

Sumário

Revisão de SisDin 1.....	1
Algumas formulas de sistema de segunda ordem.....	1
Critério de estabilidade de routh-hurwitz.....	2
Diagramas de resposta em frequência.....	2
Diagrama de Bode.....	2
Diagrama de Nyquist.....	3
Teorema da estabilidade de Nyquist.....	3
Diagrama (ou carta) de Nichols.....	3
Margens.....	4
Projeto em frequência de compensadores.....	4
Compensador de avanço.....	5
Compensador de atraso.....	5
Controle de Espaço de Estados.....	5
Forma de espaço de estados.....	5
Controlabilidade e Observabilidade.....	6
Alocação de polos.....	6
Controle ótimo.....	7
Controle integral.....	8
Observador de estados.....	8

Revisão de SisDin 1

Algumas formulas de sistema de segunda ordem

$$\sigma = \zeta \omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\beta = \arccos(\zeta)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_s^{2\%} = \frac{4}{\sigma}$$

$$M_p = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right)$$

$$\zeta = \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

$$MF = 100\zeta^\circ$$

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Erro ao degrau

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$

Erro à rampa

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

Critério de estabilidade de routh-hurwitz

Exemplo:

$$FTMF = \frac{K(s+2)}{s^4 + 4s^3 + 9s^2 + (10+K)s + 2K}$$

montamos a tabela:

s^4	1	9	$2K$
s^3	4	$(10+K)$	
s^2	$\frac{26-K}{4}$	$\frac{8K}{4}$	
s^1	$\frac{\frac{26-K}{4}(10+K) - 8K}{\frac{26-K}{4}} = A$		
s^0	$\frac{A \frac{8K}{4}}{A}$		

O número de raízes de FTMF com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna. Logo, para estabilidade devemos fazer todos os elementos da primeira coluna maiores que zero, além de fazer todos os elementos das 2 primeiras linhas maiores que zero também.

Diagramas de resposta em frequência

Diagrama de Bode

É a resposta em frequência de um sistema a uma entrada senoidal. Não precisa saber fazer, (função bode(sys) do matlab ou python), mas caso caia alguma questão mais teórica é bom ter ideia do que representa cada coisa nele.

Termo	Magnitude	Fase
Constante: $G(j\omega) = K$	$ G(j\omega) _{dB} = 20 \log K $	$\angle G(j\omega) = 0^\circ$ para $K > 0$ $\angle G(j\omega) = \pm 180^\circ$ para $K < 0$
$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$	$ G(j\omega) _{dB} = -20 \log \omega \text{ dB}$	$\angle G(j\omega) = -\angle \frac{j}{\omega} = -90^\circ$
$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$	$ G(j\omega) _{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB}$	$\angle G(j\omega) = -\text{atan } \omega\tau$
$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}$	$ G(j\omega) _{dB} = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \text{ dB}$ • Pico com amplitude $ G(j\omega) _{dB} = -20 \log 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \cong -20 \log 2\zeta$	$\angle G(j\omega) = -\text{atan} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right]$
$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$	$ G(j\omega) _{dB} = 0 \text{ dB}$	$\angle G(j\omega) = \omega T \text{ (radianos)}$

Diagrama de Nyquist

Gráfico polar da resposta em freqüência. O comprimento de uma reta que vai da origem a um ponto da curva representa $|G(j\omega)|$ para uma determinada freqüência e o ângulo entre essa reta e o eixo real positivo representa $\angle G(j\omega)$.

Onde termina o diagrama?

Se o número de pólos é maior que o número de zeros em malha aberta ($n > m$), $|G(j\infty)| \rightarrow 0$.

100% dos casos dessa matéria $n > m$, então precisamos nos preocupar só com a fase $\angle G(j\infty)$

Se $n - m = 1$, $\angle G(j\infty) \rightarrow -90^\circ$

Se $n - m = 2$, $\angle G(j\infty) \rightarrow -180^\circ$

Se $n - m = 3$, $\angle G(j\infty) \rightarrow -270^\circ$

Onde começa o diagrama?

