

天文算法

译著 — 许剑伟和他的译友

- 第 1 章 注释与提示
- 第 2 章 关于精度
- 第 3 章 插值
- 第 4 章 曲线拟合
- 第 5 章 迭代
- 第 6 章 排序
- 第 7 章 儒略日
- 第 8 章 复活节日期
- 第 9 章 力学时和世界时
- 第 10 章 地球形状
- 第 11 章 恒星时与格林尼治时间
- 第 12 章 坐标变换
- 第 13 章 视差角
- 第 14 章 升、中天、降
- 第 15 章 大气折射
- 第 16 章 角度差
- 第 17 章 行星会合
- 第 18 章 在一条直线上的天体
- 第 19 章 包含三个天体的最小圆
- 第 20 章 岁差
- 第 21 章 章动及黄赤交角
- 第 22 章 恒星视差
- 第 23 章 轨道要素在不同坐标中的转换
- 第 24 章 太阳位置计算
- 第 25 章 太阳的直角坐标
- 第 26 章 分点和至点
- 第 27 章 时差

第 28 章 日面计算
第 29 章 开普勒方程
第 30 章 行星轨道要素
第 31 章 行星位置
第 32 章 椭圆运动
第 33 章 抛物线运动
第 34 章 准抛物线
第 35 章 一些行星现象的计算
第 36 章 冥王星
第 37 章 行星的近点和远点
第 38 章 经过交点
第 39 章 视差修正
第 40 章 行星圆面被照亮的比例及星等
第 41 章 火星物理表面星历计算(未译)
第 42 章 木星物理表面星历计算(未译)
第 43 章 木星的卫星位置(未译)
第 44 章 土星环(未译)
第 45 章 月球位置
第 46 章 月面的亮区
第 47 章 月相
第 48 章 月亮的近地点的远地点
第 49 章 月亮的升降交点
第 50 章 月亮的最大赤纬
第 51 章 月面计算
第 52 章 日月食
第 53 章 日月行星的视半径
第 54 章 恒星的星等
第 55 章 双星
第 56 章 日晷的计算
备注 译者说明
原著 《天文算法》

天文算法

天文算法.....	1
前言.....	1
第一章 注释与提示.....	1
第二章 关于精度.....	7
第三章 插值.....	16
第四章 曲线拟合.....	29
第五章 迭代.....	40
第六章 排序.....	47
第七章 儒略日.....	51
第八章 复活节日期.....	58
第九章 力学时和世界时.....	61
第十章 地球形状.....	65
第十一章 恒星时与格林尼治时间.....	70
第十二章 坐标变换.....	75
第十三章 视差角.....	80
第十四章 天体的升、中天、降.....	83
第十五章 大气折射.....	87
第十六章 角度差.....	89
第十七章 行星会合.....	97
第十八章 在一条直线上的天体.....	99
第十九章 包含三个天体的最小圆.....	101
第二十章 岁差.....	104
第二十一章 章动及黄赤交角.....	112
第二十二章 恒星视差.....	116
第二十三章 轨道要素在不同坐标中的转换.....	125
第二十四章 太阳位置计算.....	129
第二十五章 太阳的直角坐标.....	137
第二十六章 分点和至点.....	143
第二十七章 时差.....	148
第二十八章 日面计算.....	153
第二十九章 开普勒方程.....	157
第三十章 行星的轨道要素.....	172
第三十一章 行星位置.....	175
第三十二章 椭圆运动.....	178
第三十三章 抛物线运动.....	193
第三十四章 准抛物线.....	197
第三十五章 一些行星现象的计算.....	200
第三十六章 冥王星.....	210
第三十七章 行星的近点和远点.....	214
第三十八章 经过交点.....	220
第三十九章 视差修正.....	223

第四十章 行星圆面被照亮的比例及星等.....	229
第四十一章 火星物理表面星历计算(未译).....	233
第四十二章 木星物理表面星历计算(未译).....	233
第四十三章 木星的卫星位置(未译).....	233
第四十四章 土星环(未译).....	233
第四十五章 月球位置.....	234
第四十六章 月面被照亮部分.....	242
第四十七章 月相.....	245
第四十八章 月亮的近地点和远地点.....	251
第四十九章 月亮的升降交点.....	258
第五十章 月亮的最大赤纬.....	260
第五十一章 月面计算.....	264
第五十二章 日月食.....	272
第五十三章 日月行星的视半径.....	283
第五十四章 恒星的星等.....	285
第五十五章 双星.....	288
后记.....	1

前言

十分诚恳地感谢许剑伟和他的译友！在此我作一个拱手。

2008 年 7 月份因为个人的某方面需要，本人极需要有关天文历法的算式，为此上网搜索，找到原作者 Jean.Meeus 编著的《Astronomical.Algorithms》一电子书英文版，且是 djvu 文档格式，后找到 PDF 格式，但都是英文版，若要翻译又要时间，且英文水平有限。英文版对英文水平有限的人来说多少有点美中不足，于是又上网苦苦搜索其翻译版，有些收获，但只是零星的篇章翻译，因此就把这事搁置了一段时间。2008 年 12 月份上网，碰巧搜索到了由许剑伟和他的译友翻译的《Astronomical.Algorithms》中文翻译版（翻译版电子书名《天文算法》），这下有救了，本人就象遇到了救星、救命稻草。许剑伟及其译友翻译的《Astronomical.Algorithms》的浏览网址是：<http://www.xiuyujy.com/xxjs/xjw/rj/117/>。因不知许剑伟的网络联系方式，故未能联系上他。

因本人经常阅读 WORD 文档，觉得把字放大些，眼睛看久不疲劳，同时把文档的背景颜色调成浅黄色（RGB 三基色，R=255、G=253、B=239），对学习和思考有好处，如果用 WORD 2007 打开文档阅读的话，那更好，因 WORD 2007 的阅读环境（指颜色的色调环境，是浅蓝色的）很柔和，阅读文档觉得是一种享受。这是本人想把由许剑伟和他的译友翻译的《Astronomical.Algorithms》制作成 WORD 文档的原因。

本人浏览了一下《天文算法》，觉得需要初中级天文知识才能看得明白，当然也需要大学的一些数学知识。

许剑伟和他的译友的无私奉献精神使本人觉得如果不把这《天文算法》的 WORD 文档版式义（无偿）给大家，本人觉得是一种罪过。在此，我仍要多啰嗦一句：十分诚恳地感谢许剑伟和他的译友。

《天文算法》中原本是撇号（'），我已把它改为撇号了，有一些原是下标的，也改为下标的了，反正我改过的符号都用红色表示。

本人不请自代许剑伟和他的译友向网友说：“翻译难免有疏漏之处，请多见谅。”

另：《Astronomical.Algorithms》原著（PDF 电子书籍格式）下载地址：

<http://www.uushare.com/user/mglychd/file/1191521>

《天文学教程》（PDF 格式）下载地址：

<http://www.uushare.com/user/mglychd/file/1191583>

PDF 专业版电子书籍阅读器下载地址：

<http://www.uushare.com/user/mglychd/file/1191606>

本人电子邮箱：mglychd@139.com

麦国亮

广东高州

2009 年 1 月 6 日

第一章 注释与提示

解释如何计算和编程的内容并不属于本书范围，读者可以自行查阅读有关书籍。然而能写出好的程序并非一日之功，这是一门需要循序渐进的艺术，只有通过实践锻炼才能写出既短又好的程序。

超出 $0\sim 360^\circ$ 范围的角度度的三角函数

超出 $0\sim 360^\circ$ 范围的角度经常出现在天文计算中，在例 24. a 中我们可以看到 1992 年 10 月 13 日太阳的平经度角是 -2318.19281° 。快速运动的天体，比如月球、木星的伽利略卫星或者行星的自转中甚至还会出现更大的角度（可以看例 41. a 中第 9 步中的角 w 的计算实例）。

把角度转化到 $0\sim 360^\circ$ 范围之内有时是很必要的，因为一些计算器或者程序设计语言对于大的角度的三角函数计算结果是不准确的。例如，你可以试试计算 3600030° 的正弦。正确结果应该为 0.5。

译者注：事实上，对于现代计算机而言，上一行所述的问题基本不存在。不过，很多情况下，我们仍需把一个角度转换到 0 到 360 度。

角度的表示方法

计算机不能直接计算出以度分秒方式表示的角度的三角函数。在使用三角函数之前，应该把角度转换成以度为单位的十进制小数形式。因此，在计算 $23^\circ 26' 49''$ 的余弦时要把角度转化成为 23.44694444° ，然后再用余弦函数计算。

遗憾的是，几乎所有的电脑都是用弧度而不是度来计算，所以还应把度转为弧度单位，通常是一件麻烦的事情。

赤经

赤经通常用时、分、秒方式来表示。如果需要计算赤经的三角函数，需要把赤经转换成用度为单位来表示（然后再转换成以弧度为单位），请注意 1h 对应于 15° 。

例 1. a ——计算 $\alpha = 9\text{h } 14\text{m } 55\text{ s}8$ 的 $\tan\alpha$ 。我们首先把 α 转化成以时为单位的十进制小数： $9\text{h } 14\text{m } 55\text{ s}8 = 9 + 14/60 + 55.8/3600 = 9.248833333$ 时然后再乘以 15。 $\alpha = 138.73250^\circ$ 然后在除以 $180/\pi$ 得到以弧度为单位的 $57.295779513\dots$ 。然后得出 $\tan\alpha = -0.877517$

修正角所在的象限

当已知一个角的正弦、余弦或正切值时，可以通过三角函数对应的反函数——如正弦对应的反正弦 (\arcsin)，余弦对应的反余弦 (\arccos)，正切对应的反正切 (\arctan) 来得出角的大小。但是请注意在一些计算机上和一些程序设计语言中，尤其是大部分早期的微型计算机中都没有提供反正弦和反余弦函数。

反三角函数并不是单值函数，例如，如果 $\sin\alpha = 0.5$ ，那么 α 可以是 30° 、 150° 、 390° 等等。基于这个原因，计算机中的反三角函数的取值范围只有 $0 \sim 360^\circ$ 的一半：反正弦和反正切的取值范围是在 $-90 \sim +90^\circ$ ，而反余弦的取值范围则是 $0 \sim 180^\circ$ 。

例如，计算 $\cos 147^\circ$ ，结果是一 0.8387 ，用反余弦函数计算 -0.8387 的结果正是 147° ，但是， $\cos 213^\circ$ 的结果也是一 0.8387 ，而我们用反余弦函数计算的结果则是 147° 。

因此当使用反正弦、反余弦和反正切的时候，必要时需要通过一个或多个值来弄清楚它代表的角度，消除结果的不确定性。另外，每个问题都要单独检查。

例如，公式 (12.4) 和 (24.7) 给出了天体赤纬的正弦。因为赤纬的取值范围在 $-90 \sim +90^\circ$ ，所以反正弦函数可以在正确的象限算出赤纬，因此这里就不必进行检验。

公式 (16.1) 给出了角度差的余弦也是同样情况，实际上角度差的取值范围在 $0 \sim 180^\circ$ ，这正与反余弦函数的取值范围一致。

但是请看从赤经 (α) 赤纬 (δ) 转换到黄经 (β) 黄纬 (λ) 的公式：

$$\cos\beta\sin\lambda=\sin\delta\sin\varepsilon+\cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$

$$\cos\beta\cos\lambda=\cos\delta\cos\alpha$$

令第一个方程为 A，第二个方程为 B，用 A 式除以 B 式，我们可以得到 $\tan\lambda=A/B$ ，则对 A/B 使用反正切函数可以求出角 λ ，该角的取值在 $-90\sim+90^\circ$ 范围内，角度结果可能会相差 $\pm 180^\circ$ （由于正切函数的周期为 180° ）。确定角所在的正确象限可以通过如下测试：如果 $B<0$ ，求得的结果加上 180° 。不过一些程序设计语言（如 C 语言、javascript、VB）还提供了重要的第二个反正切函数 ATAN2，这个函数有两个参数 A 和 B，这个函数会求出正确的结果并转化到正确的象限。例如，设 $A=-0.45$ ， $B=-0.72$ ，使用 $\text{ATAN}(A/B)=32^\circ$ ，而使用 $\text{ATAN2}(A,B)$ 可以求得正确结果是一 148° ，或 $+212^\circ$ 。

负的角度值的输入

以度分秒方式表示的角度可以用三个独立的参数 (D, M, S) 输入。例如， $21^\circ 44' 07''$ 可以用三个数字 21, 44, 07 输入，然后程序中使用 $H=D+M/60+S/3600$ 转化成为以度为单位。

我们还应该仔细考虑负的角度值的情况，比如角度是一 $13^\circ 47' 22''$ ，代表的是一 13° ，一 $47'$ 和一 $22''$ ，这样的话 $D=-13$ ， $M=-47$ ， $S=-22$ 。所以的参数都应该有同样的正负号。

对一 $13^\circ 47' 22''$ 可能的错误理解是输入一 13° ，+ $47'$ 和 + $22''$ ，这样输入的结果实际上是一 $12^\circ 12' 38''$ 。

时间的幂

一些数值需要通过含有时间的幂（如 T ， T^2 ， T^3 ，……）的公式来计算，应当注意的是这样的多项式只是在 T 的值不是太大的情况下才是合理的，比如公式：

$$e=0.04629590-0.000027337T+0.0000000790T^2 \quad (1.1)$$

给出了天王星的轨道偏心率； T 是以自 2000 年起算的儒略世纪数（每世纪 36525 天），显然该式只有在公元 2000 年前后，比如 T 在 $+30\sim-30$ 范围内有效。如果 $|T|>30$ ，这个公式就不再有效，比如 $T=-3305.8$ ，公式的结果将是 $e=1$ 。

一个认为“计算机从不犯错的”人可能会认为 $T = -3305.8$ 时，天王星轨道是抛物线，进而认为天王星起源于太阳系之外——这显然是伪科学。

实际上尽管行星轨道的偏心率 e 在超过了定义的时间上限后变化并不是有规律的，但是时间在很少的几个千年级之内，偏心率是可以用像 (1.1) 那样的多项式精确表示的。

进一步的观察我们可以发现公式中有周期项（公式中的正弦和余弦项，在几个世纪内变化很小）和长期项的不同（如公式中含有 T, T^2, T^3, \dots 的项，它随着时间的增加快速增大）。当 T 很小的时候， T^2 项会变得很小，但是当 $|T|$ 值很大的时候这一项会变得非常重要。因此当 $|T|$ 值比较大的时候考虑含有 T^2 等项的周期项是没有意义的，在计算中也不用考虑。

避免幂计算

假设我们计算这样一个多项式： $Y = A + BX + CX^2 + DX^3 + EX^4$

其中 A, B, C, D, E 是常数， X 是变量。现在可以在计算机中一项项直接相加来求出每一个给定 X 的多项式的值。然而可以采用一些聪明的方法来避免计算 X 的幂，比如：

$$Y = A + X(B + X(C + X(D + EX)))$$

在这个式子中幂计算都消失了，采用了乘积来替代幂的计算。这种多项式的表示方法被称为 Horner 方法，这种方法因为避免了幂计算，所以特别适合自动计算。

不用幂计算，而采用计算 $A * A$ 的方法来计算 A 的平方也是一个聪明的办法，我们使用这样一段程序在 HP-85 计算机上计算前 200 个正整数的平方：

```
FOR I=1 TO 200
  K=I^2
NEXT I
```

完成计算需要费时 10.75 秒。但是，当我们把第二行换成 $K = I * I$ 的话，完成整个计算只需费时 0.96 秒！

缩短一个程序

把程序写尽可能短小通常不仅是代表着艺术，而且在计算机内存受限情况下也是必须的。即使对于简单的计算，也存在一些把程序缩短的技巧。假设我们要计算下面多项相加的和 S：

$$S=0.0003233\sin(2.6782+15.54204T)+0.0000984\sin(2.6351+79.62980T)+0.0000721\sin(1.5905+77.55226T)+0.000198\sin(3.2588+21.32993T)+\dots$$

首先因为正弦的系数都是很小的数，可以通过采用以一个常数作为计数单位（在这个例子中是 10^{-7} ）来避免输入那么多的数字，比如我们用 3233 来代替 0.0003233。因此在计算了所有项之后，我们再把和除以 10^{-7} 。

其次，在程序中声明全部数值项也是不明智的。相反，我们应该采用所谓的循环来完成计算。上面 $A*\sin(B+CT)$ 的每一项的 A, B, C 值应作为程序的数据部分。假如有 50 项，程序可以这样写：

```
Double s=0
Double data[50*3]={3233, 2.6782, 15.54204, .....};
//每 3 个一组
int i,p;
for(i=0;i<50;i++)
{
    p = i*3;
    s += data[p]*sin( data[p+1]+data[p+2]*T );
}
s/=1e-7;
```

译者注：如果数据量较大，应考虑将数据与程序合理的分离；数据可以放在程序中的“数组”之中，如果数据量多达几万行或更多，多数情况下我们会考虑放在外部文件之中。

安全性测试

在可能出现“不可能”出现的情况下，需要进行安全性测试。例如，在迭代到特定数量之后计算停止却没有达到要求的精度。

或者考虑月掩星的情况，在程序中根据当地的环境来计算被掩恒星消失和再次出现的时间。然而，可能在给定的地点根本看不到这颗恒星被掩。在这种情况下，初切时间和终切时间根本就不存在，试着计算这两个时间会碰到计算一个负数的平方根的情况。为了避免出现这个问题，程序应该首先计算这颗恒星到月面中心的最短距离（从给定的地点观看），而且当且仅当这个距离小于月面半径的情况下才计算初切和终切时间。

调试

在程序写完之后必须要检查被称为 Bug 的错误。定位和修改程序中 Bug 的过程被称为调试。在无论使用什么程序设计语言编程，可能会有如下几种类型的 Bug：

a. 语法错误：不符合程序设计语言的规则，比如拼写错误、遗漏了括号，或者编程语言的保留字。例如，在 BASIC 中：

`A=SIM(B)` 应该是 `A=SIN(B)`

`P=SQR((A+B))` 应该是 `P=SQR(A+B)`

b. 语义错误：比如遗漏程序行，例如在程序中不存在 800 行的情况下有 `GOTO 800` 语句。

c. 运行错误：在程序运行中出现的错误。例如：`A=SQR(B)`，在程序中计算 B 的平方根，但是 B 的值为负值。

d. 其他编程错误：下面的几种错误经常会发生：

错把字母“o”当作数字“0”输入，或者把字母“I”当作数字“1”输入。

同一变量名在程序中使用了两次（变量代表不同意思）。

输入数值常数的错误（比如错把 127.3 当作 127.03，或者错把 15 当作 0.15），把*错当+。

使用单位错误。例如一个角没有用弧度而是用度来作为单位，或者赤经用时做单位而没有转换成度或者弧度。

角定位在错误象限。请见“修正角所在的象限”一节。

数值舍入错误。例如一个人在计算 d 的余弦值，在 d 很小的情况下使用 $\cos()$ 效果不好。实际上如果 d 非常小，它的余弦值就几乎等于 1，而且除弦值随 d 变化非常缓慢。在这种情况下计算出来余弦值是不准确的。

比如， $\cos 15'' = 0.99999997$ ，而 $\cos 0''$ 的准确值为 1。如果想计算角度 d 的值非常小，可以通过其他方法来计算 d 的余弦值。比如，可以参考第 16 章。

一个不能保证覆盖各种情况的迭代过程。请见[第 5 章](#)（迭代）和[第 29 章](#)（Kepler 方程的解法）。

使用了错误的计算方法。例如，交换两个数值 X , Y ，就需要使用一个中间变量 A 。

不正确的方法： $X=Y$; $Y=X$;

正确的方法： $A=X$; $X=Y$; $Y=A$;

在 QuickBASIC, GWBASIC 或者其他 BASIC 版本中，有一个 SWAP 函数：SWAP (X, Y) 来交换 X , Y 两个数值。

检查结果

当然，一个程序不仅要在“语法”正确，还要给出正确的结果。要用已知的方法检查你的程序，比如，如果你写了一个程序计算行星位置或者月相的时间，应该把计算结果和天文年历上给出的数值进行比较。

要在一些“特殊”情况下检查你的程序。比如，你的程序在赤纬为负值的情况下计算结果是否仍然正确？或者，在赤纬在 0° 和 -1° 之间是否正确？或者，观测者的纬度正好为 0 时是否正确？或者，时间为负值时是否正确？

第二章 关于精度

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 27 日]

本章所要讨论的主题是：具体问题所需要的精度；程序设计语言的精度；最后结果发表的精度。

具体给定问题所需的精度

所需的计算精度，取决于具体问题的目标要求。例如，如果想计算行星的升或降的时刻，计算到 0.01 度已足够。原因是明显的，天球周日运动，每转过 1 度对应 4 分钟，所以 0.01 度的位置误差，引起的升或降时刻的误差大约为 0.04 分钟。为了解决这个问题，如果我们考虑数百个周期项，把位置精度控制到了 $0''.01$ ，那是在浪费精力和计算机的时间。

但是，如果要计算行星引起的恒星食，那么就要求行星位置的计算精度高于 $1''$ ，因为行星圆面的尺寸很小。

为某一具体问题编写的程序，不一定适用于另于相似的问题。假设，为了计算恒星的位置，一个程序使用了第 20 章的“低精方法”得到的岁差。观测者利用望远镜寻找星体，使用这种精度的位置是足够的。但是，在计算“星食”或“会合”时，象这样低精度的位置是没有价值的。

如果所需的精度已确定，我们必须使用一种适当的算法，满足其精度要求。John Mosley 提到了一个计算行星位置的商用价值的程序，但由于没有考虑摄动，即使在最近的几个角秒，土星、天王星、海王星的位置误差达 1 度。

为了取得更高的精度，不是简单地对大约值保留更多的有效数字，常常需要使用其它方法。例如，如果想获得精确到 0.01 度的火星位置，使用无摄的椭圆轨道(开普勒运动)就已足够。然而，如果对火星位置精度要求达 $10''$ 或更高，就必须考虑其它行星的摄动，程序将变得比较长。

对于程序员，必须清楚他的公式及具体问题的精度要求，充分考虑各种可省略的项让程序变得更简洁。例如，涉及 Date 平分点的太阳几何平黄经：

$$L = 280^{\circ}27'59''.244 + 129602771''.380T + 1''.10915T^2$$

式中 T 是从历元 2000 年 1 月 1.5 日起算的儒略世纪数 (36525 个历书日)。在这一表达式中，如果 $|T| < 0.95$ ，即在

1905 年到 2095 年，最后一项(太阳的世纪加速度)小于 $1''$ 。如果 $1''$ 精度已足够，那么，在这一时期内， T^2 项可以忽略。但时，在公元 100 年， $T=-19$ ，最后一项的值是 $394''$ ，大于 0.1 度。

计算机的精度

这是一个很复杂的问题。程序设计语言可工作在足够位数的有效数字。注意：与小数位是不同的！例如，0.0000183 有 7 位小数，但只有 3 个有效数字。有效数字指，除去左边前导的所有的“0”后，剩下数字的位数。

一台机器，四舍五入到 6 位有效数字，结果 $1000000+2$ 就是 1000000。

计算两个十分接近数的差值时，是很危险的。假设执行了以下减法： $6.92736 - 6.92735 = 0.00001$ 。每个数字的有效数字是 6 位，但是，相减后的结果却只有一位有效数字。另外，两个给定的数可能已做了四舍五入，那么情况将更糟糕。假设两个数的精确值是 6.9273649 和 6.9273451，那么正确的结果是 0.0000198，它几乎是刚才的两倍。

6 位或 8 位有效数字（早期的微机或如今的“单精度”），均不能满足天文计算的要求。

在很多应用中，要求计算机的有效数字位数比最后结果的有效数字大很多位。例如，让我们考虑任意时刻的月亮平黄经公式，单位是度(参见第 45 章)：

$$L' = 218.3164591 + 481267.88134236T - 0.0013268T^2 + 0.0000019T^3$$

式中 T 是历元 2000 年 1 月 1.5TD 起算的儒略世纪数(36525 日)。假设，我们要得到 0.001 度的月亮平黄经精度。因为经度限制在 $0\text{---}360$ 度，你可能会想到，计算机内部精度只需 6 位就已足够(小数点之前 3 位，小数点之后 3 位)。然而，这个问题不是这样的，因为，在转到 $0\text{---}360$ 度之前， L' 的值可能很大。

例如，让我们计算 2040 年 1 月 1 日 12h TD，即 $T=0.4$

时, L' 的值。我们得到 $L'=192725.469$ 度, 转换后变为 125.469 度。但是, 如果电脑工作在 6 位有效数字, 得到的不再是 $L'=192725.469$ 度, 而 192725 度(6 位!), 转换后变为 125 度, 所以最后的结果精度只有 1 度, 误差 0.569 度或 $28'$, 而且这仅发生在历元后的 40 年。在这种情况下, 不可能用于计算日月食或星食。

以下 BASIC 小程序可以找出电脑的内部精度:

```
10 X=1
20 J=0
30 X=X*2
40 IF X+1<>X THEN 60
50 GOTO 80
60 J=J+1
70 GOTO 30
80 PRINT J, J*0.30103
90 END
```

这里, J 是浮点数的尾数部分的比特数, 而 $0.30103J$ 是 10 进制数的有效数字。常数 0.30103 是 $\log_{10}(2)$ 。例如, HP-85 计算机的 $J=39$, 因此是 11.7 位。在 HP-UX Technical Basic 5.0, 工作在 HP-Integral 微机, 我们得到 $J=52$, 因此是 15.6 位。QUICK-BASIC 4.5 中得到的是 $J=63$, 因此是 19.0 位。

不过, 这个精度指简单的算术运算的精度, 不是指三角函数。虽然日本东芝公司带 GWBASIC 电脑, $J=55$, 有 16.6 位有效数字, 但计算正弦时, 只有 7 位是正确的, 至少 9 位完全错误。

一种迅速检测三角函数计算精度的方法是 `PRINT 4*ATN(1)`。如果计算机工作在弧度制, 应得到一个著名的数 $\pi=3.14159265358979\cdots$ 或者, 可以计算一个某个角的正弦值, 该正弦值精确已知的, 例如:

$$\sin(0.61 \text{ 弧度}) = 0.57286746010048\cdots$$

计算机的舍入误差不是可避免的。例如，考虑这个值， $1/3=0.33333333\cdots$ 因为计算机不能处理无限小数，一个数字必须在某处截断。

从某次计算到下一次计算，舍入误差可能被积累。多数情况下，这是不要紧的，因为这种误差几乎可以忽略。但是，在某些算术应用中，这种误差积累可能无限制的增加，虽然这已超出本书的范围，不过，我们还要提到两种情况。

考虑以下程序：

```
10 X=1/3
20 FOR I=1 TO 30
30 X=(9*X+1)*X-1
40 PRINT I, X
50 NEXT I
60 END
```

第 30 行，实际上是将 x 赋值给它本身($1/3$ 赋值给 x)。可是，大部分计算机将得到无穷大的结果。用刚才提到的 HP-UX Technical Basic 得到：

```
4 步之后 0.333 333 333 333 308
14 步之后 0.333 326 162 117 054
19 步之后 0.215 899 338 763 055
24 步之后 286.423...
30 步之后, 其值为  $10^{217}$ 
```

不同的计算机的计算结果是不相同的，你甚至要以用手持式计算器做个测试：对 1.0000001 连续平方，27 次之后，10 位有效数字的结果应是 674530.4707。以下是一些电脑或程序语言得到的结果：

```
674 494.06 在 HP-67 计算器
674 514.87 在 HP-85 微机
674 520.61 在 TI-58 计算器
674 530.4755 在 HP-Integral (HP-UX Techn. Basic)
674 530.4755 在 QUICKBASIC 4.5
```

但是，故事还没结束。计算机用的数值信息有两种不同的基本表示方法。有些计算机，如老式的 HP-85，使用 BCD(二进制编码的 10 进制数)方案表示内部数值，而在其它的多数电脑中，使用二进制表示一个数。

BCD 编码方案是：对十进制数的每一位单独编码。这样，对于给定的计算机或程序设计言，所有的数字都可以被准确的表示了。另一方面，二进制编码，是用 2 的各次方的组合表示一个数。在二进制中，分数也是用 2 的各次方表示的，所以，不能用 2 的负次方的组合的分数不是能用二进制表示的。例如 $1/10$ 是不能用 2 的负次方组合得到，因为 $1/10 = 1/16 + 1/32 + 1/128 + \dots$

二进制算术运算比相应的 BCD 运算快得多，但是，有个不便之处就是，有些数(甚至是只有很少小数位的数)不能精确表示。

其后果是，算术运算的结果可能不正确，哪怕是只有一点点的误差。假设 $x=4.34$ ， $H=INT(100*(x-INT(x)))$ 的正确结果是 34，然而，很多计算机语言得到的结果是 33。原因是，此时计算机内部表示 x 的值为 4.3399999998，或其它类似的值。

另一个吃惊的例子： $2+0.2+0.2+0.2+0.2+0.2-3$

在很多计算机中，结果不是 0！在 HP-Integral 中，使用 HP-UX Technical Basic 5.0，得到的结果是 8.88×10^{-16} 。而在同样的电脑中，计算 $0.2+0.2+0.2+0.2+0.2+2-3$ 的结果却是 0，可见计算的顺序也是很重要的。让人惊讶的是，在 HP-Integral 中，使用以下程序计算 $2+(5*0.2)-3$ ，我们得到的结果零：

```
A=0.2+0.2+0.2+0.2+0.2
```

```
B=2+A
```

```
C=B-3
```

```
PRINT C
```

考虑以下程序：

```

10 FOR I=0 TO 100 STEP 0.1
20 U=I
30 NEXT I
40 PRINT U
50 END

```

这里，I 和 U 取值依次是 0 到 100，步长为 0.1，最后得到的 U 应是 100。在 HP-85 中的确是 100，但在 HP-Integral 却得到 99.999999999986，这在某些应用中可能造成灾难性的后果。这个误差是由于 0.1 转为二进制表示，相当于 0.0999999……，它与 0.1 相差很小，但是这里执行了 1000 步，最后的误差将放大了 1000 倍。在这种情况下，补救方法是，使用整数步长：

```

10 FOR J=0 TO 1000
20 I=J/10
30 U=I
40 NEXT J
50 PRINT U
60 END

```

我们发现另一个吃惊的结果：

```

A=3*(1/3)
PRINT INT(A)

```

在某些计算机中可能得到正确的结果 1，有些却得到 0。还可以试试这个例子：A = 0.1，PRINT INT(1000*A0)。

另一个有趣的测试：

```

INPUT A
B=A/10
C=10*B
PRINT A-C

```

结果应当是 0，但不同的 A 值，结果可能有点差别。

有一种简单的方法，判断计算机语言是否工作在 BCD：通过查找整型变量所表示的最大整数值来判断。如果这个最

大整数值是个“漂亮的整数”，那么表明机器工作在 BCD 编码。例如，在 HP-85 的最大整数是 99999(或 10^5-1)。但是，如果这个最大整数值是个陌生值(实际上它的 2 的 n 方，再减 1)，那么机器不是工作在 BCD。在早期的 TRS-80，最大整数是 32767(或 $2^{15}-1$)，HP-Integral 电脑上的 HP-UX Technical Basic 5.0 其最大整数是 2147483647(或 $2^{31}-1$)。

算术运算中的四舍五入，可能导至其它吃惊的结果。在多数微机中， $\text{sqrt}(25)-5$ 的结果不是 0！如果用这个结果作为关键测试值将是有问题的。根号 25 是个整数值吗？答案是否定的，因为计算机告诉我们 $\text{sqrt}(25)-\text{INT}(\text{sqr}(25))$ 不等零。

最后结果的舍入

结果应做舍入，保留正确的有意义的位数。

“舍入”是取“最近”的近似值。例如，15.88 取值为 15.9 或 16，不是 15。然而，日期或年的除外。例如，3 月 15.88 日，指“一个时刻”附加在 3 月 15 日上：指 3 月 15 日 0h 之后的 0.88 日。所以，一个事件发生在 3 月 15.88 日，是指发生在 3 月 15 日，而不是 3 月 16 日。类似的，1977.69 指 1977 年的某一时刻，而不是 1978 年。

只有“有意义”的数字应当保留。例如，计算木星的可视星等的 Muller 公式：

$$m = -8.93 + 5 \log(r\Delta)$$

式中 r 是木星到太阳的距离， Δ 它到地球的距离，二者的单位是天文单位，对数计算是以 10 为底的。在 1992 年 5 月 14 日 0h TD，我们有：

$$r = 5.417149, \Delta = 5.125382$$

因此， $m = -1.712514898$ 。但是，如果以电脑算出这样的结果为借口，保留了所有的数字，这是十分可笑的，而且读者可能误解为精度非常的高。因为 Muller 公式中的常数 -8.93 的精度在 0.01 量级，你不能期望结果的精度比它更高。另外，由于木星大气的气象变化也将造成行星的星等的精度

不超过 0.01 (甚至是 0.1)。

另一个例子，John Mosley 提到的用于计算天体升或降时刻的商用程序，精度是 0.1 秒钟，这也是不可能达到的精度。

一些“感觉”及相关天文知识是很需要的。例如，计算月亮圆面被照亮部分的比例时，完全没有必要精确到 0.000000001。

执行舍入处理，应在所有的计算完成之后，而不是在程序开始或数据输入时。

例如，计算 $1.4+1.4$ ，结果取整。如果我们一开始就执行舍入，我们得到 $1+1 = 2$ 。实际上 $1.4+1.4 = 2.8$ ，四舍五入后得 3。

这里有另外一个例子。海王星“冲”的日期 1996 年 7 月 18 日，赤纬 $\delta = -20^\circ 24'$ ，那么行该星经过南子午圈时，地平纬度 h_m 是多少？设观测站在德国 Someberg 天文台，纬度是 $\varphi = +50^\circ 23'$ ，结果精确到度。使用以下公式：

$$h_m = 90^\circ - \varphi + \delta$$

答案是： $h_m = 90^\circ - 50^\circ 23' - 20^\circ 24' = 19^\circ 13'$ 因此是 19°

如果在计算之前对 φ 和 δ 做舍入计算，将得到不正确的结果： $90^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 20^\circ$

再看一个类似的错误：先把距离舍入到英里，再转换为千米。例如，在这种情况下，17km 永远没有了，因为：

10 英里 = 16.09km，舍入后得 16km

11 英里 = 17.70km，舍入后得 18km

赤经和赤纬。——因为 24 小时对应 360 度，1 小时对应 15 度，时间 1 分钟对应角度 15 分 (注意，是 15m 而不是 15')，1 秒钟对应角度 1 秒 (即 1s 而不是 1'')，在 1 秒钟的时间内，地球自转了 15''。

正是由于这个原因，如果给出的天体赤纬精度为 1''，赤经的精度则应舍入到十分之一时秒，否则赤纬的精度将高于

赤经的精度。下表是赤经(α)和赤纬(δ)精度的大约对应关系。例如,如果 δ 的精度是 $1'$,那么 α 应给出 0.1^m 的精度。做为示例,表中还给出了 Nova Cygni 1975 的不同精度表示。

α	δ	例(Nova Cygni 1975)	
1^m	0.1°	$\alpha=21^h10^m$	$\delta=+47^\circ.9$
$0^m.1$	$1'$	$21^h09^m.9$	$+47^\circ57'$
1^s	$0.1'$	$21^h09^m53^s$	$+47^\circ56'.7$
$0^s.1$	$1''$	$21^h09^m52^s.89$	$+47^\circ56'41''$

最后注意,让我们讲述一下尾部的“0”,这很重要。例如, 18.0 与 18 是不同的。前者意味着真值介于 17.95 到 18.05 之间,而后者被舍入为整数,真值介于 17.5 到 18.5 之间。由于这个原因,为了表示精度,尾部的 0 必须给出:恒星的星等为 7 ,它与 7.00 是不同的。

参考资料

- 1、John Mosley,《天空和望远镜》,卷 78,第 300 页(1989 年 9 月)
- 2、F. Gruenberger,《科学美国人》,“电脑娱乐”,卷 250,第 10 页(1984 年 4 月)
- 3、John Mosley,《天空和望远镜》,卷 81,第 201 页(1991 年 2 月)

第三章 插值

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 19 日]

天文年历或其它出版物中包含了一些数值表,这些表是等间距离的 x 对应的 y 的值。如 y 是太阳的赤经, x 是该年各天的 0 时(TD)

插值是在表中寻找某个量(x 或 y)的中间值的过程。比如数据表中只给出某几个时刻的 y 值,要求其它时刻的 y 值就需考虑使用插值方法。

当然,刚才说的表不一定取自某一本书,也可以来正某

个程序。假设在同一天内，已计算出了多个时刻 (>3) 的太阳位置，比例我们算出某天 0h、12h 和 24h 的太阳位置，然后利用这些值为其它给定的时刻执行“插值计算”，进而得到相应的太阳位置，这将比直接计算太阳位置快得多。

本章将考虑两种情况：3 点插值和 5 点插值。这两种情况下，我们都将展示如何寻找函数的极值或零值。我们不考虑只有 2 点的插值，这种插值是线性的，一点也不困难。

◆三列表值（三节点插值）

函数的列表值 y_1 、 y_2 、 y_3 对应的 x 的值为 x_1 、 x_2 、 x_3 ，再让我们看如下差分表：

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & \\ & a & \\ x_2 & y_2 & c \quad (3.1) \\ & b & \\ x_3 & y_3 & \end{array}$$

式中 $a=y_2-y_1$ ， $b=y_3-y_2$ ，称为一阶差分。二阶差分为 $c=b-a$ ，即： $c = y_1 + y_3 - 2*y_2$

通常逐次差分的值会逐渐变小。当表中的某一部分的二次差为常数(即三次差分为 0)，就应使用三节点插值。这时还需要有一些常识和经验，例如，月亮的位置可以用每小时间隔的三点插值计算，但间隔 1 天则不行。

例如，让我们考虑 1992 年 11 月 5 日至 9 日（每天的 0h TD）火星到地球的距离。距离使用天文单位，差分值使用 0.000001 天文单位：

	1992 年 11 月 5	0.898013		
			-6904	
6		0.891109	+21	
			-6883	+2
7		0.884226	+23	
			-6860	+2
8		0.877366	+25	
			-6835	
9		0.870531		

三阶差分已几乎为零，我们可以使用三节点插值。

中间节点 x_2 应选在靠近我们要插值的 x 附近。例如，如果要用上表推算 11 月 7 日 22h 14m 的函数值，那么上表中 11 月 8.00 的值定为 y_2 ，因此我们考虑插值节点为 11 月 7、8、9 日，即：

$$\begin{aligned} 11 \text{ 月 } 7 \text{ 日 } y_1 &= 0.884226 \\ 11 \text{ 月 } 8 \text{ 日 } y_2 &= 0.877366 \\ 11 \text{ 月 } 9 \text{ 日 } y_3 &= 0.870531 \end{aligned} \quad (3.2)$$

差分为： $a = -0.006860$ $b = -0.006835$ $c = +0.000025$

设 n 是插值因子。如果函数值 y 是关于 x 参数的，那么 $n = x - x_2$ ，单位是节点的间隔。当 $x > x_2$ 时（即 x 的值在 x_2 到表底之间） n 为正。如果 x 在 x_2 之前，那么 $n < 0$ 。

当正确选择了 y_2 ，那么 n 将在 -0.5 到 0.5 之间，虽然 n 在 -1 到 1 之间以下公式仍然可以得到正确结果。

$$y = y_2 + (n/2) (a + b + nc) \quad (3.3)$$

例 3. a: 从表(3.2)，计算 1992 年 11 月 8 日 4h 21m TD 时的火星到地球的距离。我们有 4h 21m = 4.35 小时，表中的节点间隔为 1 天=24 小时，所以：

$$\begin{aligned} n &= 4.35/24 = +0.18125 \\ \text{由公式 (3.3) 得 } y &= 0.876125 \end{aligned}$$

极值

如果列表值在极值(最大值或最小值)附近，通过以下方

法可找到极值。让我们从差分表(3.1)是取得适当的部分星历，那么函数的极值是：

$$y_m = y_2 - (a+b)^2/(8c) \quad (3.4)$$

对应的 x 值是：

$$n_m = -(a+b)/(2c) \quad (3.5)$$

单位是表间隔，同样是从 x_2 开始测量的。

例 3. b: 计算 1992 年 5 月火星经过近日点的时刻及距离。

以下是每间隔 4 天太阳到火星的距离：

1992 年 5 月 12.0 TD 1.3814294

1992 年 5 月 16.0 TD 1.3812213

1992 年 5 月 20.0 TD 1.3812453

差分值为： $a = -0.0002081$ $b = +0.0000240$ $c = 0.0002321$

进而得到： $y_m = 1.3812030$ 和 $n_m = +0.39660$

因此，火星到太阳的最近距离是 1.3812030AU，对应的时刻是 0.39660 乘以 4 天(列表值的时间间隔)，即 1.58640 天，也就是在中点时刻之后 1 天 14 小时，相应的时间是 1992 年 5 月 17 日 14h TD。

当然，如果 n_m 是负值，极值时刻则在中点时刻之前。

插值逆求

选择(3.1)差分表中的适当部分星历，我们可以计算出函数值 $y=0$ 时对应的 x 值。下式可算出函数值为 0 时的插值因子：

$$n_o = -2y^2/(a + b + cn_o) \quad (3.6)$$

解方程(3.6)时，可先用 $n_o=0$ 代入方程右边，得到 n_o 的估值。这个估值再次代入方程的右边，将得到精度更好的 n_o ，这个过程叫做“迭代”(拉丁语：iterare = 重复)，我们可以反复迭代，直到 n_o 的值不再变化，到达计算机的精度。

例 3. c: 以下是水星的赤纬：

1973 年 2 月 26.0 TD $-0^\circ 28' 13''.4$

1973 年 2 月 27.0 TD $+0^\circ 06' 46''.3$

1973 年 2 月 28.0 TD +0°38'23".2

试计算赤纬为零的时刻。

先把列表值转为角秒单位并建立差分表：

$$y_1 = -1693.4$$

$$a = +2099.7$$

$$y_2 = +406.3 \quad c = -202.8$$

$$b = +1896.9$$

$$y_3 = +2303.2$$

由公式(3.6)得： $n_o = -812.6 / (+3996.6 - 202.8n_o)$

把 $n_o = 0$ 代入方程右边，得： $n_o = -0.20332$

重复计算，依次得到： -0.20125 和 -0.20127 。因此， $n_o = -0.20127$ 。又因列表间隔为 1 天，所以水星穿过天赤道时间在：

1973 年 2 月 27.0 - 0.20127 = 2 月 26.79873 = 2 月 26 日 19h 10m TD

计算函数值 y 为零时的插值因子 n_o 时，例 3 情形下，使用公式(3.6)效果非常好，因为此时的函数曲线几为是一条直线。然而，如果函数的曲率很大，使用该公式可能需要迭代很多次，此外，即使 n_o 的起步值比较精确也可能导致分歧。在这种情况下，可以使用以下更好的方法计算 n_o ，估计值 n_o 的修正量为：

$$\Delta n_o = -[2y_2 + n_o(a+b+cn_o)] / (a+b+2cn_o) \quad (3.7)$$

用新的 n_o 重量复迭代计算，直到 n_o 不再变化。

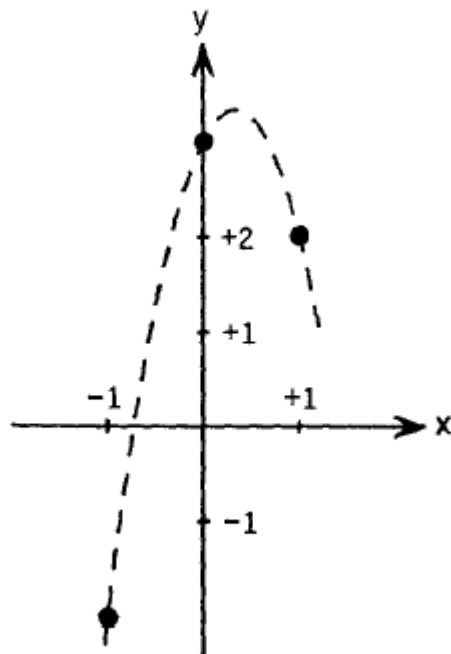
例 3. d: ——考虑以下函数值：

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -2$$

$$x_2 = 0 \quad y_2 = +3$$

$$x_3 = +1 \quad y_3 = +2$$

这三个点其实定义了一条抛物线： $y = 3 + 2x - 3x^2$ ，在 $x=-1$ 到 $x=+1$ 之间，它的曲率很大，见下图：



利用公式(3.6)，从 $n_0=0$ 开始迭代，结果依次是：

-1.5

-0.461538...

