Programa de Engenharia de Sistemas e  
Computação

CPS863 - Aprendizado de Máquina  
Prof. Dr. Edmundo de Souza e Silva  
(PESC/COPPE/UFRJ)

*Lista de Exercícios 5*

Luiz Henrique Souza Caldas  
email: lhscaldas@cos.ufrj.br

18 de novembro de 2024

## Questão 1 - HMM

Considere o robô da lista anterior, que pode se mover pelos quadrados da figura abaixo.

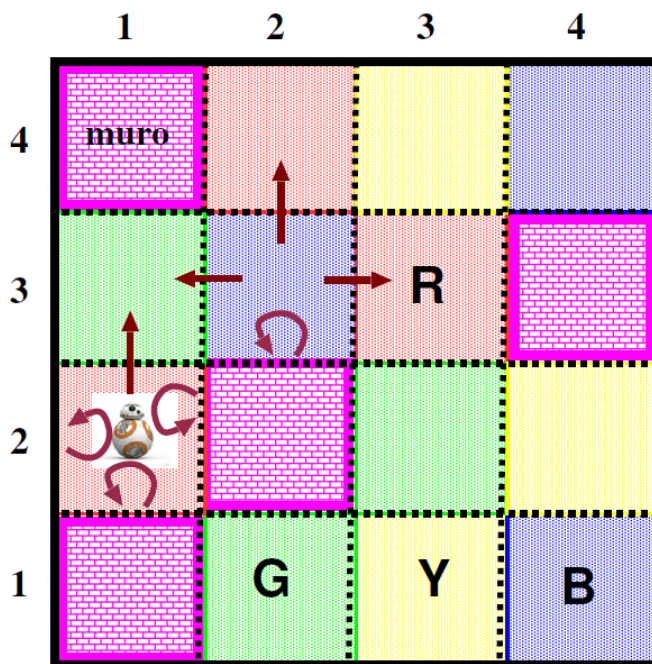


Figura 1: Robô andando por um ambiente

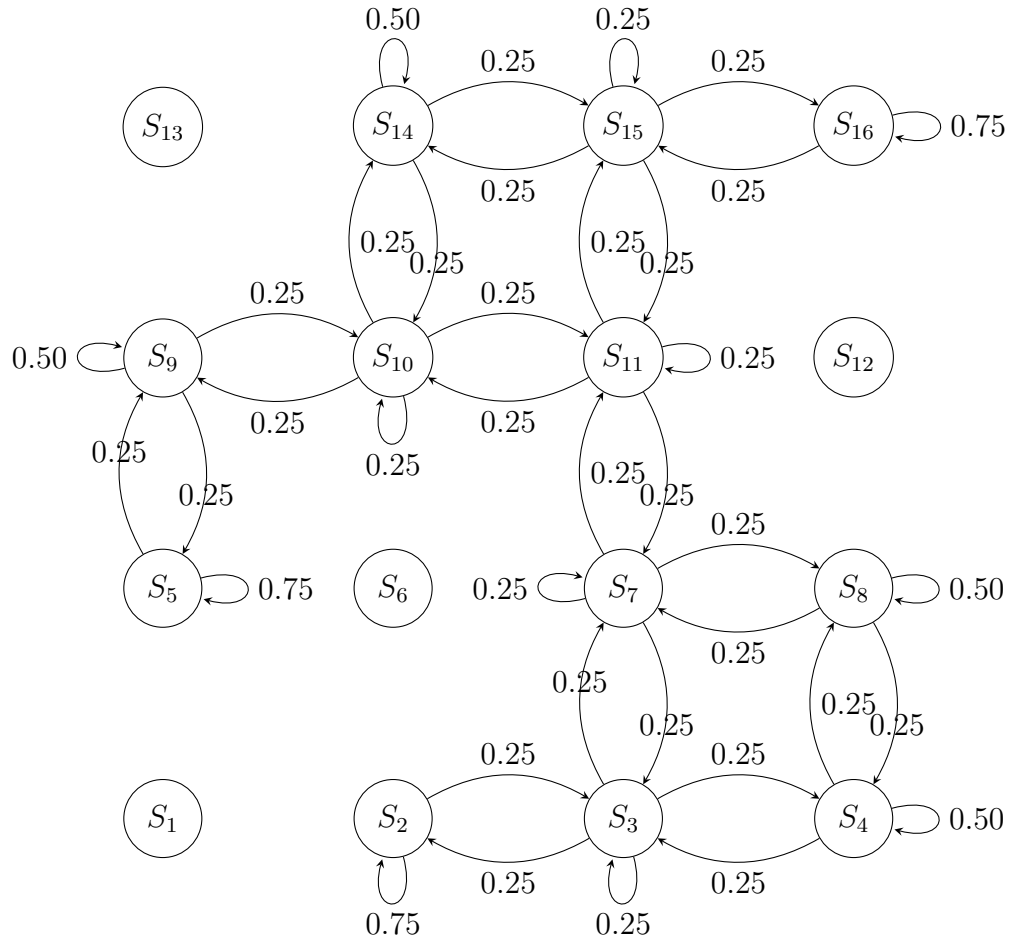
Para tentar melhorar a previsibilidade de se detectar a posição do robô da Figura 1 sensores são colocados no ambiente onde o robô circula. Há 4 tipos de sensores (**R**, **B**, **Y**, **G**), conforme mostrado na Figura 1. Quando o robô está em qualquer um dos quadrados, o respectivo sensor emite um sinal (para um receptor) com a letra igual ao tipo do sensor. Entretanto, os sensores não são perfeitos e podem emitir um sinal errado com probabilidade 0.1. Por exemplo, quando o robô está num dos quadrados azuis, emite um sinal **b** com probabilidade 0.9, ou um dos restantes sinais **r** ou **y** ou **g**, com probabilidade 0.1/3. Como outro exemplo, suponha que o robô esteja na posição inicial conforme mostrado na Figura 1. Em 3 unidades de tempo, uma possível sequência de sinais recebidos poderiam ser **r g b**, se o robô for para norte e depois para leste. Entretanto, mesmo com o mesmo movimento, os sinais recebidos poderiam ser também **r g g** ou **b b b**, etc.