Depende do tipo N da FT de malha aberta (quantos pólos ela tem em zero)

Se $N = 0$, $|G(0)| = K_0$ e $\angle G(0) = 0^\circ$, sendo K_0 o ganho da FT de malha aberta.

Se $N = 1$, $|G(0)| = \infty$ e $\angle G(0) = -90^\circ$

Se $N = 2$, $|G(0)| = \infty$ e $\angle G(0) = -180^\circ$

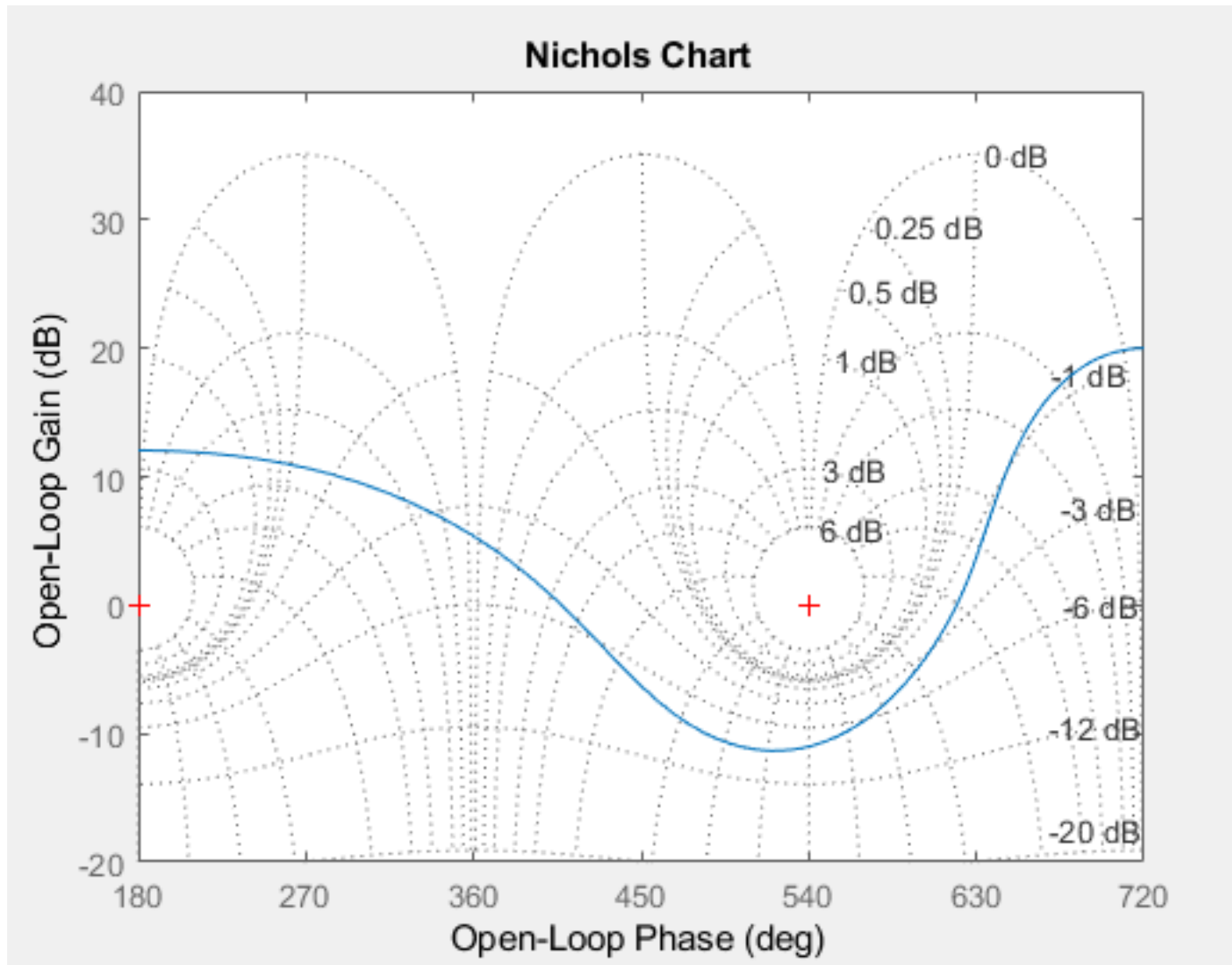
Se $N = 3$, $|G(0)| = \infty$ e $\angle G(0) = -270^\circ$