-0.886363...

-0.643902...

-0.763027...

-0.699450...

...

需要至少 24 次迭代才能到 6 位有效数字。但如果我们使用公式(3.7)，同样起步为 $n_0=0$ ，我们得到：

-1.5

-0.886363636364

-0.732001693959

-0.720818540935

-0.720759221726

-0.720759220056

-0.720759220056

只需 6 次迭代就得到了 12 位精度。

◆五列表值（5 节点插值）

当三阶差分不可忽略时，应必须使用多于 3 列表值。取连续的 5 个列表值 y_1 到 y_5 ，和前面一样，我们创建差分表：

	y_1				
		A			
	y_2		E		
		B		H	
n	y_3		F		K
\downarrow		C		J	
	y_4		G		
		D			
	y_5				

其中 $A = y_2 - y_1$, $H = F - E$, 等等。如果 n 是插值因子, 从 y_3 开始测量, 单位是表值的间隔, 向下 (y_4 方向) 为正, 则插值公式为:

$$y = y_3 + \frac{n}{2} (B + C) + \frac{n^2}{2} F + \frac{n(n^2 - 1)}{12} (H + J) + \frac{n^2(n^2 - 1)}{24} K$$

也可写为: (3.8)

$$y = y_3 + n \left(\frac{B + C}{2} - \frac{H + J}{12} \right) + n^2 \left(\frac{F}{2} - \frac{K}{24} \right) + n^3 \left(\frac{H + J}{12} \right) + n^4 \left(\frac{K}{24} \right)$$

例 3. e: ——考虑下表, 月球的赤道水平视差:

1992 年 2 月 27.0 TD 54'36".125

1992 年 2 月 27.5 54'24".606

1992 年 2 月 28.0 54'15".486

1992 年 2 月 28.5 54'08".694

1992 年 2 月 29.0 54'04".133

$A = -11.519$

$E = +2.399$

$B = -9.120$

$H = -0.071$

$F = +2.328$

$K = -0.026$

$C = -6.792$

$J = -0.097$

$G = +2.231$

$D = -4.561$

我们看到, 三阶差分 (H 和 J) 不可以忽略, 除非精度要

求 0".1 就已足够。

现在让我们计算 2 月 28 日 2h 20m TD 时月亮的是视差。
列表值的间隔是 12 小时，所以有：

$$n = (3h\ 20m)/12h = 3.333333/12 = +0.2777778$$

由公式(3.8)得：

$$y = 54'15''.486 - 2''.117 = 54'13''.369$$

函数的极值对应的插值因子 n_m 可通过解以下方程得到：

$$n_m = \frac{6B + 6C - H - J + 3n_m^2(H + J) + 2n_m^3K}{K - 12F} \quad (3.9)$$

和上面的一样，我们可以执行迭代。首次，把 $n_m = 0$ 代入方程右边。当我们最后得到 n_m 后，再通过(3.8)式得到相应的函数值。

最后，函数值为零时对应的插值因子 n_o 可由下式得到：

$$n_o = \frac{-24y_3 + n_o^2(K - 12F) - 2n_o^3(H + J) - n_o^4K}{2(6B + 6C - H - J)} \quad (3.10)$$

同样，可以通过迭代得到 n_o ，起步为 $n_o = 0$ 。

同公式(3.6)遇到同样的问题，当函数的曲率较大时，应使用更好的方法计算 n_o ，方法如下：

$$M = \frac{K}{24} \quad N = \frac{H + J}{12} \quad P = \frac{F}{2} - M \quad Q = \frac{B + C}{2} - N$$

对估值 n_o 的修正如下：

$$\Delta n_o = - \frac{Mn_o^4 + Nn_o^3 + Pn_o^2 + Qn_o + y_3}{4Mn_o^3 + 3Nn_o^2 + 2Pn_o + Q} \quad (3.11)$$

接下来，用新的 n_o 代入右边计算，如此重复，直到 n_o 不再变化。

练习：以下是水星的日心黄纬，请用公式(3.10)计算黄纬为 0 的时刻。

1988 年 1 月 25.0 TD $-1^{\circ}11'21''.23$

1988 年 1 月 26.0 TD $-0^{\circ}28'12''.31$

1988 年 1 月 27.0 TD $+0^{\circ}16'07''.02$

1988 年 1 月 28.0 TD $+1^{\circ}01'00''.13$

1988 年 1 月 29.0 TD $+1^{\circ}45'46''.33$

答案：水星经过其轨道升交点时， $n_0 = -0.361413$ ，即 1988 年 1 月 26.638587，或者写为：1 月 26 日 15h 20m TD
如果使用公式(3.6)得到 $n_0 = -0.362166$ ，与前面的比较，相差 0.000753 日（1.1 分钟）

重要注意事项：

1、执行插值时，不能直接使用“复合”量。这些量应事先转为单一的适合的单位。便如：角度表达为度分秒格式，在使用插值前，应把它们转为同一单位“度”（或者分或者秒）。

注：根据定义，“复合”数是指由不同单位组成的数，如以下几个都是“复合”数：10h 29m 55s； $23^{\circ}26'44''$ ；先令，便士；码，英尺，英寸； $a+bi$ 。

2、时间插值与赤经。——我们应当引起注意一个事实，当到达 24 小时，赤经跳为 0。在使用列表值进行插值时必须考虑到这一点。例如，假设我们要计算 1992 年 4 月 6.2743 TD 时刻水星的赤经，使用以下 3 个值：

1992 年 4 月 5.0 TD $\alpha=23^{\text{h}}51^{\text{m}}56^{\text{s}}.04$

1992 年 4 月 6.0 TD $23^{\text{h}}56^{\text{m}}28^{\text{s}}.49$

1992 年 4 月 7.0 TD $00^{\text{h}}01^{\text{m}}00^{\text{s}}.71$

不仅要把赤经转为带小数的小时数，还要把最后那个值写为 24h 01m 00s.71，否则机器认为，从 4 月 6.0 到 7.0，赤经 α 由 $23^{\text{h}}56^{\text{m}}\dots$ 变到 $0^{\text{h}}01^{\text{m}}\dots$

我们发现还有其它的类似情况。例如，以下是连续几天的太阳的中央子午圈经度：

1992 年 6 月 14.0	UT 37°.96
1992 年 6 月 15.0	24°.72
1992 年 6 月 16.0	11°.48
1992 年 6 月 17.0	358°.25

很明显，每天大约变化 -13.24 度。然而，但我们不能在 11.48 和 358.25 之间插值。应把前者写为 $271°.48$ ，或者把后者写为 -1.75 度。

3、要尽可能避免插值在 $|n| > 0.5$ 。在任何情况下，插值因子应限制在 -1 到 $+1$ 之间。计算函数极值点(n_m)或零值点(n_o)也有同样的限制。应按这种方式选择中央的 y ：列表值应靠近极值或零值。当然，事先我们并不知道 n_m 或 n_o 的准确值，但我们可以先算出估计值，之后即可根据估值确定中央值 (y_3 或 y_2)。

如果选择的值距离零点或极点太远，那么本章提供的相应公式将计算不正确，甚至是荒谬的结果。让我们给出一个例子。我们知道 $\sin(x)$ 在 $x=90$ 度时达到最大值。但让我们考虑以下含有 10 位有效数字正弦值：

$\sin 29^\circ$	0.4848096202
$\sin 30^\circ$	0.5000000000
$\sin 31^\circ$	0.5150380749
$\sin 32^\circ$	0.5299192642
$\sin 33^\circ$	0.5446390350

使用 3 节点插值，由公式 (3.4) 得 $y_m = 1.22827$ (而不是 1)，由 (3.5) 得到 $n_m = +95.35$ ，即极值是 $31^\circ + 95^\circ.35 = 126^\circ.35$ ，而不是 90° 。

使用 5 节点插值，由 (3.9) 式得 $n_m = +57.30$ ，因此最大值位于 $88^\circ.30$ ，相应的极值是 0.99348。虽然，这个结果比 3 节点插值要好得多，但仍然欠佳。

◆在中点插值

如果等间距横坐标 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 对应的函数值是 y_1 、 y_2 、 y_3 、 y_4 ，那么 x_2 到 x_3 之间的中点对应的函数值为：

$$y = [9(y_2+y_3) - y_1 - y_4] / 16 \quad (3.12)$$

3. f: ——以下是月亮的视赤经:

1994 年 3 月 25 日 08h TD $\alpha=10^h 18^m 48^s.732$

1994 年 3 月 25 日 10h TD $10^h 23^m 22^s.835$

1994 年 3 月 25 日 12h TD $10^h 27^m 57^s.247$

1994 年 3 月 25 日 14h TD $10^h 32^m 31^s.983$

试计算 11h 00m TD 时刻的赤经。

把 10h 后面的分秒转化“秒”单位, 得:

$$y_1 = 1128.734 \text{ 秒}$$

$$y_2 = 1402.835$$

$$y_3 = 1677.247$$

$$y_4 = 1951.983$$

由公式(3.12)得 $y = 1540.001 \text{ 秒} = 25m 40s.001$, 所以要求的赤经是 $\alpha=10h 25m 40s.001$ 。

◆横坐标不等间距插值公式: 拉格朗日插值公式

当给定的横坐标值(即 x 的值)是不等间距的, 可以使用拉格朗日插值公式。当然, 该公式也可以用于等间距的情况下。

这个简单的公式由法国数学家拉格朗日发现, 它使用 n 个点拟合一个 $n-1$ 次的多项式。如果给定的点是 (x_i, y_i) , $i=1$ 到 n , 那么对于给定的 x , 公式如下:

$$y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + \dots + y_n L_n \quad (3.13)$$

$$\text{式中 } L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

\prod 指将上式所有的分数($j=1$ 到 n)相乘, 但 $j=i$ 除外。即:

$$L_i = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

要注意的是，所有的 x_i 须是不同的点。
 以下 BASIC 程序可以使用。

```

10 DIM X(50), Y(50)
20 PRINT "NUMBER OF GIVEN POINTS = ";
30 INPUT N
40 IF N<2 OR N>50 THEN 20
50 PRINT
60 FOR I=1 TO N
70 PRINT "X, Y FOR POINT No. ";
80 INPUT X(I), Y(I)
90 IF I=1 THEN 30
100 FOR J=1 TO I-1
110 IF X(I)=X(J) THEN PRINT "THIS VALUE OF X HAS
ALREADY BEEN USED!":GOTO 70
120 NEXT J
130 NEXT I
140 PRINT : PRINT "POINT X FOR INTERPOLATION = ";
150 PRINT Z
160 V=0
170 FOR I=1 TO N
180 C=1
190 FOR J=1 TO N
200 IF J=I THEN 220
210 C=C*(Z-X(J))/(X(I)-X(J))
220 NEXT J
230 V=V+C*Y(I)
240 NEXT I
250 PRINT : PRINT "INTERPOLATED VALUE = ";V
260 PRINT : PRINT "STOP(0) OR INTERPOLATION
AGAIN(1)";
270 INPUT a
  
```

```

280 IF A=0 THEN STOP
290 IF a=1 THEN 140
300 GOTO 260

```

程序选请求你要输入的数据点的个数，并立刻让你输入。然后重复请求你感兴趣的中间值(x 的值)，程序返回每个插值。

拉格朗日插值的一个显著特征是，不要求点数据是按顺序的，也不要等间距。间距均匀时精度比较高。

作为一个例子，用以下 6 点数据调试程序：

x =角度(单位:度)	$y=\sin(x)$
29.43	0.491 359 8528
30.97	0.514 589 1926
27.69	0.464 687 5083
28.11	0.471 165 8342
31.58	0.523 688 5653
33.05	0.545 370 7057

当请求 30 度时的正弦值，可得到精确值 0.5。当 $x=0$ 度或 $x=90$ 度时，使用以上 6 个数据结合拉格朗日插值公式仍然可以得到很好的结果： $+0.0000482$ 和 $+1.00007$ ，对应的正确值是 0 和 1。

表达式(3.13)是一个 $n-1$ 阶的多项式，这是利用 y_1, y_2, \dots, y_n 所能得到的唯一的一个 $n-1$ 阶多项式（注：多项式插值具有唯一性）。但拉格朗日公式本身有个缺点，就是没有给出所需的数据点数量，以争取达到理想的精度。不过，当我们希望表达一个函数的明确的插值多项式是，而 x 又远离插值节点，那么使用拉格朗日公式是有益的。

例 3.g：——使用以下数据构造一个(唯一的)3 次多项式：

$x :$	1	3	4	6
$y :$	-6	6	9	15

把x和y的值代入(3.13)式得到：

$$y = (-6) \frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(1-3)(1-4)(1-6)} + (6) \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(3-1)(3-4)(3-6)} \\ + (9) \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-6)} + (15) \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(6-1)(6-3)(6-4)}$$

化简后得到：

$$y = \frac{1}{5} (x^3 - 13x^2 + 69x - 87)$$

第四章 曲线拟合

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 23 日]

在很多情况下，天文观测得到的数据是一组包含很大数量的序列点图象，每一点用 x 值和 y 值定义。这就可能需要画一条通过这些点的最佳拟合曲线。

有多种类型的曲线可以作为这些点的拟合曲线，如：直线、指数、多项式、对数曲线等。

为了避免只对个别数据分析，需要进行最佳曲线拟合。考虑图 1 的 N 个数据点，它们的坐标是 (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ..., (X_N, Y_N) 。假设这些值中的 X 是严格的精确值，Y 的值是测量值(含有一些误差)。

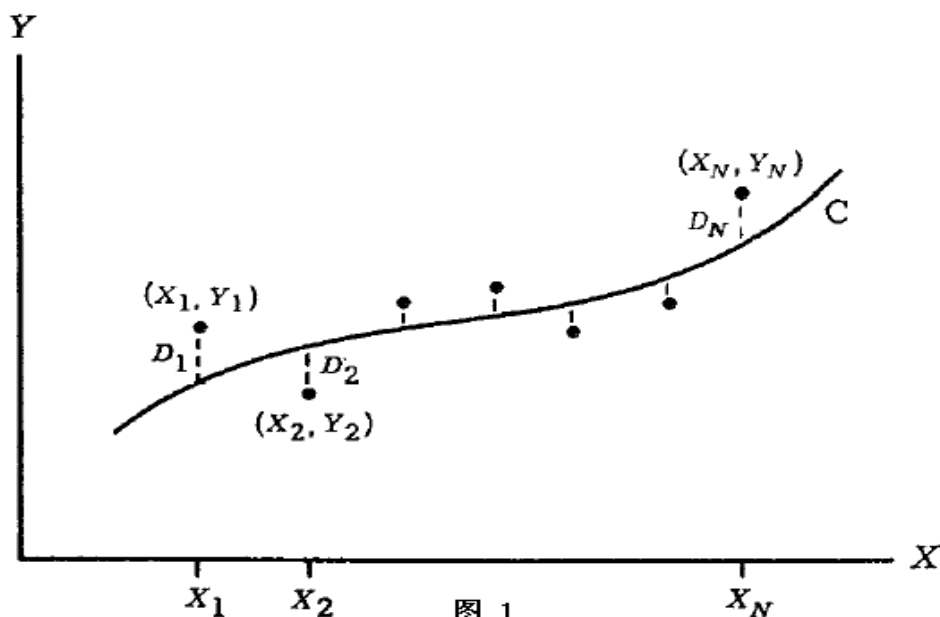


图 1

对于一个给定的 X ，如 X_1 ，对应的值 Y_1 与曲线 C 上对应的 Y 值将存在一个差值。在图中，我们用 D_1 表示这个差值，有时我们也称这个差值为偏差、误差或残差，它可能是正、负或零。类似的， X_2, \dots, X_N ，对应的差值为 D_2, \dots, D_N 。

我们用 $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$ 作为衡量曲线 C 拟合的“最佳”程度，这个值越小越好，越大则越不好。因此，我们做以下定义：任何一种类型的曲线，它们都有一个共同的特性，当 $\sum D_i^2$ 最小时，称为最佳拟合曲线。注： \sum 指“取和”计算。

一条曲线具有这一特性时，称之为“最小二乘拟合”，这样的曲线称为“最小二乘曲线”。

正如上面说的，我们假设各个 X 的值是精确的。当然，有时候我们会考虑再对 D_1, D_2, \dots, D_N 做一次最小二乘曲线拟合，不过，这不常用。

在本章，我们将考虑一个重要情形：拟合为一条直线，数学上称之为“线性回归”。“回归”一词看起来有点陌生，因为计算最佳曲线没什么好“回归”的，最好的术语就是“曲线拟合”，在直线情况下就是“线性曲线拟合”。

线性曲线拟合

我们希望使用最小二乘法计算出以下线性方程的系数（斜率 a 以及 y 轴的截距 b ）：

$$y = a \cdot x + b \quad (4.1)$$

a 和 b 可以使用以下公式计算：

$$\begin{aligned} a &= \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\ b &= \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

式中 N 是数据点的个数。注意，以上两式具有相同的分母， \sum 指逐项加法计算（取和）。 $\sum x$ 指对所有的 x 值求和， $\sum y$ 指对所有的 y 值求和， $\sum (x^2)$ 指对所有 x 的平方求和。 $\sum xy$

指对所有的积 xy 进行取和计算。应注意， $\sum xy$ 与 $\sum x * \sum y$ 是不相同的（“积的和”与“和的积”是不同的），同样 $(\sum x)^2$ 与 $\sum (x^2)$ 也是不相同的（“和的平方”与“平方的和”是不相同的）。

有个有趣的天文应用，找出某个慧星亮度与它到太阳距离之间的关系。慧星的视星等 m 一般用以下公式表示：

$$m = g + 5 * \log \Delta + k * \log r$$

式中， Δ 和 r 是距离，单位是天文单位，分别是慧星到地球和太阳的距离。 \log 是以 10 为底的对数。绝对星等 g 和系数 k 须由天文观测数据间接推导，可以在一个足够长的时期内测星出星等 m ，然后再用适当方法计算（下文将使用最小二乘法算出 g 和 k ）。为了更精确， r 的变化范围要足够大。对于每个 m ，相应的 Δ 和 r 须从星历表中推导出或者使用轨道要素计算出。

在这种情况下， g 和 k 是未知的。公式改写为：

$$m - 5 \log \Delta = k * \log r + g$$

它的形式与公式(4.1)相同，当我们写作 $y = m - 5 \log \Delta$ ， $x = \log(r)$ 。我们把 y 称为“日心”星等，因为慧星到地球的距离变化效果已被移除。

例 4. a: ——表 4. A 是 Wild2(1978b) 周期慧星的可视星等，John Bortle 提供的。对应的 r 和 Δ 已经利用轨道要素计算出。

用 x 和 y 计算各个和项： $\sum x$ ， $\sum y$ ， $\sum x^2$ 以及 $\sum xy$ 。我们得到：

$$N=19$$

$$\sum x = 4.2805 \quad \sum y = 192.0400$$

$$\sum x^2 = 1.0031 \quad \sum xy = 43.7943$$

因此，由公式(4.2)得 $a = 13.67$ ， $b = 7.03$

所以，这些观测值的最佳曲线拟合是： $y = 13.67x + 7.03$
或 $m - 5 \log \Delta = 13.67 \log r + 7.03$

表 4.A

1978, UT	m	r	Δ	$x = \log r$	$y = m - 5 \log \Delta$
Febr. 4.01	11.4	1.987	1.249	0.2982	10.92
5.00	11.5	1.981	1.252	0.2969	11.01
9.02	11.5	1.958	1.266	0.2918	10.99
10.02	11.3	1.952	1.270	0.2905	10.78
25.03	11.5	1.865	1.335	0.2707	10.87
March 7.07	11.5	1.809	1.382	0.2574	10.80
14.03	11.5	1.772	1.415	0.2485	10.75
30.05	11.0	1.693	1.487	0.2287	10.14
April 3.05	11.1	1.674	1.504	0.2238	10.21
10.06	10.9	1.643	1.532	0.2156	9.97
26.07	10.7	1.582	1.592	0.1992	9.69
May 1.08	10.6	1.566	1.610	0.1948	9.57
3.07	10.7	1.560	1.617	0.1931	9.66
8.07	10.7	1.545	1.634	0.1889	9.63
26.09	10.8	1.507	1.696	0.1781	9.65
28.09	10.6	1.504	1.703	0.1772	9.44
29.09	10.6	1.503	1.707	0.1770	9.44
June 2.10	10.5	1.498	1.721	0.1755	9.32
6.09	10.4	1.495	1.736	0.1746	9.20

因此，周期彗星 Wild2 在 1978 年的星等为： $m = 7.03 + 5 \log \Delta + 13.67 \log r$

关系系数（“互相关联程度”系数，概率论上称之为“相关系数”）

一个“关系系数”是指两个变量相互联系程度的统计测量值。对于线性方程，关系系数是：

$$r = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \sqrt{N \sum y^2 - (\sum y)^2}} \quad (4.3)$$

这个系数介于+1 到-1 之间。如果值为+1 或-1，说明 x 和 y 之间有完全的线性关系，所有的点(x, y)精确的在同一条直线上。如果 $r = +1$ ，y 随 x 增加而增加(如图 2)，如果 $r = -1$ ，也是一条直线，但 y 随 x 增加而减小(如图 3)。

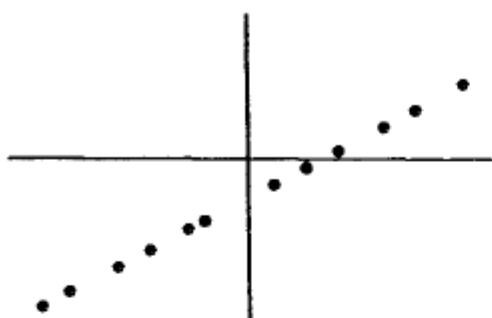


图2, 完美线性关系, 系数为正

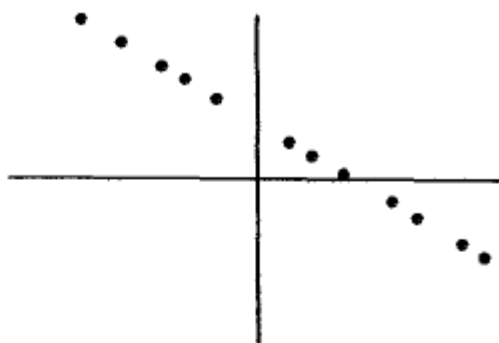


图3, 完美线性关系, 系数为负



图4, 没有关系

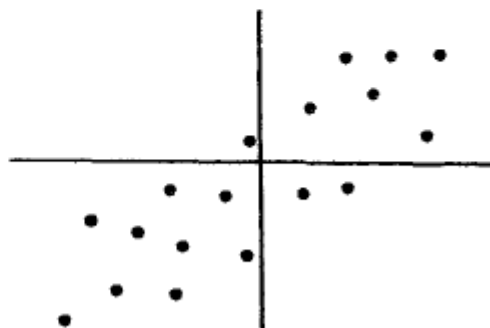


图5, 有点关系

当 $r=0$ ，x 和 y 之间就没有关系了(如图 4)。不过，在实践中，当数据没有联系时，我们得到的 r 可能没有精确为 0，这是由于一般会存在偶然因素，除非数据点无穷多个。

当 $|r|$ 在 0 到 1 之间，x 和 y 之间存在一定的“趋势”，虽然它们之间没有严格的关系(如图 5)。要注意，即使两个变是严格的线性关系，但我们计算的 r 值却可能不是精确

等于+1 或-1，那是因为测量值存在误差。

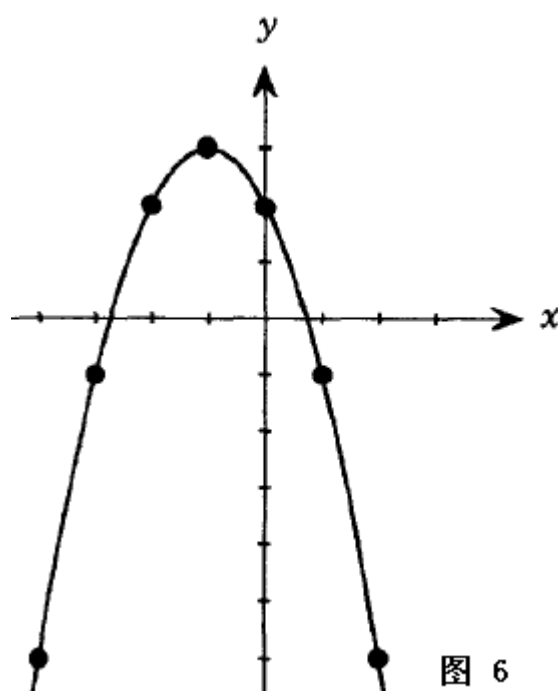
应当注意， r 的值是一个带小数的值，它没有单位。

r 的正负号仅告诉我们 y 是随 x 增加的还是减小的。事实上重要的不是符号，而是 r 的大小，因为 r 的大小表示直线逼近的程度。

需要强调的是，在任何情况下，计算值 r 是用来衡量数据点与函数(线性方程)的相关程度。因此，当 r 接近于 0，那么两个变量之间几乎线性无关，然而这不一定说明它们之间没有一点关系，因为它们可之间可能存在某种非常精确的非线性关系。做为一个例子，我们考查以下几个点：

x	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2
y	-6	-1	+2	+3	+2	-1	-6

由公式(4.3)得 $r=0$ ，而这些数据是精确的抛物线关系 $y = 2 - 2x - x*x$ ，如图 6。



还应指出，很高的“关系系数”(接近下+1 或-1)，不一定直接说明变量之间的“物理”关系紧密。因此，如果考虑管理领域的一个足够大量的数据，我们可以在各精神病院的

病床数量和电视接收机数量之间得到一个很高的“关系系数”。的确，它们具有很高的数学关系，但“物理”关系却是没有意义的。

例 4. b: ——表 4. B, 给出 1761 年到 1989 年, 22 次太阳黑子最大的情况。x 是时间间隔(单位是月), 从上一次太阳黑子最小算起。高度 y 是太阳黑子的最大值。

我们得到:

$$\sum x = 1120 \quad \sum y = 2578.9 \quad \sum xy = 122337.1$$

$$\sum x^2 = 60608 \quad \sum y^2 = 340225.91 \quad N = 22$$

然后由公式(4. 2)和(4. 1)得到:

$$y = 244.18 - 2.49x \qquad (4.4)$$

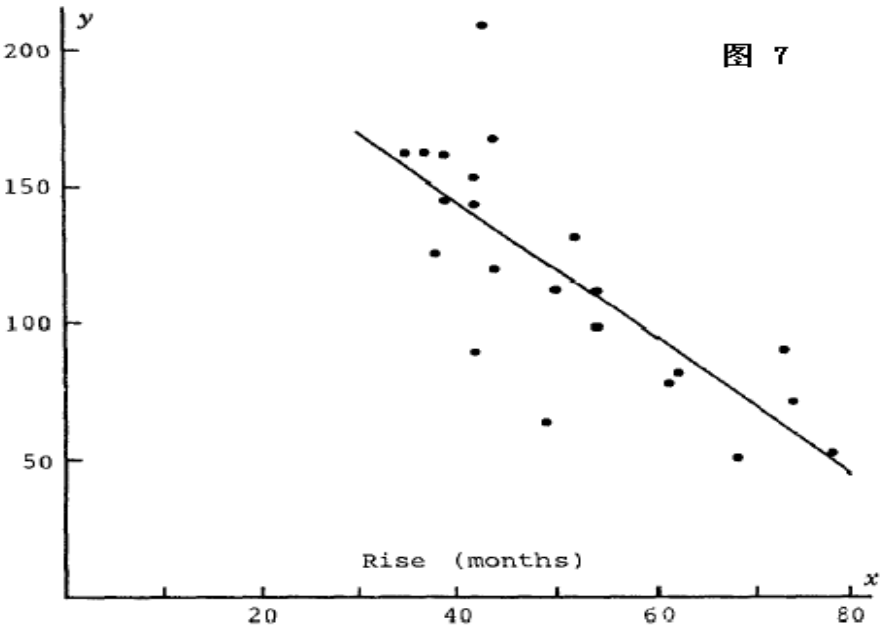


表 4. B

Epoch of maximum	x	y	Epoch of maximum	x	y
1761 June	73	90.4	1884 Jan.	61	78.1
1769 Oct.	38	125.3	1893 Aug.	42	89.5
1778 May	35	161.8	1905 Oct.	49	63.9
1787 Nov.	42	143.4	1917 Aug.	50	112.1
1804 Dec.	78	52.5	1928 June	62	82.0
1816 March	68	50.8	1937 May	44	119.8
1829 June	74	71.5	1947 July	39	161.2
1837 Febr.	42	152.8	1957 Nov.	43	208.4
1847 Nov.	52	131.3	1969 Febr.	54	111.6
1860 July	54	98.5	1979 Nov.	44	167.1
1870 July	39	144.8	1989 Oct.	37	162.1

方程(4.4)对应这 22 个点的最小二乘直线拟合。这些点和直线显示在图 7。

由公式(4.3)得 $r = -0.767$ 。这表明存在明显“关系”， r 是负值表明 x 和 y 的关系是负的：太阳黑子活动，从一个最小值达到下一个最大值的时间越长，太阳黑子的最大值则越小。

要注意，正如统计学研究的，为了得到一个有意义的结果，样品要足够大。如果基于很小的样品数，我们得到“关系系数”接近于 1 或-1，那是没有“物理”意义的。当样品数很小时，我们可能偶然得到很大的“关系系数”。

作为一个练习，请证实比利时 Uccle 天文台的降雨量与太阳黑子的活动无关。使用表 4.C 提供的数据，其中：

表 4.C

year	x	y	year	x	y	year	x	y
1901	2.7	700	1931	21.2	858	1961	53.9	903
1902	5.0	762	1932	11.1	858	1962	37.5	862
1903	24.4	854	1933	5.7	738	1963	27.9	713
1904	42.0	663	1934	8.7	707	1964	10.2	785
1905	63.5	912	1935	36.1	916	1965	15.1	1073
1906	53.8	821	1936	79.7	763	1966	47.0	1054
1907	62.0	622	1937	114.4	900	1967	93.8	707
1908	48.5	678	1938	109.6	711	1968	105.9	776
1909	43.9	842	1939	88.8	928	1969	105.5	776
1910	18.6	990	1940	67.8	837	1970	104.5	727
1911	5.7	741	1941	47.5	744	1971	66.6	691
1912	3.6	941	1942	30.6	841	1972	68.9	710
1913	1.4	801	1943	16.3	738	1973	38.0	690
1914	9.6	877	1944	9.6	766	1974	34.5	1039
1915	47.4	910	1945	33.2	745	1975	15.5	734
1916	57.1	1054	1946	92.6	861	1976	12.6	541
1917	103.9	851	1947	151.6	640	1977	27.5	855
1918	80.6	848	1948	136.3	792	1978	92.5	767
1919	63.6	980	1949	134.7	521	1979	155.4	839
1920	37.6	760	1950	83.9	951	1980	154.6	913
1921	26.1	417	1951	69.4	878	1981	140.5	1016
1922	14.2	938	1952	31.5	926	1982	115.9	800
1923	5.8	917	1953	13.9	557	1983	66.6	689
1924	16.7	849	1954	4.4	741	1984	45.9	931
1925	44.3	1075	1955	38.0	616	1985	17.9	758
1926	63.9	896	1956	141.7	795	1986	13.4	946
1927	69.0	837	1957	190.2	801	1987	29.2	908
1928	77.8	882	1958	184.8	834	1988	100.2	1005
1929	64.9	688	1959	159.0	560	1989	157.6	639
1930	35.7	953	1960	112.3	962	1990	142.6	759

x = 每年明显的 Zurich 太阳黑子数量， y = Uccle 每年的降雨量，单位是毫米。

答案：“关系系数” $r = -0.064$ ，这表时 x 和 y 之间没有关系。

如果去掉最后两点，系数(从 1901 到 1988 年)为 -0.027 。

二次曲线拟合

假设我们希望画一条逼近 N 个点的最佳二次曲线：

$$y = ax^2 + bx + c$$

这是一个纵轴的抛物线。

设： $P = \sum x$

$$Q = \sum x^2$$

$$R = \sum x^3$$

$$S = \sum x^4$$

$$T = \sum y$$

$$U = \sum xy$$

$$V = \sum x^2y$$

$$D = NQS + 2PQR - Q^3 - P^2S - NR^2 \quad (4.5)$$

我们得到：

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{NQV + PRT + PQU - Q^2T - P^2V - NRU}{D} \\ b &= \frac{NSU + PQV + QRT - Q^2U - PST - NRV}{D} \\ c &= \frac{QST + QRU + PRV - Q^2V - PSU - R^2T}{D} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

一般曲线拟合(多重线回归)

最佳线性拟合的原理可以被扩展到其它函数，这个函数可以含有超过两个未知的线性系数。

让我们考虑三个函数的线性组合的情况。假设我们已知：

$$y = a f_0(x) + b f_1(x) + c f_2(x)$$

式中 f_0 、 f_1 和 f_2 是三个关于 x 的已知函数，但系数 a 、 b 和 c 是未知的。此外，假设已知 3 个 x 对应的 y 值。那么系数 a 、 b 、 c 可按如下得到。

求和计算：

$$\begin{aligned} M &= \sum f_0^2 & U &= \sum y f_0 \\ P &= \sum f_0 f_1 & V &= \sum y f_1 \\ Q &= \sum f_0 f_2 & W &= \sum y f_2 \\ R &= \sum f_1^2 \\ S &= \sum f_1 f_2 \\ T &= \sum f_2^2 \end{aligned}$$

那么：

$$\left. \begin{aligned} D &= MRT + 2PQS - MS^2 - RQ^2 - TP^2 \\ a &= \frac{U(RT - S^2) + V(QS - PT) + W(PS - QR)}{D} \\ b &= \frac{U(SQ - PT) + V(MT - Q^2) + W(PQ - MS)}{D} \\ c &= \frac{U(PS - RQ) + V(PQ - MS) + W(MR - P^2)}{D} \end{aligned} \right\} (4.7)$$

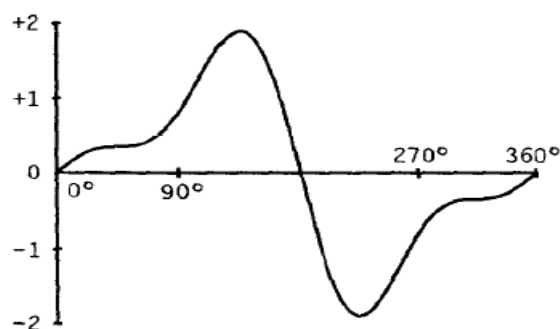
例 4.c：——已知 y 表达为：

$$y = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x$$

并且 y 的值如下：

x (度)	y
3	0.0433
20	0.2532
34	0.3386
50	0.3560
75	0.4983
88	0.7577
111	1.4585
129	1.8628
143	1.8264
160	1.2431
183	-0.2043
200	-1.2431
218	-1.8422
230	-1.8726
248	-1.4889
269	-0.8372
290	-0.4377
303	-0.3640
320	-0.3508
344	-0.2126

y 的值如下：



我们把这道题留着。最后答案是：

$$y = 1.2 \sin x - 0.77 \sin 2x + 0.39 \sin 3x$$

它的图像见上图。

读者无须得到 1.2、-0.77、+0.39 的精确数，因为表中的 y 值只给出了 4 位有效数字。

让我们考虑一种特殊的情况：

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{令：} f_0=x^2, f_1=x, f_2=1$$

这样算得 $T = N$ (N 是给定的点数)， $Q=R$ ，这样，由公式(4.7)就可推导出(4.5)和(4.6)，只是所用的字母符号不同。

另一种特殊情况，考虑 $y=a*f(x)$ ，只有一个未知系数。我们容易得到：

$$a = \Sigma y \cdot f / \Sigma f^2 \quad (4.8)$$

例 4. d:

$$y = a*\text{sqrt}(x) \quad (x \geq 0)$$

寻找经过以下数据点的最佳曲线拟合：

x:	0	1	2	3	4	5
y:	0	1.2	1.4	1.7	2.1	2.2

这里 $f(x)=\text{sqrt}(x)$ ，所以 Σf^2 只是简单的对 x 求和，由公式(4.8)得： $a = 15.2437/15$

所以，所需的函数是： $y = 1.016*\text{sqrt}(x)$

参考资料

1. Helmut Alt, Angewandte Mathematik, Finanz-Mathematik, Statistik, Informatik für UPN-Rechner, P. 125 (Vieweg, Braunschweig, 1979)。

2. 国际天文联合会 3177 号通告(1978 年 2 月 24 日)。

第五章 迭代

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 24 日]

迭代(英语 Iteration 译为迭代, 来自拉丁语 Iterare = 重复)是一种“重复计算数次, 直到未知量算出为止”的方法。通常, 在每次重复计算后, 结果将更接近正确解。我们已经看到, [第 3 章](#)中, 解方程(3.6)、(3.7)、(3.9)、(3.10)、(3.11)时已经使用了迭代方法。

当找不到直接的容易的方法求解未知量时, 可以考虑使用迭代法。例如:

五次方程: $x^5 + 17x - 8 = 0$

对于给定的地表上的某一位置, 计算日食(或月亮对恒星的星食)的起止时刻

求解开普勒方程 $E = M + e \sin(E)$ (见[第 29 章](#)), 式中 E 是未知量。

执行一次迭代, 为了取得更好的未知量结果, 需要未知量的起始估计值, 并代入一个迭代公式或公式组。重复这一过程(即迭代), 直到达到了所需的精度。

一个古老的例子是, 计算一个数的平方根, 计算过程如下。当然, 今天, 我们可能对此失去兴趣(除了某些特殊情况), 因为所有的珍袖计算器及所有的计算机语言都含有开方函数。

设我们要对 N 进行开方, 其开方根的初始估值是 n , 如果无法知道初始估值, 不妨取 1。算出 N/n 与 n 的算术平均值, 那么开方根的更好的估值是 $(n + N/n)/2$ 。然后重复上述计算。

例 5. a: 计算 $\text{sqrt}(159)$, 取 8 位有效数字。

我们知道 $12 \times 12 = 144$, 所以可以用 12 作为 $\text{sqrt}(159)$ 的估值。用 159 除 12, 得到 13.2500。那么 12 与 13.2500 的算术平均值是 12.6250, 这就是更好的估值。

我们现在用 159 除 12.6250，得到 12.59406，12.59406 与 12.6250 的平均值是 12.60953，这个值将更准确了。

依这种方法，我们依次得到：

12 = 开始值

12.62500000

12.60952971

12.60952022

12.60952022

我们看到 12.60952022 到 12.60952022 已不再变化，所以这就是 159 的平方根。

例 5. b: 计算以下方程的真根。

$$x^5 + 17x - 8 = 0 \quad (5.1)$$

因为 5 次方程的根，没有直接解法或公式可以使用，我们求助迭代法。在方程(5.1)中，我们反 x 的 5 次方移到方程右边，得到：

$$x = (8 - x^5)/17 \quad (5.2)$$

现在，方程右边也含有未知量 x ，但不要紧，我们看到，用 $x = 0$ 作为初值代入右边，公式(5.2)得到：

$$x = 8/17 = 0.470\ 588\ 235$$

此值，已经比 $x=0$ 要准确了。现在，我们把 $x=0.470588235$ 再次代入方程右边，得到 $x=0.469230684$ 。在 4 次迭代后，我们得到确定值，即 $x=0.469249878$ 。

然而，迭代法并不总是没有问题，以下用一个例子说明。

例 5. c: 考虑方程 $x^5 + 3x - 8 = 0$

和前面的例子一样，把 x^5 移到方程右边，得到：

$$x = 8 - x^5$$

从 $x = 0$ 开始，我们依次得到：

0.0000(开始值)

2.6667

-42.2826
45049099
 -6.18×10^{37}
等等...