Seu objetivo é determinar a posição do robô, a partir dos sinais recebidos dos sensores.

- Explique como você fará uma HMM que possa permitir prever a posição do robô a partir dos sinais recebidos.

Resposta:

1. **Estados:** Assim como no problema da lista anterior, os estados são as posições possíveis do robô, com a diferença de que agora os estados não podem ser diretamente observáveis. Para facilitar a notação, os estados foram numerados em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo. Assim, o antigo estado (1,1) passou a se chamar  $S_1$ , (1,2) passou a se chamar  $S_2$  e assim por diante. O modelo da Cadeia de Markov pode ser visto na figura 2.
2. **Observações:** As observações são as emissões dos sensores, formadas pelos símbolos **R**, **B**, **Y**, **G**.
3. **Matriz de transição:** A matriz de transição é a mesma da lista anterior, com as probabilidades de transição entre os estados. Nesta lista foi utilizada a letra  $A$  para representar a matriz de transição, seguindo a simbologia de Rabiner (1989) [1]. A matriz  $A$  é mostrada na tabela 1.
4. **Matriz de emissão:** A matriz de emissão é a probabilidade de cada estado emitir cada uma das observações. Cada estado tem uma probabilidade de 0.9 de emitir a cor dele mesmo e 0.1 de emitir qualquer outra cor ( $0.1/3 \approx 0.0333$  para cada cor). Os estados proibidos (rosa) possuem probabilidade de emissão 0 para todos os símbolos. A matriz de emissão é mostrada na tabela 2.
5. **Probabilidade inicial:** O vetor de probabilidades iniciais (renomeado para  $\pi$  pelo mesmo motivo da matriz de transição) é o mesmo da lista anterior, com a probabilidade 1 do robô começar no estado  $S_5$  (posição 2,1)  $\pi_5 = 1$  e nula para os demais estados.



**Figura 2:** Cadeia de Markov representando o movimento do robô no ambiente.

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{14}$	$S_{15}$	$S_{16}$
$S_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_2$	0	0.75	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_3$	0	0.25	0.25	0.25	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_4$	0	0	0.25	0.50	0	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_5$	0	0	0	0	0.75	0	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0
$S_6$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_7$	0	0	0.25	0	0	0	0.25	0.25	0	0	0.25	0	0	0	0	0
$S_8$	0	0	0	0.25	0	0	0.25	0.50	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_9$	0	0	0	0	0.25	0	0	0	0.50	0.25	0	0	0	0	0	0
$S_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.25	0.25	0	0	0.25	0	0
$S_{11}$	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0	0.25	0.25	0	0	0	0.25	0
$S_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0	0	0.50	0.25	0
$S_{15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0	0	0.25	0.25	0.25
$S_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25	0.75