Teorema da estabilidade de Nyquist

Seja Z o número de pólos no SPD em malha fechada, P o número de pólos no SPD em malha aberta e N o número de voltas no sentido horário que o diagrama de Nyquist dá em volta do ponto -1 do eixo real. Para que o sistema seja estável, $Z = 0$. É possível provar que $Z = P + N$. Logo, para a estabilidade, $N = -P$.

Diagrama (ou carta) de Nichols

Ele é bem chato de entender e o Tannuri falou que ele é pouco usado. Então, dificilmente ele vai cair. Porém vou escrever aqui o que entendi dele.



O eixo vertical é o ganho em malha aberta e o eixo horizontal é a fase em malha aberta. As linhas pontilhadas representam o ganho em malha fechada. Então, traçando a curva azul para a malha aberta, é possível ter uma noção do comportamento do sistema em malha fechada. É possível, por exemplo, construir o diagrama de bode de módulo em malha fechada pegando alguns pontos do diagrama de Nichols da FT de malha aberta.

Margens

A **margem de ganho** é o ganho na frequência na qual a fase é -180° , ou seja, a parte imaginária do denominador de $G(j\omega)$ é nula. Já a **margem de fase** é a distância entre a fase na frequência em que $|G(j\omega)| = 1$ (ou $|G(j\omega)|_{dB} = 0dB$) e -180° , ou seja, 180° mais essa fase. As duas margens são facilmente calculadas pelo comando `margin(sys)`. Lembrar que esse comando calcula a margem de ganho em db, ou seja, $MG_{dB} = 20\log_{10}(MG)$.

Projeto em frequência de compensadores

Compensador de avanço

$G_c = K_c \frac{1+sT}{1+\alpha sT}$, para $\alpha < 1$. Recomendado para projeto onde são especificados o **erro em regime** e a **margem de fase** desejados. Se chama "de avanço" porque desloca a frequência de corte da margem de fase para a direita.

- Obter o ganho K_c para o erro estacionário desejado (ver as fórmulas de erro para entrada degrau e rampa)
- Obter a MF para o sistema não compensado $G_c = K_c$
- Obter o avanço necessário $\phi_m = MF_{desejada} - MF_{comganho} + \Delta$, com $\Delta = 5^\circ \sim 10^\circ$
- Obter $\alpha = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)}$
- Obter a nova frequência de corte ω_c para a margem de fase, onde $|G(j\omega)| = -20 \log(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})$
- Obter T tal que $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T} \rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_c}$
- Verificar com $\text{margin}(G_c G)$

Compensador de atraso

$G_c = K_c \frac{1+sT}{1+\beta sT}$, para $\beta > 1$. Aumenta a margem de fase e atenua o ganho em alta frequência. Recomendado para projeto onde são especificados o **erro em regime** e a **margem de fase** desejados. Se chama "de atraso" porque desloca a frequência de corte da margem de fase para a esquerda.

- Obter o ganho K_c para o erro estacionário desejado (ver as fórmulas de erro para entrada degrau e rampa)
- Obter a MF para o sistema não compensado $G_c = K_c$ e a frequência de corte ω_c
- Obter a nova frequência de corte na qual a fase $\angle G(j\omega) = -(180^\circ - MF_{desejada}) + \Delta$, com $\Delta = 5^\circ \sim 10^\circ$
- Obter o modulo do ganho na nova ω_c . O compensador deve atenuar esse valor em alta frequência.
- Obter β tal que $20 \log(\beta) = |G(j\omega_c^{nova})| \rightarrow \beta = 10^{\frac{|G(j\omega_c^{nova})|}{20}}$
- Obter T tal que $\frac{1}{T} \leq \frac{\omega_c^{nova}}{10} \rightarrow T = \frac{10}{\omega_c^{nova}}$
- Verificar com $\text{margin}(G_c G)$