可见，在这种情况下，此方法不能正常工作。结果是无穷大，其绝对值越变越大，走向错误的方向。

为什么这种方法适用于“例 5. b”，而不适用于“例 5. c”？当 x 在 0 到 1 之间， x^5 也在 0 到 1 之间，并且 x^5 小于 x ，这就是“例 5. b”逐次迭代能够收敛于一个明确数值(方程的根)的原因。这个根在 0 到 1 之间。

但是，我们看到，例 5. c 方程的根大于 1。当 $x > 1$ 时， $x^5 > x > 1$ (如 $x=2$ ，则有 $x^5=32$)， x 微小的变化，将引起 x^5 很大的变化。因此，执行与“例 5. b”相同的方法却不能收敛于所需的结果，逐次迭代的结果是发散的。然而，如果我们把迭代公式改写为其它形式，仍然可以得到答案。

例 5. d: 让我们再次考虑方程 $x^5+3x-8=0$ ，但是，我们考虑这个事实，方程的根大于 1， $x^5 > x$ 。因此，我们不能把 x^5 直接移到方程的右边。相反，我们把 x^5 保留在方程的左边，所以方程变为：

$$x^5 = 8 - 3x \text{ 或 } x = \sqrt[5]{8 - 3x}$$

初始取 $x=0$ ，通过 14 次迭代后，我们得到方程的根为 $x=1.321785627$ 。

在例 5. b 中，我们寻找方程的根：

$$x^5 + 17x - 8 = 0$$

然而，我们可以改写方程为：

$$x(x^4 + 17) = 8, \text{ 因此 } x = 8 / (x^4 + 17)$$

我们现在可能使用最后这个式子代替 (5. 2) 式。做为一个例子，你可以用迭代法解这个方程，你将得到与“例 5. b”

相同的结果。

如果我们希望使用同样的方法处理“例 5.C”的方程，可以得到以下迭代算式：

$$x = 8/(x^4+3)$$

用 $x = 0$ 做为初始值代入方程右边，得到 $x=8/3=2.666\dots$ 。我们将惊喜地发现：几次迭代之后，结果很快的由 2.666223459 变到 0.149436927。由此，我们看到，并不是所有情况下都能迭代成功，它依赖于迭代公式。

再来看一个例子，考虑方程： $\sin\varphi=3\cos\varphi$ 。把 $\varphi=0^\circ$ 代入方程的右边，得到 $\sin\varphi=3$ ，显然不合理。相反，用 $\varphi=90^\circ$ 代入方程右边，得到 $\sin\varphi=0$ ，从而得到 $\varphi=0^\circ$ ，如此继续迭代，则又回到了第一种情况案。

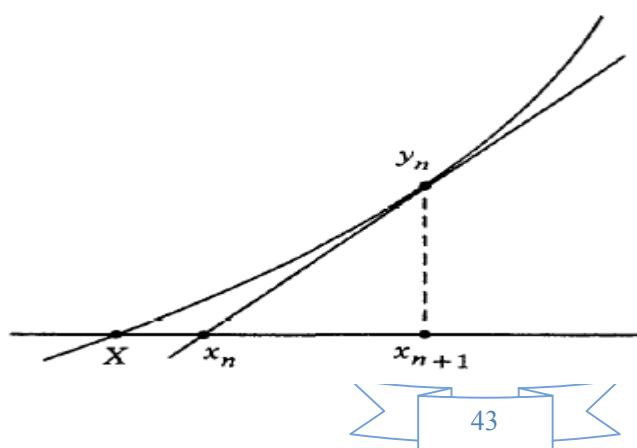
但是，如果我们把方程改写为 $\cos\varphi=(\sin\varphi)/3$ ，用 $\varphi=0^\circ$ 起步，几次迭代后最后将得到 $\varphi=71^\circ.565051$ 。

或者，考虑一下方程 $\sin\varphi=\cos 2\varphi$ 。解为 30° ，因为 $\sin 30^\circ = \cos 30^\circ$ 。如果我们用 $\varphi=29^\circ$ 代入方程右边，我们发现之后的迭代是发散的。但是，如果方程改写为 $\cos 2\varphi=\sin\varphi$ ，那么迭代是收敛的。

为了进一步说明迭代过程，让我们考虑一下含单一未知量方程的牛顿寻根法。

设 $f(x)$ 是关于 x 的函数，我们要求解 $f(x)=0$ 时 x 的值。设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数。如果 x_n 是方程根的估值，然后计算出 $f(x)$ 的函数值 y_n 以及相应的导函数 $f'(x)$ 值 y'_n ，其中， y'_n 是曲函数曲线在 x_n 点的切线的斜率，详见下图。那么，方程根的更好估值是：

$$x_{n+1} = x_n - y_n/y'_n$$



然后，用这个新的估值重复计算，直到 x 达到所需的值。
 在这一过程中，选择良好的起步 x 值，是个关键问题。
 例如，方程 $x^5 - 3x - 8 = 0$ ，其导函数是 $5x^4 - 3$ ，如果起步值取 $x = 0$ ，我们将得到以下摆动值：

0.000 000 000
 -2.666 666 667
 -2.126 929 222
 -1.672 392 941
 -1.227 532 073
 -0.376 965 299
 -2.749 036 974
 -2.194 266 642
 -1.731 201 846
 -1.293 218 530
 -0.588 844 800
 -3.216 865 068
 -2.572 967 057
 -2.049 930 313
 -1.603 831 482
 -1.145 086 797

原因是，函数在 $x = -0.88$ 时达到最大值，所以，在该点两边，其切线的斜率方向是相反的。

但是，如果起步值使用 $x = 1$ ，那么通过 11 次迭代后，即可得到 9 位有效数它的正确值。

+1.000 000 000
 +6.000 000 000
 +4.803 458 391
 +3.850 111 311
 +3.095 824 107
 +2.510 476 381

```

+2.080 081 724
+1.807 461 730
+1.690 945 284
+1.671 102 262
+1.670 579 511
+1.670 579 156
+1.670 579 156

```

用“小于”判断结果

以上描述的迭代方法——重复计算，直到结果不再变化。换句话说，只要最后一个结果与上一个结果不同，新的迭代就必须继续执行。但由于计算机本身有截断误差，这样做会有点问题。

考虑以下 3 次方程： $s^3 + 3s - W = 0$

该式用于抛物线轨道计算(详见第 33 章)。式中， W 一个给定的常数，而 s 是未知量。这个方程可以很容易地使用迭代法求解。用任意值起步，一个良好的选择是 $s=0$ ，然后， s 更好的值是：

$$(2s^3 + W) / [3(s^2+1)]$$

经过几次迭即可获得正确结果。比较，取 $W=0.9$ ，在 HP-85 微机上执行，依次得到以下结果：

```

0.000 000 000 000
0.300 000 000 000
0.291 743 119 266
0.291 724 443 641
0.291 724 433 546
0.291 724 433 548
0.291 724 433 548

```

因此，12 位有效数字的精确结果是 0.291724443548。但是，当 $W=1.5$ 时，在同样的微机上执行，我们惊的发现：程序不会停止，结果如下：

0.000 000 000 000
0.500 000 000 000
0.466 666 666 667
0.466 220 600 162
0.466 220 523 909
0.466 220 523 911
0.466 220 523 910
0.466 220 523 908
0.466 220 523 911
0.466 220 523 910
0.466 220 523 908

永远重复着：...911，...910，...908。然而，相同的计算，我们拿到另外两种计算机上执行，迭代过程却是收敛的，可换个 W 的值，又不敛了。

这个问题的补救方法：用“小于”代替“等于”来判断是否继续迭代。即，如果新迭代结果与上一次结果之差的绝对值，小于某个给定值(如 10^{-10})，就停止迭代。

二分法

这是一种绝对可靠的方法，因为它既不会失控也不会发散，总会收敛于计算机所能达到的最高精度的一个确值。这种方式不必寻找“下一个更佳的根的表达式”，它仅使用“二分查找”确定方程的根。

让我们重新考虑“例 5.b”的方程 $x^5+17x-8=0$ ，并借此阐述二分法。

当 $x=0$ 和 $x=1$ 时，方程左边的值分别是 -8 和 $+10$ 。所以我们知道，方程的根介于 0 到 1 之间。

现在，让我们尝试 $x=0.5$ ，它是 0 和 1 的算术平均值。当 $x=0.5$ 时，函数值为 $+0.53125$ ，它与 $x=0$ 时的函数值的符号相反，所以，现在我们知道，方程的根介于 0 到 0.5 （**注 1**）。

[**注 1**：只有在连续区间才是正确的。如， $\tan 86^\circ > 0$ 和

$\tan 93^\circ < 0$ ，我们无法在 86° 与 93° 之间确定 $\tan(x)=0$ 时的 x 的值。]

我们再尝试 $x=0.25$ ，它是 0 和 0.25 的算术平均值。其余类推。

每执行一步，根所在的区间减小一半。32 步之后，将得到很高的精度。在例“5.b”中，获得同样的精度仅需 6 步，但是，我们已经指出，二分法是绝对安全的，在“普通”迭代法失效的情况下它也可能使用。

对于二分法，我们知道，前进 n 步后的精度是：初始区间宽度除以 2^n

以上的那个例子，用二分法求解的 BASIC 程序如下。其中第 60 行并不是真正需要的，它展示了 x 逐步逼近的过程。

```
10 DEF FNA(X) = X*(X^4+17)-8
20 X1 = 0 : Y1 = FNA(X1)
30 X2 = 1 : Y2 = FNA(X2)
40 FOR J=1 TO 33
50 X = (X1+X2)/2
60 PRINT J, X
70 Y = FNA(X)
80 IF Y=0 THEN PRINT J, X : END
90 IF Y*Y1>0 THEN 120
100 X2 = X : Y2 = Y
110 GOTO 130
120 X1 = X : Y1 = Y
130 NEXT J
140 END
```

第六章 排序

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 24 日]

计算机不仅是计算的机器，它还可存贮并处理数据。比

如，它可以重新排序数据，排序是计算机用户普遍使用的。例如，在天文学中：按赤经或赤纬排序恒星；按年代顺序排序；按半长轴排序小行星，或按字母顺序排序。有各种不同的排序方法。在本章，我们将给出 3 种方法，提供 BASIC 程序，并比较计算时间。

一种最简单的排序方法，在表 6. A 中的“最简单排序”。我们开始从 N 个数据 $X(1)$ 、 $X(2)$ 、 \dots ， $X(N)$ 。这些数据可以是任意的，相同的数据可以出现多次。

在执行这段程序之后，数组 $X(I)$ 是按各升序排列的。如果希望它们按降序排列，在 120 行把“ $>=$ ”换为“ $<=$ ”即可，或者把 $X(I)$ 换为 $-X(I)$ 。

每执行一步，交换两个元素。依次，最小的元素置前($I=1$ 时)，然后下一个，等等，最后是 $N-1$ 。注意 100 行，索引 I 只到 $N-1$ ，而不是 N 。

这种方法也叫做“插入法”。当然，对 N 个数排序所需的时间取决计算机的型号及程序设计语言，但是任何情况下时间开销大约与 N 的平方成正比。这就意味着，这种方法不适合 N 很大的情况。

表中名为“较好”的排序方法，速度快一些，但时间开销还是与 N 的平方成正比。这种排序方法很简单：找到较小的元素，就交换这两个元素，使小的置前。

当数据量很大时，可以使用一种更好的方法，称为“快速排序”，它是 C. A. R. Hoare 发明的。这种排序程序比较长，但计算时间非常少。另外，当 N 足够大，计算时间大约与 N 成正比，而不是 N 的平方(实际上，它接近与 $N \cdot \log(N)$ 成正比)。

“快速排序”技术需要两个较小的一维辅助数组： $L(M)$ 和 $R(M)$ 。 M 至少取大于 $\log_2(N)$ 的整数(\log_2 是指以 2 为底的对数)。对于所有实际应用， M 取 30 显然足够了。

表 6. A 三种排序(BASIC语言)

简单排序(插入排序)	快速排序
<pre> 100 FOR I = 1 TO N-1 110 FOR J = I+1 TO N 120 IF X(J) >= X(I) THEN 160 130 A = X(I) 140 X(I) = X(J) 150 X(J) = A 160 NEXT J 170 NEXT I </pre>	<pre> 100 DIM L(30), R(30) 110 S = 1 : L(1) = 1 : R(1) = N 120 L = L(S) : R = R(S) 130 S = S-1 140 I = L : J = R 150 V = X(INT((L+R)/2)) 160 IF X(I) >= V THEN 190 170 I = I+1 180 GOTO 160 190 IF V >= X(J) THEN 220 200 J = J-1 210 GOTO 190 220 IF I > J THEN 250 230 W = X(I) : X(I) = X(J) : X(J) = W 240 I = I+1 : J = J-1 250 IF I <= J THEN 160 260 IF J-L < R-I THEN 320 270 IF L >= J THEN 300 280 S = S+1 290 L(S) = L : R(S) = J 300 L = I 310 GOTO 360 320 IF I >= R THEN 350 330 S = S+1 340 L(S) = I : R(S) = R 350 R = J 360 IF L < R THEN 140 370 IF S <> 0 THEN 120 </pre>
较好的(还是插入排序)	
<pre> 100 FOR I = 1 TO N-1 110 M = X(I) 120 K = I 130 FOR J = I+1 TO N 140 IF X(J) < M THEN M = X(J) : K = J 150 NEXT J 160 A = X(I) : X(I) = M : X(K) = A 170 NEXT I </pre>	

在表 6. B 中, 我们描述了, 在 HP-85 微机上, 以上三种程序在不同 N 值下的时间开销。正如我们已经说过的, 在不同的计算机上, 这个时间开销有所不同, 但不管怎样, 我们发现, 除了“快速排序”算法, 时间开销随 N 的增加而迅速增加。

表 6. B
三种算法的时间开销(秒), HP-85微机上

N	SIMPLE SORT	BETTER	QUICKSORT
10	0.73	0.51	0.70
20	3.92	2.11	1.84
40	15.4	7.81	4.43
60	38.0	17.0	8.63
80	63.8	29.1	11.3
100	104.3	44.6	14.6
150	254	98.6	24.1
200	453	174	32.9
300	1002	387	56.7
500			97.7
1000			218
1500			342
2000			472

为了使我们对大数据量排序的速度有个概念，我们使用了更快的计算机，并且把这些程序改写为 FORTRAN 语言。测度结果如表 6.C，在此，快速排序的优势是很显的。当 $N=300$ ，“快速排序”的时间开销仅是“较好排序”的 15%，当 $N=1500$ 时，仅为 1%。

表 6.C
三种算法的时间开销比较，在“大”的计算机上

N	SIMPLE SORT	BETTER	QUICKSORT
1 000	13	10	< 1
2 000	51	40	1
3 000	114	90	1
4 000	206	159	2
5 000	321	249	2
10 000	1272	994	5
15 000		2236	7
20 000			10
25 000			12
30 000			15

有时情况下，我们甚至不用编写排序程序。例如，在 TRS-80 I 型电脑上已经包含有排序函数，对 1000 个数排序仅需 9 秒，8000 个数仅需 83 秒，这表明其排序时间开销大约与 N 成正比，而不是 N 的平方，所以该函数很可能使用了“快速排序”算法。

结论：当数据量不大时(如 $N < 200$)，我们推荐使用“插入排序”(即上面说的“简单排序”)，当数据量很大时，应单使用“快速排序”。

另外，数据常以字串类型存贮，如 $X\$(1) = \text{"Ceres"}$ 、 $X\$(2) = \text{"Pallas"}$ 等。每个字符都有一个序号值(内码)。所有的字符构成以下列表，称为 ASCII 表，表 6.D 给出了 ASCII 表的一部分。

ASCII = American Standard Code for Information

Interchange]

表 6.D 可视的ASCII字符
每个字符都对应一个十进制数

space	32	8	56	p	80	h	104
!	33	9	57	q	81	i	105
"	34	:	58	r	82	j	106
#	35	;	59	s	83	k	107
\$	36	<	60	t	84	l	108
%	37	=	61	u	85	m	109
&	38	>	62	v	86	n	110
'	39	?	63	w	87	o	111
(40	@	64	x	88	p	112
)	41	A	65	y	89	q	113
*	42	B	66	z	90	r	114
+	43	C	67	[91	s	115
,	44	D	68	\	92	t	116
-	45	E	69]	93	u	117
.	46	F	70	^	94	v	118
/	47	G	71	_	95	w	119
0	48	H	72	`	96	x	120
1	49	I	73	a	97	y	121
2	50	J	74	b	98	z	122
3	51	K	75	c	99	{	123
4	52	L	76	d	100		124
5	53	M	77	e	101	}	125
6	54	N	78	f	102	~	126
7	55	O	79	g	103		

第七章 儒略日

[本章牧夫会员 liya 翻译，本人仅对文中的少量错误修正]

本章中我们将给出一种方法，将儒略历或格里高利历中的日期转换成相应的儒略日数（JD），以及反向转换。

概述

儒略日数（简称儒略日），是指从公元-4712 年开始连续计算日数得出的天数及不满一日的小数，通常记为 JD (**)。传统上儒略日的计数是从格林尼治平午，即世界时 12 点开始的。若以力学时（或历书时）为标尺，这种计数通常表达为“儒略历书日”，即 JDE (**)，其中 E 只是一种表征，即按每天 86400 个标准秒长严格地计日。例如：

1977 年 4 月 26.4 日 $UT = JD\ 2443\ 259.9$

1977 年 4 月 26.4 日 $TD = JDE\ 2443\ 259.9$

在下面将要描述的方法中，我们得考虑将其它历日换算为格里高利历日期。因而，1582 年 10 月 4 日（儒略历）的下一日为 1582 年 10 月 15 日（格里高利历）。

格里高利历并非在所有国家迅速得到一致采用，这一点在历史研究中要引起注意。例如在大不列颠，晚至公元 1752 年才变更历法，而土耳其则要等到 1927 年。

儒略历由尤里乌斯·恺撒于公元前 45 年在罗马帝国创立，而其最终形式确立于公元 8 年前后，尽管如此，我们仍可以借助天文学家的演算无止境地向前推算儒略历。比如在这一系统中，我们可以说某次日食发生在公元前 1203 年 8 月 28 日，虽然在那个遥远的年代，罗马帝国根本还未被创建，而 8 月这个月份更有待设立。

对于公元 1 年之前的年份如何计数，天文学家同历史学家并不一致。在本书中，“公元前”的年份以天文方法计数。这样，+1 年的前一年为 0 年，再之前才是 -1 年。所以历史学家所说的公元前 585 年实际上是 -584 年。

天文上以负数计数年份只是为算术目的起见。比如，在历史学计数中的，可被 4 整除的年份为儒略历闰年这个规则不再有效了。虽然像公元前 1, 5, 9, 13, ... 这些年份的确也在天文学上的闰年序列中，然而它们却被记为 0, -4, -8, -12 ..., 它们都能被 4 整除。

我们以 $INT(x)$ 来表示数 x 的整数部分，即小数点前的整数。例如：

$$INT(7/4) = 1 \quad INT(5.02) = 5$$

$$INT(8/4) = 2 \quad INT(5.9999) = 5$$

这里负数可能会造成些问题。在某些计算机或程序语言中， $INT(x)$ 为小于等于 x 的最大整数。那样的话就有 $INT(-7.83) = -8$ ，因为 -7 的确比 -7.83 大。如果你的程序是 javascript，取整函数是 $Math.floor(x)$ ，它返回小于等

于 x 的最大整数。如果你用的是 C++，那么用 $(\text{int})x$ 强制转换，得到的是整数部分。

但在其它一些语言中， INT 为所给数的整数部分，也即小数点前的部分。这样就有 $\text{INT}(-7.83) = -7$ ，这被称为舍位(Truncation)。某些程序包含了这两项功能：表示前一种涵义的 $\text{INT}(x)$ 以及 $\text{TRUNC}(x)$ 。

因此，对负数进行取整时要特别注意（对正数，二者所得结果一致）。在本书给出的算式中， INT 的使用总是针对正数的。

儒略日的计算

下面的方法对正数年和负数年都是有效的，负的儒略日数除外。

设 Y 为给定年份， M 为月份， D 为该月日期（可以带小数）。

若 $M > 2$ ， Y 和 M 不变，若 $M = 1$ 或 2 ，以 $Y-1$ 代 Y ，以 $M+12$ 代 M ，换句话说，如果日期在 1 月或 2 月，则被看作是在前一年的 13 月或 14 月。

对格里高利历有： $A = \text{INT}(Y/100)$ $B = 2 - A + \text{INT}(A/4)$

对儒略历，取 $B = 0$

要求的儒略日即为：

$$\text{JD} = \text{INT}(365.25(Y+4716)) + \text{INT}(30.6001(M+1)) + D + B - 1524.5 \quad (7.1)$$

使用数值 30.6 取代 30.6001 才是正确的，但我们仍使用 30.6001，以确保总能取得恰当的整数。事实上可用 30.601 甚至 30.61 来取代 30.6001。例如，5 乘 30.6 精确等于 153，然而大多数计算机不能精确表示出 30.6（参见第二章关于 BCD 的说明），这导致得出一个 152.999 9998 的结果，它的整数部分为 152，如此算出的 JD 就不正确了。

例 7. a: 计算 1957 年 10 月 4.81 日，即苏联发射第一颗人造卫星的日期相应的儒略日。

这里我们有 $Y = 1957$ ， $M = 10$ ， $D = 4.81$ 。因 $M > 2$ ，则 Y 与 M 不变。

日期为格里高利历，于是算得：

$$A = \text{INT}(1957/100) = \text{INT}(19.57) = 19$$

$$B = 2 - 19 + \text{INT}(19/4) = 2 - 19 + 4 = -13$$

$$\text{JD} = \text{INT}(365.25 \times 6673) + \text{INT}(30.6001 \times 11) + 4.81 - 13 - 1524.5 = 2436116.31$$

例 7.b：计算 333 年 1 月 27 日 12 时相应的儒略日。

因 $M = 1$ ，有 $Y = 333 - 1 = 332$ 且 $M = 1 + 12 = 13$ ；

又因日期为儒略历日期，故 $B = 0$

$$\text{JD} = \text{INT}(365.25 \times 5048) + \text{INT}(30.6001 \times 14) + 27.5 + 0 - 1524.5 = 1842713.0$$

下表列出了一些历日所对应的儒略日，可作测试程序之用。

2000 年 1 月 1.5 日	2451 545.0
1987 年 1 月 27.0 日	2446 822.5
1987 年 6 月 19.5 日	2446 966.0
1988 年 1 月 17.0 日	2447 187.5
1988 年 6 月 19.5 日	2447 332.0
1900 年 1 月 1.0 日	2415 020.5
1600 年 1 月 1.0 日	2305 447.5
1600 年 12 月 31.0 日	2305 812.5
837 年 4 月 10.3 日	2026 871.8
-1000 年 7 月 12.5 日	1356 001.0
-1000 年 2 月 29.0 日	1355 866.5
-1001 年 8 月 17.9 日	1355 671.4
-4712 年 1 月 1.5 日	0.0

如果你只对 1900 年 3 月 1 日至 2100 年二月 28 日之间的日期感兴趣，那么在公式 (7.1) 中可取 $B = -13$ 。

在一些应用中需要知道某一给定年 1 月 0.0 日的儒略日 JD_0 ，它与上一年的 12 月 31.0 日是同一日。对格里高利历中的年份可按如下计算。

$$Y = \text{year} - 1, A = \text{INT}(Y/100)$$

$$\text{JD}_0 = \text{INT}(365.25Y) - A + \text{INT}(A/4) + 1721424.5$$

特别地，对 1901 年至 2099 年间的年份，上式简化为：
 $JD_0 = 1721409.5 + \text{INT}(365.25 * (\text{year} - 1))$

闰年是如何设定的？

在儒略历中，能被 4 整除的年份为闰年，这一年有 366 天，其它年份为平年（365 天）。

如 900 年和 1236 年为闰年，而 750 年和 1429 年为平年。

格里高利历法也采用这一规则，但下列年份除外：不能被 400 整除的百年为平年，如 1700 年，1800 年，1900 年和 2100 年。其余能被 400 整除的百年则为闰年，如 1600 年，2000 年和 2400 年。

“修正儒略日”

现代工作中有时会用到修正儒略日（Modified Julian Day, MJD），比如在提到人造卫星轨道根数时。对比儒略日，修正儒略日从格林威治时间平午夜开始计算，相当于：

$$MJD = JD - 2400000.5$$

因而 $MJD = 0.01$ 指向的是 1858 年 11 月 17 日世界时 0 时。

由儒略日推算历日

下面的方法对正数年和负数年都是有效的，负儒略日数除外。

将 JD 加上 0.5，令 Z 为其整数部分， F 为尾数（小数）部分。

若 $Z < 2299161$ ，取 $A = Z$

若 Z 大于等于 2299161，计算 $\alpha = \text{INT}((Z - 1867216.25) / 36524.25)$ ，
 $A = Z + 1 + \alpha - \text{INT}(\alpha / 4)$

然后计算

$$B = A + 1524$$

$$C = \text{INT}((B - 122.1) / 365.25)$$

$$D = \text{INT}(365.25C)$$

$$E = \text{INT}((B - D) / 30.6001)$$

该月日期（带小数部分）则为： $d = B - D - \text{INT}(30.6001E)$

+ F

月份 m 为:

IF $E < 14$ THEN $m = E - 1$;

IF $E=14$ or $E=15$ THEN $m = E - 13$

年份为 y :

IF $m > 2$ THEN $y = C - 4716$

IF $m = 1$ or $m = 2$ THEN $y = C - 4715$

和公式(7.1)的情况一样, 这个公式里求 E 时用的数 30.6001 不能代之以 30.6, 哪怕计算机没有先前所说的问题。否则, 你得到的结果会是 2 月 0 日而不是 1 月 31 日, 或者 4 月 0 日而不是 3 月 31 日。

例 7.c: 计算 JD 2436 116.31 所对应的历日。

$$2436\ 116.31 + 0.5 = 2436\ 116.81$$

$$Z = 2436\ 116 \text{ 且 } F = 0.81$$

因 $Z > 2299161$, 故 有 :

$$\alpha = \text{INT}((2436116 - 1867216.25) / 36524.25) = 15,$$

$$A = 2436116 + 1 + 15 - \text{INT}(15/4) = 2436129$$

于是我们求得: $B = 2437653$, $C = 6637$, $D = 2437313$,
 $E = 11$

该月日期 = 4.81

月份 $m = E - 1 = 10$ (因 $E < 14$)

年份 = $C - 4716 = 1957$ (因 $m > 2$)

因此, 求得的日期为 1957 年 11 月 4.81 日。

练习: 计算 JD = 1842 713.0 和 JD = 1507 900.13 所对应的历日。答案: 333 年 1 月 27.5 日 和 -584 年 5 月 28.63 日。

给定日期间的相隔天数

两个历日间的相隔天数可以通过计算它们相应的儒略日之差求得。

例 7.d — 周期彗星哈雷于 1910 年 4 月 20 日及 1986 年 2 月 9 日两次过近日点。这两次经过的时间间隔是多少?

1910 年 4 月 20.0 日对应 JD 2418 781.5

1986 年 2 月 9.0 日对应 JD 2446 470.5

其差值为 27 689 天。

练习：1991 年 7 月 11 日之后恰相隔 10 000 天的日期。

答案：2018 年 11 月 26 日。

星期几的问题

给定日期是星期几可由以下方法获得 — 计算该日 0 时的儒略日，加上 1.5，再除以 7，所得余数将指示出星期几：若余数为 0，则为星期日，1 为星期一，2 为星期二，3 为星期三，4 为星期四，5 为星期五，6 为星期六。

儒略历到格里高利历的换算并不影响星期。因而，在 1582 年，11 月 4 日星期四接下来的一天便是 11 月 15 日星期五。

例 7.e：找出 1954 年 6 月 30 日是星期几。

1954 年 6 月 30.0 日对应 JD 2434 923.5

$2434\ 923.5 + 1.5 = 2434\ 925$

2434 925 除以 7 所得的余数为 3。

所以这一天是星期三。

年内的序数日

年内的序数日 N 可由以下公式得出： $N = \text{INT}(275M/9) - K * \text{INT}((M+9)/12) + D - 30$

此处 M 为月份， D 为该月日期，闰年 $K = 1$ ，平年 $K = 2$

N 取整数，自 1 月 1 日开始取值 1，直至 12 月 31 日取值 365（或闰年取值 366）。

例 7.f 1978 年 11 月 14 日。

平年 $K=2$ ， $M = 11$ ， $D = 14$ ， $K = 2$ 。得 $N = 318$

例 7.g 1988 年 4 月 22 日。

闰年 $K=1$ ， $M = 4$ ， $D = 22$ ， $K = 1$ 。得 $N = 113$ 。

现在让我们考虑逆问题：年内序数日 N 已知，要求相应的日期， M 为月份， D 为该月日期。下面的算法是由比利时

民间天文协会的 A. Pouplier 发现的。

如上所述，令

$K = 1$ 若为闰年

$K = 2$ 若为平年

$M = \text{INT}(9(K+N)/275+0.98)$ ，若 $N < 32$ ，则令 $M = 1$ ，

$D = N - \text{INT}(275M/9) + K*\text{INT}((M+9)/12) + 30$

参考书目

1、《Almanac for Computers for the Year 1978》第 B2 页，特区华盛顿，美国海军天文台，航海天文年历办公室。

2、A. Pouplier 致 Jean Meeus 的信件，1987 年 4 月 10 日。

第八章 复活节日期

牧夫会员 liya 翻译

本章我们将给出计算指定年基督教复活节星期日 (Easter Sunday) 日期的方法 — 注意并非犹太教的逾越节。

格里高利复活节

以下方法由 Spencer Jones 在他的《普通天文学》(General Astronomy) (1922 年版 73-74 页) 中给出。这一方法后来重新印刷在《英国天文协会期刊》(Journal of the British Astronomical Association) 第 88 卷 91 页 (1977 年 12 月) 中，并说明这一方法发明于 1876 年，曾出现在《Butcher's Ecclesiastical Calendar》上。

和高斯给出的公式不同，这种方法适用于格里高利历中始自 1583 年的所有年份，并无例外。找出复活节日期的程序如下：

(注意表中的英文 1 与数值 1 是不同的)

被除数	除数	商	余数
年份 X	19	-	a
年份 X	100	b	c
b	4	d	e
b + 8	25	f	-
b - f + 1	3	g	-
19a + b - d - g + 15	30	-	h
c	4	i	k
32 + 2e + 2i - h - k	7	-	l
a + 11h + 22l	451	m	-
h + l - 7m + 114	31	n	p

则有 $n = \text{月份}$ ($3 = 3 \text{ 月}$, $4 = 4 \text{ 月}$), $p + 1 = \text{本月内复活节星期日所在的日期}$ 。

如果所用的计算机语言没有模 (modulo) 或求余 (remainder) 功能, 则计算余数时必须特别注意。假设要求 34 除以 30 的余数, 在 HP-67 及 HP-41C 便携式计算器上我们得到 $34/30 = 1.133333333$, 尾数部分为 0.133333333, 将它乘上 30 时, 结果变成了 3.999999990, 这个结果不等于原本的正确答案 4。最终这可能导致得到一个错误的复活节日期。

逾越节(出埃及记 12; 利未记 23:5)开始於尼散月十四日(宗教历的正月, 即阳历 3 月至 4 月期间), 连接七天, 每天要献许多祭, 头一日和第七日休息, 给百姓守严肃会。在正月十四日逾越节开始那天, 耶稣被钉十字架(约翰福音 19:14), 三天后的星期日身体复活, 始为复活节。—译者注
可用以下年份测试你的程序:

1991 年 → 3 月 31 日 1954 年 → 4 月 18 日

1992 年 → 4 月 19 日 2000 年 → 4 月 23 日

1993 年 → 4 月 11 日 1818 年 → 3 月 22 日

复活节日期总在 3 月 22 日(如 1818 年和 2285 年)到 4

月 25 日（如 1886 年，1943 年和 2038 年）之间。

复活节星期日的推算规则众所周知：它为春分后（含春分）的第一次满月后的第一个星期日。事实上，推算规则在很久以前就由基督教神职人员确定了。为应用这一规则所使用的满月日期是通过一种教会推算得出的结果而不是真实的天文学上的满月；同样，春分日也总是被定在 3 月 21 日，但实际上则可能会早一到两天。

例如，1967 年的春分在 3 月 21 日，满月在 3 月 26 日(UT)，3 月 26 日之后的第一个星期日是 4 月 2 日。然而，复活节星期日却在 3 月 26 日。在 1900 至 2100 年间，使用纯粹天文规则推算出了一些不同于教会规则的复活节星期日，这些年份是：1900，1903，1923，1924，1927，1943，1954，1962，1967，1974，1981，2038，2049，2069，2076，2089，2095，2096。

格里高利历的复活节日期要 5700000 年才循环一次。有人发现格复活节最常见的日期是 4 月 19 日。

儒略历复活节

儒略历中的复活节日期可按以下方法推算。

被除数	除数	商	余数
年份 X	4	—	a
年份 X	7	—	b
年份 X	19	—	c
19c + 15	30	—	d
2a + 4b - d + 34	7	—	e
d + e + 114	31	f	g

则有 $f = \text{月份}$ ($3 = 3 \text{ 月}$, $4 = 4 \text{ 月}$), $g + 1 = \text{本月内复活节星期日所在的日期}$ 。

儒略历的复活节日期有为期 532 年的循环。比如，179 年，711 年和 1243 年的复活节都在 4 月 12 日。

第九章 力学时和世界时

2008 年 7 月 8 日于家中

世界时 (UT), 即格林威治地方时, 它基于地球的自转。当涉及地方时角, 对于日常生活及与天文计算必需用到 UT。

然而, 地球自转一直在变缓, 而且变缓规律难以预测, 这使得世界时成了一种不均匀的时间系统。

但是, 天文学家们需要一个均匀的时间标尺来进行精确计算 (天体力学, 轨道, 星历)。1960——1983 年, 《Astronomical Ephemeris》等权威天文年历使用一种均匀的时间标尺编制, 这种时间尺称为历书时 (ET), 它由力学定律定义: 基于行星运动。1984 年, ET 被力学时取代, 它由原子钟定义。事实上, 力学时是历书时的一个延伸。

这里有个太阳系质心力学时 (TDB) 和地心力学时 (TDT) 的区分。这两个系统最多相差 0.0017 秒, 此种差异与地球以椭圆轨道绕日运动有关 (相对论效应)。因这一差异小到可以被大多数实际应用忽略, 故此处我们对质心力学时和地球力学时不加区分, 统称为力学时 (TD)。

力学时和世界时之间的精确差值 $\Delta T = TD - UT$ 只能由天文观测值推算。表 9. A 列出了一些年份的年首 ΔT 值, 除最后两个值外, 其它的均取自 1988 年的《天文年历》。

译者注: 本书出版于 1991 年, 作者写时可能还更早, 所表中的最后两项是当时做的外推。

对于不远的将来 1, 我们可以继续推算表 9. A 中的值。例如, 可使用临时值:

$$\Delta T = + 60 \text{ 秒 } 1993 \text{ 年}$$

$$\Delta T = + 67 \text{ 秒 } 2000 \text{ 年}$$

$$\Delta T = + 80 \text{ 秒 } 2010 \text{ 年}$$

表 9. A

年 ΔT	年 ΔT	年 ΔT	年 ΔT	年 ΔT
1620 124	1700 9	1780 17	1860 7. 9	1940 24. 3
1622 115	1702 9	1782 17	1862 7. 5	1942 25. 3
1624 106	1704 9	1784 17	1864 6. 4	1944 26. 2
1626 98	1706 9	1786 17	1866 5. 4	1946 27. 3
1628 91	1708 10	1788 17	1868 2. 9	1948 28. 2
1630 85	1710 10	1790 17	1870 1. 6	1950 29. 1
1632 79	1712 10	1792 16	1872 -1	1952 30
1634 74	1714 10	1794 16	1874 -2. 7	1954 30. 7
1636 70	1716 10	1796 15	1876 -3. 6	1956 31. 4
1638 65	1718 11	1798 14	1878 -4. 7	1958 32. 2
1640 62	1720 11	1800 13. 7	1880 -5. 4	1960 33. 1
1642 58	1722 11	1802 13. 1	1882 -5. 2	1962 34
1644 55	1724 11	1804 12. 7	1884 -5. 5	1964 35
1646 53	1726 11	1806 12. 5	1886 -5. 6	1966 36. 5
1648 50	1728 11	1808 12. 5	1888 -5. 8	1968 38. 3
1650 48	1730 11	1810 12. 5	1890 -5. 9	1970 40. 2
1652 46	1732 11	1812 12. 5	1892 -6. 2	1972 42. 2
1654 44	1734 12	1814 12. 5	1894 -6. 4	1974 44. 5
1656 42	1736 12	1816 12. 5	1896 -6. 1	1976 46. 5
1658 40	1738 12	1818 12. 3	1898 -4. 7	1978 48. 5
1660 37	1740 12	1820 12	1900 -2. 7	1980 50. 5
1662 35	1742 12	1822 11. 4	1902 0	1982 52. 2
1664 33	1744 13	1824 10. 6	1904 2. 6	1984 53. 8
1666 31	1746 13	1826 9. 6	1906 5. 4	1986 54. 9
1668 28	1748 13	1828 8. 6	1908 7. 7	1988 55. 8
1670 26	1750 13	1830 7. 5	1910 10. 5	1990 56. 9
1672 24	1752 14	1832 6. 6	1912 13. 4	1992 58. 3

1674	22	1754	14	1834	6	1914	16
1676	20	1756	14	1836	5.7	1916	18.2
1678	18	1758	15	1838	5.6	1918	20.2
1680	16	1760	15	1840	5.7	1920	21.2
1682	14	1762	15	1842	5.9	1922	22.4
1684	13	1764	15	1844	6.2	1924	23.5
1686	12	1766	16	1846	6.5	1926	23.9
1688	11	1768	16	1848	6.8	1928	24.3
1690	10	1770	16	1850	7.1	1930	24
1692	9	1772	16	1852	7.3	1932	23.9
1694	9	1774	16	1854	7.5	1934	23.9
1696	9	1776	17	1856	7.7	1936	23.7
1698	9	1778	17	1858	7.8	1938	24

对表 9. A 以外的历元，可使用 Morrison 及 Stephenson 的表达式计算 ΔT (秒)的近似值：

$$\Delta T = -15 + 0.00325(\text{year}-1810)^2$$

此处的 year 可以带小数。上式可改写为： $\Delta T = 102.3 + 123.5T + 32.5T^2$

式中 T 是历元 2000.0 起算的世纪数。如果使用儒略日： $\Delta T = -15 + (\text{JD}-2382148)^2/41048480$

根据这些表达式，计算到公元前 4000 年时，世界时的不确定性将达到 2 小时。改进公式将有益于 TD 和 UT 间的换算，但它不会影响算法、程序、历法，以及使用力学时的星历表。

1984 年 Stephenson 和 Morrison 又发表了另两个抛物线表达式来推算以往年代的 ΔT 。公元前 390 至公元后 1600 年适用以下两种抛物线拟合：

$$-390 \text{ 年至 } +948 \text{ 年: } \Delta T = 1360 + 320T + 44.3T^2$$

$$+948 \text{ 年至 } +1600 \text{ 年: } \Delta T = 25.5T^2$$

T 为从公元 1800 年算起相差的世纪数，得到的 ΔT 以秒为单位。

两年后, Stephenson 和 Houlden 给出了另两个推算以往年代 ΔT 的表达式:

$$(i) \text{ 公元 948 年以前: } \Delta T = 1830 - 405E + 46.5E^2$$

$$(ii) \text{ 公元 948 年至 1600 年: } \Delta T = 22.5t^2$$

E 为从公元 948 年算起的世纪数, t 为从公元 1850 年算起的世纪数。公式 (i) 和 (ii) 等价于以下表达式, 该处 T 为从公元 2000.0 年算起的世纪数 ($T < 0$):

$$\text{公元 948 年以前: } \Delta T = 2715.6 + 573.36T + 46.6T^2$$

$$\text{公元 948 年至 1600 年: } \Delta T = 50.6 + 67.5T + 22.5T^2$$

公元 1871 年至 1901 年之间的 ΔT 值为负。值得注意的是, 无论对遥远的过去还是遥远的将来, ΔT 值都是正的。

除了 1871—1901 年, 世界时总是落后于相同的数值力学时。比如 1990 年 1 月 27 日 0 时 UT, 比 1990 年 1 月 27 日 TD 落后 57 秒, 那么, 我们有 $UT = TD - \Delta T$ 。

例 9. a 某次新月开始于 1977 年 2 月 18 日 3h37m40s(力学时)(见例题 47. a)。

该时刻的 ΔT 值等于+48 秒。于是该月相相应的世界时为: $3h37m40s - 48s = 3h36m52s$

例 9. b 假设需要计算+333 年 2 月 6 日日 6 时 (UT) 时的水星位置。

$$\text{我们有: } T = (333.1 - 2000)/100 = -16.669$$

代入公式 (9. 1) 得 $\Delta T = +7074$ 秒, 即 118 分钟。因此, $TD = 6^h + 118 \text{ 分钟} = 7^h58^m$, 故应在 333 年 2 月 6 日 7^h58^m TD 执行计算。

Schmadel 与 Zech 的多项式表达

Schmadel 与 Zech 构造了以下多项式近似表达 ΔT , 在 1800–1988 年范围内有效。该式得出的结果与表 9. A 最多有 1.9 秒的误差。

$$\begin{aligned} \Delta T = & -0.000014 + 0.001148\theta + 0.003357\theta^2 - 0.012462\theta^3 \\ & - 0.022542\theta^4 + 0.062971\theta^5 + 0.079441\theta^6 - 0.146960\theta^7 - \\ & 0.149279\theta^8 + 0.161416\theta^9 + 0.145932\theta^{10} - 0.067471\theta^{11} - \end{aligned}$$

$0.058091\theta^{12}$

上式中 ΔT 的单位是天, θ 是 1900.0 起算的儒略世纪数。
Schmadel 与 Zech 也提供了较短时间范围的表达式。

(1) 在 1800–1899 范围内, 以下表达式给出的 ΔT 值 (以天为单位) 最大误差 1.0 秒:

$$\Delta T = -0.000009 + 0.003844\theta + 0.083563\theta^2 + 0.865736\theta^3 + 4.867575\theta^4 + 15.845535\theta^5 + 31.332267\theta^6 + 38.291999\theta^7 + 28.316289\theta^8 + 11.636204\theta^9 + 2.043794\theta^{10}$$

(2) 在 1900–1987, 以下表达式给出的 ΔT (天) 最大误差 1.0 秒:

$$\Delta T = -0.000020 + 0.000297\theta + 0.025184\theta^2 - 0.181133\theta^3 + 0.553040\theta^4 - 0.861938\theta^5 + 0.677066\theta^6 - 0.212591\theta^7$$

式中 θ 与第 1 个公式的含义相同。

应注意, 以上三个表达式均是经验公式。不可超出它们的定义域之外使用它们!