**Tabela 1:** Matriz de Transição A

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{14}$	$S_{15}$	$S_{16}$
R (Vermelho)	0	0.0333	0.0333	0.0333	0.9000	0	0.0333	0.0333	0.0333	0.0333	0.9000	0	0	0.9000	0.0333	0.0333
B (Azul)	0	0.0333	0.0333	0.9000	0.0333	0	0.0333	0.0333	0.0333	0.9000	0.0333	0	0	0.0333	0.0333	0.9000
Y (Amarelo)	0	0.0333	0.9000	0.0333	0.0333	0	0.0333	0.9000	0.0333	0.0333	0.0333	0	0	0.0333	0.9000	0.0333
G (Verde)	0	0.9000	0.0333	0.0333	0.0333	0	0.9000	0.0333	0.9000	0.0333	0.0333	0	0	0.0333	0.0333	0.0333

**Tabela 2:** Matriz de Emissão  $B$

- **Suponha que o receptor de sinais tenha recebido a sequência** r r y r y r b g b r y y g b. Qual a probabilidade desta sequência ocorrer? Explique e implemente o algoritmo necessário para responder a pergunta.
- **Repita o item anterior para a sequência** r b y r g r b g b r y y g b. (Obviamente não precisa reimplementar o algoritmo!)
- **Para a primeira sequência acima, qual o quadrado mais provável onde estará o robô na última posição (isto é, o quadrado de onde foi emitido o último sinal)?** Explique e implemente o algoritmo necessário.
- **Para a segunda sequência acima, qual o quadrado mais provável onde estará o robô?**
- **Para a primeira sequência acima, qual o caminho mais provável percorrido pelo robô?** Explique o algoritmo usado, mas não precisa implementar. Use uma biblioteca de Python ou outra linguagem preferida.

## Questão 2 - Para exercitar o EM mais uma vez

Nesta tarefa, você usará o algoritmo Expectation-Maximization (EM) para inferir nota de filmes em um conjunto de dados. As notas são de 0.0 - 10.0 com uma casa decimal. O conjunto de dados contém as notas de clientes para quatro filmes de diferentes categorias (Sci-Fi e Romance). Os clientes são divididos em três classes com base em suas preferências, mas também é desconhecida a classe do cliente.

1. Explique as equações usadas para resolver o problema.
2. Baseado no item anterior, explique a sua implementação, incluindo as suas escolhas para a inicialização do código.
3. Quantas iterações foram necessárias para resolver o problema? Qual o teste de parada utilizado?
4. Quais os valores dos parâmetros encontrados? Quantos usuários foram alocados a cada uma das duas classes?
5. O resultado da clusterização fez algum sentido? Explique e justifique a sua resposta.
6. Qual a probabilidade do  $i$ -ésimo cliente ser um cliente que gosta mais de Sci-Fi? Explique sua resposta de forma genérica e escolha um dos 1000 usuários para exemplificar.

## Questão 3 - Markov Reward Models

Considere a Questão 1, e o seguinte problema. A Figura 1 é modificada, de forma que o muro no quadrado  $[3, 4]$  é retirado, e dá lugar a um quadrado vermelho. Além disso, o robô ganha um prêmio de R\$100,00 ao atingir o quadrado  $[4, 4]$  (azul), mas perde:

- R\$40,00 cada vez que passa por um quadrado verde;
- R\$30,00 cada vez que passa por um quadrado vermelho;
- R\$5,00 cada vez que passa por um quadrado azul;
- R\$10,00 cada vez que passa por um quadrado amarelo.

O robô perde R\$1,00 a cada movimento, mesmo que sendo para o mesmo quadrado. Suponha que o robô escolhe uma das 4 direções aleatoriamente e caso a direção seja uma parede ele permanece no mesmo quadrado, (exatamente como no problema da lista anterior) e perde dinheiro conforme explicado acima.

1. Ignore a indicação dos sensores e mostre os passos necessários para calcular o valor médio do valor recebido ao atingir o quadrado do prêmio.

## Códigos

Os códigos utilizados para a resolução dos exercícios estão disponíveis no repositório do GitHub:  
<https://github.com/lhscaldas/cps863/>

## Referências

- [1] RABINER, L. A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, v. 77, n. 2, p. 257–286, 1989.