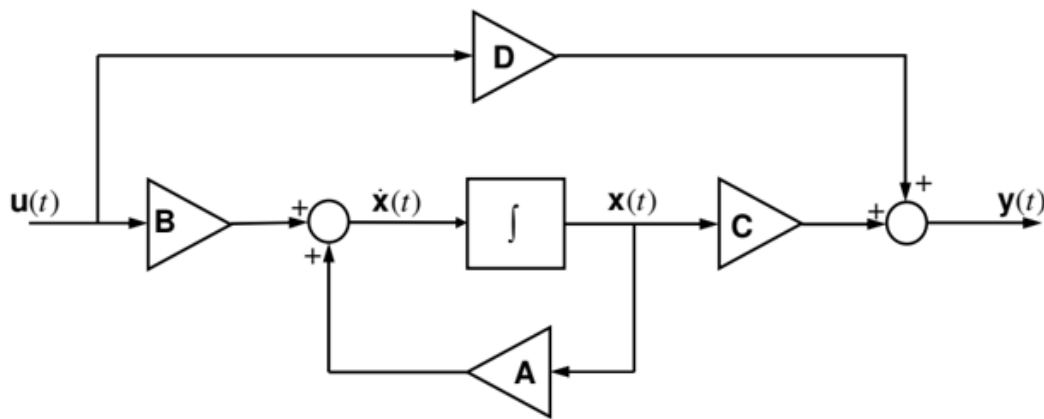
Controle de Espaço de Estados

Forma de espaço de estados

- Usualmente lidamos com Sistemas Lineares Invariantes no tempo (LTI) \Rightarrow relação entre saída (y) e entrada (u) não depende diretamente do tempo.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases}$$

- Nesse caso as matrizes **A**, **B**, **C** e **D** são constantes.
- Saídas futuras dependem somente do estado presente e entradas futuras.

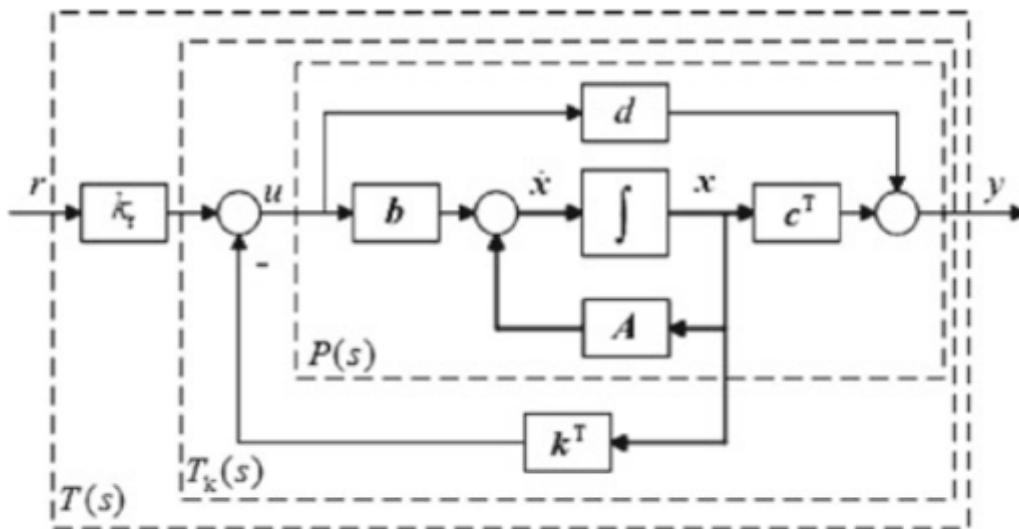


Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade é a capacidade de se levar um sistema para qualquer estado x em um tempo t . É medido pelo rank da matriz gerada pelo comando $M_c = \text{ctrb}(A, B)$. $\text{rank}(M_c) = n$, sendo n a ordem do sistema.

Observabilidade é a capacidade de se saber qualquer estado x conhecendo a saída y e a entrada u . É medido pelo rank da matriz gerada pelo comando $M_o = \text{obsv}(A, C)$. $\text{rank}(M_o) = n$, sendo n a ordem do sistema.