第十章 地球形状

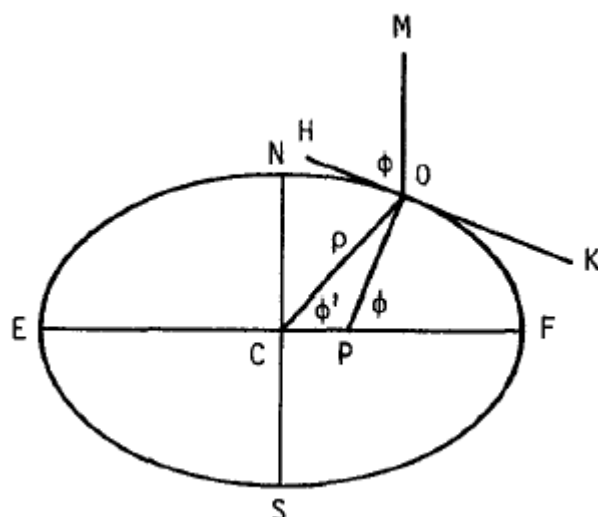
[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 10 日]

地球表面的精确形状, 包括起伏的山和谷, 这是无法用几何方法定义的。因此, 大地测量学中理想的形状平均海平面, 并延伸到各大洲形成封闭曲面。这是大地水平面, 其每一处表面都垂直与重垂线。

然而, 地球内部的不均匀性及大山的引力等因素, 以至大地测量学的地表不能用任何一个可定义的固体严格的描述。一种可足够地理学及天文学使用的近似假设是: 把它看作回转椭球。

地心直角观察者

图中表示地球子午圈截面图。C 是地心，N 是北极，S 是南极，EF 是赤道，HK 是观测点 O 的地平面，OP 垂直 HK。OM 平行 SN，它与 OH 的夹角是 φ ， φ 也就是 O 点的地理纬度，角 OPF 等于 φ 。



半径向量 OC（观测点到地心的连线），角 $OCF = \varphi'$ ，它是地心纬度。在极点和赤道上 $\varphi = \varphi'$ ，在其它纬度上 $|\varphi'| < |\varphi|$

设 f 是地球偏率， $b/a = NC/CF$ ，极半径 $NC=b$ ，赤道半径 $CF=a$ ，在 1976IAU 中提供以下值：

$$a = 6378.14\text{km}, f = 1/298.257$$

由此得：

$$b = a(1-f) = 6356.755\text{km}$$

$$b/a = 1 - f = 0.99664719$$

地球子午圈的离心率：

$$e = \sqrt{2f - f^2} = 0.08181922$$

我们有以下关系式：

$$f = (a-b)/a, 1-e^2 = (1-f)^2$$

在海平面上一点：

$$\tan(\varphi') = (b^2/a^2) * \tan(\varphi)$$

如果观测者距海平面的高度是 H ，那么计算周日视差、日月食、星蚀所需要的量 $\rho \sin(\varphi')$ 和 $\rho \cos(\varphi')$ 可以用下式计

算:

$$\tan u = \frac{b}{a} \tan \phi$$

$$\begin{cases} \rho \sin \phi' = \frac{b}{a} \sin u + \frac{H}{6378140} \sin \phi \\ \rho \cos \phi' = \cos u + \frac{H}{6378140} \cos \phi \end{cases}$$

$\rho \sin(\phi')$ 值在北半球为正, 南半球为负, 而 $\rho \cos(\phi')$ 始终为正。

ρ 表示观测者到地心的距离(图中的 OC), 地球的赤道半径看作 1 个单位。

例 10.a: ——计算 $\rho \sin(\phi')$ 和 $\rho \cos(\phi')$, 观测站是 Palomar, 位于:

$$\phi = +33^\circ 21' 22'', H = 1706 \text{ 米}$$

我们得到:

$$\phi = 33^\circ.356111$$

$$u = 33^\circ.267796$$

$$\rho \sin(\phi') = +0.546861$$

$$\rho \cos(\phi') = +0.836339$$

关于地球椭球的其它公式

在椭球上给定的一点, 地理纬度与地心纬度的差值为:

$$\phi - \phi' = 692''.73 \sin(2\phi) - 1''.16 \sin(4\phi)$$

当 $u=45^\circ$ 时, $\phi - \phi'$ 达到最大值。如果 ϕ_o 和 ϕ_o' 是此时相应的地理纬度和地心纬度, 我们有:

$$\tan(\phi_o) = a/b, \tan(\phi_o') = b/a, \phi_o + \phi_o' = 90^\circ$$

因此, 对于 IAU1976 椭圆有:

$$\phi_o = 45^\circ.05'46''.36, \phi_o' = 44^\circ54'13''.64$$

$$\phi_o - \phi_o' = 11'32''.73$$

海平面上， ρ 的值可以用下式计算：

$$\rho = 0.9983271 + 0.0016764 \cos(2\varphi) - 0.0000035 \cos(4\varphi)$$

同纬度 φ 的圆的半径：

$$R_p = a \cos(\varphi) / \sqrt{1 - (e \sin \varphi)^2}$$

式中， e 就是上面说的子午圈椭圆的半径。

因此，在同一纬度 φ 上，经度变化 1 度，相应的长度变化为： $(\pi/180)R_p$

地球旋转的角速度（相对于恒星，不是相对于春分点）：

$$\omega = 7.292115018 \times 10^{-5} \text{ (弧度/秒)}$$

严格的说，这是历元 1989.5 时的值。它缓慢的变小，因为地球自转变慢（详见[第 9 章](#)）。

由于地球自转，在纬度 φ ，线速度是 ωR_p

地球子午圈的曲率半径，在纬度 φ ：

$$R_m = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

因此，纬度变化 1 度，相应的长度变化： $(\pi/180)R_m$

在赤道时， R_m 达到最大值，值为 $a(1 - e^2) = 6335.44\text{km}$ ，

在极点时达到最小值，值为 $a/\sqrt{1 - e^2} = 6399.60\text{km}$

例 10. b: —— Chicago 的纬度是 $\varphi = +42^\circ$ ，我们算得：

$$R_p = 4747.001\text{km}$$

$$\text{经度 } 1^\circ = 82.8508\text{km}$$

$$\text{线速度} = \omega R_p = 0.34616\text{km/s}$$

$$R_m = 6364.033\text{km}$$

$$\text{纬度 } 1^\circ = 111.0733\text{km}$$

地球表面两点间的距离

如果地球表面两点的地理坐标已知，那么，从地表测量的这两点间的最短距离就可以计算了。

设第 1 点的经度和纬度是分别是 L_1 和 ϕ_1 ，第二点的是 L_2 和 ϕ_2 ，我们假设这两点在海平面。

如果精度要求不高，可以把地球看作球形，平均半径为 6371km。使用下式可得到两点间的角距离：

$$\cos(d) = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(L_1 - L_2) \quad (10.1)$$

天球上两个星体间的角距离公式(16.1)与该式类似。当 d 很小时，该式不能很好的工作，详见第 16 章。

那么，我们需要的最短距离是：

$$s = (6371 * \pi * d) / 180, \text{ 单位：千米} \quad (10.2)$$

式中 d 表达为“度”单位

高精度计算可使用以下方法，归功于 H. Andoyer。这种方法的相对误差是地球扁率的二次方项。

和前面的一样，设赤道半径为 a ，扁率为 f ，然后计算：

$$F = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad G = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \lambda = \frac{L_1 - L_2}{2}$$

$$S = \sin^2 G \cos^2 \lambda + \cos^2 F \sin^2 \lambda$$

$$C = \cos^2 G \cos^2 \lambda + \sin^2 F \sin^2 \lambda$$

$$\tan \omega = \sqrt{\frac{S}{C}}$$

$$R = \frac{\sqrt{SC}}{\omega}, \quad \omega \text{ 表达为弧度}$$

$$D = 2 \omega a \quad H_1 = \frac{3R - 1}{2C} \quad H_2 = \frac{3R + 1}{2S}$$

那么，所需的距离是：

$$s = D (1 + f H_1 \sin^2 F \cos^2 G - f H_2 \cos^2 F \sin^2 G)$$

例 10. c: ——计算 法国巴黎(Paris)观测站到美国华盛顿(Washington)的海军观测站的距离。提供下列坐标：

Paris:

$$L1 = 2^{\circ}20'14'' \text{ 东} = -2^{\circ}20'14''$$

$$\phi1 = 48^{\circ}50'11'' \text{ 北} = +48^{\circ}50'11''$$

Washington:

$$L2 = 77^{\circ}03'56'' \text{ 西} = +77^{\circ}03'56''$$

$$\phi2 = 38^{\circ}55'17'' \text{ 北} = +38^{\circ}55'17''$$

我们计算得到:

$$F = 43^{\circ}.8788889$$

$$G = +4^{\circ}.9575000$$

$$\lambda = -39^{\circ}.7013889$$

$$S = 0.21642696$$

$$C = 0.78357304$$

$$\omega = 27^{\circ}.724274 = 0.48387987 \text{ 弧度}$$

$$R = 0.8510555$$

$$D = 6172.507\text{km}$$

最后得到 $s = 6181.63\text{km}$, 最大误差为 50 米

如果使用近似表达式 [\(10.1\)](#) 和 [\(10.2\)](#), 我们得到

$$\cos(d) = 0.567146$$

$$d = 55^{\circ}.44855$$

$$s = 6166\text{km}$$

参考资料

- 1、国际地球自转服务局, 1989 年度报告(巴黎观测站)
- 2、《经度年鉴》, 1950(巴黎), 第 145 页

第十一章 恒星时与格林尼治时间

[许剑伟 于家里]

译者注 1:

地球不断的自转着, 天球子午圈时刻不断的变化着, 我们必须找到适当的方法来标定子午圈在各时刻的位置。恒星时是天文学和大地测量学标定的天球子午圈位置的值, 由于

借用了时间的计量单位，所以常被误解为是一种时间单位。恒星时是根据地球自转来计算的，它的基础是恒星日。由于地球环绕太阳的公转运动，恒星日比平太阳日（也就是日常生活中所使用的日）短约 $1/365$ （相应约四分钟或一度）。

本地恒星时的定义是一个地方的子午圈与天球的春分点之间的时角，各地方的经度不同，所以子午圈不同，因此地球上每个地方的恒星时都与它的经度有关。恒星时的参考点是春分点，所以春分点的变化也将对恒星时产生影响。由于地球的章动春分点在天球上并不固定，而是以 18.6 年的周期围绕着平均春分点摆动。因此恒星时又分真恒星时和平恒星时。真恒星时是通过直接测量子午线与实际的春分点之间的时角获得的，平恒星时则忽略了地球的章动。真恒星时与平恒星时之间的差异最大可达约 0.4 秒。

一个地方的当地恒星时与格林尼治天文台的恒星时之间的差就是这个地方的经度。因此通过观测恒星时可以确定当地的经度（假如格林尼治天文台的恒星时已知的话）或者可以确定时间（假如当地的经度已知的话）。

通过确定恒星时可以简化天文学的计算，比如通过恒星时和当地的纬度可以很方便地计算出哪些星正好在地平线以上。

译者注 2:

一个时刻，通常由日期部分及时间部分组成。本文所述的时间指世界时 UT，世界时 (0h UT) 表示世界时 0 点，(3h UT) 表示世界时 3 点。如果没有特另申明，均指格林尼治子午圈时间。

正文:

一个给定的世界时日期的 (0h UT)，格林尼治子午圈的恒星时可按如下计算。

先计算当天 (0h UT) 对应的 JD，它是以 .5 结束的数字。那么就有：

$$T = (\text{JD} - 2451545.0) / 36525 \quad (11.1)$$

那么 (0h UT) 的格林尼治平恒星时使用以下表达式计算，该式采用 IAU1982 的表达式：

$$\theta_0 = 6^{\text{h}} \ 41^{\text{m}} \ 50^{\text{s}}.54841 + 8640184^{\text{s}}.812866 * T + 0^{\text{s}}.093104 * T^2 - 0^{\text{s}}.0000062 * T^3 \quad (11.2)$$

上式表达为度单位，则公式改写为：

$$\theta_0 = 100.46061837 + 36000.770053608 * T + 0.000387933 * T^2 - T^3 / 38710000 \quad (11.3)$$

重要的是，公式(11.2)及(11.3)仅在 T 对应(0h UT)时有效。

为了找出任意 UT 时刻的恒星时，先计算 UT*1.00273790935，再把计算结果加入(0h UT)时刻对应的平恒星时，即得到 UT 时刻的平恒星时。

当平恒星时表达为度单位，也可使用下式直接得到任意 UT 刻的恒星时，式中的 JD 是任意时刻的儒略日数（不在要求 JD 对应 0 点），T 由公式(11.1)式计算。

$$\theta_0 = 280.46061837 + 360.98564736629 * (JD - 2451545.0) + 0.000387933 * T^2 - T^3 / 38710000 \quad (11.4)$$

如果要求高精度，那么要求计算机处理足够的有效数字位数。

由(11.2)、(11.3)、(11.4)得到的恒星时是平恒星时，也就是平春分点起算的格林尼治时角（黄道与 Date 平赤道的交点）。

要取得视恒星时（即真春点起算的格林尼治时角），应加上修正值 $\Delta\psi * \cos(\epsilon)$ ，式中 $\Delta\psi$ 是黄经章动， ϵ 是真黄赤交角（见第 21 章）。这个修正值也就作赤经章动（也称作分点方程）。因为 $\Delta\psi$ 是个小量，所以 ϵ 误差 10" 也没关系。

如果 $\Delta\psi$ 的单位是角秒（1 度是 3600 秒），则以时秒（1 小时是 3600 秒）为单位的修正值是： $\Delta\psi * \cos(\epsilon) / 15$

译者补充：IAU2000 的恒星时

$$\theta_0 = 2 * \text{Pi} * (0.7790572732640 + 1.00273781191135448 * (JD - 2451545.0)) + 0''.014506 +$$

$4612''.15739966T + 1''.39667721T^2 - 0''.00009344T^3 + 0''.00001882T^4 +$ 赤经章动 + 非多项式, (JD 是 UT1 时间, T 力学时世纪数)

上式中, $4612''.15739966t + \dots + 0''.00001882t^4$ 实际上由岁差相关的表达得到。严格推导比较烦琐, 以下做个估算:

设 γ_o 是 J2000 平分点, γ_m 是 Date 平分点。Q 是 Date 赤道与 J2000 赤道交点 (详见 [岁差图](#))。在 Date 赤道上取 $Q\gamma'_m = Q\gamma_o$, 这样子午圈经过 γ'_m 才真正经过一个自转周期。 θ_o 的起算点是 Date 平分点 γ_m , 而不是 γ'_m , 显然 γ_m 与 γ'_m 之间的角距离是 $Q\gamma'_m - Q\gamma_m = (90 + z) - (90 - \zeta) = z + \zeta = 4612''.15739966t + \dots$, 因此 θ_o 的前半部分 $2\pi \cdot (0.7790572732640 + 1.00273781191135448 \cdot (\text{JD} - 2451545.0))$ 是不含岁差恒星时, 真正反映了恒星日的长度, 实现上这部分称为自球自转角 ERA。

IAU2000 的恒星时表达与原文表达形式与式有点不同, 但计算的结果几乎同。

例 11. a ——求 1987 年 4 月 10 日 (0h UT) 的“平”及“视”恒星时。

解:

1、求平恒星时

该日期对应的儒略日是 JD 2446895.5, 由公式 (11.1) 得:

$$T = -0.127296372348$$

那么我们利用 (11.2) 式可得:

$$\theta_o = 6\text{h } 41\text{m } 50\text{s}.54841 - 1099864.18158 \text{ 秒}$$

或者, 可再简化: 上式可以再加上 86400 秒 (1 天的秒数) 的适当倍数, 把结果转到 0 到 86400 秒以内:

$$\begin{aligned} \theta_o &= 6\text{h } 41\text{m } 50\text{s}.54841 + 23335\text{s}.81842 \\ &= 6\text{h } 41\text{m } 50\text{s}.54841 + 6\text{h } 28\text{m } 55\text{s}.81842 \\ &= 13\text{h } 10\text{m } 46\text{s}.3668 \end{aligned}$$

这就是所求解的平恒星时。

2、求视恒星时：

由例 21. a，我们得到此时的 $\Delta\psi = -3''.788$ 及 $\varepsilon = 23^\circ 26' 36''.85$ ，事实上这两个值是(0h TD)时刻的，而不是(0h UT)，但我们忽略在 $\Delta T = TD - UT$ 期间内 $\Delta\psi$ 的微小差别。

因此，赤经章动是 $-3.788/15 \times \cos(23^\circ 26' 36''.85) = -0s.2317$ ，则所要计算的视恒星时为：

$$13h\ 10m\ 46s.3668 - 0s.2317 = 13h\ 10m\ 46s.1351$$

例 11. b ——1987 年 4 月 10 日 19h 21m 00s UT 时刻的平恒星时。

首先，我们计算 0h UT 的平恒星时。我们得到 13h 10m 46s.3668（详见上一个例子），然后：

$$\begin{aligned} & 1.00273790935 * (19h\ 21m\ 00s) \\ &= 1.00273790935 * 69660 \text{ 秒} \\ &= 69850.7228 \text{ 秒} \\ &= 19h\ 24m\ 10s.7228 \end{aligned}$$

那么，要计算的平恒時は：

$$\begin{aligned} & 13h\ 10m\ 46s.3668 + 19h\ 24m\ 10s.7228 \\ &= 32h\ 34m\ 57s.0896 \\ &= 8h\ 34m\ 57s.0896 \end{aligned}$$

另外，我们也可以使用 [11.4](#) 式，直接计算。

1987 年 4 月 10 日 19h 21m 00s UT 时，对应的儒略日数是：JD = 2446896.30625

由([11.1](#))式，相应 T 的值为 -0.12727430。则，由公式([11.4](#))得： $\theta_o = -1677831^\circ.2621266$

转到 0 到 360 度得： $\theta_o = 128^\circ.7378734$

这就是要求计算的平恒星时，单位是度。除以 15 后，可变换为时角单位（因为 1 小时是 15 度）：

$$\theta_o = 8h.58252489 = 8h\ 34m\ 57s.0896$$

结果与上面的相同。

第十二章 坐标变换

[许剑伟 于家里]

我们将使用到以下符号：

α = 赤经。这个量一般表达为时间单位，也就是用时、分、秒表示。因此，在公式中使用到它时，应先转为“度”单位，必要时还要转为弧度单位。相反，如果使用公式计算出 α ，通常表达为“度”或“弧度”单位，应除转为小时单位(如果是度单位，除 15 即可)，然后，还可以转为时分秒格式。

δ = 赤纬。天赤道以北为正，以南为负。

α_{1950} = 涉及 B1950.0 标准分点的赤经。

δ_{1950} = 涉及 B1950.0 标准分点的赤纬。

α_{2000} = 涉及 J2000.0 标准分点的赤经。

δ_{2000} = 涉及 J2000.0 标准分点的赤纬。

λ = 黄经。从春风点，沿黄道测量的经度。

β = 黄纬。黄道以北为正，以南为负。

l = 银经。

b = 银纬。

h = 地平纬度，地平线以上为正，以下为负。

A = 地平经度(方位角)。由南向西测量。值得注意的是，航海家、气象学家的指南针方向(或地平经度)，北方向为 0 度，东 90 度，南 180 度，西 270 度。但天文学家(注 1)不同意，他们从南开始测量，因为时角也是从南开始测量的。因此，一个天体正好在子午圈的南方向，就有 $A = H = 0$ 度。

ϵ = 黄赤交角。黄道与天赤道的夹角。平黄赤交角可用 (21.2) 式计算。然而，如果使用视赤经及视赤纬(受光行差及章动影响)，那么计算时就要用到真黄赤交角 $\epsilon + \Delta\epsilon$ (详见第 21 章)。如果 α 、 δ 是涉及 J2000.0 标准分点坐标的，那么该历元的 ϵ 就时 $\epsilon_{2000} = 23^\circ 26' 21''.448 = 23^\circ.439291$ 。对于历元 B1950.0 标准分点坐标， $\epsilon_{1950} = 23^\circ.4457889$

φ = 观测者(站)纬度, 北半球为正, 南半球为负。

H = 本地时角, 从南向西测量。

如果 θ 是本地恒星时, θ_0 是格林尼治恒星时, L 是观者站经度 (从格林尼治向西为正, 东为负), 那么本地时角计算如下:

$$H = \theta - \alpha \text{ 或 } H = \theta_0 - L - \alpha$$

如果 α 含章动效果, 那么 H 也含章动 (见[第 11 章](#))。

要从赤道坐标转到黄道坐标, 可以使用以下公式:

$$\tan(\lambda) = (\sin(\alpha) * \cos(\epsilon) + \tan(\delta) * \sin(\epsilon)) / \cos(\alpha) \quad (12.1)$$

$$\sin(\beta) = \sin(\delta) * \cos(\epsilon) - \cos(\delta) * \sin(\epsilon) * \sin(\alpha) \quad (12.2)$$

注 1: William Chauvenet 在它的《球面几何和实用天文学》(第 5 版, 1981), 卷 I, 第 20 页说到: 地平经度的原点选取得很随意, 所以他们计算出的方向也很随意。但天文学家通常选取地平的南点为原点, ... 然而, 航海家通常根据他们所在位置是北纬还是南纬来选择原点在北或在南。

S. Newcom 在它的《球面天文学概论》第 95 页中写道:

“在实践中, 可以从北点或南点测量, 并且方向可以是东或西...” ——所以说, 伟大的美国天文学家没有特别选择。

地理经度

在这里, 地理经度是从子午圈向西测量的, 而不是向东。这个约定被多数天文学家认可长达 1 个世纪——见实例参考 1—6。例如: 华盛顿经度, D. C., $+77^\circ 04'$; 奥地利维也纳经度是: $-16^\circ 23'$ 。

我们不能理解, 为什么 IAU(国际天文联合会)最初决所有的行星地理经度从它们自转轴相反的方向测量, 于是, 1982 年为地球修改了这个系统。我们将不跟从 IAU 的决定, 我们将考虑西经为正。其它行星也遵照这个系统, 向西测量为正, 这正是为什么它们的中心子午圈经度和地球一样, 随时间不断增加。

黄道坐标转到赤道坐标:

$$\tan(\alpha) = (\sin(\lambda) * \cos(\epsilon) - \tan(\beta) * \sin(\epsilon)) / \cos(\lambda) \quad (12.3)$$

$$\sin(\delta) = \sin(\beta) * \cos(\epsilon) + \cos(\beta) * \sin(\epsilon) * \sin(\lambda) \quad (12.4)$$

计算本地地平坐标:

$$\tan(A) = \sin(H) / (\cos(H) * \sin(\varphi) - \tan(\delta) * \cos(\varphi)) \quad (12.5)$$

$$\sin(h) = \sin(\varphi) * \sin(\delta) + \cos(\varphi) * \cos(\delta) * \cos(H) \quad (12.6)$$

如果希望地平经度 A 是从北点开始计算的, 而不是上面的南点起算, 则只须对 (12.5) 式算出的 A 加上 180° 即可。

地平坐标转到赤道坐标:

$$\tan(H) = \sin(A) / (\cos(A) * \sin(\varphi) + \tan(h) * \cos(\varphi))$$

$$\sin(\delta) = \sin(\varphi) * \sin(h) - \cos(\varphi) * \cos(h) * \cos(A)$$

当前的银河系统坐标已在 1959 年 IAU 中定义了。在 B1950.0 标准赤道系统, 银河(银河系)北极的坐标是:

$$\alpha_{1950} = 12^{\text{h}} 49^{\text{m}} = 192^{\circ}.25, \delta_{1950} = +27^{\circ}.4$$

银经的原点在银道上, 该点距银道与 B1950.0 赤道升点 33 度。

这些值都是固定的惯例值, 因此我们还须严格考虑它们与 B1950.0 赤道坐标的关系。

从 B1950.0 标准分点赤道坐标转到银道坐标:

$$\tan(x) = \sin(192.25 - \alpha) / (\cos(192.25 - \alpha) * \sin(27.4) - \tan(\delta) * \cos(27.4)) \quad (12.7)$$

$$l = 303^{\circ} - x$$

$$\sin(b) = \sin(\delta) * \sin(27.4) + \cos(\delta) * \cos(27.4) * \cos(192.25 - \alpha) \quad (12.8)$$

式中角度单位是度。

从银道坐标转到 B1950.0 标准分点坐标:

$$\tan(y) = \sin(l - 123) / (\cos(l - 123) * \sin(27.4) - \tan(b) * \cos(27.4))$$

$$\alpha = y + 125^{\circ}$$

$$\sin(\delta) = \sin(b) * \sin(27.4) + \cos(b) * \cos(27.4) * \cos(l - 123)$$

如果给定恒星 2000.0 的平位置而不是 1950.0 平位置, 那么在使用公式 (12.7) 及 (12.8) 之前, 应将 α_{2000} 转为 α_{1950} , 将 δ_{2000} 转为 δ_{1950} , 详见第 20 章。

公式(12.1)、(12.3)等，分别 $\tan(\lambda)$ 、 $\tan(\alpha)$ 等的值，进而使用反正切函数算出 λ 、 α 等。然而，直接使用反正切函数将造成无法确定这些角度所在的象限，会产生不确定的180度角问题。可直接使用二参数函数 ATN2，分子及分母作为入口参数传入。参见第1章的“正确象限”

例 12. a——计算恒星 Pollux (β Gem) 的黄道坐标，它的赤道坐标是：

$$\alpha_{2000} = 7^{\text{h}} 45^{\text{m}} 18^{\text{s}}.946, \quad \delta_{2000} = +28^{\circ}.026183$$

解：

使用这些值 $\alpha=116^{\circ}.328942$ ， $\delta=+28^{\circ}.026183$ ，和 $\epsilon=23^{\circ}.4392911$ ，由公式(12.1)及(12.2)得：

$$\tan(\lambda) = (+1.03403986) / (-0.44352398), \quad \text{因此} \\ \lambda = 113^{\circ}.215630$$

$$\beta = +6^{\circ}.684170$$

因为 α 、 δ 涉及 J2000.0 标准分点坐标，所以 λ 、 β 也涉及同样的分点。

练习：利用上面计算出的 λ 和 β 值，利用 12.3 式及 12.4 式反算出 α 和 δ

例 12. b——计算在 1987 年 4 月 10 日 (19h 21m 00s UT) 时刻，在华盛顿 U.S Naval 天文台 (经度 = $+77^{\circ}03'56'' = 5^{\text{h}} 08^{\text{m}} 15^{\text{s}}.7$ ，纬度 = $+38^{\circ}55'17''$) 金星的地平经度及纬度。此时金星的赤道视坐标是： $\alpha = 23^{\text{h}} 09^{\text{m}} 16^{\text{s}}.641$ ， $\delta = -6^{\circ}43'11''.61$

解：

这是行星的视赤经及视赤纬。我们需要此刻的视恒星时。

我们先计算格林尼治 1987 年 4 月 10 日 (19h 21m 00s UT) 的平恒星时，得到的值是：

$$8^{\text{h}} 34^{\text{m}} 57^{\text{s}}.0896 \text{ (详见例 11. b)}$$

利用第 21 章描述的方法，我们得到该时刻的以下值：

$$\text{黄经章动: } \Delta\psi = -3''.868$$

真黄赤交角： $\varepsilon = 23^{\circ}26'36''.87$

格林尼治视恒星时是：

$$\begin{aligned}\theta_{\circ} &= 8\text{h } 34\text{m } 57\text{s}.0896 + (-3.868/15) * \cos(\varepsilon) \text{ 秒} \\ &= 8\text{h } 34\text{m } 56\text{s}.853\end{aligned}$$

金星在华盛顿的时角：

$$\begin{aligned}H &= \theta_{\circ} - L - \alpha \\ &= (8\text{h}34\text{m}56\text{s}.853) - (5\text{h}08\text{m}15\text{s}.7) - (23\text{h}09\text{m}16\text{s}.641) \\ &= -19\text{h } 42\text{m } 35\text{s}.488 \\ &= -19\text{h}.7098578 \\ &= -295^{\circ}.647867 \\ &= +64^{\circ}.352133\end{aligned}$$

由公式(12.5)和(12.6)得：

$$\tan(A) = (+0.9014712) / (+0.3636015), \text{ 因此 } A = +68^{\circ}.0337$$

$$h = +15^{\circ}.1249$$

所以，行星在地平线上面 15 度，在西南方向到正西方向之间。

应注意到，公式(12.6)没有考虑大气折射的影响，也没有考虑行星视差。大气折射问题参见**第 15 章**。视差改正将在**第 39 章**中研究。

作为一个练习，请计算 Nova Serpentis 1978 的银道坐标。它的赤道坐标是：

$$\alpha_{1950} = 17\text{h } 48\text{m } 59\text{s}.74, \delta_{1950} = -14^{\circ}43'08''.2$$

$$\text{答案: } l = 12^{\circ}.9593, \quad b = +6^{\circ}.0463$$

黄道和地平线

如果 ε 是黄赤交角， φ 是观测站的纬度， θ 是本地恒星时，那么在地平线(地面与天球交的大圆)与黄道相交的两点的黄经是(注意：只需计算 1 点，另一点与它相距 180 度)：

$$\tan(\lambda) = (-\cos(\theta)) / (\sin(\varepsilon) \tan(\varphi) + \cos(\varepsilon) * \sin(\theta)) \quad (12.9)$$

黄道面与地平面的夹是：

$$\cos(I) = \cos(\varepsilon) * \sin(\varphi) - \sin(\varepsilon) * \cos(\varphi) * \sin(\theta) \quad (12.10)$$

在一个恒星日期间，角度 I 在两个极限值之间。例如，纬度 $48^{\circ}00' \text{ N}$ ， $\varepsilon=23^{\circ}26'$ ，那么 I 的两个极限值是：

$$\theta = 90^{\circ} \text{ 时, } I = 90^{\circ} - \varphi + \varepsilon = 65^{\circ}26'$$

$$\theta = 270^{\circ} \text{ 时, } I = 90^{\circ} - \varphi - \varepsilon = 18^{\circ}34'$$

要注意的是， I 不是太阳周日运动的平面与地平面的夹角。译者注：而是周年运动平面(黄道面)与地平的夹角，当然上式还未涉及视差问题。

例 12. c—— $\varepsilon=23^{\circ}.44$ ， $\varphi=+51^{\circ}$ ， $\theta = (5\text{h } 00\text{m}) = 75^{\circ}$ ，

利用公式(12.9)，得到：

$$\tan(\lambda) = -0.1879, \text{ 因此 } \lambda = 169^{\circ}21' \text{ 和 } \lambda = 349^{\circ}21'$$

利用(12.10)式得：

$$I = 62^{\circ}$$

参考资料

1、《1835 年航海年历和天文历书》，第 508 页(伦敦, 1833)。

2、《1857 年美国星历及航海年历》，第 491 页(华盛顿, 1854)

3、《1960 年天文历书》，第 434 页等(伦敦, 1958)

4、W. Chauvenet, 《球面学和实用天文学手册》，卷 I，第 317 页等(费城, 1891)

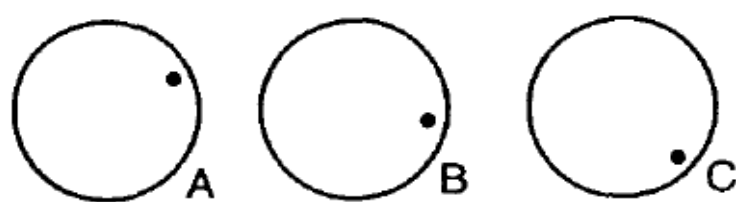
5、A. Danjon, 《Astronomie Generale》，第 46 页(巴黎, 1959)

6、S. Newcomb, 《球面天文学概论》，第 119 页(纽约, 1906)

第十三章 视差角

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 8 日]

假设在晴朗的早晨，我们通过一片深色的玻璃看太阳，我们看到一个黑子在太阳边缘的西边(右侧)，如图 1. A，到了中午，太阳接近了南边的子午圈，我们注意到，这个黑子降低了，如图 1. B，到了下午，我们看到则离开得更远了，如图 1. C。



一天中太阳黑子的视移动：

A. 早上 B. 中午 C. 下午

这三个草图中，圆圈表示太阳圆盘，天顶在上方

图1



半满上弦月，观测者在北半球

A. 太阳落山时的月相 B. 晚上的时候

天顶在上方

图2

注意区别：“北极”、“天顶”、“圆盘北点”、“圆盘天顶点”

太阳黑子并没有正真在太阳表面上那么移动，那是整个太阳面图像顺时针旋转。同样的情况，看月亮则更为直观，见图 2。

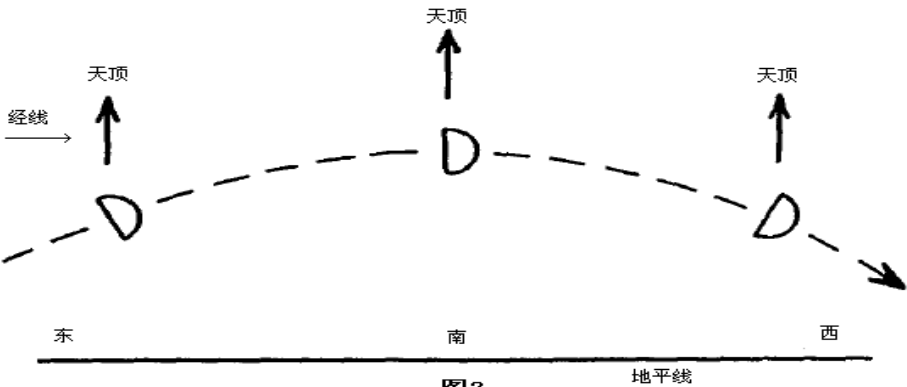


图3

如果我们考虑天球的周日运动，上述的这种视旋转就很容易理解了。如图 3，对某个天体描画了平行圈、周日角。仅当太阳（或月亮）正好在南子午圈时，它的北方向正好指向天顶（注，本地子午圈过天顶）。

星座也有同样的效果。一个观察者在北半球，在东南方时，猎户座倾斜在左边，升起到南方向后则正立，在西南方时则向右倾斜。

在图 4，画出了太阳（或月亮）圆盘。虚线弧 AB 是(箭头是周日运动方向)它在天球上周日运动的一段弧。C 是盘面的中心。天顶及天北的方向如图中所示。天北方向是垂直 AB 的。Z 是圆盘上的天顶点。对观测量来说，这个时刻，整个圆盘面在天空中的最高点就是 Z 点。N 是圆盘的北点，CN 方向指向天北极。

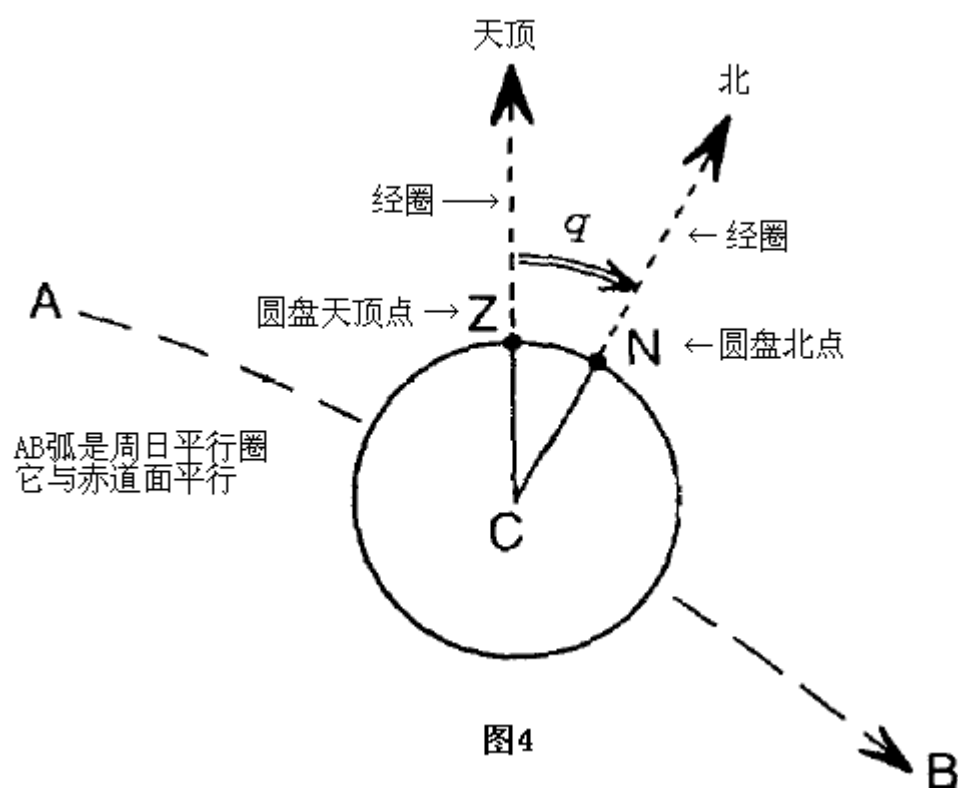


图4

角 ZCN，叫做视差角，通常记作 q 。这个视差角与视差完全无关。使用这个名称源于一个事实，天体沿着平行圈运动。对照这个“视差角”安装望远镜。

我们约定，通过子午圈之前 q 为负，之后为正。正好在子午圈上 $q = 0$ 度。

可以利用以下公式计算视差角 q ：

$$\tan(q) = \sin(H) / (\tan(\varphi) * \cos(\delta) - \sin(\delta) * \cos(H)) \quad (13.1)$$

式中， φ 和前面的章节一样，它是观测站地理纬度。 δ 是天体的赤纬， H 是该时刻的时角。

当天体正好在天顶，角 q 则没有定义。的确，当 $H=0$ 度， $\delta=\varphi$ ，由公式(13.1)得到 $q = 0/0$ 。我们可以比较这种情况，如果某人正好站地球的北极，它的地理经度也是没有定义的，因为所有的子午圈都经过他那里。对于这个特殊的观测者，地平线上所有的点都在南方向。

当一个天体正好通过天顶，那么视差角 q 则从 -90 度跳变到 90 度。

如果天体在地平线上（升或降），公式(13.1)将简化为：

$$\cos(q) = \sin(\varphi) / \cos(\delta)$$

在这种情况下，就不须要知道角度 H

第十四章 天体的升、中天、降

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 9 日]

天体的升（出）或降（没）时刻对应的时角可由公式(12.6) 计算，把 $h=0$ 代入该式得：

$$\cos(H_0) = -\tan(\varphi) * \tan(\delta)$$

然而，这样取得的是几何上的星体中心的升降。由于大气折射，当我们看到星体升或降时，星体的真实位置在地平线之下 $0^\circ 34'$ （在地平线时，一采用这个值）。对于太阳，视升降一般指太阳圆盘上边缘的升与降，因此需加上 16 分的太阳半径进行计算。

实际上，折射受到观测站温度、大气压等因素的影响（详见第 15 章）。冬天与夏天的温度变化，会引起升降时间改变 20 秒（在南中纬度或北中纬度）。类似的，观测太阳升降时间，大气压强的变化也会导至十几秒的时间差。不过，在本章，我们将对地平上的大气折射影响取均值，即上面提到的 $0^\circ 34'$ 。

我们将使用以下符号：

L = 观测者的地心经度，单位是度，从格林尼治测量，向西为正，向东为负。

φ = 观测者的地心纬度，北半球为正，南半球为负。

$\Delta T = TD - UT$ ，单位是秒。

h_o = “标准”地平纬度，也就是该时刻天体中心视升降的几何地平纬度，换句话说：

$h_o = -0^\circ 34' = -0.5667$ （恒星或行星）

$h_o = -0^\circ 50' = -0.8333$ （太阳）

对于月亮，这个问题更复杂，因为 h_o 不是常数。考虑半径变化及地平视差，我们得到月亮的：

$h_o = 0.7275\pi - 0^\circ 34'$

式中 π 是月亮的地平视差（不是上章所说的视差角）。如果精度要求不高， h_o 可以取均值 $h_o = 0.125$ 。

假设，在某一观测点，我们希望计算某一日期及时间（UT 时）天体的升、中天（天体在本地子午圈上，最高点）、降。我们可以先从天文年历中取得以下数据（也可以自己用电脑程序计算）：

——格林尼治 D 日 0h（UT 时）的视恒时 θ_o ，并转为“度”单位；

——天体的视赤经及视赤纬（单位是度）：

α_1 和 δ_1 ，在力学时 D-1 日 0h

α_2 和 δ_2 ，在力学时 D 日 0h

α_3 和 δ_3 ，在力学时 D+1 日 0h

我们先使用下式估算时间：

$$\cos(H_o) = (\sin(h_o) - \sin(\varphi) * \sin(\delta_2)) / (\cos(\varphi) * \cos(\delta_2)) \quad (14.1)$$

注意！计算前先检查等式右边的数是否介于-1 到+1 之前，然后计算出 H_o 。见本章末的“注意 2”。

H_o 单位是度， H_o 应转换到 0 度到 180 度。那么我们有：

中天： $m_0 = (\alpha_2 + L - \theta_o) / 360$

升起： $m_1 = m_0 - H_o / 360$ 14.2 式组

降落： $m_2 = m_0 + H_o / 360$

式中 m 是 D 日的时间 (即 D 日 m 时), 单位是日。因此 m 的值在 0 到 1, 如果 m (即 m_0 或 m_1 或 m_2) 的值超过这个范围, 那么应加 1 或减 1。例如: $m = 0.3744$, 则不用变; $m = -0.1709$, 则应加 1 变为 $+0.8291$; $m = +1.1853$ 则应减 1 变为 $+0.1853$ 。

译者注: θ_0 是格林尼治恒星时, 本地恒星时为 $\theta = \theta_0 - L$, 本地时角 (天顶与天体的经度差) 为 $H = \theta_0 - L - \alpha$, 用 θ 标定天顶经度, 用 α 标定天体经度。

现在, 对上面的 3 个 m 值执行以下计算。

得到格林尼治恒星时 (单位度): $\theta = \theta_0 + 360.985647 * m$, 式中 m 是 m_0 、 m_1 或 m_2

对于三个时间点 $n = m + \Delta T / 86400$ (即原来的三个 m 是 TD 时, 计算后得三个 n 是 UT 时), 结合 (α_1 、 α_2 、 α_3) 插值得 α , 结合 (δ_1 、 δ_2 、 δ_3) 插值得 δ , 插值公式使用 (3.3) 式。计算中天时间, 无需计算 δ 。

计算星体的本地时角: $H = \theta - L - \alpha$, 那么星体的地平纬度 h 可由 (12.6) 式得到。计算中天时间, 无需这个地平纬度。

那么 m 的修正量可由式得到:

——中天: $\Delta m = H / 360$, 式中 H 的单位是“度”, 介于 -180 度到 180 度之间。在多数情况下, H 是一个介于 -1 度到 $+1$ 度之间的小角。

——升降: $\Delta m = (h - h_0) / (360 * \cos(\delta) * \cos(\varphi) * \sin(H))$

式中 h 和 h_0 的单位是“度”。

修正量 Δm 通常是个, 多数情况下介于 -0.01 到 $+0.01$ 。

正确的 m 值是 $m + \Delta m$, 如果需要, 可利用修正后的 m 重新执行计算 (迭代计算过程)。

最后的计算: 把每个 m 的值乘上 24 转为小时。

例 14. a: ——1988 年 3 月 20 日, 金星升、中天、降。
观测点, 波士顿:

经度 = $+71^{\circ}05'$ = $+71^{\circ}.0833$

纬度 = $+42^{\circ}20'$ = $+42^{\circ}.3333$

准确星历如下:

1988 年 3 月 20, 0h UT: $\theta_0 = 11\text{h } 50\text{m } 58\text{s}.10 = 177^{\circ}.74208$

1988 年 3 月 19, 0h TD: $\alpha_1 = 2\text{h } 42\text{m } 43\text{s}.25 = 40^{\circ}.68021$

1988 年 3 月 20, 0h TD: $\alpha_2 = 2\text{h } 46\text{m } 55\text{s}.51 = 41^{\circ}.73129$

1988 年 3 月 21, 0h TD: $\alpha_3 = 2\text{h } 51\text{m } 07\text{s}.69 = 42^{\circ}.78204$

1988 年 3 月 19, 0h TD: $\delta_1 = +18^{\circ}02'51''.4 = +18^{\circ}.04761$

1988 年 3 月 20, 0h TD: $\delta_2 = +18^{\circ}26'27''.3 = +18^{\circ}.44092$

1988 年 3 月 21, 0h TD: $\delta_3 = +18^{\circ}49'38''.7 = +18^{\circ}.82742$

使用公式(14.1)得到 $h_0 = 0$, $\Delta T = +56\text{s}$, 利用公式(14.1)

得:

$\cos(H_0) = -0.3178735$, $H_0 = 108^{\circ}.5433$, 因此 m 的估值为:

中天: $m_0 = -0.18035$, 因此 $m_0 = +0.81965$

升起: $m_1 = m_0 - 0.30148 = +0.51817$

降落: $m_2 = m_0 + 0.30148 = +1.12113$, 因此 $+0.12113$

算出准确的时间:

	升起	中天	降落	
m	+0.51817	+0.81965	+0.12113	
θ	$4^{\circ}.79401$	$113^{\circ}.62397$	$221^{\circ}.46827$	
n	+0.51882	+0.82030	+0.12178	
α	$42^{\circ}.27648$	$42^{\circ}.59324$	$+41^{\circ}.85927$	插值用的
δ	$+18^{\circ}.64229$	-----	$+18^{\circ}.48835$	插值用的
H	$-108^{\circ}.56577$	$-0^{\circ}.05257$	$+108^{\circ}.52570$	
h	$-0^{\circ}.44393$	-----	$-0^{\circ}.52711$	
Δm	-0.00051	+0.00015	+0.00017	
m	+0.51766	+0.81980	+0.12130	修正后的