Alocação de polos



- Verificar a observabilidade e a controlabilidade
- Encontrar os pólos desejados pelos requisitos de controle e escrevê-los em um vetor p_k
- calcular a matriz $K = \text{place}(A, B, p_k)$
- Fazer $K_r = 1$ e calcular as matrizes de malha fechada $A_{MF} = A - BK$, $B_{MF} = BK_r$, $C_{MF} = C - DK$ e $D_{MF} = DK_r$
- Declarar o sistema de malha fechada usando o comando $\text{sys} = \text{ss}(A_{MF}, B_{MF}, C_{MF}, D_{MF})$
- Calcular $K_r = 1/\text{dcgain}(\text{sys})$
- Recalcular as matrizes de malha fechada e o sistema para o novo K_r
- Simular para testar

Controle ótimo

Tem como objetivo minimizar o funcional $J_\infty(t) = \int_t^\infty [X^T(\tau)Q(\tau)X(\tau) + u^T(\tau)R(\tau)u(\tau)]d\tau$, no qual a primeira parcela representa a precisão que queremos controlar as variáveis de estado e a segunda parcela representa a energia gasta pelo controlador. Fazemos isso calculando a matriz de controle K usando como parâmetro as matrizes $Q_{n \times n}$ e $R_{m \times m}$, sendo n o número de variáveis de estado e m o número de entradas. A matriz Q representa em sua diagonal a importância da precisão do controle para cada variável de estado e a matriz R o quanto de energia desejamos gastar.

- Verificar a observabilidade e a controlabilidade
- Escrever o sistema de malha aberta $\text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D)$
- Escrever a matriz Q colocando na diagonal dela a importância que vc quer dar para a precisão do controle de cada variável de estado.
- Escrever a matriz $R = P^2$, sendo P um parâmetro que vc irá variar para verificar se o gasto de energia está satisfatório. (Nesse caso consideramos um sistema com apenas uma entrada. O Tannuri não

ensinou como seria para mais de uma entrada, mas provavelmente R seria uma matriz diagonal e seria possível dar pesos diferentes para cada entrada, assim como fazemos com os estados na matriz Q)

- Calcular K usando $[K, S, e] = lqr(sys, Q, R)$. ('S' e 'e' não são utilizados porém precisam estar no comando)
- Fazer $K_r = 1$ e calcular as matrizes de malha fechada $A_{MF} = A - BK$, $B_{MF} = BK_r$, $C_{MF} = C - DK$ e $D_{MF} = DK_r$
- Declarar o sistema de malha fechada usando o comando $sys = ss(A_{MF}, B_{MF}, C_{MF}, D_{MF})$
- Calcular $K_r = 1/dcgain(sys)$
- Recalcular as matrizes de malha fechada e o sistema para o novo K_r
- Simular para testar tanto a saída y quanto a entrada $u = Kx^T + (rK_r)$, sendo r o setpoint.
- Variar Q e R até y e u serem satisfatórios.

Controle integral

É parecido com o controle por alocação de pólos, porém no lugar de calcular um ganho K_r você define uma nova variável de estado como a integral do erro $z = \int (y - y_d)dt$, onde y_d é o setpoint.

$$\dot{z} = y - y_d \text{ (erro)}$$

O vetor de estados expandido fica $x_e = \begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}$ e as matrizes de estado expandidas em malha aberta ficam

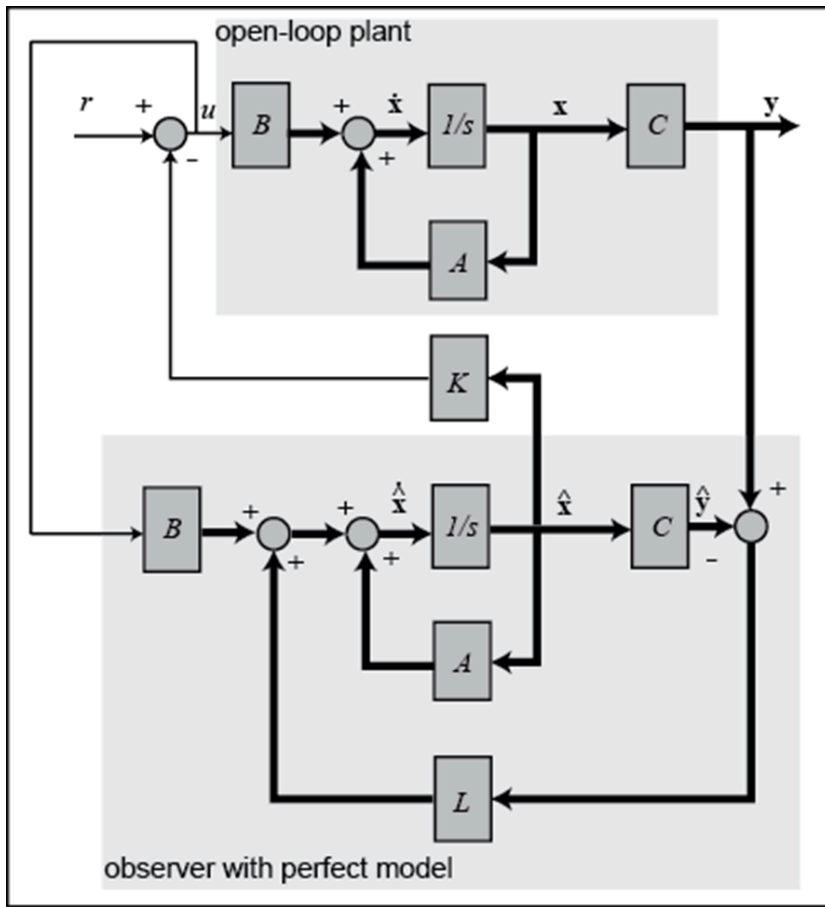
$$\dot{x}_e = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ C_{n \times 1} & 0 \end{pmatrix} x_e + \begin{Bmatrix} B_{m \times m} \\ 0_{1 \times m} \end{Bmatrix} u + \begin{Bmatrix} 0 \\ -y_d \end{Bmatrix} = A_{int} x_e + B_{int} u + \begin{Bmatrix} 0 \\ -y_d \end{Bmatrix}$$

$$y = \begin{Bmatrix} C \\ 0 \end{Bmatrix} x_e = C_{int} x_e \text{ (vamos considerar } D=0\text{)}.$$

- Encontrar os pólos desejados pelos requisitos de controle e escrevelos em um vetor p_k
- Escrever as matrizes expandidas
- Verificar a observabilidade e a controlabilidade para as matrizes expandidas
- calcular a matriz $K = place(A, B, p_k)$
- escrever as matrizes de malha fechada $A_{mf} = A_{int} - B_{int}K$, $B_{MF} = \begin{Bmatrix} 0_{n \times 1} \\ -1 \end{Bmatrix}$ e $C_{MF} = \{C \quad 0\}$
- Declarar o sistema de malha fechada usando o comando $sys = ss(A_{MF}, B_{MF}, C_{MF}, 0)$
- Simular

Observador de estados

Serve para estimar os estados de um sistema de controle.



$$x_e = \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix}$$

$$\dot{x}_e = \begin{pmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{pmatrix} x_e + \begin{Bmatrix} BK_r \\ BK_r \end{Bmatrix} r = A_{obs} x_e + B_{obs} r$$

$$y_e = \begin{Bmatrix} y \\ \hat{y} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} x_e + Dr = C_{obs} x_e + D_{obs} r$$

- Definir os polos do observador (p_{obs}) 5x maiores que os do sistema
- Calcular $L = place(A^T, C^T, p_{obs})^T$
- Fazer $K_r = 1$ e calcular as matrizes expandidas A_{obs} , B_{obs} , C_{obs} , D_{obs} .
- Delcarar o sistema $obsys = ss(A_{obs}, B_{obs}, C_{obs}, D_{obs})$
- Calcular $K_r = 1/dcgain(obsys)$
- Recalcular as matrizes de malha fechada e o sistema para o novo K_r
- Simular para testar