利用上面修正后的 m , 再做一次修正计算, 得到的新的修正量分别是:

-0.000003, -0.000004, -0.000004

可见新的修正量已经很小了, 可以忽略, 所以我们最后

得到:

升起: $m_1 = +0.51766$, $24 \times 0.51766 = 12\text{h } 25\text{m UT}$

中天: $m_0 = +0.81980$, $24 \times 0.81980 = 19\text{h } 41\text{m UT}$

降落: $m_2 = +0.12130$, $24 \times 0.12130 = 02\text{h } 55\text{m UT}$

注意:

1、在列 14. a 中, 我们得到, 在波士顿降落的时间是 3 月 20 日(02h 55m UT)。然而, 转为本地标准时间, 相当于前一天晚上的! 如果确实需要使用 3 月 20 日下落的本地时间, 首次计算时应使用 $m_2 = +1.12113$, 而不是 0.12113。

2、如果天体在天极附近, 公式 ([14.1](#)) 右边的绝对值可能大于 1, 将得不到角 H_0 , 在这种情况下, 星体整天都在地平线上。

3、如果仅需要大约的时间, 使用公式 ([14.2](#)) 计算 m_0 、 m_1 和 m_2 的初值就可以了, 无须迭代修正。

第十五章 大气折射

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 3 月]

[译者注]以下所述的纬度均指“地平纬度”或“高度角”, 我不会译, 就这么将就吧。

大气折射是光线通过地球大气层时光线发生弯曲。光线经过密度不断增加的大气时发生连续弯曲。这造成观测到的星体位置比真实位置高。在天顶, 大气折射是零, 越接近地平, 折射越大。地平纬度是 45 度时, 折射为约为 $1'$, 在地平上, 大约是 $35'$ 。因此, 太阳和月亮升起的时候, 它们实际在地平线之下。由于折射率的变化, 在低纬时我们看到的是椭圆形的太阳。当确定位置是, 必须做大气折射修正, 有以下两种情形:

观测到星体地平纬度是 h_0 , 我们应找到一个适当的 R 值修正 h_0 , 真纬度(真高度角)是 $h = h_0 - R$ 。

从天体坐标中得到没有空气情况下地平真纬度 h ，找一个适当的 R 修正 h ，得到视纬度 $h_o = h + R$ 。

我们遇到的大部分公式都是针对第一种情况的(已知观测值求真值)。但是这里，我们将考虑两种情况。

通常，我们可以使用“平均”的方法。然而，接近地平是的反常折射则不行，变形的夕阳告诉我们，在低纬度时，无法得到很高的精度。当天体的纬度大于 15 度，以下两个公式可供你选择，你可根据实际情况选择其一：

$$R = 58''.294 \tan(90 - h_o) - 0''.0668 \tan^3(90^\circ - h_o)$$

$$R = 58''.276 \tan(90 - h) - 0''.0824 \tan^3(90^\circ - h)$$

第 1 个公式是 Smart 提供的，第 2 个公式是由第一个公式导出的。当纬度低于 15 度，这两个表达式将变得不准确，甚至毫无意义。从以上公式看出，在高纬度区，折射与 $90 - h$ 的正切值成正比。

New South Wales 大学的 G. GBennett 结出了一个出人意料的简单的折射公式，在 0 到 90 度范围内有很好的精度。

如果 R 表达为以分为单位，Bennett's 公式是：

$$R = 1 / \tan(h_o + 7.31 / (h_o + 4.4)) \quad (15.3)$$

式中 h_o 是视纬度，单位是度。根据 Bennett，对于任意 h_o ，这个公式的精度是 $0.07' = 4.2''$ 。最大误差 $0.07'$ 发生在 $h_o = 12$ 度。应当注意的是：当 $h_o = 0$ 时， $R = -0''.08$ (即 0.0013515 分)，而不是 0。可用第二项公式修正，先算出 R ，接下来利用下式修正 R ：

$$dR = -0.06 \sin(14.7R + 13)。$$

结果的单位是分，括号中的表达式单位是度。修正后，在 $h_o = 0$ 到 90° 范围内，最大误差 $0.015' = 0.9''$ 。注意，在 $h_o = 90^\circ$ 时，计算的结果是 $R = -0.89''$ ，不作第二项修正反而更好。

逆问题，已知真纬度，求折射的影响。有以下公式：

$$R = 1.02 / \tan(h + 10.3 / (h + 5.11)) \quad (15.4)$$

该式与 Bennett 的公式吻合到 $4''$ 。同样， $h = 90^\circ$ 时，该式算得 R 不等于零。差值是 0.0019279。

以上公式假设观测式是在海平面，大气压是 1010 毫巴，温度 10 度摄氏度。

当气压增加温度下降，折射增加。设地表气压为 P 毫巴，气温是 T 摄氏度，那么以上各式 R 的值应乘以下式：

$$(P/1010)*(283/(273+T))$$

然而，这只是大约修正。因为折射率还与光的波长有关。这些表达式适用于黄光，它对人眼的灵敏度最高。

例 15. a: 表面光滑的太阳圆盘下边沿视纬度是 30'。设太阳的真直径是 32'，气温及大气压为常规条件。求真位置。

(1) $ho1=30'=0.5^\circ$ ，由式 1 算得 $R=28'.754$ ，则：

(2) 下边沿真地平纬度 $h1=30'-28'.754=1'.246$ ，

(3) 上边沿真地平纬度 $h2=1'.246+32'=33'.245$

(4) 利用式 2 算得上边沿的视地平纬度（高度）
 $ho2=57'.864$ 。

日圆盘的垂直方向直径与与水平方向的直径比：
 $(ho2-ho1)/32=(57.864-30)/32=0.871$

第十六章 角度差

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 19 日]

当赤经和赤纬已知，两个天体间的角距离可由下式计算：

$$\cos(d)=\sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\alpha_1-\alpha_2) \quad (16.1)$$

式中 α_1 、 δ_1 是一个天体的赤经和赤纬， α_2 、 δ_2 是另一个天体的赤经和赤纬。

当天体的黄经 λ 黄纬 β 已知，天体角距离公式同样使用上式，只需把 α_1 、 α_2 、 δ_1 、 δ_2 换为 λ_1 、 λ_2 、 β_1 、 β_2 。

当 d 接近于 0 或 180 度时，(16.1) 不再适用。因为此时 $|\cos(d)|$ 接近于 1，并且其值随 d 变化很小，所以得到的 d 不精确。例如：

$$\cos(0^{\circ}01'00'') = 0.999999958$$

$$\cos(0^{\circ}00'30'') = 0.999999989$$

$$\cos(0^{\circ}00'10'') = 0.999999997$$

$$\cos(0^{\circ}00'00'') = 1.000000000$$

如果角度差非常小，如小于 $0^{\circ}00'10''$ ，那么应改用下式计算：

$$d = \sqrt{(\Delta\alpha \cdot \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2} \quad 16.2$$

式中 $\Delta\alpha$ 是两个赤经的差， $\Delta\delta$ 是两个赤纬的差， δ 是两个赤纬的平均值。应注意， $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 应表达为相同的单位。

如果 $\Delta\alpha$ 是“小时”单位， $\Delta\delta$ 是度单位， d 是角秒单位，则公式如下：

$$d = 3600\sqrt{(15\Delta\alpha \cdot \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2} \quad 16.3$$

如果 $\Delta\alpha$ 是“时秒”单位， $\Delta\delta$ 是角秒单位， d 是角秒单位，则公式如下：

$$d = \sqrt{(15\Delta\alpha \cdot \cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2} \quad 16.4$$

公式(16.2)、(16.3)、(16.4)仅在 d 很小的时候才适用。你还可以使用本章末的其它公式。

例 16. a: 计算 Arcturus(α Boo)和 Spica(α Vir)之间的角距离。这两颗的 J2000.0 坐标是：

α Boo:

$$\alpha_1 = 14^{\text{h}} 15^{\text{m}} 39^{\text{s}}.7 = 213^{\circ}.9145$$

$$\delta_1 = +19^{\circ}10'57'' = +19^{\circ}.1825$$

α Vir:

$$\alpha_2 = 13^{\text{h}} 25^{\text{m}} 11^{\text{s}}.6 = 201^{\circ}.2983$$

$$\delta_2 = -11^{\circ}09'41'' = -11^{\circ}.1641$$

由公式(16.1)得 $\cos(d) = +0.840633$ ，因此 $d = 32^{\circ}.7930 = 32^{\circ}48'$

当然，这个距离是 J2000.0 时它们的角距离。由于恒星自行，这个距离随时间缓慢变化。

练习：计算 Aldebaran 和 Antares 的角距离。答案：

169°.58'

一个(或二个)天体可能是移动的。例如，一个行星和一个恒星，或者二个行星。在这种情况下，可以写个程序，先对 δ_1 、 δ_2 和 $\alpha_1-\alpha_2$ 这三个量进行插值计算，之后再把插值结果代入公式(16.1)或(16.2)算出 d 。提示：利用插值结果并利用(16.1)式计算 d 时，如果 $\cos(d) < 0.999995$ ，那么可以直接算出 d ，否则应改用(16.2)式。

译者注：为什么要先对(16.1)式所需的三个量 δ_1 、 δ_2 和 $\alpha_1-\alpha_2$ 先做插值处理，而不是直接对距离 d 进行插值处理？因为，当星体之间的距离很近，接近会合时（比如它们可以会合），我们可以把星体之间的运动看做均速的，就会发现，两线星间是“线性”的靠近然后“线性”的远离，当我们画出“时间——距离”图象，将得到一条“V”字形的图象，这样星体会合时“时间——距离”图象的曲率非常大，插值的精度不高。

练习：使用以下坐标值，计算水星与土星之间的最近距离。

1978		水星		土星	
0 h TD		α_1	δ_1	α_2	δ_2
Sep	12	10 ^h 23 ^m 17 ^s .65	+11°31'46".3	10 ^h 33 ^m 01 ^s .23	+10°42'53".5
	13	10 29 44.27	+11 02 05.9	10 33 29.64	+10 40 13.2
	14	10 36 19.63	+10 29 51.7	10 33 57.97	+10 37 33.4
	15	10 43 01.75	+ 9 55 16.7	10 34 26.22	+10 34 53.9
	16	10 49 48.85	+ 9 18 34.7	10 34 54.39	+10 32 14.9

答案：两星体间的最短的角距离是0°03'44"，发生在1978年9月13日 15h 06m.5 TD = 15h 06m UT。

我们看到，达到最近距离时，它们几乎会合了。我们必须强调这个事实，在这种情况下，应先对 δ_1 、 δ_2 和 $\alpha_1-\alpha_2$ 进行插值计算，而不能直接对距离进行插值计算出最近距离。

假设我们直接对距离进行插值计算。利用 16.1 式，我

们得到以下距离，单位是度，共 5 个：

1978 9 月 12.0 TD $d_1 = 2.5211$ 度

1978 9 月 13.0 $d_2 = 0.9917$ 度

1978 9 月 14.0 $d_3 = 0.5943$ 度

1978 9 月 15.0 $d_4 = 2.2145$ 度

1978 9 月 16.0 $d_5 = 3.8710$ 度

很明显，最小距离发生在 9 月 13.0 和 14.0 日之间，并且更接近 14.0 日一些。

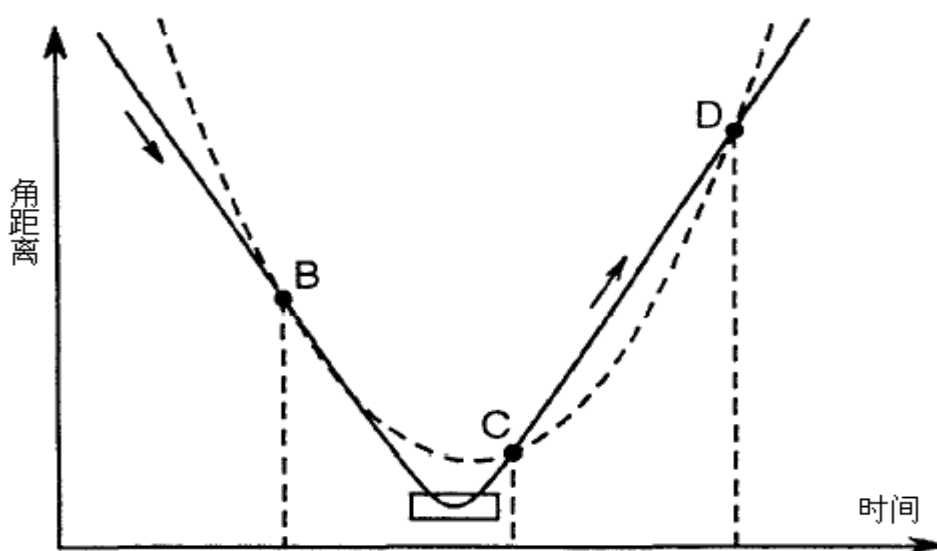
现在，我们使用中间的 3 个值 d_2 、 d_3 、 d_4 ，并利用公式 (3.4) 计算最小距离为 $0^\circ.5017 = 0^\circ 30'06''$ 。也可以使用 5 个值 d_1 到 d_5 ，利用 (3.9) 式计算出“更好”的 nm ，公式 (3.9) 相应的极值公式是 (3.8) 式，计算得极值是 $0^\circ.4865 = 0^\circ 29'11''$ 。

以上两个结果都完全错误。在接近最小距离之前的一小段时间内，水星几乎是直线靠近土星，两星体间的角距离随时线性递减。同样，在达到最近距离之后的一小段时间内，水星以几乎按直线离开土星。

图中实线曲线表示两个星体角距离的真实变化。除了十分靠近最小距离的这段曲线外，两边几乎就是两条直线，一条经过 B，另一条经过 C 和 D，在这种情况下，插值将失效。

公式 (3.3)、(3.4) 和 (3.5)，是把函数的部分曲线拟合为抛物线。但是，这几乎是两条直线不是抛线，除非在十分靠近极点的那么小矩中。

如果我们使用 B、C、D 三点及它们相应的距离 d_2 、 d_3 、



d4，那么利用插值公式(3.3)，我们得到通过这三点的抛物线，如图中的虚线。这条抛物线与真实曲线相差很大，尤其是在它的极值处相差更多。

使用 5 个值 d1 到 d5，代替 3 点插值，仍然无济于事。因为实线与 4 次多项式仍然相差太大。

因此，对距离直接执行插值得不到准确结果。正如我们已经说的，我们应对原始坐标进行插值，只有它们才能准确推算出中间时刻的距离，接下来使用公式(3.8)插值，我们得到以下几个插值因子：

n	距离(度)
-0.50	0.21437
-0.45	0.14057
-0.40	0.07790
-0.35	0.07028
-0.30	0.12815

显然，最小距离对应的 n 在-0.40 到-0.35 之间，所以我们可以在这个范围内用更小的间隔来计算角距离：

n	距离(度)
-0.38	0.06408
-0.37	0.06229
-0.36	0.06448

现在，这个列表的间隔已经足够小，可以使用(3.4)式和(3.5)式了。我们得到最小的距离是 $n = -0.370502$ 时取极值 $0^\circ.06228 = 0^\circ03'44''$ ，对应的时刻就是上面说到的 9 月 13.629498 = 9 月 13 日 15h 06m.5 TD。

然而，无需计算以上的几个插值因子 n，而通过引入直

先算出输助量K

$$K = \frac{206\,264.8062}{1 + \sin^2 \delta_1 \tan \Delta \alpha \tan \frac{\Delta \alpha}{2}}$$

式中的206264.8062是每弧度的角秒数。接下来：

$$u = -K (1 - \tan \delta_1 \sin \Delta \delta) \cos \delta_1 \tan \Delta \alpha$$

$$v = K (\sin \Delta \delta + \sin \delta_1 \cos \delta_1 \tan \Delta \alpha \tan \frac{\Delta \alpha}{2})$$

角坐标计算出角距离也是可能的。这些坐标值是 u 和 v , 单位是角秒, 用下式计算:

式中的 α_1 和 δ_1 是第一个行星的赤经和赤纬, 而 $\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$, $\Delta\delta=\delta_2-\delta_1$, 其中 α_2 和 δ_2 是第二个行星的赤经和赤纬。

让我们计算 3 个等时间间隔的 u 和 v 的值。对于其它任意中间时刻, 可以使用公式 (3.3) 插值计算得到, 而它们的变化率 (单位: 角秒/列表时间间隔) 为:

$$u' = (u_3 - u_1)/2 + n(u_1 + u_3 - 2u_2)$$

式中 n 是插值因子, u_1 、 u_2 、 u_3 是 u 的三个计算值。 v' 的表达式与上式类似。

插值因子 n 从任意一个值开始, 一个良好的选择是 $n=0$ 。对于这个 n , 利用公式 (3.3) 进行插值得到 u 和 v , 进而得到变化率 u' 和 v' 。那么 n 的修正值为:

$$\Delta n = -(uu' + vv')/(u'^2 + v'^2)$$

所以, n 的新值是 $n+\Delta n$, 重复计算 n , 直到 Δn 是一个很小的量, 例如绝对值小于 0.000001。

得到 n 以后就可再算出 u 和 v , 那么最小距离是 (单位是角秒): $\sqrt{u^2+v^2}$ 。

让我们利用这个方法解决以上提到的水星与土星会合问题。选择 3 个时刻: 1978 年 9 月 13.0、14.0、15.0 日。我们得到以下 u 和 v 的值, 保留了一些额外的小数位, 以避免舍入误差:

		u	v
9月	13.0	-3322".44	-1307".48
	14.0	+2088.54	+ 463.66
	15.0	+7605.36	+2401.71

当 $n=0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} u &= +2088.54 & u' &= +5463.90 \\ v &= + 463.66 & v' &= +1854.595 \end{aligned}$$

因此修正量 $\Delta n = -0.368582$, n 修正后为:
 $0 - 0.368582 = -0.368582$

由这个修正后的 n , 我们得到:

$$\begin{aligned} u &= + 81.83 & u' &= +5424.89 \\ v &= -208.57 & v' &= +1793.07 \end{aligned}$$

因此 $\Delta n = -0.002142$, 则 n 修正后: $-0.368582 - 0.002142 = -0.370724$

再次迭代得到 $\Delta n = -0.000003$, 所以最后 n 的值是 $-0.370724 - 0.000003 = -0.370727$ 。

[这个值与前面得到的 $n = -0.370502$, 因为前面的计算只用了行星的 3 个位置, 而不是 5 个位置。不过相差只有 0.000225 日, 即 19 秒]

对于 $n = -0.370727$, 我们得到 $u = +70''.20$, $v = -212''.42$, 因此两个行星的最小距离是: $\sqrt{u^2 + v^2} = 224'' = 3'44''$, 和前面的一样。

同样的方法可以用于其中一个星体是恒星的情况, 只是把恒星的坐标值是个常数。但要注意, 恒星的 α 和 δ 所涉及的赤道坐标系应与另一个移动星体所用的坐标系相同。(译者注: 恒星坐标一般是 FK5 坐标系的, 行星常用的坐标系可能是 VSOP87 的 Date 黄道坐标或其它坐标, 应注意坐标变换)

如果移动的星体是主行星, 给出的是 Date 分点坐标的视赤经和视赤纬, 那么恒星坐标值也必须是相对于 Date 分点坐标系的。如果一个恒星位置坐标取自星库, 涉及标准分点坐标(J2000.0 赤道坐标), 那么就应考虑恒星自行、岁差、章动及光行差(在**第 22 章**还会讲到), 把这个坐标转换

到 Date 分点坐标中。

如果移动的星体 α 和 δ ，已经是标准分点坐标(天文观测坐标)，那么恒星的 α 和 δ 也必须是涉及标准分点坐标的，这时只需考虑恒自行即可。

译者注：插值计算时，几个插值节点的时间间隔很短，通常只用几天或几个小时，这么段的时间内，恒星的位置可以看做不变。但星库中的恒星位置通常是指 J2000.0 时刻的恒星位置坐标，这个时刻可能与我们计算的时刻相差很多年，此期间，恒星的自行造成恒星的实际位置与星库中的位置不相符，所以要做恒自行修正。

可供选择的替代公式

虽然，公式(16.1)是很准确的，但是，从算术计算的角度看来，当 d 很小时，精度是很糟糕的，这一点在本章开始部分就已经讲到了。正由于这个原因，有几个其它的方法已经被推荐。

其中一中方法是，考虑使用旧的半正矢(hav)函数，它对某些包含小角度的天文计算有很大的帮助，可以保留足够的有效数字。hav 定义如下：

$$\text{hav}\theta = (1 - \cos\theta)/2$$

余弦公式(16.1)可精确等价于：

$$\text{hav } d = \text{hav}\Delta\delta + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \text{ hav } \Delta\alpha \quad (16.5)$$

式中 $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ， $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$

在使用计算机计算时，我们还可以利用以下恒等式：

$$\text{hav}\theta = \sin^2(\theta/2)$$

利用公式(16.5)，在接近 180 度到 0 度的整个范围内，角度差可以被计算十分精确。

J. j. Slabinski 提供了另一种方法：

$$\sin^2 d = (\cos\delta_1 \sin\Delta\alpha)^2 + (\sin\delta_2 \cos\delta_1 \cos\Delta\alpha - \cos\delta_2 \sin\delta_1)^2$$

不过，这个公式不能区分补角，例如 144 度与 36 度。在 d 接近 90 度时，这个公式精度很低。

参考文献

- 1、A. Danjon, 《Astronomie Generale》, 第 36 页, 公式 3.2 (巴黎 1959)
- 2、《天空和望远镜》, 卷 68, 第 159 页 (1984 年 8 月)
- 3、《天空和望远镜》, 郑 69, 第 158 页 (1985 年 2 月)

第十七章 行星会合

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 20 日]

给出两个行星的 3 个或 5 个不同时刻的位置, 就可编写一个程序计算出赤经会合的时间以及此刻两星体之间的赤纬差值。这个方法包含了赤经的差值 $\Delta\alpha$ 的计算, 即三点位置情况下利用公式 (3.6) 或 (3.7), 五点位置时得利用 (3.10) 或 (3.11) 计算出 $\Delta\alpha=0$ 对应的时刻 (会合时刻)。当这个时刻找到后, 直接用 (3.3) 或 (3.8) 插值计算出会合时刻的赤纬差值 $\Delta\delta$ 。

天体的黄经会合也可以使用同样的方法计算, 当然, 应使用地心黄经和黄纬代替赤经和赤纬。

须注意的是, 不管是赤经会合还是黄经会合, 都不是两星体的最小角距离。

例 17. a: ——计算 1991 年 8 月 7 日水星与金星的会合。

以下是各日 0 时的精确星历:

水星	8月	5	$\alpha = 10^{\text{h}}24^{\text{m}}30^{\text{s}}.125$	$\delta = +6^{\circ}26'32''.05$
		6	10 25 00.342	+6 10 57.72
		7	10 25 12.515	+5 57 33.08
		8	10 25 06.235	+5 46 27.07
		9	10 24 41.185	+5 37 48.45
金星	8月	5	$\alpha' = 10^{\text{h}}27^{\text{m}}27^{\text{s}}.175$	$\delta' = +4^{\circ}04'41''.83$
		6	10 26 32.410	+3 55 54.66
		7	10 25 29.042	+3 48 03.51
		8	10 24 17.191	+3 41 10.25
		9	10 22 57.024	+3 35 16.61

我们先计算出二者的赤经差值及赤纬差值，单位是度：

8月 5	$\Delta\alpha = -0.737\ 708$	$\Delta\delta = +2.363\ 950$
6	-0.383 617	+2.250 850
7	-0.068 863	+2.158 214
8	+0.204 350	+2.088 006
9	+0.434 004	+2.042 178

应用公式(3.10)对 $\Delta\alpha$ 插值计算，当 $\Delta\alpha=0$ 时，插值因子是 $n = +0.23797$ 。因此，赤经会合在：

$$\begin{aligned} 1991\text{年}8\text{月}7.23797 &= 1991\text{年}8\text{月}7\text{日 } 5\text{h } 42\text{m}.7\text{ TD} \\ &= 1991\text{年}8\text{月}7\text{日 } 5\text{h } 42\text{m UT} \end{aligned}$$

用上面得到的 n 的值，代入插值公式(3.8)得到 $\Delta\delta=+2^\circ.13940$ 或 $+2^\circ08'$ 。因此，赤经会合时，水星在金星北部 $2^\circ08'$ 。

如果第二星体是恒，在插值间隔时间范围内，它的坐标可以看做常数。那么我们有：

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_2' = \alpha_3' = \alpha_4' = \alpha_5' \\ \delta_1' &= \delta_2' = \delta_3' = \delta_4' = \delta_5' \end{aligned}$$

程序可以这样写，如果第二星体是恒星，那么它的坐标只需输入一次。

重要的注意事项，和上一章讲到的一样，恒星坐标与移动天体的坐标应使用同一个分点的参考系。

作为一个例子，试计算小行星 4Vesta 与恒 θ Leonis 在 1992 年 5 月的赤经会合。小行星的赤经和赤纬涉及 B1950.0 标准分点坐标，来自 Edwin Goffin 星库：

$Oh\ TD$	α_{1950}	δ_{1950}
1992年5月 8	11 ^h 06 ^m 30 ^s .379	+16°13'37".98
13	11 08 22.410	+15 44 26.59
18	11 10 52.398	+15 11 26.24
23	11 13 57.547	+14 34 58.49
28	11 17 35.311	+13 55 21.19

历元 1950.0 分点的恒星坐标是 $\alpha'=11^h\ 11^m\ 37^s.089$ 和 $\delta=+15^\circ42'11''.49$ 。百年自行(每 100 年的自行)是：赤经 $-0^s.420$ ，赤纬 $-7''.87$ 。

因此，算出从 1950.0 开始的 42.38 年(0.4238 世纪)期间的恒星自行,我们可得到 1950.0 分点坐标中,历元 1992.38 时刻的恒星位置是：

$\alpha'=11^h\ 11^m\ 36^s.911$ 和 $\delta=+15^\circ42'08''.15$

现在，就可以计算“会合”了。

答案：会合时间 1992 年 5 月 19 日 7 时 TD, Vesta 在 θLeonis 南部 $0^\circ40'$ 。

第十八章 在一条直线上的天体

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 20 日]

在本章以及下一章，我们将解决两个不是很重要的“科学”问题。但这对微妙天文事件感兴趣的人或对热门文章的作者来说却是很有价值的。

设 (α_1, δ_1) 、 (α_2, δ_2) 、 (α_3, δ_3) 是三个天体的赤道坐标。

$$\tan \delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \tan \delta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \tan \delta_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \quad (18.1)$$

这些天体在同一条直线上，是指它们位于天球上的同一个大圆。它们的坐标满足以下关系式：

这个公式对黄道坐标同样有效。只需把赤经 α 换为黄经 λ ，把赤纬 δ 换为黄纬 β 即可。

别忘了，赤经一般表达为“时分秒”格式。应把它们转为带小数的小时数，然后乘以 15 转为“度”单位。

如果一个或两个星体是恒星，那么，和前面讲到的一样，它们应转为和行星相同分点的坐标。

例 18. a: ——找出 1994 年火星、Pollux、Castor 在同一条线上的时刻。

从火星的星历和恒星图，可以发现行星与这两个恒星在同一条直线的时刻大约在 1994 年 10 月 1 日。在这一天，恒星的视坐标是：

$$\begin{aligned} \text{Castor } (\alpha \text{ Gem}): \quad & \alpha_1 = 7^{\text{h}}34^{\text{m}}16^{\text{s}}.40 = 113^{\circ}.56833 \\ & \delta_1 = +31^{\circ}53'51''.2 = +31^{\circ}.89756 \\ \text{Pollux } (\beta \text{ Gem}): \quad & \alpha_2 = 7^{\text{h}}45^{\text{m}}00^{\text{s}}.10 = 116^{\circ}.25042 \\ & \delta_2 = +28^{\circ}02'12''.5 = +28^{\circ}.03681 \end{aligned}$$

对于我们要解决的这个问题，在几天内，这些值 ($\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2$) 可以看作常数。

火星的视坐标 (α_3, δ_3) 是变化的。以下是它的值，取自精确的星历表：

TD		α_3	δ_3
1994	9月 29.0	$7^{\text{h}}55^{\text{m}}55^{\text{s}}.36 = 118^{\circ}.98067$	$+21^{\circ}41'03''.0 = +21^{\circ}.68417$
	30.0	$7 \ 58 \ 22.55 = 119.59396$	$+21 \ 35 \ 23.4 = +21.58983$
	10月 1.0	$8 \ 00 \ 48.99 = 120.20413$	$+21 \ 29 \ 38.2 = +21.49394$
	2.0	$8 \ 03 \ 14.66 = 120.81108$	$+21 \ 23 \ 47.5 = +21.39653$
	3.0	$8 \ 05 \ 39.54 = 121.41475$	$+21 \ 17 \ 51.4 = +21.29761$

使用这些值，代入公式(18.1)得到如下值：

9月	29.0	+0.001 9767
	30.0	+0.001 0851
10月	1.0	+0.000 1976
	2.0	-0.000 6855
	3.0	-0.001 5641

使用公式(3.10)做插值计算，我们得到，值为零时发生在：

1994 年 10 月 1.2233 = 1994 年 10 月 1 日 5h TD(UT)

在上一例子中，我们使用了火星的地心位置坐标。因此，严格的说，这个结果只适用于地心观测者，并且火星在观测者的天顶。但目前的问题是，没有必要精确计算行星视差（这个视差是很小的）。而处理月亮的时候，视差可达 1 度，在这种情况下，我们要用到月亮的地平位置坐标（详见第 39 章）。

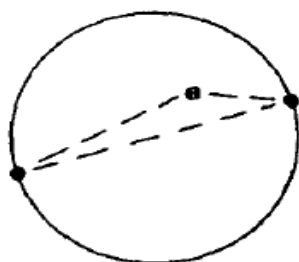
第十九章 包含三个天体的最小圆

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 27 日]

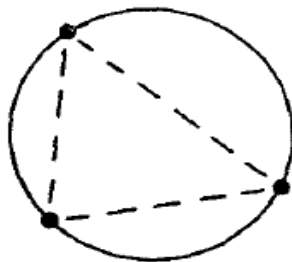
设 A、B、C 是三个天体，在天球上，它彼此相邻不远，不超过 6 度。我们希望计算出包含这三个天体的最小圆的角直径。有以下两种情形：

类型 I：最小圆的直径是三角形 ABC 的最长的边，这里，有一个顶点在圆内。

类型 II：最小圆经过三个顶点 A、B、C。



类型I



类型II

最小圆的直径 Δ 可由以下方法得到。

利用[第 16 章](#)的方法计算出三角形 ABC 各边的长度(单位是度)。设 a 是三角形最大的边长, b 和 c 是另外两边的长度。

如果 $a > \sqrt{b^2 + c^2}$, 那么, 属于类型 I, $\Delta = a$

如果 $a < \sqrt{b^2 + c^2}$, 那么, 属于类型 II

$$\Delta = \frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}} \quad (19.1)$$

例 19. a: 计算 1981 年 9 月 11 日 0h 力学时, 水星、木星、土星的最小圆直径。此刻这三个行星的位置是:

水星 $\alpha = 12^{\text{h}}41^{\text{m}}08^{\text{s}}.63$ $\delta = -5^{\circ}37'54''.2$

木星 $\alpha = 12^{\text{h}}52^{\text{m}}05^{\text{s}}.21$ $\delta = -4^{\circ}22'26''.2$

土星 $\alpha = 12^{\text{h}}39^{\text{m}}28^{\text{s}}.11$ $\delta = -1^{\circ}50'03''.7$

利用公式(16.1)得到三个角度差:

水星——木星 $3^{\circ}.00152$

水星——土星 $3^{\circ}.82028$

木星——土星 $4^{\circ}.04599 = a$

因为 $4.04599 < \sqrt{(3.00152)^2 + (3.82028)^2} = 4.85836$

所以利用([19.1](#))式计算 Δ , 结果是:

$\Delta = 4^{\circ}.26364 = 4^{\circ}16'$

这个例子属于类型 II。

作为一个练习: 请计算 1991 年 6 月 20 日 0h TD 时, 金星、火星、木星的最小圆直径, 使用以下位置数据:

金星 $\alpha = 9^{\text{h}}05^{\text{m}}41^{\text{s}}.44$ $\delta = +18^{\circ}30'30''.0$

火星 $\alpha = 9^{\text{h}}09^{\text{m}}29^{\text{s}}.00$ $\delta = +17^{\circ}43'56''.7$

木星 $\alpha = 8^{\text{h}}59^{\text{m}}47^{\text{s}}.14$ $\delta = +17^{\circ}49'36''.8$

这题属于类型 I, $\Delta = 2^{\circ}19'$

可以写一个程序, 利用插值方法得到行星赤经、赤纬,

然后得到 a 、 b 、 c ，最后得到 Δ 。使用这样的程序，也许可能（试验）计算出三行星的 Δ 的最小值。的确， Δ 是随时间变化的，而本章提供的仅是某一时刻的 Δ 值。

重要注意：行星的位置可以使用插方法计算，而 Δ 则不能。原因是， Δ 的变化不能表达为一个多项式，详见“例 19. c”中的图。（注： Δ 的类型随时间推移会发生跳变）。

例 19. b: 在 1981 年 9 月，有一组三星：水星、木星、土星。位置如下，不提供赤经赤纬，而提供黄经黄纬。

1981		水星		木星		土星	
Oh	TD	黄经	黄纬	黄经	黄纬	黄经	黄纬
九月	7	186.045	-0.560	192.866	+1.117	189.324	+2.226
	8	187.482	-0.696	193.069	+1.116	189.439	+2.225
	9	188.897	-0.833	193.272	+1.114	189.555	+2.224
	10	190.290	-0.971	193.476	+1.113	189.671	+2.223
	11	191.661	-1.109	193.681	+1.112	189.788	+2.222
	12	193.008	-1.246	193.886	+1.110	189.906	+2.221
	13	194.332	-1.384	194.092	+1.109	190.023	+2.220
	14	195.631	-1.521	194.299	+1.108	190.142	+2.219

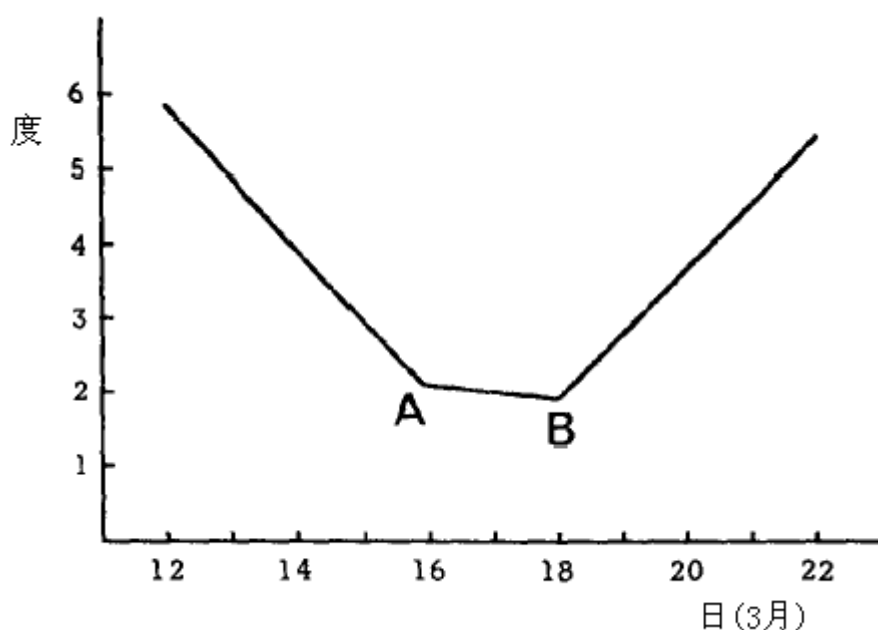
我们不再给出详细解答，留给读者作为练习。让我们看一下 9 月 7.00 到 8.81，三体位置属于类型 I，最小圆的直径 Δ ，从 $7^{\circ}01'$ 变化到 $5^{\circ}00'$ 几乎是线性的减小的。从 9 月 8.81 到 12.19，三体位置属于类型 II， Δ 在 9 月 10.53 达到最小值 $4^{\circ}14'$ 。从 9 月 12.19 开始，三体位置又变为类型 I， Δ 随时间几乎线性增加。

例 19. c: 现在，让我们考虑以下虚构的情况。在 3 月 12.0 日，行星的黄道坐标如下(单位是度)：

	黄经	黄纬	黄经每日变化
行星 P1	214.23	+0.29	+0.11
行星 P2	211.79	+0.48	+0.20
行星 P3	208.41	+0.75	+1.08

我们假设黄纬是常数，黄经匀速增加(详见表中最后一列)。

我们仍把具体计算留读者。我们用下图表示最小圆直径 Δ 的变化。注意图中的拐点 A 和 B。除了两个很短的时期，A 附近(3 月 15.87 到 15.91)和 B 附近(3 月 17.93 到 18.05)是类型 II，其它的都是类型 I。 Δ 的最小值是 $1^{\circ}55'$ ，在图中的 B 点，是 3 月 17.94 日。



如果其中的一个星体是恒星，须注意：恒星的坐标应与行星的坐标使用同一参考坐标系。(在[第 16 章](#)同已讲到)

第二十章 岁差

[许剑伟 清明节下午 在家翻译 翻译工具 goole.cn 语言工具]

译者注：在本文中将会用到 J2000.0 坐标的概念，解释如下。根据 IAU 及 IAG，从 1984 年 1 月 1 日起采用新的固定坐标系 FK5，它是以 2000 年 1 月 1 日 12h TD 时刻的平赤道及平分点为参考点，也称 J2000.0 坐标。该坐标系统的原点

位于地心，x 轴指向此刻的平春分点，z 轴指向此刻的北极，y 向与 x、z 轴正交，x-y-z 构成右手系。

地球的自转轴的方向并不是真的固定在空间的某一方向上。随着时间的推移，它缓慢的漂移，就像陀螺一样，这种漂移称为岁差。这个效果源于月球和太阳对地球赤道突起部分的引力。

由于岁差，北极(目前位于 α Ursae Minoris 星或 Polaris 星附近)缓慢的围绕黄极转动，周期是 26000 年。因这一原因，春分点(黄道与赤道的交点)每年退行 $50''$ 。

另外，行星的黄道在空间中也不是固定的。由于行星对地球的摄动，它回绕一个交点缓慢的移动，每世纪 $47''$ 。

黄道面、赤道面及春分点，是黄道坐标及赤道坐标系中的基本平面和起点。黄道坐标及赤道坐标也是天球中的两个重要的坐标系：黄道坐标(黄经 λ 及黄纬 β)及赤道坐标(赤经 α 及赤纬 δ)。由于岁差，固定的恒星的坐标却是不断改变的。因此，星库中，赤经赤纬表中总要给定某一个历元时间，如 1900.0 或 1950.0 或 2000.0。

在这一章中，我们还考虑赤经 α 及赤纬 δ 转换问题，即从一个历元坐标中转到另一个历元坐标中。这里只考虑平位置及岁差，而星体的视位置将在第 22 章中考虑。

如果精度要求不高，两个历元相差不远，并且如果星体没有太靠近天极，下面的公式可以用来计算赤经及赤纬的每年度岁差：

$$\Delta\alpha = m + n*\sin(\alpha)*\tan(\delta) \quad \Delta\delta = n*\cos(\alpha) \quad (20.1)$$

式中 m 和 n 是两个随时间不同速度缓慢变化的量。他们表达为：

$$m = 3s.07496 + 0s.00186*T$$

$$n = 1s.33621 - 0s.00057*T$$

$$n = 20''.0431 - 0''.0085*T$$

T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数。

以下是某些历元下的 m 和 n 的值：

历元 m (单位 s) n (单位 s) n (角秒)

1700.0 3.069 1.338 20.07

1800.0 3.071 1.337 20.06

1900.0 3.073 1.337 20.05

2000.0 3.075 1.336 20.04

2100.0 3.077 1.336 20.03

2200.0 3.079 1.335 20.03

计算 $\Delta\alpha$ 时, n 值的单位是 s。记住: $1s=15''$ 。

如果是恒星的情况, 计算星体位置时, 应把恒星自行效果加到 20.1 式。

例 20. a——Reulus (α Leonis) 在历元 J2000.0 时的坐标是: $\alpha_0 = 10^h 08^m 22^s.3$ $\delta_0 = +11^\circ 58' 02''$

每年自行速度是:

$-0s.0169$ (赤经)

$+0''.006$ (赤纬)

请把该坐标转为历元 1978.0 的分点坐标。

解: 依题意有:

$\alpha_0 = 152^\circ.093$ $m = 3s.075$

$\delta_0 = +11^\circ.967$ $n = 1s.336 = 20''.04$

用 20.1 式可算出:

$\Delta\alpha = +3s.208$, $\Delta\delta = -17''.71$

我们还应加上每年的自行速度, 得到每所变化速度为:

$\Delta\alpha = +3s.191$, $\Delta\delta = -17''.70$

在 2000.0 到 1978.0 这-22 年里, 总变化量是:

α 的: $+3s.191 * (-22) = -70s.2 = -1^m 10s.2$

δ 的: $-17''.70 * (-22) = +389'' = +6' 29''$

最后的得到:

$\alpha = \alpha_0 - 1^m 10s.2 = +10^h 07^m 12s.1$

$\delta = \delta_0 + 6' 29'' = +12^\circ.04' 31''$

贝塞尔年及儒略年(两种常用历元)

国际天文学联合会决定, 从 1984 年起, 天文历表应使

用以下系统。

新的标准历元是 2000 年 1 月 1 日 12 时 (TD 时)，对应 JDE 2451545.0。该历元写作 J2000.0。为了星体位置计算方便，实历每年的年首与标准历元 J2000.0 中的各年年首是不同的，J2000 中每年的单位是整倍数的儒略年（一个儒略年是 365.25 日）。例如，J1986.0 是 J2000.0 之前 14×365.25 天，对应 JDE 是 $2451545.0 - 14 \times 365.25 = 2446431.50$ 。

J2000.0 或 J1986.0 中的字母 J，指明了一个标准日历的时间单位是儒略年。之前，星体位置使用的标准历元始于贝塞尔年。贝塞尔年是太阳年，年首是：从春风点起算黄经 280 度时 (修正了光行差： $-20''.5$)，这一时刻总是在格里高公历年附近。贝塞尔年长度是太阳年，即 365.2421988 日 (公元 1900)。

在新的系统中，为了区别基于贝塞尔年的旧历元，用字母 B 标识旧历元。例如：

$$B1900.0 = \text{JDE } 2415020.3135 = 1900 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 0.8135$$

$$B1950.0 = \text{JDE } 2433282.4235 = 1950 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 0.9235$$

而

$$J2000.0 = \text{JDE } 2451545.00 \text{ (正好是整数)}$$

$$J2050.0 = \text{JDE } 2469807.50 \text{ (正好是 } 0.5 \text{)}$$

.....

J1986.0 或 J2000.0 等，它们后面的那个“.0”表示年首。

严格的岁差计算方法：

设 T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数，设 t 是某一起始历元到终止历元之间的时间差，单位也是儒略世纪数。

换句话说，如果 $(JD)_{\circ}$ 和 (JD) 是儒略日，分别对应初始和结束历元，就有：

$$T = ((JD)_{\circ} - 2451545.0) / 36525$$

$$t = ((JD) - (JD)_{\circ}) / 36525$$

那么我们有以下关于 ζ 、 z 、 θ 的数值表达式可用于精确坐标位置转换：

(以下为(20.2)组)

$$\zeta = (2306''.2181 + 1''.39656 * T - 0''.000139 * T^2) * t + (0''.30188 - 0''.000344 * T) * t^2 + 0''.017998 * t^3$$

$$z = (2306''.2181 + 1''.39656 * T - 0''.000139 * T^2) * t + (1''.09468 + 0''.000066 * T) * t^2 + 0''.018203 * t^3$$

$$\theta = (2004''.3109 - 0''.85330 * T - 0''.000217 * T^2) * t - (0''.42665 + 0''.000217 * T) * t^2 - 0''.041833 * t^3$$

如果起始历元已经是 J2000.0, 那么 $T=0$, 则 [20.2](#) 式变为:

$$\zeta = 2306''.2181 * t + 0''.30188 * t^2 + 0''.017998 * t^3$$

$$z = 2306''.2181 * t + 1''.09468 * t^2 + 0''.018203 * t^3$$

$$\theta = 2004''.3109 * t - 0''.42665 * t^2 - 0''.041833 * t^3$$

以上为(20.3)组。

然后, 这个严格的公式就可用于某一起始历元赤道坐标 (α_0 和 δ_0) 与终止历元赤道坐标 (α 和 δ) 的转换:

$$A = \cos(\delta_0) * \sin(\alpha_0 + \zeta)$$

$$B = \cos(\theta) * \cos(\delta_0) * \cos(\alpha_0 + \zeta) - \sin(\theta) * \sin(\delta_0)$$

$$C = \sin(\theta) * \cos(\delta_0) * \cos(\alpha_0 + \zeta) + \cos(\theta) * \sin(\delta_0)$$

$$\tan(\alpha - z) = A/B \quad \sin(\delta) = C$$

以上为(20.4)组。

使用带两个参数的 ATN2 函数计算 $\alpha - z$, 以保证得到正确的象限。也可以使用其它方法, 见[第1章](#)。

如果星体接近天极, 使用 $\cos(\delta) = \sqrt{A^2 + B^2}$ 代替 $\sin(\delta) = C$ 。

在把 α_0 和 δ_0 转为 α 和 δ 之前, 应先计算行星自行。

例 20. b——恒星 θ Persei 在 J2000.0 的历元平赤道坐标为:

$$\alpha_0 = 2^h 44^m 11^s.986$$

$$\delta_0 = +49^\circ 13' 42''.48$$

该坐标中, 它每年的自行速度是:

$$+0^s.03425 \text{ (赤经)}$$

-0".0895 (赤纬)

把该坐标转到 2028 年 11 月 13.19 日 TD 历元平坐标中。

解：

初始历元 J2000.0 (JD 2451545.0)，终止历元是 JD 2462088.69。因此， $t = +0.288670500$ 儒略世纪数，或 28.8670500 儒略年。

我们先计算行星自行。在 28.86705 年中，变化：

$$+0s.03425 \times 28.86705 = +0s.989 \text{ (赤经)}$$

$$-0".0895 \times 28.86705 = -2".58 \text{ (赤纬)}$$

因此，J2000.0 平分点坐标中，历元 2028 年 11 月 13.19 日，该星的位置是：

$$\alpha_{\circ} = 2h \ 44m \ 11s.986 + 0s.989 = 2h \ 44m \ 12s.975 = +41^{\circ}.054063$$

$$\delta_{\circ} = +49^{\circ}13'42".48 - 2".58 = +49^{\circ}13'39".90 = +49^{\circ}.227750$$

从初始坐标为 J2000.0 起算，所以可以使用 [20.3](#) 式。 t 的值是 +0.288670500，我们得到：

$$\zeta = +665".7627 = +0^{\circ}.1849341$$

$$z = +665".8288 = +0^{\circ}.1849524$$

$$\theta = +578".5489 = +0^{\circ}.1607080$$

$$A = +0.43049405$$

$$B = +0.48894849$$

$$C = +0.75868586$$

$$\alpha-z = +41^{\circ}.362262$$

$$\alpha = +41^{\circ}.547214 = 2h \ 46m \ 11s.331$$

$$\delta = +49^{\circ}.348483 = +49^{\circ}20'54".54$$

练习：

α Ursae Minoris 在 J2000.0 平赤道坐标是：

$$\alpha = 2h \ 31m \ 48s.704 \quad \delta = +89^{\circ}15'50".72$$

该坐标中，星体的每年自行速度为：

$$+0s.19877 \text{ (赤经)}$$

$$-0".0152 \text{ (赤纬)}$$

计算该星体的 B1900.0, J2050.0 及 J2100.0 平赤道坐标

答案:

$$B1900.0 \quad \alpha = 1^{\text{h}} 22^{\text{m}} 33^{\text{s}}.90 \quad \delta = +88^{\circ}46'26''.18$$

$$J2050.0 \quad 3^{\text{h}} 48^{\text{m}} 16^{\text{s}}.43 \quad +89^{\circ}27'15''.38$$

$$J2100.0 \quad 5^{\text{h}} 53^{\text{m}} 29^{\text{s}}.17 \quad +89^{\circ}32'22''.18$$

应当注意的是, 式 [20.2](#) 及 [20.3](#) 适用在有限的时间范围内, 比如, 如果我们计算 32700 年, 我们发现该历元的 α_{UMi} 将在赤纬 -87° , 这完全错误。

使用黄道坐标

如果我们使用黄道坐标 (黄经、黄纬) 而不是赤道坐标 (赤经、赤纬), 那么可以使用以下严格的方法。

T 和 t 的含义与上述的相同, 接下来计算:

$$\eta = (47''.0029 - 0''.06603*T + 0''.000598*T^2)*t + (-0''.03302 + 0''.000598*T)*t^2 + 0''.000060*t^3$$

$$\Pi = 174^{\circ}.876384 + 3289''.4789*T + 0''.60622*T^2 - (869''.8089 + 0''.50491*T)*t + 0''.03536*t^2$$

$$p = (5029''.0966 + 2''.22226*T - 0''.000042*T^2)*t + (1''.11113 - 0''.000042*T)*t^2 - 0''.000006*t^3$$

以上为 (20.5) 组。

参数 η 是起始历元黄道面到终历元黄道面的夹角。

如果起始历元是 J2000.0, 就有 $T=0$, 所以以上表达式化简为:

$$\eta = 47''.0029 *t - 0''.03302*t^2 + 0''.000060*t^3$$

$$\Pi = 174^{\circ}.876384 - 869''.8089*t + 0''.03536 *t^2$$

$$p = 5029''.0966*t + 1''.11113 *t^2 - 0''.000006*t^3$$

以上为 (20.6) 组。

那么, 以下严格的公式, 要用于起始历元黄道坐标转到终止历元黄道坐标:

$$A' = \cos(\eta)*\cos(\beta_o)*\sin(\Pi-\lambda_o) - \sin(\eta)*\sin(\beta_o)$$

$$B' = \cos(\beta_o)*\cos(\Pi-\lambda_o)$$

$$C' = \cos(\eta) * \sin(\beta_0) + \sin(\eta) * \cos(\beta_0) * \sin(\Pi - \lambda_0)$$

$$\tan(p + \Pi - \lambda) = A'/B' \sin(\beta) = C'$$

旧的岁差要素

正如以前所说的，为了星库及计算方便，现在使用 J2000.0 历元，单位是儒略年 (365.25 天) 或儒略世纪 (36525)。以前，贝塞尔年首由参考系时间决定，单位是太阳年世太阳年世纪数。然而，这不是旧系统 (FK4) 与新系统 (FK5) 的唯一区别。

首先，FK4 的赤经零点有个小错误（分点改正）。

其次，在**第 22 章**还要讲到，地球公转造成恒星光行差，引起黄经偏移 $\Delta\lambda$ 黄围偏移 $\Delta\beta$ ：

$$\Delta\lambda = -k * \cos(\Theta - \lambda) / \cos(\beta) + e * k * \cos(\pi - \lambda) / \cos(\beta)$$

$$\Delta\beta = -k * \sin(\Theta - \lambda) * \sin(\beta) + e * k * \sin(\pi - \lambda) * \sin(\beta)$$

式中 Θ 是太阳经度。 π 是地球轨道近点经度， e 是轨道离心率， K 是光行差常数。

现在，对于恒星，右边的第二项几乎是常数，因为 e 、 $\pi - \lambda$ 、 β 随时间变化十分缓慢。正因如此，天文学上曾经把式中的第二项（也称 E 项修正）保留为恒星的平位置。

目前，依赖地球椭圆轨道的 E 项修正不再属于恒星的平位置。相反，它们被折算到了视位置中（详见**第 22 章**）。

基于 Newcom 岁差表达式的 B1950.0 赤道平分点坐标 (FK4 系统) 转换到新的 J2000.0 的 IAU 系统 (FK5 系统)，恒星平位置及自行的转换步骤可以找到，例如在 1984 的天文年历中。

岁差公式 [20.2](#) 及 [20.3](#) 适用于 FK5 系统。如果只有 FK4 位置及自行可供使用，那么可按下面方法着手计算恒星在 FK5 系统中的位置：

1. 使用 Newcomb 的岁差公式（见下面）
2. 在平视位置转换时，E 项修正应忽略。
3. 最后的恒星视赤经应加下如下修正：

$$\Delta\alpha = 0s.0775 + 0s.0850 * T$$

式中 T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数

Newcomb 的岁差表达式是：

设 $(JD)_0$ 和 (JD) 分别是起始历元和终止历元，那么：

$$T = ((JD)_0 - 2415020.3135) / 36524.2199$$

$$t = ((JD) - (JD)_0) / 36524.2199$$

$$\zeta = (2304''.250 + 1''.396 * T) * t + 0''.302 * t^2 + 0''.018 * t^3$$

$$z = \zeta + 0''.791 * t^2 + 0''.001 * t^3$$

$$\theta = (2004''.682 - 0''.853 * T) * t - 0''.426 * t^2 - 0''.042 * t^3$$

如果起始历元是 B1950.0，那么 $T=0.5$ ，以上表达式变为：

$$\zeta = 2304''.948 * t + 0''.302 * t^2 + 0''.018 * t^3$$

$$z = 2304''.948 * t + 1''.093 * t^2 + 0''.019 * t^3$$

$$\theta = 2004''.255 * t - 0''.426 * t^2 - 0''.042 * t^3$$

第二十一章 章动及黄赤交角

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 5]

英国天文学家詹姆斯·布拉德利(1693—1762)发现了章动，它是地球自转轴围绕其平位置周期振动。由于章动，地球自转轴围绕黄极做岁差运动的同时，自转轴还会在岁差运动的轨迹上波动。章动主要是月球运动引起的，可以描述为一些周期项的和。主要项的周期是 6798.4 日(18.6 年)，但其它项是一些短周期项(小于 10 天)。

章动可以很容易的分解为黄道的水平分量和垂直分量。黄道上的分量记为 $\Delta\psi$ ，称为黄经章动；它影响了天球上所有天体的经度。黄道的垂直分量记为 $\Delta\epsilon$ ，称为交角章动，它影响了黄赤交角。

计算所有天体的“视位置”及“恒星时”，都需要计算章动。对于一个给定的时刻， $\Delta\psi$ 和 $\Delta\epsilon$ 可以按如下计算：

T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数：

$$T = (JDE - 2451545) / 36525 \quad (21.1)$$

式中 JDE 是历书儒略日数，它与儒略日数 JD 之间存在一个 ΔT (详见第 7 章)。(译者注：世界时的儒略日在天文计算中比较不常用，所以通常我将历书儒略日译为儒略日)。然后计算以下角度表达式，单位是度。这些表达式由国际天文联合会(International Astronomical Union 简称 IAU)提供。与第 45 章的月球理论有轻微的不同。

平距角(日月对地心的角距离)：

$$D = 297.85036 + 455267.111480 * T - 0.0019142 * T^2 + T^3 / 189474$$

太阳(地球)平近点角：

$$M = 357.52772 + 35999.050340 * T - 0.0001603 * T^2 - T^3 / 300000$$

月球平近点角：

$$M' = 134.96298 + 477198.867398 * T + 0.0086972 * T^2 + T^3 / 56250$$

月球纬度参数：

$$F = 93.27191 + 483202.017538 * T - 0.0036825 * T^2 + T^3 / 327270$$

黄道与月球平轨道升交点黄经，从 Date 黄道平分点开始测量：

$$\Omega = 125.04452 - 1934.136261 * T + 0.0020708 * T^2 + T^3 / 450000$$

对表 21.A 中各项取和计算，可以计算黄经章动 $\Delta\psi$ 及交角章动 $\Delta\epsilon$ 。表中的系数的单位是 $0''.0001$ 。这些项来自 IAU1980 章动理论，然而，忽略了系数小于 $0''.0003$ 的项。

正弦(计算 $\Delta\psi$ 用 \sin)的角度参数及余弦(计算 $\Delta\epsilon$ 用 \cos)的角度参数是 D 、 M 、 M' 、 F 、 Ω 这 5 个基本参数的线性组合。例如第二行：角度参数是 $-2D+2F+2\Omega$ 。

当然，如果精度要求不高。只需用到一些大系数的周期项。

如果 $\Delta\psi$ 的精度要求是 $0''.5$ ， $\Delta\epsilon$ 的精度要求是 $0''.1$ ，

那么我们可以忽略以上表达式中的 T 平方项及 T 三次方项，这样就可以使用以下简单的表达式：

$$\Delta\psi = -17''.20\sin(\Omega) - 1''.32\sin(2L) - 0''.23\sin(2L') + 0''.21\sin(2\Omega)$$

$$\Delta\varepsilon = +9''.20\cos(\Omega) + 0''.57\cos(2L) + 0''.10\cos(2L') - 0''.09\cos(2\Omega)$$

式中 L 和 L' 是月球和太阳的平黄经，分别是：

$$L = 280^\circ.4665 + 36000.7698 * T$$

$$L' = 218^\circ.3165 + 481267^\circ.8813 * T$$

表 21. A

黄赤交角：

黄赤交角，也就是地球自转轴的倾角，它也是黄道面与赤道面的夹角。有平黄赤交角与真黄赤交角之分，前者是黄道与平赤道的夹角，后者是黄道与真赤道的夹角。

平黄赤交角可由 IAU 提供的公式取得：

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150 * T - 0''.00059 * T^2 + 0''.001813 * T^3 \quad (21.2)$$

式中 T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数。

如果时间范围很长，[21.2](#) 式的精度并不令人满意：2000 年为 ε_0 误差 1"，4000 年 ε_0 误差为 10"。Laskar 提供了以下改良的的表达式，式中 U 是 J2000.0 起算的儒略万年数，或 $U = T/100$ ：

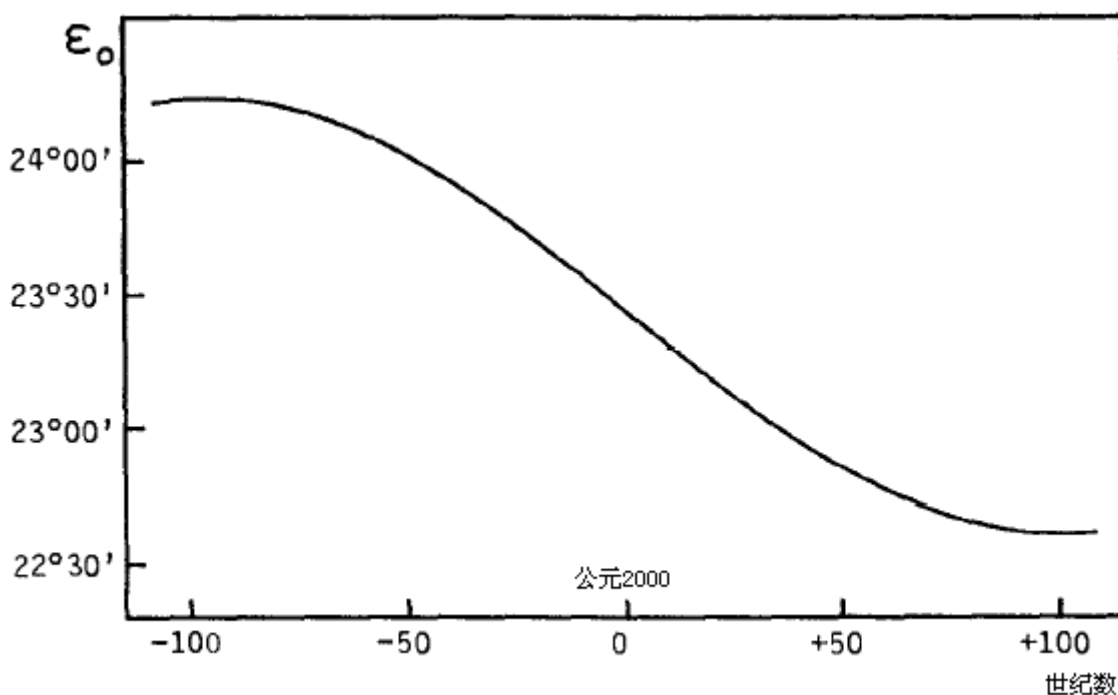
$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = & 23^\circ 26' 21''.448 & (21.3) \\ & -4680''.93 * U \\ & -1.55 * U^2 \\ & +1999.25 * U^3 \\ & -51.38 * U^4 \\ & -249.67 * U^5 \\ & -39.05 * U^6 \\ & +7.12 * U^7 \\ & +27.87 * U^8 \\ & +5.79 * U^9 \\ & +2.45 * U^{10} \end{aligned}$$

该表达式的精度是：1000 年后误差 $0''.01$ (公元 1000 到 3000)，10000 年后误差数个角秒。

应当注意的是，[21.3](#) 式适用于 $|U| < 1$ ，即 J2000.0 起算前后各 10000 年的范围内。例如： $U=2.834$ ，公式得到的结果是 $\varepsilon_0 = 90^\circ$ ，这是完全错误的。

下图显示了 J2000.0 起算，10000 年以前到 10000 年以后范围 ε_0 的变化。根据 Laskar 的公式，地球自转轴的倾角在 -7530 年达到最大值 ($24^\circ 14' 07''$)，在 +12030 附近达到最小值 ($22^\circ 36' 41''$)。很巧，目前大约在以上两个极值之间一半的地方，此时图中的相应曲线几乎是一条直线，这也正是 [21.3](#) 式中 U 的二次项系数很小的原因。

真黄赤交角是 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ ， $\Delta\varepsilon$ 是交角章动。



例 21. a ——计算 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\varepsilon$ 及真黄赤交角，日期 1987 年 4 月 10 日 0 时 TD。

解：该日期对应 JDE 2446895.5，我们得到：

$$T = -0.127296372348$$

$$D = -56383^\circ.0377 = 136^\circ.9623$$

$$\begin{aligned}
M &= -4225^{\circ}.0208 = 94^{\circ}.9792 \\
M' &= -60610^{\circ}.7216 = 229^{\circ}.2784 \\
F &= -61416^{\circ}.5921 = 143^{\circ}.4079 \\
\Omega &= 371^{\circ}.2531 = 11^{\circ}.2531 \\
\Delta\psi &= -3''.788 \\
\Delta\varepsilon &= +9''.443 \\
\varepsilon_0 &= 23^{\circ}26'27''.407 \\
\varepsilon &= 23^{\circ}26'36''.850
\end{aligned}$$

第二十二章 恒星视差

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 9 日]

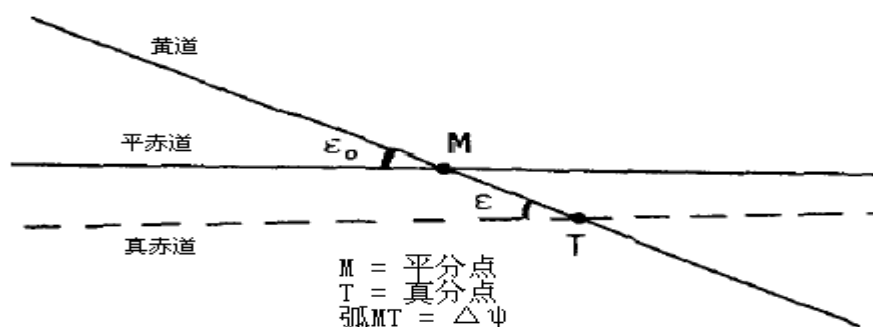
任意时刻恒星的平位置是：当观测者站在不动的太阳上（严格的说是太阳系的质心）看到它在天球上的视位置，并且，它的位置坐标涉及 Date 黄道平分点（或 Date 赤道平分点）。

任意时刻恒星的视位置是：当观测者站在移动着的地心看到它在天球上的位置，其视坐标涉及瞬时赤道、黄道及分点。应当注意到：

——平分点是：Date 黄道与 Date 平赤道的交点。

——真分点是：黄道与 Date 瞬时(真)赤道的交点，它与平分点不同，因为瞬时赤道含章动效果。

——这里没有定义“平黄道”，因为黄道的变化是有规律的。



问题提出：恒星不是真正不动的，那么如何将某一时刻恒星的平位置(例如标准历元坐标中的位置)转换到另一时刻的视位置？我们需要考虑以下位置改正：

(A) 两个历元之间，恒星的自行。我们可以假设各恒星的自行是在一个很大的圆上匀速运动。当自行是恒星极距的重要部分这种情况之外，恒星自行速度基本可看作常数，不仅它本生自行，而且它的赤经及赤纬(相对固定分点坐标)分量在几个世纪内均可看作常数。因此，我们开始寻找，当选用固定的参考系时的自行效果，正如例 20. b

(B) 岁差效果。这已在第 20 章中解释了。

(C) 章动效果。见下文。

(D) 周年光行差。见下文。

(E) 周年视差。当然，在天文学中，恒星视差是非常重要的。正如 Georgo Lovi 说的：“在广阔的星际中，视差是我们和我们的近邻之间唯一的真正的几何连接。它使天文学家能够创建测定星体与我们之间的距离的方法”

然而，为了人们希望精确计算恒星位置，恒星视差就显得很讨厌。幸运的是，多数情况下恒星视差不超过 $0''.8$ 并且可以忽略。根据 R. Burnham, 只有 13 个恒星(亮度超过 9.0) 与我们之间的距离小于 13 光年(4 秒差距), 视差超过 $0''.25$ 。这些恒星是： α Centauri, Lalande21185(在 Ursa Major), Sirius, ϵ Eridani, 61Cygni, Procyon, ϵ Indi, Σ 2398(在 Draco), Groombridge34(在 Andromeda), τ Ceti, Lacaille9352(在 Piscis Austrinus), Cordoba29191(在 Microscopium), Kapteyn(在 Pictor)。这些恒星没有一个在黄道附近，也没涉及月亮星蚀或行星汇合。

正是由于这个原因，以下计算恒星视位置时，忽略了周年视差。

章动效果

为平位置修正章动的最简单、最直接的章动方法是：把

黄经章动 $\Delta\psi$ 加到天体的黄经中。黄道及星体的黄纬并没有因章动而改变。

这个方法用很适用于在黄道坐标中计算行星的视位置。然而，恒星位置通常是在赤道坐标系给出的，所以我们宁愿在赤经和赤纬中直接修正，赤经章动及赤纬章动公式如下：

$$\Delta\alpha_1 = (\cos(\epsilon) + \sin(\epsilon) \sin(\alpha) \tan(\delta)) * \Delta\psi - \cos(\alpha) \tan(\delta) * \Delta\epsilon$$

$$\Delta\delta_1 = \sin(\epsilon) \cos(\alpha) * \Delta\psi + \sin(\alpha) * \Delta\epsilon \quad (22.1) \text{ 式组}$$

当恒星靠近天极时，这两个公式无效。在这种情况下，用上面提到的，使用黄道坐标直接加上黄经章动 $\Delta\psi$ 效果很好。

$\Delta\psi$ 及 $\Delta\epsilon$ 可以使用第 21 章描述的方法计算。而 ϵ 是黄赤交角，使用 21.2 式计算。

光行差效果

λ 和 β 是恒星的黄经和黄纬， K 是光行差常数 ($20''.49552$)， Θ 是太阳真黄经(也叫几何黄经)， e 是地球轨道的离心率， π 轨道近日点经度。

Θ 可使用第 24 章描述的方法计算：

$$e = 0.016708617 - 0.000042037 * T - 0.0000001236 * T^2$$

$$\pi = 102^\circ.93735 + 1^\circ.71953 * T + 0^\circ.00046 * T^2$$

式中 T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数，由 21.1 式算得。

那么，黄经及黄纬的周年视光行差修正值是：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{-K \cos(\Theta - \lambda) + eK \cos(\pi - \lambda)}{\cos \beta} \\ \Delta\beta &= -K \sin \beta (\sin(\Theta - \lambda) - e \sin(\pi - \lambda)) \end{aligned} \right\} (22.2)$$

在赤道坐标中，恒星的赤经 α 及赤纬 δ 的周年光行差是：

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha_2 &= -\kappa \frac{\cos\alpha \cos\Theta \cos\varepsilon + \sin\alpha \sin\Theta}{\cos\delta} \\
 &\quad + e\kappa \frac{\cos\alpha \cos\pi \cos\varepsilon + \sin\alpha \sin\pi}{\cos\delta} \\
 \Delta\delta_2 &= -\kappa \left[\cos\Theta \cos\varepsilon (\tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\alpha \sin\delta \sin\Theta \right] \\
 &\quad + e\kappa \left[\cos\pi \cos\varepsilon (\tan\varepsilon \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\alpha \sin\delta \sin\pi \right]
 \end{aligned}
 \tag{22.3}$$

章动和光行差对 α 及 δ 的总的修正分别是： $\Delta\alpha_1+\Delta\alpha_2$ 和 $\Delta\delta_1+\Delta\delta_2$ ，计算时应注意单位的统一。

重要注意事项：公式(22.2)和(22.3)是光行差的完整表达，它们包含了 E 项修正，应当使用于 FK5 系统的恒星位置坐标。如果使用 FK4 位置，(22.2)及 22.3 式中包含 e 的项应当忽略，如同第 20 章解释的，因 e 项几乎常数，在 FK4 系统中 e 项保留为平位置。

例 22. a:——计算 θ Persei 的视位置, 2028 年 11 月 13. 19 TD。

该恒星在这一时刻的平位置，包含自行效果，可由例 20. b 得到，即：

$$\alpha = 2^{\text{h}} 46^{\text{m}} 11^{\text{s}}.331 = +41^{\circ}.5472$$

$$\delta = +49^{\circ}20'54''.54 = +49^{\circ}.3485$$

该时刻的黄经章动及交角章动，可利用第 21 章的方法计算得到：

$$\Delta\psi = +14''.861, \quad \Delta\varepsilon = +2''.705$$

由公式(21.2)得到 $\varepsilon = 23^{\circ}.436$ ，而太阳的真黄经使用第 24 章的“低精度”方法得： $\Theta = 231^{\circ}.328$ （得到 0.01 度的精度已足够），我们还得到：

$$T = +0.2886705, e = 0.01669647, \pi = 103^\circ.434$$

把 α 、 δ 、 ε 、 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\varepsilon$ 、 Θ 、 e 、 π 代入公式 (22.1) 和 (22.3) 得到:

$$\Delta\alpha_1 = +15''.843, \Delta\delta_1 = +6''.218$$

$$\Delta\alpha_2 = +30''.047, \Delta\delta_2 = +6''.696$$

那么总修正为:

$$\Delta\alpha = +15''.843 + 30''.047 = +45''.890 = +3s.059$$

$$\Delta\delta = +6''.218 + 6''.696 = +12''.91$$

因此, 恒星的视坐标是:

$$\alpha = 2h\ 46m\ 11s.331 + 3s.059 = 2h\ 46m\ 14s.390$$

$$\delta = +49^\circ 20' 54''.54 + 12''.91 = +49^\circ 21' 07''.45$$

Ron-Vondrak 的光行差表达

表达式 (22.2) 及 (22.3) 包含了地球轨道离心率的效果, 可得到很高精度的结果。不过, 结果也不是严格精确的, 因为公式是基于地球不受摄动的椭圆轨道的。实际上, 地球运动受到月球及行星的一些摄动。太阳本身受巨行星(木星和土星)运动的影响也围绕太阳系的质心运动。

如果需要很高的计算精度, 事实上, 须使用太阳相对于太阳系质心的速度来计算恒星光行差。完成这种计算的方法, 已由 Ron 和 Vondrak 提出。

如果 $T = (JD - 2451545)/36525$ 是 J2000.0 起算的儒略世纪数, 然后计算给定时刻的以下角度 (单位弧度):

$$L_2 = 3.1761467 + 1021.3285546 * T$$

$$L_3 = 1.7534703 + 628.3075849 * T$$

$$L_4 = 6.2034809 + 334.0612431 * T$$

$$L_5 = 0.5995465 + 52.9690965 * T$$

$$L_6 = 0.8740168 + 21.3299095 * T$$

$$L_7 = 5.4812939 + 7.4781599 * T$$

$$L_8 = 5.3118863 + 3.8133036 * T$$

$$L' = 3.8103444 + 8399.6847337 * T$$

$$D = 5.1984667 + 7771.3771486 * T$$

$$M' = 2.3555559 + 8328.6914289 * T$$

$$F' = 1.6279052 + 8433.4661601 * T$$

L2 到 L8 是行星（金星到海王星）的 J2000.0 平分点黄经（水星及冥王星的影响忽略），而 L' 是月球平黄经。

地球速度的各分量，相对太阳系中心

序号	角参数	X', sin	X', cos	Y', sin	Y', cos	Z', sin	Z', cos
1	L3	-1719914-2T	-25	25-13T	1578089+156T	10+32T	684185-358T
2	2L3	6434+141T	28007-107T	25697-95T	-5904-130T	11141-48T	-2559-55T
3	L5	715	0	6	-657	-15	-282
4	L'	715	0	0	-656	0	-285
5	3L3	486-5T	-236-4T	-216-4T	-446+5T	-94	-193
6	L6	159	0	2	-147	-6	-61
7	F	0	0	0	26	0	-59
8	L'+M'	39	0	0	-36	0	-16
9	2L5	33	-10	-9	-30	-5	-13
10	2L3-L5	31	1	1	-28	0	-12
11	3L3-8L4+3L5	8	-28	25	8	11	3
12	5L3-8L4+3L5	8	-28	-25	-8	-11	-3
13	2L2-L3	21	0	0	-19	0	-8
14	L2	-19	0	0	17	0	8
15	L7	17	0	0	-16	0	-7
16	L3-2L5	16	0	0	15	1	7
17	L8	16	0	1	-15	-3	-6
18	L3+L5	11	-1	-1	-10	-1	-5
19	2L2-2L3	0	-11	-10	0	-4	0
20	L3-L5	-11	-2	-2	9	-1	4
21	4L3	-7	-8	-8	6	-3	3
22	3L3-2L5	-10	0	0	9	0	4

23	L2-2L3	-9	0	0	-9	0	-4
24	2L2-3L3	-9	0	0	-8	0	-4
25	2L6	0	-9	-8	0	-3	0
26	2L2-4L3	0	-9	8	0	3	0
27	3L3-2L4	8	0	0	-8	0	-3
28	L'+2D-M'	8	0	0	-7	0	-3
29	8L2-12L3	-4	-7	-6	4	-3	2
30	8L2-14L3	-4	-7	6	-4	3	-2
31	2L4	-6	-5	-4	5	-2	2
32	3L2-4L3	-1	-1	-2	-7	1	-4
33	2L3-2L5	4	-6	-5	-4	-2	-2
34	3L2-3L3	0	-7	-6	0	-3	0
35	2L3-2L4	5	-5	-4	-5	-2	-2
36	L'-2D	5	0	0	-5	0	-2

表 22. A

在 J2000.0 赤道坐标中，地球相对于太阳系中心的速度分量 X' 、 Y' 、 Z' 的各序列项在表 22. A 中。表中，每行的每个正弦或余弦的角参数是 L2、L3... 等的线性组合，而每行中的数字是相应的正余弦的振幅。以第 12 行为例：

角 $A = 5L3 - 8L4 + 3L5$ ，该行对速度的贡献是：

对 X' ： $+8\sin(A) - 28\cos(A)$

对 Y' ： $+25\sin(A) - 8\cos(A)$

对 Z' ： $-11\sin(A) - 3\cos(A)$

我们取得的速度值的单位是 $10^{-8}\text{AU}/\text{日}$ 。光速 $c=17314463350\text{AU}/\text{日}$ 。

那么，恒星视赤经及视赤纬的周年光行差修正值（弧度单位）可由 22.4 式得到：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{Y' \cos \alpha - X' \sin \alpha}{c \cos \delta} \\ \Delta\delta &= - \frac{(X' \cos \alpha + Y' \sin \alpha) \sin \delta - Z' \cos \delta}{c} \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

要注意的是：[表 22. A](#) 的地球速度各分量，是涉及 FK5 的，是 J2000.0 历元固定赤道分点坐标，而不是 Date 平分点坐标。因此，如果考虑使用 Ron-vondrak 方法而使用 [22.3](#) 式，那么应在计算岁差和章动之前计算 [22.4](#) 式。换句话说，计算顺序是：FK5 位置(J2000.0)，自行，光行差(使用 [22. A](#) 表及 [22.4](#) 式)，岁差([20.3](#) 和 [20.4](#) 式)，章动（第 21 章和 [22.1](#) 式）。

例 22. b: ——让我们再计算 θ Persei 的视位置，2028 年 11 月 13.19 TD。这里使用 Ron-Vondrak 算法。

从例 20. b, 我们得到恒星在历元 2028 年 11 月 13.19 的坐标，此时，它在 J2000.0 平分点坐标系统中的坐标是(含自行)：

$$\alpha = 2^{\text{h}} 44^{\text{m}} 12^{\text{s}}.9747 = +41^{\circ}.0540613$$

$$\delta = +49^{\circ}13'39''.896 = +49^{\circ}.2277489$$

这两个值，比例 20. b 保留了更多的小数位，以减少舍入误差。我们接下来计算得到：

$$T = +0.288670500 \quad L' = 2428.5515363 \text{ 弧度}$$

$$L2 = 298.0035712 \text{ 弧度} \quad D = 2248.5657939 \text{ 弧度}$$

$$L3 = 183.1273350 \text{ 弧度} \quad M' = 2406.6030750 \text{ 弧度}$$

$$L4 = 102.6371070 \text{ 弧度} \quad F = 2436.1207984 \text{ 弧度}$$

$$L5 = 15.8901621 \text{ 弧度}$$

$$L6 = 7.0313324 \text{ 弧度} \quad X' = -1363700$$

$$L7 = 7.6400181 \text{ 弧度} \quad Y' = + 990286$$

$$L8 = 6.4126746 \text{ 弧度} \quad Z' = + 429285$$

由公式([22.4](#))得到：

$$\Delta\alpha = +0.000145252 \text{ 弧度} = +0^{\circ}.0083223$$

$$\Delta\delta = +0.000032723 \text{ 弧度} = +0^{\circ}.0018749$$

所以修正了光行差后的新 α 和 δ 的值（仍然在 J000.0 参考系）是：

$$\alpha = +41^{\circ}.0540613 + 0^{\circ}.0083223 = +41^{\circ}.0623836$$

$$\delta = +49^{\circ}.2277489 + 0^{\circ}.0018749 = +49^{\circ}.2296238$$

由 [20.4](#) 式计算岁差效果。该时刻的 ζ 、 z 、 θ 在例 20.b 中已算出。我们得到：

$$A = +0.430549036$$

$$B = +0.488867290$$

$$C = +0.758706993$$

$$\text{新的 } \alpha = +41^{\circ}.5555635$$

$$\text{新的 } \delta = +49^{\circ}.3503415$$

最后，利用公式 ([22.1](#)) 修正章动。由 (例 22.a) 得：
 $\Delta\psi = +14''.861$, $\Delta\epsilon = +2''.705$ 及 $\epsilon = 23^{\circ}.436$ ，我们就得到：

$$\Delta\alpha_1 = +15''.844 = +0^{\circ}.0044011$$

$$\Delta\delta_1 = +6''.217 = +0^{\circ}.0017270$$

因此，所需的视赤经和视赤纬是：

$$\alpha = +41^{\circ}.5555635 + 0^{\circ}.0044011 = 41^{\circ}.5599646 = 2^{\text{h}} 46^{\text{m}} 14^{\text{s}}.392$$

$$\delta = +49^{\circ}.3503415 + 0^{\circ}.0017270 = 49^{\circ}.3520685 = 49^{\circ}21'07''.45$$

请与例 22.a 比较结果

参考资料：

- 1、《天空和望远镜》，卷 77，第 288 页(1989 年 3 月)。
- 2、Robert Burnham, Burnham 的《天体手册》，卷 III，第 2126 页 (Dover 出版，纽约；1978)。
- 3、Fifth Fundamental Catalogue(FK5)，Veroffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut Heidelberg, No.32(Karlsruhe,1988)
- 4、C. Ron, J. Vondrak, “周年光行差的三角级数展开”，Bull. Astron. Inst. Czechosl., 卷 37，第 96—103 页(1986)

第二十三章 轨道要素在不同坐标中的转换

[许剑伟 2008 年 4 月 5 日于家中]

在处理某些问题时，可能需要对主行星或慧星的轨道要素进行转换，从一个分点坐标中转到另一个坐标中。当然，转换过程中，半长轴及离心率是不会变化的，因此中有三个要素需要转换：

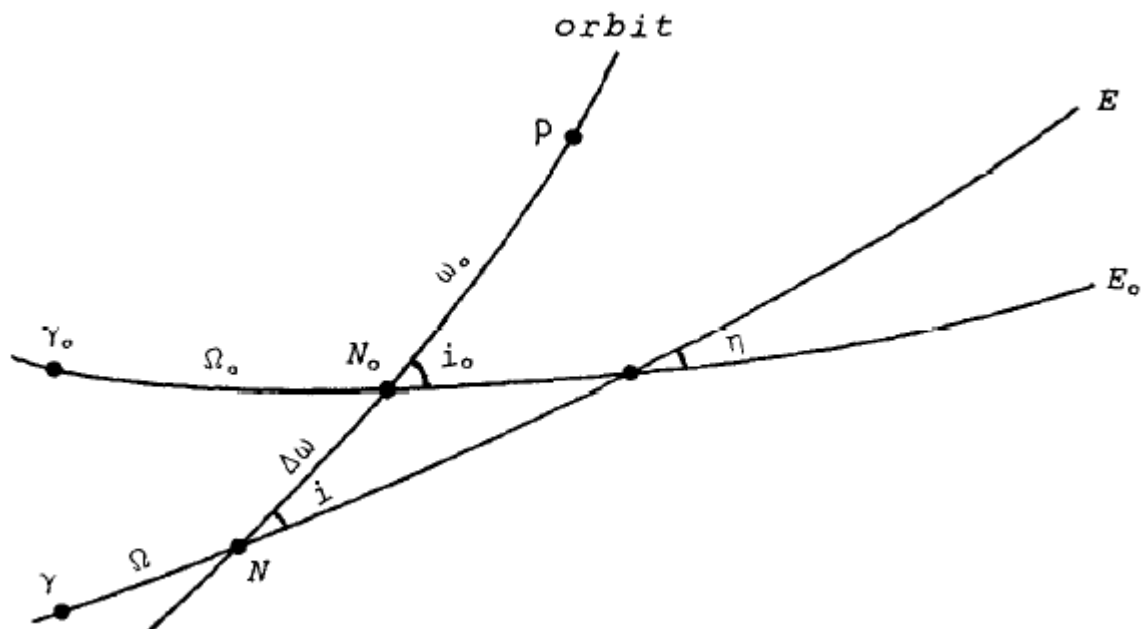
i = 轨道倾角

ω = 近点参数

Ω = 升交点经度

设 i_0 、 ω_0 、 Ω 是已知的，它是初始历元的轨道要素，设 i 、 ω 、 Ω 是未知的，它是终止历元的轨道要素。

在下图中， E_0 和 λ_0 分别是初始历元的黄道和春分点， E 和 λ 则是终止历元的黄道及分点。这两个黄道的夹角是 η ，轨道的近点是 P 。



同第 20 章一样， T 是 J2000.0 起算的初历元的儒略世纪数， t 则是从初始历元起算的终历元的儒略世纪数。

接下来计算角度 η 、 Π 和 p ，这 3 个角用 [20.5](#) 式计算，如果初始历元是 J2000.0，则可以用 [20.6](#) 式计算。

令 $\psi = \Pi + p$ ，则 i 、 Ω （即先求得 $\Omega - \psi$ ，再得到 Ω ）的值可由下式算出：

$$\cos(i) = \cos(i_0) \cos(\eta) + \sin(i_0) \sin(\eta) \cos(\Omega_0 - \Pi) \quad (23.1)$$

$$\sin(i) \sin(\Omega - \psi) = \sin(i_0) \sin(\Omega_0 - \Pi) \quad (23.2)$$

$$\sin(i) \cos(\Omega - \psi) = -\sin(\eta) \cos(i_0) + \cos(\eta) \sin(i_0) \cos(\Omega_0 - \Pi)$$

当倾角很小时，[23.1](#) 式不能使用。

接下来： $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ，式中 $\Delta\omega$ 由下式计算：

$$\sin(i) \sin(\Delta\omega) = -\sin(\eta) \sin(\Omega_0 - \Pi) \quad (23.3)$$

$$\sin(i) \cos(\Delta\omega) = \sin(i_0) \cos(\eta) - \sin(i_0) \sin(\eta) \cos(\Omega_0 - \Pi)$$

如果 $i_0 = 0$ ，那么 Ω_0 是不确定的，这时有 $i = 0$ 及 $\Omega = \psi + 180^\circ$ 。

要注意的是，用以上描述的方法进行转换，到新历元坐标的 i 、 ω 、 Ω ，它仍然是有效的初始要素。不过，事实上，换个新的历元坐标计算同一条轨道是完全不同的天体力学问题。

例 23. a ——在他们的星库中(巴黎天文台天体物理 de Meudon 1952)，De Obaldia 给出了 Klinkenberg(1744) 慧星的轨道要素, B1744.0 平分点坐标：

$$i_0 = 47^\circ.1220$$

$$\omega_0 = 151^\circ.4486$$

$$\Omega_0 = 45^\circ.7481$$

请把这些要素转到 B1950.0 标准分点坐标中。

解：最后历元是 B1950.0，或(JD) = 2433282.4235(详见第 20 章)，而初历元比它早 206 个太阳年（在为这两个历元都是贝塞尔年首），因此：

$$(JD)_0 = 2433282.4235 - (206 \times 365.2421988) = 2358042.5305.$$

则有：

$$T = -2.559958097$$

$$t = +2.059956002$$

$$\eta = +97''.0341 = +0^\circ.026954$$

$$\Pi = 174^\circ.876384 - 10205''.9108 = 172^\circ.041409$$

$$P = +10352''.7137 = 2^\circ.875754$$

$$\psi = 174^\circ.917163$$

那么，由式 [23.2](#) 得：

$$\sin(i) * \sin(\Omega - \psi) = -0.59063831 = A$$

$$\sin(i) * \cos(\Omega - \psi) = -0.43408084 = B$$

使用以下变换：

$$\sin(i) = \sqrt{A^2 + B^2} = 0.73299372, \quad i = 47^\circ.1380$$

$$\Omega - \psi = \text{ATAN2}(A, B) = -126^\circ.313473$$

$$\Omega = 48^\circ.6037$$

由 [23.3](#) 式得：

$$\sin(i) * \sin(\Delta\omega) = +0.00037917$$

$$\sin(i) * \cos(\Delta\omega) = +0.73299362$$

$$\text{因此：} \Delta\omega = +0^\circ.0296, \quad \omega = 151^\circ.4782$$

在他的彗星轨道库中(第六版；1989), Marsden 给出的值是：

$$i = 47^\circ.1378$$

$$\omega = 151^\circ.4783$$

$$\Omega = 48^\circ.6030$$

这与上述计算的 Ω 存在 $0^\circ.0007$ 的差异，原因是新的 IAU 比普通岁差多出了一个被 Newcomb 忽略的黄经的小量 ($+1''.1$ 每世纪)。这造成 206 年(从 1744 到 1950)积累了 0.0006 度。

如果初始历元分点坐标是 B1950.0，终止历元坐标是 J2000.0，那么公式简化为：

以下几个式子计为： (23.4)

$$S = 0.0001139788 \quad C = 0.9999999935$$

$$W = \Omega_0 - 174^\circ.298782$$

$$A = \sin(i_0) * \sin(W)$$

$$B = C * \sin(i_0) * \cos(W) - S * \cos(i_0)$$

$$\sin(i) = \sqrt{A^2+B^2} \quad \tan(x) = A/B$$

$$\Omega = 174^\circ.997194 + x$$

$$\text{最后 } \omega = \omega_o + \Delta\omega$$

式中 $\tan(\Delta\omega) = -S \sin(W) / (C \sin(i_o) - S \cos(i_o) \cos(W))$

必须注意角度 x 与角度 $\Delta\omega$ 的象限。为了安全，可使用 $\text{ATN2}()$ 函数，即 $x = \text{ATN2}(A, B)$ 。此外，当轨道倾角很小时，新的 Ω 应比初始 Ω_o 大 0.7° ， $\Delta\omega$ 应接近 0° 而不是 180° 。

例 23. b ——S. Nakano 计算出周期彗星 1990 返回（小行星通告 12577），轨道如下：

$$\text{历元} = 1990 \text{ 年 } 12 \text{ 月 } 5.0 \text{ (TD)} = \text{JDE } 2448200.5$$

$$T = 1990 \text{ 年 } 10 \text{ 月 } 28.54502 \text{ TD}$$

B1950.0 要素：

$$q = 0.3308858 \quad i = 11^\circ.93911$$

$$a = 2.2091404 \quad \Omega = 334^\circ.04096$$

$$e = 0.8502196 \quad \omega = 186^\circ.24444$$

我们希望将 i 、 Ω 、 ω 转到 J2000.0 分点坐标中，有以下计算过程：

$$W = +159^\circ.742178$$

$$A = +0.0716284465$$

$$B = -0.1941873149$$

$$\sin(i) = 0.2069767 \quad \Omega = 334^\circ.75006$$

$$i = 11^\circ.94524 \quad \Delta\omega = -0^\circ.01092$$

$$x = +159^\circ.752866 \quad \omega = 186^\circ.23352$$

其它的轨道要素(T , q , a , e)保持不变，历元还是 1900 年 12 月 5.0 日。

然而，[23.4](#) 式采用的要素 i_o 、 ω_o 及 Ω_o 是 FK5 系统的。把这些要素从 B1950.0/FK4 转到 J2000.0/FK5 系统，可以使用 Yeomans 的如下算法：

设：

$$L' = 4.50001688 \text{ 度}$$

$$L = 5.19856209 \text{ 度}$$

$$J = 0.00651966 \text{ 度}$$

$$W = L + \Omega_0$$

然后有：

$$\sin(\omega - \omega_0) \sin(i) = \sin(J) \sin(W)$$

$$\cos(\omega - \omega_0) \sin(i) = \sin(i_0) \cos(J) + \cos(i_0) \sin(J) \cos(W)$$

$$\cos(i) = \cos(i_0) \cos(J) - \sin(i_0) \sin(J) \cos(W)$$

$$\sin(L' + \Omega) \sin(i) = \sin(i_0) \sin(W)$$

$$\cos(L' + \Omega) \sin(i) = \cos(i_0) \sin(J) + \sin(i_0) \cos(J) \cos(W)$$

从以上算式可算出 i 、 Ω 及 ω

例 23. c —— i_0 、 Ω_0 及 ω_0 的初值与例 23. b 的相同。

我们得到：

$$\text{FK5, J2000.0}$$

$$i = 11^\circ.94521$$

$$\Omega = 334^\circ.75043$$

$$\omega = 186^\circ.23327$$

第二十四章 太阳位置计算

[许剑伟 于家里 2008-3-30 下午]

一、低精度计算：

当计算精度要求为 0.01 度，计算太阳位置时可假设地球运动是一个纯椭圆，也就是说忽略月球及行星摄动，计算表达如下。

设 JD 是儒略日数，可以用第 7 章表述的方法计算。T 为 J2000 起算的儒略世纪数：

$$T = (\text{JD} - 2451545.0) / 36525$$

计算时要保留足够的小数位，5 位小数是不够的（除非所需的太阳黄经的精度要求不高），注意，T 表达为儒略世纪

数，所以 T 误差 0.00001 相当于 0.37 日。

接下来，

太阳几何平黄经： $L_0 = 280^\circ.46645 + 36000^\circ.76983 * T + 0^\circ.0003032 * T^2$ (Date 平分点起算)

太阳平近点角： $M = 357^\circ.52910 + 35999^\circ.05030 * T - 0^\circ.0001559 * T^2 - 0^\circ.00000048 * T^3$

地球轨道离心率： $e = 0.016708617 - 0.000042037 * T - 0.0000001236 * T^2$

太阳中间方程： $C = +(1^\circ.914600 - 0^\circ.004817 * T - 0^\circ.000014 * T * T) * \sin(M) + (0^\circ.019993 - 0^\circ.000101 * T) * \sin(2M) + 0^\circ.000290 * \sin(3M)$

那么，太阳的真黄经是： $\Theta = L_0 + C$

真近点角是： $v = M + C$

日地距离的单位是“天文单位”，距离表达为： $R = 1.000001018 (1 - e^2) / (1 + e * \cos(v))$ (24.5)

式中的分子部分的值变化十分缓慢。它的值是：

0.9997190 1800 年

0.9997204 1900 年

0.9997218 2000 年

0.9997232 2100 年

太阳黄经 Θ 可由上述的方法算出，它是 Date 黄道分点坐标中的真几何黄经，需通过计算地心坐标星体位置也可算出。

要取得 Date 黄道坐标中太阳的视黄经 λ ，还应对 Θ 进行章动修正及光行差修正。如果精度要求不高，可用下式修正：

$\Omega = 125^\circ.04 - 1934^\circ.136 * T$

$\lambda = \Theta - 0^\circ.00569 - 0^\circ.00478 * \sin(\Omega)$

某这时候，我们需要把太阳黄经转到 J2000 坐标中，在 1900-2100 年范围内可利用下式进行： $\Theta_{2000} = \Theta - 0^\circ.01397 * (\text{year} - 2000)$

如果还想取得更高的转换精度(优于 0.01 度),那么你可以使用第 25 章的方法进行坐标旋转。

Date 黄道坐标中的太阳黄纬不超过 $1''.2$, 如果对精度要求不是很高,可以置 0。因此,太阳的地心赤经 α 及赤纬 δ 可以用下式(24.6 式, 24.7 式)计算,式中 ε 是黄赤交角(由 21 章的 21.2 式计算)。

$$\tan\alpha = \cos\varepsilon\sin\Theta / \cos\Theta \quad (24.6)$$

$$\sin\delta = \sin\varepsilon\sin\Theta \quad (24.7)$$

如果要想得到太阳的视赤经及赤纬,以上二式中的 Θ 应换为 λ , ε 应加上修正量:

$$+0.00256*\cos(\Omega)$$

[译者注]:实际上就是对 Θ 补上黄经章动及光行差, ε 补上交角章动后再转到赤道坐标中。也可在赤道坐标中补章动及光行差,但公式不同。

公式 24.6 当然可以转为: $\tan(\alpha) = \cos(\varepsilon)*\tan(\Theta)$, 接下来,我们要注意 α 与 Θ 应在同一象限。然而,如果你使用计算机语中有 ATN2 函数(C 语言是 atan2),那最好保持 24.6 式不变,这样就可直接利用 ATN2 函数算出 α , 即: $\alpha = \text{ATN2}(\cos(\varepsilon)*\sin(\Theta), \cos(\Theta))$

例 24. a——计算 1992-10-13, 0 点, 即力学时 TD=JDE 2448908.5 时刻的太阳位置。

我们算得:

$$T = -0.072183436$$

$$L_0 = -2318^\circ.19281 = 201^\circ.80719$$

$$M = -2241^\circ.00604 = 278^\circ.99396$$

$$e = 0.016711651$$

$$C = -1^\circ.89732$$

$$\Theta = 199^\circ.90987 = 199^\circ54'36''$$

$$R = 0.99766$$

$$\Omega = 264^\circ.65$$

$$\lambda = 199^\circ.90897 = 199^\circ54'32''$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 23^\circ 26' 24''.83 = 23^\circ.44023 \text{ (由 21 章的 21.2 式算得)} \\ \varepsilon &= 23^\circ.43999 \\ \alpha_{\text{视}} &= -161^\circ.61918 = +198^\circ.38082 = 13\text{h}.225388 = 13\text{h} \\ &13\text{m} 31\text{s}.4\end{aligned}$$

$$\delta_{\text{视}} = -7^\circ.78507 = -7^\circ 47' 06''$$

使用 VSOP87 行星理论计算出的正确值是：（请与上面的结果做一下比较）

$$\Theta = 199^\circ 54' 26''.18$$

$$\lambda = 199^\circ 54' 21''.56$$

$$\beta = +0''.72$$

$$R = 0.99760853$$

$$\alpha_{\text{视}} = 13\text{h} 13\text{m} 30\text{s}.749$$

$$\delta_{\text{视}} = -7^\circ 47' 01''.74$$

二、高精计算

在 Bretagnon 和 Simon 的书中给出一种计算太阳黄经的方法，其精度可以满足大部分应用。用他们的方法得到 0—2800 年的精度是 0.0006 度 (2''.2)，-4000 到 +8000 的精度是 0.0009 度 (3''.2)，且计算时仅用到 49 个周期项。

有一个精度很高的，高达 0.01 角秒的方法，就是用 31 章要讲到的 VSOP87 理论进行计算，但对于地球，该理论用了 2425 个周期项 (1080 个黄经周期项，348 个黄纬周期项，997 个距离周期项)。显然这么的数量无法复制到本书，因此我们只从 VSOP87 中取出一些主要项 (详见附录 II)，利用它计算得到的太阳位置在 -2000 到 6000 年范围内精度是 1''。计算步骤如下：

使用附录 II 的地球数据，可计算出给定时刻的日心黄经 L、黄纬 B 及距离 R，具体详见第 31 章。别忘了，时间 τ 是 JDE 2451545.0 (即 J2000.0) 起算的儒略千年数，而不是世纪数，最后得到的结果 L 和 B 是弧度单位。

要取得地心黄经 Θ 及黄纬 β ，应按下式计算： $\Theta = L + 180^\circ$ ， $\beta = -B$

转换到 FK5 系统。太阳黄经 Θ 及黄纬 β 是 P. Bretagnon 的 VSOP 行星理论定义的动力学黄道坐标。这个参考系与标准的 FK5 坐标系统(详见 20 章)仅存在很小的差别。可按以下方法把 Θ 、 β 转换到 FK5 坐标系统中, 其中 T 是 J2000 起算的儒略世纪数, 或 $T=10\tau$ 。

先计算 $\lambda' = \Theta - 1^\circ.397*T - 0^\circ.00031*T^2$

接下来 Θ 及 β 的修正量是:

$$\Delta\Theta = -0''.09033 \quad (24.9)$$

$$\Delta\beta = +0''.03916*(\cos(\lambda') - \sin(\lambda'))$$

仅在需要很精确计算时才进行这个修正。如果使用附录 II 中提供的被削减了一些项的 VSOP87, 那么此项修正可省略。

译者注: VSOP 动力学的黄道与 FK5 黄道有一点小差别, 所以作以上修正。J2000.0 动力学黄道和 FK5 黄道或赤道可以均可看作惯性系。这两种参考系存在小量差别。J2000.0 的 VSOP 黄道与 J2000.0 的 FK5 黄道存在一个很小的夹角 $E = 0''.0554$ 左右, VSOP 黄道经过 FK5 黄道的升交点为 N, N 在春风点西侧 135 度。根据以上说明, 易得 VSOP 的 Date 黄道与 FK5 的 Date 黄道的变换关系:

$$\Delta\beta = 0.0554*\sin(\Theta+135-p), \quad (\text{式中 } p \text{ 是 Date 黄道上的岁差}) \quad (24.E1)$$

由于两个黄道之间的夹角很小, $\Delta\beta$ 也可看作在春分点处两道的垂直距离(看作直线 AB), 设 Date 赤道与两黄道交于分别交于 A、C, 这样三角形 ABC 直角小三角形, B 角是 90 度, 于是有:

$$\Theta=0 \text{ 时, } AB = \Delta\beta = 0''.0554*\sin(135-p)$$

易得两个春风点相差, $\Delta\Theta=AB/\tan(\epsilon)$

ϵ 可值为常数 23.44 度, 那么:

$$\Delta\Theta=0''.1278*\sin(135-p) \quad (24.E2)$$

当计算的时间跨度不大时(如几百年), p 取 0 即可, 那

么 $\Delta\Theta=0''.09035$

实际上，原文的 $\lambda' = \Theta - p$

代入 [24.E1](#) 式得： $\Delta\beta = +0''.03916 * (\cos(\lambda') - \sin(\lambda'))$

太阳的视位置。到止，我们得到的太阳黄经 Θ 是 Date 黄道分点坐标的真几何黄经。要取得视黄经 λ ，还应加上精确的黄经章动及光行差。

章动处理：根据第 21 章算出 $\Delta\Psi$ ，并加到 Θ 中即可。

太阳地心黄经光行差修正项是：

$$-20''.4898/R \quad (20.10)$$

式中 R 是日地距离(天文单位)。分子是光行差常数 ($K=20''.49552$) 乘以 $a*(1-e^2)$ ，与 24.5 式的分子相同。因此 24.10 中的分子中其实是一个缓慢变化的数，在 0 年是 $20''.4893$ ，在+4000 年是 $20''.4904$ 。

但重要的是，24.10 式本身不是一个严格的准确的表达式，因为它是假设地球轨道是不受摄动的标准椭圆。当受到摄动是，月球的摄动可引起 $0''.01$ 的误差。

当需要进行高精度计算时(比使用附录 II 计算精度要求更高时)，可用以下方法进行光行差修正。找个太阳黄经的修正参数 $\Delta\lambda$ (单位是角秒/日)，光行差修正量为：

$$-0.005775518 * R * \Delta\lambda$$

式中的 R 同上述的，是日地距离，单位是天文单位。常数部分是 1 个距离单位的光行时间，单位是“日”，(=8.3 分)。

在章动与光行差修正之后，我们就得到了太阳的视黄经 λ 。

太阳的视黄经 λ 及视黄纬 β 可以由 [12.3](#) 式及 [12.4](#) 式转换为视赤经 α 及视纬 δ ，式中 ε 是真黄赤交角，含交角章动 $\Delta\varepsilon$ 。

太阳的地心黄经修正用的参数 $\Delta\lambda$ ，单位是角秒/日，在 J2000 黄道坐标中，可由下页的公式计算，式中 τ 是 J2000.0 起算的儒略千年数，正弦内的角度的单位是度。

表达式中，仅保留了几个主要的周期项，因此结果不很

严格，但 $\Delta\lambda$ 最多只有 $0''.1$ 误差，用于光行差修正，误差只有 $0''.001$ 。

如果某些其它应用中， $\Delta\lambda$ 须是在 Date 黄道中的，则应把常数项 3548.193 换为 3548.330

$\Delta\lambda$ 的计算式

J2000 坐标， τ 是 J2000.0 起算的儒略千年数， $\sin()$ 的角度量的单位是度

$$\begin{aligned}\Delta\lambda = & 3548.193 + 118.568 \sin(87.5287 + 359993.7286\tau) \\ & + 2.476 \sin(85.0561 + 719987.4571\tau) \\ & + 1.376 \sin(27.8502 + 4452671.1152\tau) \\ & + 0.119 \sin(73.1375 + 450368.8564\tau) \\ & + 0.114 \sin(337.2264 + 329644.6718\tau) \\ & + 0.086 \sin(222.5400 + 659289.3436\tau) \\ & + 0.078 \sin(162.8136 + 9224659.7915\tau) \\ & + 0.054 \sin(82.5823 + 1079981.1857\tau) \\ & + 0.052 \sin(171.5189 + 225184.4282\tau) \\ & + 0.034 \sin(30.3214 + 4092677.3866\tau) \\ & + 0.033 \sin(119.8105 + 337181.4711\tau) \\ & + 0.023 \sin(247.5418 + 299295.6151\tau) \\ & + 0.023 \sin(325.1526 + 315559.5560\tau) \\ & + 0.021 \sin(155.1241 + 675553.2846\tau) \\ & + 7.311\tau \sin(333.4515 + 359993.7286\tau) \\ & + 0.305\tau \sin(330.9814 + 719987.4571\tau) \\ & + 0.010\tau \sin(328.5170 + 1079981.1857\tau) \\ & + 0.309\tau^2 \sin(241.4518 + 359993.7286\tau) \\ & + 0.021\tau^2 \sin(205.0482 + 719987.4571\tau) \\ & + 0.004\tau^2 \sin(297.8610 + 4452671.1152\tau) \\ & + 0.010\tau^3 \sin(154.7066 + 359993.7286\tau)\end{aligned}$$

τ 的系数为 359993.7、719987 或 1079981 的周期项，与地球离心率相关。

τ 的系数为 4452671、9224660 或 4092677 的周期项，与

月球运动相关。

τ 的系数为 450369、225184、315560 或 675553 的周期项，与金星摄动相关。

τ 的系数为 329645、659289、或 299296 的周期项，与火星摄动相关。

例 24.b: 同例 24.a 一样，计算太阳位置， $TD = JDE\ 2448908.5$

使用附录 II 中的地球数据，计算方法详见第 31 章，得到：

$$L = -43.63484796 \text{ 弧度} = -2500.092628 \text{ 度} = 19.907372 \text{ 度}$$

$$B = -0.00000312 \text{ 弧度} = -0.000179 \text{ 度} = -0''.644$$

$$R = 0.99760775$$

由此得：

$$\Theta = L + 180^\circ = 199.907372$$

$$\beta = +0''.644$$

转到 FK5 坐标系统

$$\lambda' = 200^\circ.01, \Delta\Theta = -0''.09033 = -0^\circ.000025, \Delta\beta = -0''.023$$

由此得：

$$\Theta = 199.907347 = 199^\circ 54' 26''.449, \beta = +0''.62$$

章动计算(详见 21 章)：

$$\Delta\Psi = +15''.908, \Delta\varepsilon = -0''.308, \varepsilon_{\text{真}} = 23^\circ.4401443$$

$$\text{由 24.10 算得光行差修正是: } -20''.539$$

因此, 太阳的视黄经是：

$$\lambda = \Theta + 15''.908 - 20''.539 = 199^\circ 54' 21''.818$$

由 [12.3](#) 及 [12.4](#) 式：

$$\alpha = 198^\circ.378178 = 13^h 13^m 30^s.763$$

$$\delta = -7^\circ.783871 = -7^\circ 47' 01''.94$$

最后结果是：

$$\Theta = 199^\circ 54' 26''.45 \quad R = 0.99760775$$

$$\lambda = 199^{\circ}54'21''.82 \quad \alpha = 13^{\text{h}} 13^{\text{m}} 30^{\text{s}}.763$$

$$\beta = +0''.62 \quad \delta = -7^{\circ}47'01''.74$$

与例 24. a 中给出的正确的精确结果比较, 这里的结果已经比低度算法好多了。

第二十五章 太阳的直角坐标

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 10 日]

在计算小行星工慧星的星历时(参见第 32 章)要用到太阳的地心赤道直角坐标 X、Y、Z。这些坐标的原点在地心。X 轴的方向指向春分点(经度为 0), Y 轴平放在赤道面上, 经度是 90 度, Z 轴方向是北极。

每日(0h TD)的 X、Y、Z 的值可在大的天文年历中找到。它们的单位是天文单位。通常它们不涉及 Date 平赤道平分点坐标, 而是 J2000.0 标准分点坐标。

Date 平分点参考系

使用第 24 章中的“高精度方法”一节的方法计算出太阳的地心坐标, 已做了转到 FK5 系统的修正, 但不含章动和光行差的改正。

如果 Θ 和 β 是太阳的几何黄经和黄纬, R 是距离向量(单位是天文单位), 那么 Date 平赤道及分点坐标是:

$$X = R \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\Theta)$$

$$Y = R \cdot (\cos(\beta) \sin(\Theta) \cos(\varepsilon) - \sin(\beta) \sin(\varepsilon))$$

$$Z = R \cdot (\cos(\beta) \sin(\Theta) \sin(\varepsilon) + \sin(\beta) \cos(\varepsilon))$$

式中 ε 平黄赤交角, 由 [21.2](#) 式计算得到。

因为 Date 黄道坐标中, 太阳的纬度不超过 1.2 角秒, 所以 $\cos(\beta)=1$ 可以安全的代入(25.1)式。

例 25. a—1992 年 10 月 13.0 TD = JDE 2448908.5, 我们由例 24. b 得到:

$$\Theta = 199^{\circ}.907347, \quad \varepsilon = +0''.62, \quad R = 0.99760775$$

对于刻时间，由公式 (21.2) 得：

$$\epsilon = 23^{\circ}26'24''.827 = 23^{\circ}.4402297$$

因此，由(25.1)式得：

$$X = -0.9379952$$

$$Y = -0.3116544$$

$$Z = -0.1351215$$

J2000.0 标准分点参考系

如第 31 章阐述的，计算给定时刻地球的相对于 J2000.0 分点的日心黄经 L 和黄纬 B，及距离。为此，使用附表 II 的地球数据，不过，这个数据表需做一些修改(译者注：附表 II 提供的是 Date 坐标的, 而不是 J2000.0 坐标的, 所以要更换一些数据)：

——在 L1 部分，系数“A”的第一个值由原来的 628331966747 替换为 628307584999

——L2、L3 和 L4 用 25.A 表替换。

——忽略 L5 表

——为了计算黄纬 B，B0 部分使和附表 II 的，但 B1 到 B4 使用表 25.A 的。

表 25.A

L2 序号	A	B	C
1	8722	1.0725	6283.0758
2	991	3.1416	0
3	295	0.437	12566.152
4	27	0.05	3.52
5	16	5.19	26.30
6	16	3.69	155.42
7	9	0.30	18849.23
8	9	2.06	77713.77
9	7	0.83	775.52

10	5	4.66	1577.34
11	4	1.03	7.11
12	4	3.44	5573.14
13	3	5.14	796.30
14	3	6.05	5507.55
15	3	1.19	242.73
16	3	6.12	529.69
17	3	0.30	398.15
18	3	2.28	553.57
19	2	4.36	5223.69
20	2	3.75	0.98

L3	序号	A	B	C
	1	289	5.842	6283.076
	2	21	6.05	12566.15
	3	3	5.20	155.42
	4	3	3.14	0
	5	1	4.72	3.52
	6	1	5.97	242.73
	7	1	5.54	18849.23

L4	1	8	3.14	6283.08
----	---	---	------	---------

B1	1	227778	3.413766	6283.075850
	2	3806	3.3706	12566.1517
	3	3620	0	0
	4	72	3.33	18849.23
	5	8	3.89	5507.55
	6	8	1.79	5223.69
	7	6	5.20	2352.87

B2	1	9721	5.1519	6283.07585
	2	233	3.1416	0
	3	134	0.644	12566.152
	4	7	1.07	18849.23

B3	1	276	0.595	6283.076
	2	17	3.14	0
	3	4	0.12	12566.15

B4	1	6	2.27	6283.08
	2	1	0	0

把 L 加上 180 度就得到了几何黄经 Θ ，B 的正负号取反就得到太阳纬度 β ：

$$\Theta = L + 180 \text{ 度}, \beta = -B$$

[到此,如果只需要 J2000.0 标准分点的太阳几何黄经, Θ 减去 $0''.09033$, 以便把黄经从 VSOP 动力学分点转到 FK5 分点(FK5 是几何方法的坐标), 也就是(24.9)式的那个修正。否则, 不要执行此项, 请进行以下计算转到 FK5 赤道坐标]

计算：

$$X = R \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\Theta) \quad (25.2)$$

$$Y = R \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\Theta)$$

$$Z = R \cdot \sin(\beta)$$

当然, 以上算式相当于：

$$X = -R \cdot \cos(B) \cdot \cos(L)$$

$$Y = -R \cdot \cos(B) \cdot \sin(L)$$

$$Z = -R \cdot \sin(B)$$

由(25.2)式计算的坐标 X、Y、Z, 仍然是定义在 J2000.0 的动力学黄道上(VSOP)。可以用下式转换到 FK5 J2000.0 参考系中：

$$X_{\odot} = 1.000000000000X + 0.000000440360Y - 0.000000190919Z$$

$$Y_o = -0.000000479966X + 0.917482137087Y - 0.397776982902Z$$

$$Z_o = 0.000000000000X + 0.397776982902Y + 0.917482137087Z \quad 25.3$$

B1950.0 平分点参考系

如上进行 J2000.0 坐标计算，除了 (25.3) 外，还有：

$$X_o = 0.999925702634X + 0.012189716217Y + 0.000011134016Z$$

$$Y_o = -0.011179418036X + 0.917413998946Y - 0.397777041885Z$$

$$Z_o = -0.004859003787X + 0.397747363646Y + 0.917482111428Z$$

要注意的是，用这个方法得到的直角坐标是历元 B1950.0 平赤道和分点的 FK5 系统，不是 FK4 系统，FK4 与 FK5 的差别在于 FK4 受到“分点错误”的影响(见第 20 章)。

任意其它平分点参考系

首先，用上述的方法，利用 (25.2) 和 (25.3) 式计算出太阳的 J2000.0 的标准分点赤道直角坐标 X_o 、 Y_o 、 Z_o 。

然后，如果 JD 是刻分点的历元，计算：

$$t = (JD - 2451545.0) / 365.25$$

接下来，由公式 (20.3) 算出角 ζ 、 z 、 θ

那么所需的太阳直角坐标是：

$$X' = X_x * X_o + Y_x * Y_o + Z_x * Z_o$$

$$Y' = X_y * X_o + Y_y * Y_o + Z_y * Z_o$$

$$Z' = X_z * X_o + Y_z * Y_o + Z_z * Z_o$$

式中：

$$X_x = \cos(\zeta) \cos(z) \cos(\theta) - \sin(\zeta) \sin(z)$$

$$X_y = \sin(\zeta) \cos(z) + \cos(\zeta) \sin(z) \cos(\theta)$$

$$X_z = \cos(\zeta) \sin(\theta)$$

$$Y_x = -\cos(\zeta) \sin(z) - \sin(\zeta) \cos(z) \cos(\theta)$$

$$Y_y = \cos(\zeta) \cos(z) - \sin(\zeta) \sin(z) \cos(\theta)$$

$$Y_z = -\sin(\zeta) \sin(\theta)$$

$$Z_x = -\cos(z) \sin(\theta)$$

$$Z_y = -\sin(z) \sin(\theta)$$

$$Z_z = \cos(\theta)$$

应注意, X' 、 Y' 、 Z' 是历元坐标, 这个历元是指新坐标系的历元时间, 与上面计算的用的其它时间无关。

例 25. b: ——1992 年 10 月 13.0 TD = JDE 2448908.5, 计算赤道直角坐标, 相对以下参考系:

(a) J2000.0 标准分点坐标

(b) B1950.0 标准分点坐标

(c) J2044.0 平分点坐标

我们计算得到:

$$\tau = -0.0072183436003$$

$$L = -43.63308803 \text{ 弧度} = -2499.991791 \text{ 度} = +20.008209 \text{ 度}$$

$$B = +0.00000386 \text{ 弧度} = +0.000221 \text{ 度} = +0''.796$$

$$R = 0.99760775 \text{ (当然, 如 24. b)}$$

J2000.0, 黄道, 动力学分点坐标:

$$X = -0.93739575$$

$$Y = -0.34133625$$

$$Z = -0.00000385$$

J2000.0, 赤道, FK5 系:

$$X_{\circ} = -0.93739590$$

$$Y_{\circ} = 0.31316793$$

$$Z_{\circ} = -0.13577924$$

[如果使用完整的 VSOP87 理论得到的正确值是:

$$X_{\circ} = -0.93739707$$

$$Y_{\circ} = 0.31316725$$

$$Z_{\circ} = -0.13577842]$$

1950.0, 赤道, FK5 系统

$$X_{\circ} = -0.941487$$

$$Y_{\circ} = 0.302666$$

$$Z_{\circ} = -0.131214$$

最后一个，计算 J2044.0 的：

JD = 2467616.0 (从 J2000.0 起算，增量是 44*365.25 日)

$$t = +0.440000$$

$$\zeta = +1014''.7959 = +0^\circ.2818878$$

$$z = +1014''.9494 = +0^\circ.2819304$$

$$\theta = +881''.8106 = +0^\circ.2449474$$

$$X_x = +0.9999424 \quad Y_x = -0.0098403 \quad Z_x = -0.0042751$$

$$X_y = +0.0098403 \quad Y_y = +0.9999516 \quad Z_y = -0.0000210$$

$$X_z = +0.0042751 \quad Y_z = -0.0000210 \quad Z_z = +0.9999909$$

J2044.0, FK5 系统, 赤道坐标

$$X' = -0.933680$$

$$Y' = -0.322374$$

$$Z' = -0.139779$$

第二十六章 分点和至点

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 21 日]

分点和至点时刻是指：太阳的地心视黄经(含光行差和章动)为 90 的整位数时对应的时刻。因太阳黄纬不是真正为零的，所以在分点时刻太阳赤纬也不是真正为零的。

大约时间可按以下方法获得。首先，使用表 26. A 或表 26. B 找到相应的平分点或平至点的时刻。注意，表 26. A 仅适用于-1000 年到+1000 年，表 26. B 适用于+1000 到+3000。事实上，表 26. A 还可以适用于-1000 年以前的几个世纪，表 26. B 还可以适用于+3000 年以后的几个世纪，而且误差仍然很小。“Y”的计算公式在每个表的上方已给出，“year”是一个整数，其它“year”值是毫无意义的。

接下来计算：

$$T = (\text{JDE}_0 - 2451545.0) / 36525$$

$$W = 35999^\circ.373T - 2^\circ.47$$

$$\Delta\lambda = 1 + 0.0334 \cos W + 0.0007 \cos 2W$$

利用 26.C 表提供的 24 个周期项, 对其取和计算得到 S。
这些项的形式是 $A \cdot \cos(B + C \cdot T)$, 余弦的角度参数的单位是“度”。数学表达如下:

表 26.A

适用年份 -1000 to +1000

$$Y = \frac{\text{year}}{1000}$$

三月的分点 (天文春季开始)	
JDE ₀ =	$1721\,139.29189 + 365\,242.13740 Y + 0.06134 Y^2 + 0.00111 Y^3 - 0.00071 Y^4$
六月的至点 (天文夏季开始)	
JDE ₀ =	$1721\,233.25401 + 365\,241.72562 Y - 0.05323 Y^2 + 0.00907 Y^3 + 0.00025 Y^4$
九月的分点 (天文秋季开始)	
JDE ₀ =	$1721\,325.70455 + 365\,242.49558 Y - 0.11677 Y^2 - 0.00297 Y^3 + 0.00074 Y^4$
12月的至点 (天文冬季开始)	
JDE ₀ =	$1721\,414.39987 + 365\,242.88257 Y - 0.00769 Y^2 - 0.00933 Y^3 - 0.00006 Y^4$

表 26.B

适用年份 +1000 to +3000

$$Y = \frac{\text{year} - 2000}{1000}$$

三月的分点 (天文春季开始)	
JDE ₀ =	$2451\,623.80984 + 365\,242.37404 Y + 0.05169 Y^2 - 0.00411 Y^3 - 0.00057 Y^4$
六月的至点 (天文夏季开始)	
JDE ₀ =	$2451\,716.56767 + 365\,241.62603 Y + 0.00325 Y^2 + 0.00888 Y^3 - 0.00030 Y^4$
九月的分点 (天文秋季开始)	
JDE ₀ =	$2451\,810.21715 + 365\,242.01767 Y - 0.11575 Y^2 + 0.00337 Y^3 + 0.00078 Y^4$
12月的至点 (天文冬季开始)	
JDE ₀ =	$2451\,900.05952 + 365\,242.74049 Y - 0.06223 Y^2 - 0.00823 Y^3 + 0.00032 Y^4$

表 26.C

$S = \sum A \cos(B + CT)$			B和C的单位是“度”		
A	B	C	A	B	C
485	324.96	1934.136	45	247.54	29929.562
203	337.23	32964.467	44	325.15	31555.956
199	342.08	20.186	29	60.93	4443.417
182	27.85	445267.112	18	155.12	67555.328
156	73.14	45036.886	17	288.79	4562.452
136	171.52	22518.443	16	198.04	62894.029
77	222.54	65928.934	14	199.76	31436.921
74	296.72	3034.906	12	95.39	14577.848
70	243.58	9037.513	12	287.11	31931.756
58	119.81	33718.147	12	320.81	34777.259
52	297.17	150.678	9	227.73	1222.114
50	21.02	2281.226	8	15.45	16859.074

$$S = 485 \cos(324^\circ.96 + 1934^\circ.136T) + 203 \cos(337^\circ.23 + 32964.467T) + \dots$$

要计算的分点或至点时刻(儒略历书时, 即力学时) 表达为:

$$JDE = JDE_0 + 0.00001 S/\Delta\lambda \text{ 日}$$

最后得到的 JDE 是力学时, 可以使用第 7 章描述的方法转为普通的日期时间。

应用这种方法, 在公元 1951——2050 的精度见的见表 26. D

表26. D

	误差小于20秒 的年份个数	误差小于40秒 的年份个数	最大误差(秒)
三月分点	76	97	51
六月至点	80	100	39
九月分点	78	99	44
12月至点	68	99	41

例 26. a: 计算 1962 年六月至点时刻。

我们依次得到:

$$Y = -0.038$$

$$JDE_0 = 2437837.38589$$

$$T = -0.375294021$$

$$\Delta\lambda = 0.9681$$

$$S = +635$$

$$JDE = 2437837.38589 + 0.00635/0.9681 = 2437837.39245$$

对就时间就是 1962 年 6 月 21 日 21h 25m 08s TD.

使用完整的 VSOP87 行星理论计算的结果是 21h 24m 42s TD。

当然, 高精度的结果, 可通过计算 2 个或 3 个时刻的太阳视黄经, 再用插值方法计算视黄经为 0° 或 90° 或 180° 或 270° 对应的时刻, 得到分点至点时刻。

我们应有这样的一个概念, 太阳沿黄道运动, 每天大约移动 3548 角秒。因此太阳黄经的计算误差为 $1''$ 时, 相应的分点或至点时间的计算误差大约是 24 秒钟。

这种方法可供参考：先找出大约时间（使用 26. A 表或 26. B 表计算已足够），然后使用第 24 章的方法计算该时刻的太阳视黄经 λ ，并包含转到 FK5 系统的修正以及光行差和章动的修正。这样就可对“大约时间”进行修正：

$$+58 \sin (k \cdot 90^\circ - \lambda) \quad (26.1)$$

式中：三月分点取 $k=0$ ，六月至取 $k=1$ ，九月分点取 $k=2$ ，12 月至点取 $k=3$ 。

重复以上计算（迭代计算过程），直到新的时间修正量很小，或者直到太阳视黄经等于 $k \cdot 90$ 度。

例 26. b: 让我们再算一下 1962 年 6 月的至点。

在例 26. a 中，我们得到“平”至点发生在 $JDE_0 = 2437837.38589$ (由表 26. A 得到)。让我们从这个大约时间开始计算，使用第 24 章的“高精度”方法算出刻时刻的太阳视黄经。我们得到：

$$L = -234.04859559 \text{ 弧度} = 270.003272 \text{ 度}$$

$$\text{黄经章动: } \Delta\psi = -12''.965 \text{ (详见第 22 章)}$$

$$\text{FK5 修正: } -0''.09033 \text{ (公式 (24.9))}$$

$$\text{光行差: } -20''.161 \text{ (公式 (24.10))}$$

太阳视黄经：

$$\lambda = 270^\circ.003272 - 180^\circ - 12''.965 - 0''.09033 - 20''.161$$

$$\lambda = 89^\circ.994045$$

由公式 (26.1) 得到对“大约时间”的修正量为：

$$\text{修正} = +58 \sin(90^\circ - \lambda) = +0.00603$$

因此，修正后的时间是：

$$JDE = 2437837.38589 + 0.00603 = 2437837.39192$$

用这个时间重新计算一次，得到：

$$\lambda = 89^\circ.999797$$

修正量是 -0.00021 日，则修正后的时间是： $JDE = 2437837.39213$

再用这个时间计算一遍，得到：

$\lambda=89^{\circ}.999998$, 时间修正量小于 0.000005 日

因此, 最后得到的准确时刻是 JDE = 2437837.39213,
对应 1962 年 6 月 21 日 21h 24m 40s TD。

[这个结果与例 26. a 最后讲到的正确值仅相差 2 秒]

在 1962 年, TD-UT 的值是 34 秒 (详见表 9. A), 所以结果可表示为 21h 24m UT。

表 26. E 给出了 1991 到 2000 年的分点和至点时刻, 精度接近于秒。

表 26. F 给出了一些历元的四个天文季节的时间长度。大约在-4080 年, 地球的近日点在秋分, 这时夏季与秋季一样长, 冬天和春天一样长。到了公元 1246 年, 地球近日点在冬至, 这时春天和夏天等长, 秋天和冬天等长。从+1246, 冬天是最短的季节, 到了公元 3500 年达到最短值, 并一直保持为四季中的最短季节到 6427, 此后, 地球近日点为春分 (3 月分点)。

表 26. E

1991—2000 年二分二至时刻, VSOP87 理论计算, 力学时

年份	3 月分点				6 月至点				9 月分点				12 月至点			
	d	h	m	s	d	h	m	s	d	h	m	s	d	h	m	s
1991	21	3	02	54	21	21	19	46	23	12	49	04	22	8	54	38
1992	20	8	49	02	21	3	15	08	22	18	43	46	21	14	44	14
1993	20	14	41	38	21	9	00	44	23	0	23	29	21	20	26	49
1994	20	20	29	01	21	14	48	33	23	6	20	14	22	2	23	44
1995	21	2	15	27	21	20	35	24	23	12	14	01	22	8	17	50
1996	20	8	04	07	21	2	24	46	22	18	01	08	21	14	06	56
1997	20	13	55	42	21	8	20	59	22	23	56	49	21	20	08	05
1998	20	19	55	35	21	14	03	38	23	5	38	15	22	1	57	31
1999	21	1	46	53	21	19	50	11	23	11	32	34	22	7	44	52
2000	20	7	36	19	21	1	48	46	22	17	28	40	21	13	38	30

表 26.F

天文季节长度, 单位: 天

年份	春	夏	秋	冬
-4000	93.54	89.18	89.08	93.43
-3500	93.82	89.53	88.82	93.07
-3000	94.04	89.92	88.62	92.67
-2500	94.19	90.33	88.48	92.24
-2000	94.28	90.76	88.40	91.81
-1500	94.30	91.20	88.38	91.37
-1000	94.25	91.63	88.42	90.94
- 500	94.14	92.05	88.53	90.52
0	93.96	92.45	88.70	90.14
+ 500	93.73	92.82	88.92	89.78
1000	93.44	93.15	89.18	89.47
1500	93.12	93.42	89.50	89.20
2000	92.76	93.65	89.84	88.99
2500	92.37	93.81	90.22	88.84
3000	91.97	93.92	90.61	88.74
3500	91.57	93.96	91.01	88.71
4000	91.17	93.93	91.40	88.73
4500	90.79	93.84	91.79	88.82
5000	90.44	93.70	92.15	88.96
5500	90.11	93.50	92.49	89.14
6000	89.82	93.25	92.79	89.38
6500	89.58	92.97	93.04	89.65

第二十七章 时差

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 21 日]

由于轨道离心率以及月球及行星的摄动, 造成地球的日心黄经不是均匀变化的, 所以太阳在黄道上运行不是匀速的。另外, 太阳在黄道上运动而不是在天赤道上运动。由于这两个原因, 造成太阳的赤经也不是均匀变化的。

我们可以假想一个太阳(第一假想太阳)沿道黄道匀速运动, 并且在近地点和远地点与真太阳重合。我们再假想一个太阳(第二假想太阳)沿道天赤道匀速运动, 并且在分点处与前面那个假想太阳重合。第二假想太阳叫做平太阳, 从定义得知它的赤经增加的速度是均匀的, 这就是说, 平太阳运动没有周期项, 但含有长期项 τ^2 、 $\tau^3 \dots$

当平太阳经过观测者的子午圈时, 是平正午, 当真太阳经过子午圈是真正午。“时差(时间方程)”是视时间与平时

间的差，换句话说，它是真太阳与平太阳的时角。

根据以上定义，给定时刻的时角由下式计算：

$$E = L_0 - 0^\circ.0057183 - \alpha + \Delta\psi \cdot \cos \varepsilon \quad (27.1)$$

式中， L_0 是太阳平黄经。根据 VSOP87 理论(见第 31 章)，我们有以式(单位是度)：

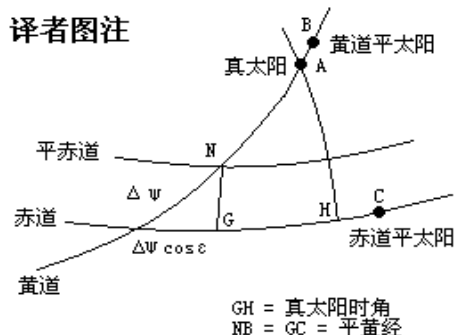
$$L_0 = 280.4664567 + 360007.6982779\tau + 0.03032028\tau^2 + \tau^3/49931 - \tau^4/15299 - \tau^5/1988000 \quad (27.2)$$

式中的 τ 是 J2000.0=JDE 2451545.0 起算的略儒千年(365250 个历书日)数， L_0 应化简为 0 到 360 度的值。

在法国年历和旧的教科书中，“时差”被定义为相反的符号，因此等于平时间减去视时间。

(译者注：赤道平太阳用赤经度量，黄道平太阳用黄经度量，根据定义，它们的起算点均是平分点。由于赤道平太阳与黄道平太阳的运动速度相等，黄道平太阳黄经等赤道平太阳赤经，黄道平太阳黄经就是我们所说的太阳平黄经。时差 = 赤道平太阳的赤经 - 真太阳赤经 = 太阳平黄经 - 真太阳赤经。当然具体算法还应注意光行差与章动)

在公式 (27.1) 中，常数 $0^\circ.0057183$ 是黄经光行差 ($-20''.49552$) 与转到 FK5 系统的修正值 ($-0''.09033$) 的和。 α 是以考虑了光行差和章动的太阳的视赤经。 $\Delta\psi$ 是黄经章动， ε 是黄赤交角，把视赤经(Date 分点起算的)的坐标参考转为 Date 平分点时候， $\Delta\psi \cdot \cos(\varepsilon)$ 项是必需的，这样“视赤经”与平黄经 L_0 的参考点相同。



在公式(27.1)中, 如果 L_0 、 α 、 $\Delta\psi$ 的单位是度, 那么“时差(时间方程)” E 的单位也是度, 乘以 4 以后则转为“分”单位。

“时差” E 的值可能是正或负。如果 $E > 0$, 那么真太阳比平太阳先经过观测者的子午圈。

“时差” E 的绝对值总是小于 20 分。如果 $|E|$ 明显太大, 则应加上或减去 24 小时。

例 27. a: ——计算 1992 年 10 月 13 日 0h 力学时的“时差”

这个日期对应 $JDE=2448908.5$, 由此得到:

$$\tau = (JDE - 2451545.0)/365250 = -0.007218343600$$

$$L_0 = -2318^\circ.192807 = +201^\circ.807193$$

从例 24. b, 得到该时刻的如下参数:

$$\alpha = 198^\circ.378178$$

$$\Delta\psi = +15''.908 = +0^\circ.004419$$

$$\varepsilon = 23^\circ.4401443$$

因此, 由公式(27.1)得:

$$E = +3^\circ.427351 = 13.70940 \text{ 分钟} = +13^m 42^s.6$$

做为一种选择, 低精度的“时差”可使用 Smart 提供的以下方法得到。

$$E = y \sin 2L_0 - 2e \sin M + 4ey \sin M \cos 2L_0 - (y^2/2) \sin 4L_0 - (5/4 e^2) \sin 2M \quad (27.3)$$

式中:

$$y = \tan^2(\varepsilon/2), \varepsilon \text{ 是黄赤交角}$$

$$L_0 = \text{太阳平黄经}$$

$$e = \text{地球轨道离心率}$$

$$M = \text{太阳平近点角}$$

ε 、 L_0 、 e 和 M 的值可分别由(21.2)、(27.2)或(24.2)、(24.4)、(24.3)得到。

公式(27.3)得到 E 的单位是弧度。这个结果应转为度，然后除以 15 得到带小数的小时数。

例 27. b: 和上例一样，计算 1992 年 10 月 13.0TD = JDE 2448908.5 的“时差”。

我们依次得到：

$$T = -0.072183436$$

$$e = 0.016711651$$

$$\epsilon = 23^\circ.44023$$

$$M = 278^\circ.99396$$

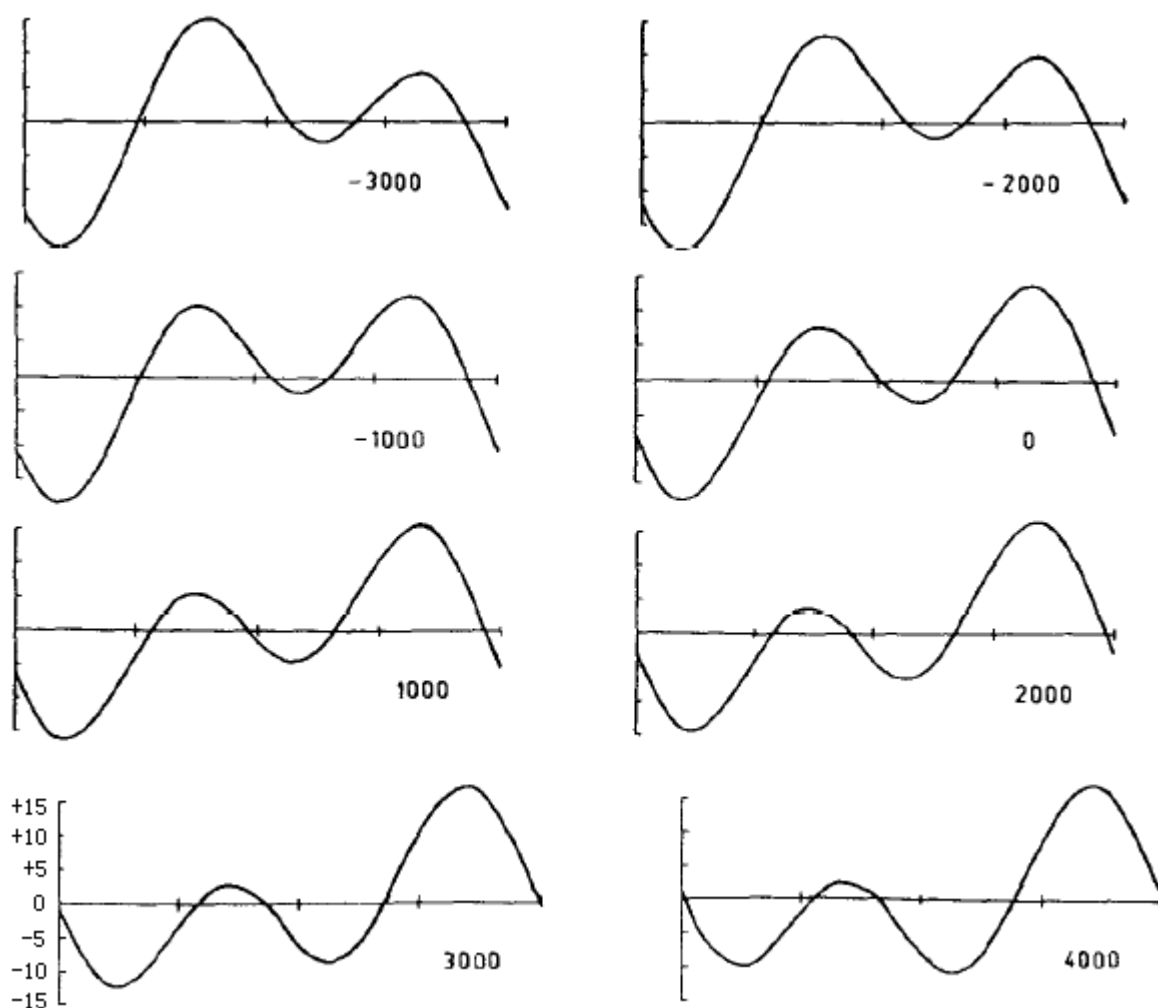
$$L_o = 201^\circ.80720$$

$$y = 0.0430381$$

由公式 27.3 得到：E = +0.059825557 弧度 = +3.427752 度 = +13 分 42.7 秒

“时差”在一年中的变化曲线是众所周知的，在很多天文书籍中可以找到。目前，这个曲线在 2 月 11 日达到最小值，在 11 月 3 日达到最大值，而第二极大和极小值分别发生在 5 月 14 日和 6 月 26 日。

然而，“时差”曲线在几个世纪内逐渐变化，因为黄赤交角、地球轨道离心率以及轨道近日点黄经都在缓慢地变化。下图显示了公元前 3000 年到公元 4000 年，每间隔 1000 年的“时差”曲线。纵坐标每格单位是 5 分钟，横坐标对应 E=0。横坐标每格是一个季节(3 个月)，左边开始于 1 月。例如，我们看到，之后的 2 月的最小值是很深的。



在公元 1600 到 2100 年，“时差”的极值的变化显示于表 27. A。这些数据是“平”值：假设地球在黄道上做不受摄动的运动，并且没有考虑章动。

在公元 1246，太阳近地点与冬至重合，“时差”的周年变化曲线相对横轴是上下对称的：2 月最小与 11 月最大值的绝值是一样的，5 月次最大值与 7 月最小值的绝值也是一样的，详见表中的最后一行。

表 27. A

近期“时差”的极值

年份	二月极小	五月极大	七月极小	11月极大
	m s	m s	m s	m s
1600	-15 01	+4 19	-5 40	+16 03
1700	-14 50	+4 09	-5 53	+16 09
1800	-14 38	+3 59	-6 05	+16 15
1900	-14 27	+3 50	-6 18	+16 20
2000	-14 15	+3 41	-6 31	+16 25
2100	-14 03	+3 32	-6 44	+16 30
1246	-15 39	+4 58	-4 58	+15 39

参考资料

1、W. M. Smart, 《球面天文学》教科书；剑桥大学出版社(1956)，第 149 页。

第二十八章 日面计算

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 22 日]

本章的公式是基于 Carrington(1863)的，这些公式已经使用过很多年了。对于给定的时刻，所需的参数是：

P = 日轴方位角，自日面北点量起的太阳自转轴北端的方位角，向东为正。

B_0 = 日面中心的日面纬度

L_0 = 日面中心的日面经度

虽然位置角通常是 0 到 360 度的角(如月球、行星、双恒星等)，对于太阳，习惯上使用 P 的绝对值，小于 90 度，并在前面分配一个正号或负号。当太阳自转轴北端向东倾斜 P 为正，向西为负。天北极与日面北极相差可达 26 度。大约在 4 月 7 日 P 达到最小值 -26.3 度，10 月 11 日达到最大值 26.3 度，为零时大约在 1 月 5 日和 7 月 7 日。

B_{\odot} 表示太阳北点朝向(+)或远离(-)地球, 在 6 月 6 日和 12 月 7 日时其值为 0, 达到最大值在 3 月 6 日(-7.25 度)和 9 月 8 日(+7.25)。

L_{\odot} 每日减小 13.2 度。平均相合周期是 27.2752 日。每次“自转相合”开始于 L_{\odot} 经过 0 度时。第 1 号自转始于 1853 年 11 月 9 日。

设 JD 是儒略历书日, 可以使用第 7 章的方法计算出。如果给定的时间是 UT 时间, 则应加上 $\Delta T = TD - UT$ (单位是日, 详见第 9 章), 如果 ΔT 表达为“秒”单位, 那么 JD 的修正是 $\Delta T / 86400$

然后计算以下值:

$$\theta = (JD - 2398\,220) \times \frac{360^\circ}{25.38}$$

$$I = 7^\circ.25 = 7^\circ 15'$$

$$K = 73^\circ.6667 + 1^\circ.395\,8333 \frac{JD - 2396\,758}{36525}$$

式中 I 是太阳赤道与黄道的倾角, K 是太阳赤道与黄道的升交点的黄经。关于 θ 的公式中, 25.38 是太阳自转的恒星周期, 单位是“日”。这个值是个惯例常数(Carrington 提供的)。它定义了太阳的太阳经度系统的零子午圈, 因此要正确看待。

利用第 24 章的方法, 计算出太阳的视黄经 λ (含光行差, 但不含章动), 利用第 21 章的方法计算出黄赤交角 ε (含章动)。设 λ' 是对 λ 修正了黄经章动的值。

然后利用下式计算角度 x 和 y :

$$\tan x = -\cos \lambda' \tan \varepsilon$$

$$\tan y = -\cos (\lambda - K) \tan I$$

式中的 x 和 y 均为 -90 度到 90 度的角。然后 P 、 B_{\odot} 和 L_{\odot} 由下式计算:

$$P = x + y$$

$$\sin B_0 = \sin (\lambda - K) \sin I$$

$$\tan \eta = \frac{-\sin (\lambda - K) \cos I}{-\cos (\lambda - K)} = \tan (\lambda - K) \cos I$$

式中的 η 应于 $\lambda - K \pm 180^\circ$ 在同一象限。 $L_0 = \eta - \theta$, 应转到 0 到 360 度。

 例 28. a: ——1992 年 10 月 13 日 0h UT = JD 2448908. 5, 计算的 P 、 B_0 和 L_0 。

我们使用 $\Delta T = +59$ 秒 $= +0.00068$ 日。因此, 改正后的儒略历书日是 2448908. 50068, 接下来, 我们依次得到:

$$\theta = 718\,985^\circ.8252 = 65^\circ.8252$$

$$I = 7^\circ.25$$

$$K = 75^\circ.6597$$

由第 24 章和 21 章得:

$$L(\text{地球}) = -43.634\,836\,22 \text{ radians} = +19^\circ.908\,045$$

$$R = 0.997\,608$$

$$\Delta\psi = +15''.908 = +0^\circ.004\,419$$

$$\varepsilon = 23^\circ.440\,144$$

光行差修正量 $= -20''.4898/R = -0^\circ.005705$, 因此:

$$\lambda = L + 180^\circ - 0^\circ.005\,705 = 199^\circ.902\,340$$

$$\lambda' = \lambda + \Delta\psi = 199^\circ.906\,759$$

$$\tan x = +0.407\,664 \quad x = +22^\circ.1790$$

$$\tan y = +0.071\,584 \quad y = +4^\circ.0945$$

$$P = 26^\circ.27$$

$$\sin B_0 = +0.104\,324 \quad B_0 = +5^\circ.99$$

$$\tan \eta = \frac{-0.820\,053}{+0.562\,699} \quad \eta = -55^\circ.5431$$

$$L_0 = -121^\circ.3683 = 238^\circ.63$$

如前面叙述的，日面“自转相合”始于 L_0 等于 0 度。
Carrington 的第 C 号“自转相合”的大约时间是：

$$\text{儒略历书日} = 2398140.2270 + 27.2752316 * C \quad (28.1)$$

当然，式中的 C 是整数。上式的误差不超过 0.16 日。

然而，上式得到的结果可以按如下修正：

$$M = 281.96 + 26.882\,476\,C$$

然后，修正值是(单位:日)：

$$\begin{aligned} &+0.1454 \sin M \\ &-0.0085 \sin 2M \\ &-0.0141 \cos 2M \end{aligned} \quad (28.2)$$

在 1850 年到 2100 年，误差小于 0.002 日。

当然，要算出“自转相合”的正确开始时间，可以通过以上公式，计算两个接近正确时间的 L_0 ，然后通过逆插值找出 L_0 等零的时刻。

例 28. b: ——计算第 1699 号“自转相合”的开始时刻。

由 $C=1699$ ，利用公式(28.1)得 $JDE = 2444480.8455$

我们还得到 $M = 45955^\circ.287 = 235^\circ.287$ ，由(28.2)式得到修正值是-0.1225。

由力学时转到 UT 时，还要修正-0.0006 日(在 1980 年， $\Delta T = TD-UT = 51$ 秒)。

因此，最后得到：

$$JD = 2444480.8455 - 0.1225 - 0.0006 = 2444480.7224$$

对应 1980 年 8 月 29.22 日

《1980 年天文历书》第 359 页给出了同样的值。

按照惯例，太阳的“自转相合”时刻只需给出 0.01 日精度，因此用日为单位，而不是小时和分。

第二十九章 开普勒方程

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 3 月 31 日]

有多种方法计算星体(行星、小行星、慧星)在某一给定时刻的绕日运动轨道上的位置。

——数值积分法, 此法已超出本书讲述的范围。

——使用第 31 章的方法, 计算一些周期项的和, 进而获得星体的黄道坐标。

——利用第 32 章的方法, 从星体的轨道要素计算出星体的位置。

其中, 使用最后一种方法, 我们需找出星体的真近点角。可以通过求解开普勒方程得到, 也可以使用序列表达式得到(见第 32 章的“中心方程”)。

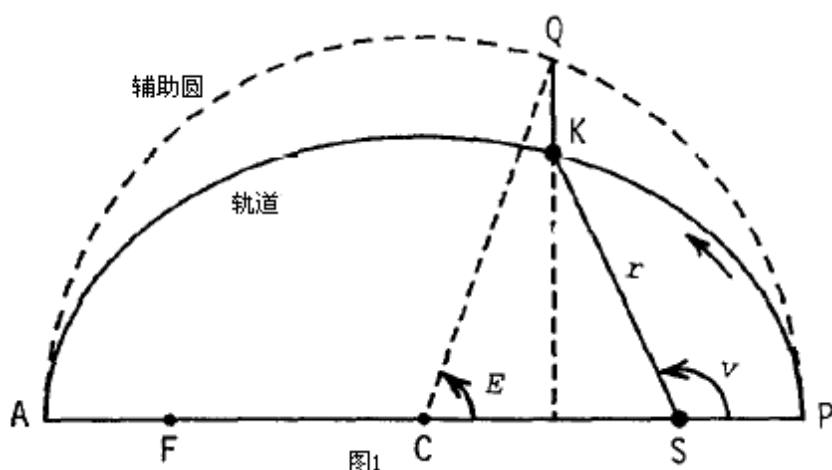


图 1 表示半个椭圆轨道, 太阳在椭圆的焦点 S 上, 椭圆的另一个焦点是 F。直线 AP 是长轴。C 是远日点 A 与近日点 P 之间的中点, 也是 F 与 S 的中点。

假设某一时刻, 移动的星体位置在 K 点, 那么 SK 就是此刻天体的径向量, 记为 r , 它的单位是天文单位。真近点角(v)是角 KSP, 它是从日心看, 天体移动的角度(从近点起算)。半长轴 CP 通常表示为 a , 单位是天文单位。轨道的离心率 $e=CS/CP$, 对于椭圆, e 介于 0 到 1 之间。近日距离和

远日距离通常分别表示为 q 和 Q 。在近日点, $v=0^\circ$, $r=q$, 在远日点 $v=180^\circ$, $r=Q$ 。因此有以下公式:

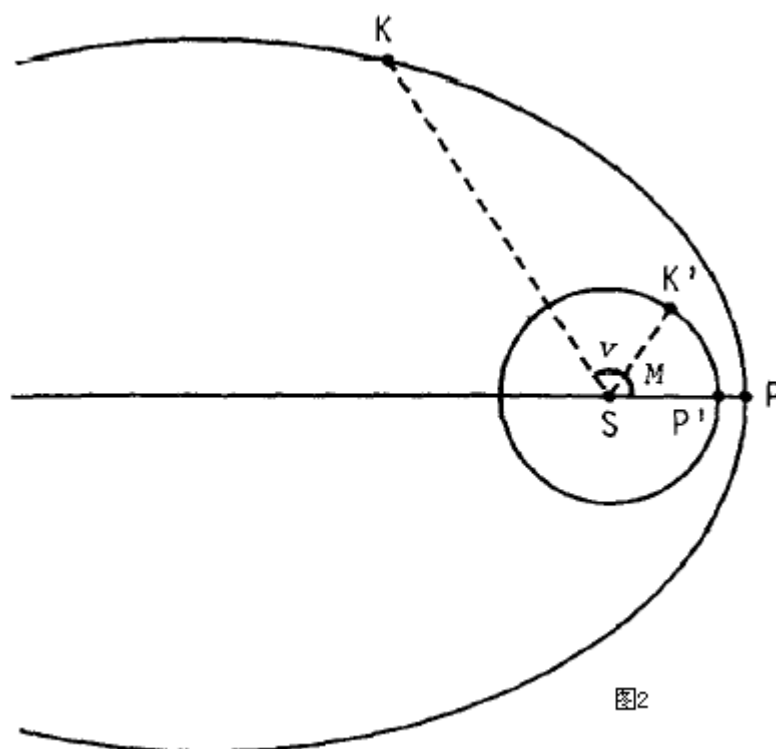
$$\text{距离 } CS = ae$$

$$\text{距离 } SP = q = a*(1-e) \text{ 近日点距离}$$

$$\text{距离 } SA = Q = a*(1+e) \text{ 远日点距离}$$

$$\text{距离 } PA = 2a = q+Q$$

现在我们考虑图 2 中的虚构的行星或彗星 K' , 它的轨道是围绕太阳的圆, 做匀速运动, 周期与真行星或彗 K 相同。同是假设, 虚构天体在 P' (该点在 SP 上) 时, 真天体在 P 点。过一段时间后, 虚天体在 K' 点, 真天体在 K 点, 那么此刻 $v = \angle PSK$ 称为真近点角, $M = \angle PSK'$ 称为平近点角。



换句话说, 平近点角指把星体看作匀速圆周运动时, 星体到近点的角距离。

由以上定义, 不难发现, 当星体在近点时, $M=0^\circ$, 当真星体绕日一周时, $M=360^\circ$ 。

如果已知平近点角 M 和离心率 e , 要如何求真近点 v 呢? 除了第 32 章的使用周期序列的方法, 还有一种方法就是求

解开普勒方程。

在这个问题上，我们需引入一个辅助角 E ，称为偏近点角。它的几何定义见图 1。虚线圆的直径是 AP ，做辅线 KQ 垂直 AP ，角 PCQ 就是偏近点角。

当星体在近日点时， v 、 E 、 M 都是 0° ，在近点附近，真星体移动速度最快，快于平近点角。星体从近点移到远点的过程中， $v > M$ ，以因为 M 始终介于 v 和 M 之间，所以有 $0^\circ < M < E < v < 180^\circ$ ，在远日点 $M = E = v = 180^\circ$ ，在回到近点的过程中， $v < M$ 。

当 E 已知， v 可获得：

$$\tan(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} * \tan(E/2) \quad (29.1)$$

这样，径矢 r 可由以下任一表达式算出：

$$r = a * (1 - e * \cos(E)) \quad (29.2)$$

$$r = a * (1 - e * e) / (1 + e * \cos(v)) \quad (29.3)$$

$$r = q * (1 + e) / (1 + e * \cos(v)) \quad (29.4)$$

接下来我们来考虑求偏近点角 E 的问题。

开普勒方程是：

$$E = M + e * \sin(E) \quad (29.5)$$

这个方程要求角的是 E ，但这是个超越方程，不能直接求解。我们将解释三种迭代法求 E ，最后还给出一个近似求 E 的公式。

第一种方法：

式 29.5 的 M 、 E 应表达为弧度单位。大多数程序设计语言都使用弧度制。如果使用角度模式计算正余弦值，那么 e 应乘上 $\pi/180$ ，令乘上这个数以后的 e 为 e_{\circ} ，那么开普勒方程变为：

$$E = M + e_{\circ} * \sin(E) \quad (29.6)$$

这样，我们就可用“角度”来计算了。

为了解 29.6 式，选找一个适当的 E 的估值，那么通过 29.6 式计算后，将得到一个更精确的 E 的新估值。重复以上计算，直到获得所需的精度为止。这一计算过程可利用计算

机自动进行。E 的每个估值可以使用 $E=M$ ，由此得运算过程如下：

$$E_0 = M$$

$$E_1 = M + e \cdot \sin(E_0)$$

$$E_2 = M + e \cdot \sin(E_1)$$

$$E_3 = M + e \cdot \sin(E_2)$$

.....

E_0 、 E_1 、 E_2 、 E_3 ...，逐个精度不断提高。

例 29. a ——计算开普勒方程， $e=0.100$ ， $M=5^\circ$ ，精度要求 0.000001 度。

先计算 e_0

$$e_0 = 0.100 \cdot \pi / 180 = 5^\circ.72957795$$

则开普勒方程变为

$$E = 5 + 5.72957795 \cdot \sin(E)$$

式中全部使用角度制计算。起步 $E=M=5^\circ$ ，这样就取得如下 E 的过程值：

5.499366

5.549093

5.554042

5.554535

5.554584

5.554589

5.554589

因此，所需的结果是 $E = 5^\circ.554589$

这种方法非常简单并总是收敛的。当 e 比较小时，基本没问题。然而，迭代次数是随 e 的增加而增加的。例如， $e=0.990$ ， $M=2^\circ$ 时，迭代过程中 E 的值如下：

2.000000 15.168909 24.924579 29.813009

3.979598 16.842404 25.904408 30.200940

5.936635 18.434883 26.780556 30.533515

7.866758 19.937269 27.557863 30.817592

9.763644 21.341978 28.242483 ...

11.619294 22.643349 28.841471

13.424417 23.837929 29.362399

在进行了 50 次迭代后，结果是 $32^{\circ}.345452$ ，仍达不到正确值 $32^{\circ}.361007$ ，误差还大于 0.01 度。

图 3 表示计算精度为 10^{-9} 度时，所需的迭代次数三维图，底面坐标是离心率 e 和平近点角 M 。

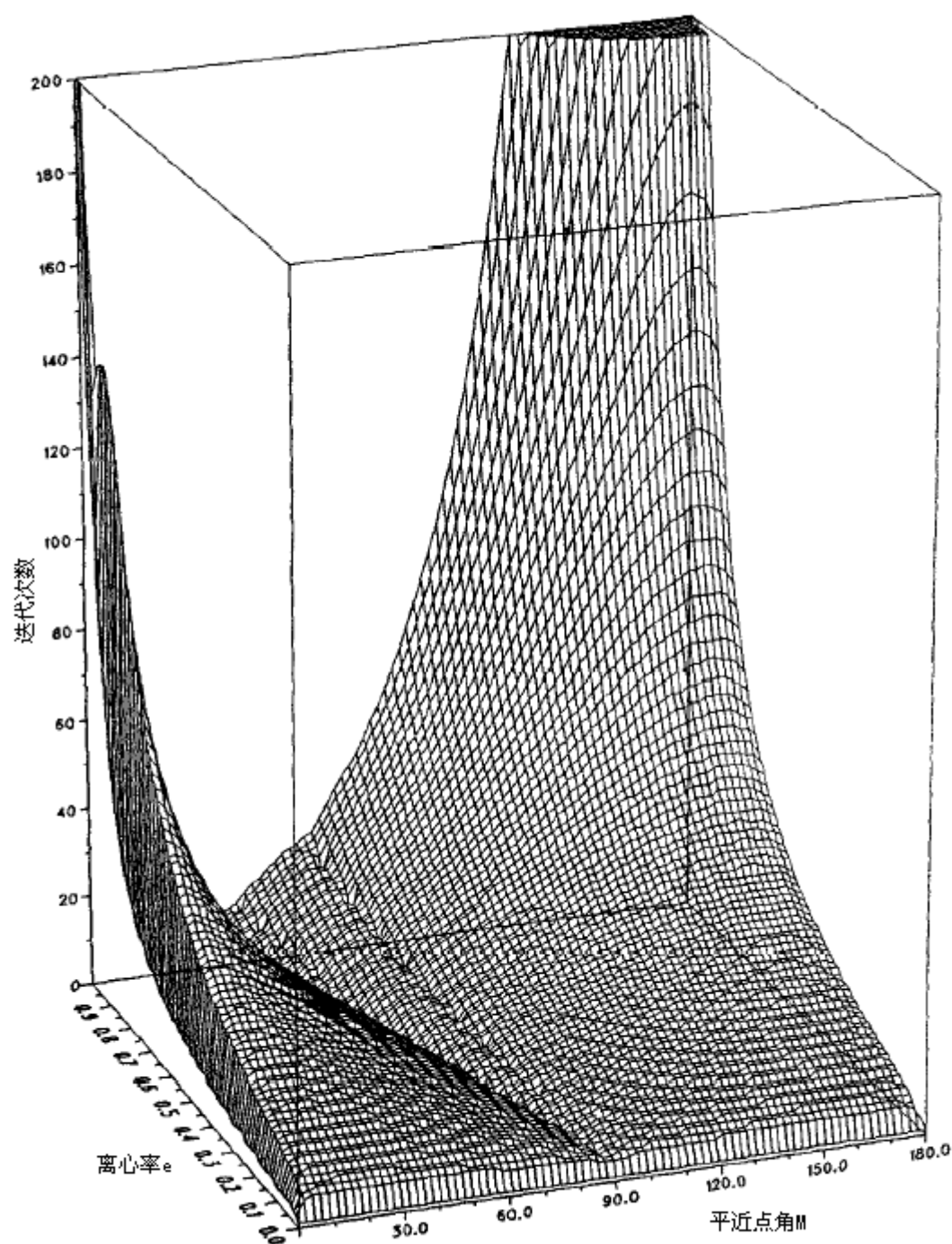


图3

我们看到，当 e 接近 1 时，平近点角在 0 度到 180 度范围时，所需的迭代次数很大。

我们注意到，图的底部有一个直线“谷”。这个“谷”线是：点 $(e=0, M=90^\circ)$ 到点 $(e=1, M=\pi/2-1=32^\circ 42')$ ，这就是说，对于给定的 e ，存在一个特殊的平近点角 M_0 ，计算它时所需的迭代次数最小：

$$M_0 = \pi/2 - e, \text{ 单位弧度。}$$

当 M 偏离 M_0 (在“谷”的两边)，迭代次数增加。例如：
 $e=0.75$ 时 $M_0=47.03$ 度，要达到 0.000001 度所据的迭代次数是：

M	次数	M	次数
5°	51	60°	11
10°	37	70°	12
20°	23	90°	21
30°	15	110°	32
40°	9	130°	43
47°	5	150°	54
55°	8	170°	59

一个有趣的事实是，当 M 介于 M_0 与 180 度时，迭代过程中 E 的值在真值附近振动。例如： $e=0.75, M=70^\circ$ ，迭代计算结果如下：

70°.000000 起始值
 110.380316 偏大
 110.281870 偏小
 110.307524 偏大
 110.300850 偏小
 110.302587 偏大
 110.302135 偏小

第二种方法：

当轨道离心率 e 大于 0.4 或 0.5 时，第一种方法收敛速度很慢，可以考虑更好的迭代公式：

$$E_1 = E_0 + (M + e \sin(E_0) - E_0) / (1 - e \cos(E_0)) \quad (29.7)$$

式中 E_0 是上一次迭代取得的值。在这个公式中， M , E_0 及 E_1 均为弧度。如果要用角度单位计算，式中的 e 应换为 $e_0 = 180 * e / \pi$ 。

使用该式，任需多次迭代。

请注意一下 29.6 式与 29.7 式的不同。前者直接算出迭代修正后的 E_1 ，后者则由两部分构成，即 E_0 和修正量组成，二者之和就是修正后的 E_1 。

起步： $E_0 = M = 5^\circ$ ，得到以下计算过程：

E_0	修正量	E_1
5.000000000	+0.554616193	5.554616193
5.554616193	-0.000026939	5.554589254
5.554589254	-0.000000001	5.554589253

在这种情况下，三次迭代就可达到 0.000000001 的精度。

我们求角不同 e 和 M 的开普勒方程，见表 29.A，第 1 列是 e ，第 2 列是近点角 M ，第 3 列是正确的 E ，第 4 列和第 5 列分别是用第一种方法和第二种方法计算所需的迭代次数。起步估值为 $E = M$ 。计算时取 12 位有效位数，一直迭代到比上一次值的差值小于 0.000001 度为止。

表 29.A

e	M	E	(1)	(2)
0.1	5°	5.554589	6	2
0.2	5°	6.246908	9	2
0.3	5°	7.134960	12	2
0.4	5°	8.313903	16	2
0.5	5°	9.950063	21	2
0.6	5°	12.356653	28	3
0.7	5°	16.356653	39	3

0.8	5°	22.656579	52	4
0.9	5°	33.344447	58	5
0.99	5°	45.361023	50	11
0.99	1°	24.725822	150	8
0.99	33°	89.722155	6	5

很明显，不管是第一种方法还是第二种方法，一般说 e 的值越大，所需的迭代次数越多。但第二种方法是这三种方法中所需迭代次数最少的。当 $e < 0.3$ 时，第一种方法是最好的，因为我们更喜欢第一种简单的迭代公式（迭代次数仅 5—10），而不喜欢第二种复杂的公式（虽然他仅需迭代 2 次）。仅当 e 的值比较大时，才考虑使用第二种方法。

在某些情况下，第一种方法可能失效。见上表中的最后第二行，当 $e=0.99$ ， $M=1$ 度时，所需的迭代次数至少是 150 次。

最后，表 29.A 显示，对于给定的精度要求，所需的迭代次数不完全依靠 e 和 M ，仍然存在某些奇异问题，从表中的最后两行看，在 e 已非常接近 1 时，第一种方法却仅需迭代 6 次。

虽然公式 29.7 支持很大的离心率 e ，但仍可能出问题，在 HP-85 电脑上，我们处用公式 29.7 执行了一些计算，每次计算时，起步值为 $E=M$ 。表 29.B 给出了三种情况下 E 逐步求精的过程， E 的单位是度。

表 29.B

$e=0.99$ $M=2^\circ$	$e=0.999$ $M=6^\circ$	$e=0.999$ $M=7^\circ$
188.700250865	930.352114752	832.86912333
90.0043959725	418.384869795	275.954959759
58.7251974236	-345.064633754	-87.610596019
41.762008288	10182.3247508	-48.5623921307
34.1821261793	1840.68260539	-11.225108839
32.4485414136	-5573.41581953	340.962715254
32.361223124	-2776.37618814	-5996.93473678

32.3610074734	-478.97469399	-2079.96780001
32.3610074722	-185.902957505	511.49423506
32.3610074722	-86.6958017962	257.391360843
	-48.9711628749	5.969894505
	-14.7148241705	1094.05946279
	168.189220986	-33606.763133
	92.1098260913	-12599.3759885
	64.2252288664	11889243.763
	52.7106850572	3642203.90477
	49.7106850572	-432120.48862
	49.5699983807	-145379.711482
	49.5696248567	142691.415319
	49.5696248539	56806.8295471
	

在第一列中($e=0.99$, $M=2$ 度), 起步为 $E=2$ 度。第一次迭代得到 $E=188.7$ 度, 偏离正确解太远了。但下来的迭代值 90 度、59 度、42 度, 之后就速迅收敛了。当到了第 8 次迭代, 精度就达到了 0.00004 角秒。

在第二列中($e=0.999$, $M=6$ 度), 首次迭代得到了一个十分异常的值, 几乎是个随机的突变值。刚开始基本无法收敛, 直到第 13 次迭代 (值为 168 度), 才开始快速收敛。

在第三列中($e=0.999$, $M=7$ 度), 前 20 步跟本不收敛, 直到 47 步 (表中未给出) 也得到正确值 32.2702615。

在同的 $e=0.999$, 却有显著的不同, 把 $M=7$ 度, 换为 $M=7.01$ 度, 则只需迭 7 次就可得到正确的 E 。

HP-85 计算机的有效位数是 12 位。如果使用其它计算机, 迭代次数则有所不同。用 HP-67 计算机 (只有 10 有效数字) 同样计算表中的第二列情况 ($e=0.999$, $M=6$ 度), 迭代过程如下:

930.3621195

418.3848584

-345.0649049
10182.69391
1883.665232
-162.6729360
-85.06198931
-47.82386405
-13.18454655
211.0527629
84.65261970
60.76546811
51.35803706
49.62703439
49.56968687
49.56962485
49.56962485

与 29.B 表作个有趣的对比。在第三次迭代后,它与 HP-85 的计算的差值仅 0.00027 度,下一次迭代,差值达 0.37 度,再下一个达 43 度。不过,最终还是收敛了。

显然,当 e 很大时,公式 29.7 只保证局部收敛。当 e 很大时,迭代过程中, E 随机的在正确值前后跳变,仅当有机会跳入“正确值附近”,然后才开始收敛。

图 4 是一个三维图形,表示计算精度要求为 10^{-9} 度时利用 29.7 式所需的迭代次数,底面坐标为离心率 e 和平近点角。和以前的一样,起步计算时 $E=M$ 。图中左边的角落, $e=1$, $M=0$ 度,这是个危险区域,图 5 则放大显示了该曲域。我们看到很多密集的高峰, e 或 M 的微小变化将造成达到所需精度的迭代次数大为不同。

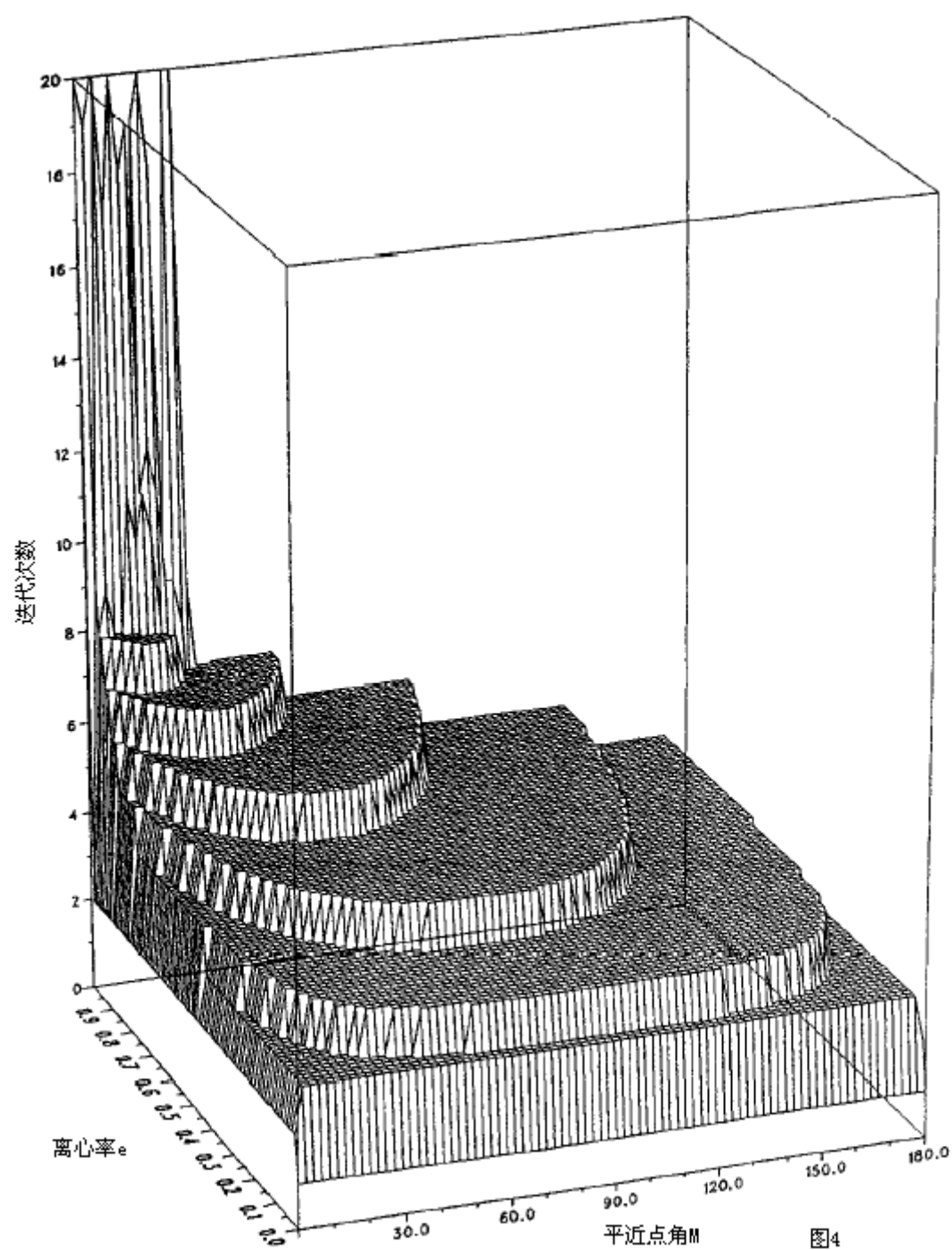


图4

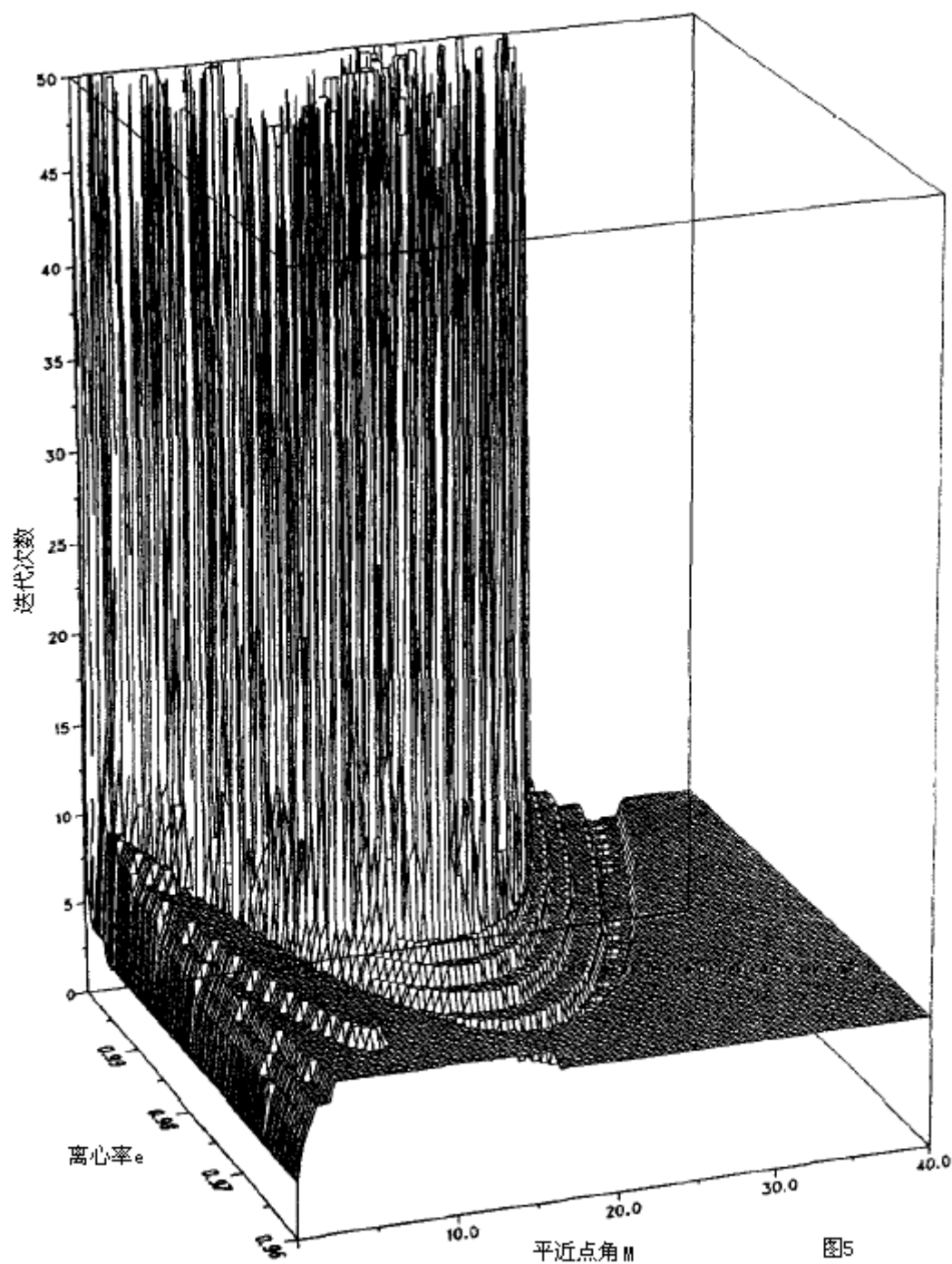


图5

因此，当 e 很大 M 很小时，使用式 29.7 是非常让人担心的。在某些情况下，计算过程中有溢出的危险，因为分母的数有可能非常接近于 0。

这个问题可通过适当选择 M 的值来解决，一个良好的 M 的值由 Mikkola 找到了（式中为弧度单位）：

$$\alpha = (1-e)/(4e+0.5) \quad \beta = M/(8e+1)$$

$z = \sqrt[3]{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \alpha^3}}$ ，式中 $\sqrt[3]{}$ 表示开 3 方， α^3 表示 α 的 3 次方

式中的 \pm 号选择与 β 的正负号相同。注意：立方根下的数值可能是负数，造成电脑计算出错，此问题读者可自行解决。

接下来计算： $s_0 = z - \alpha/2$ $s = s_0 - 0.078*s_0^5/(1+e)$

那么，公式 29.7 的更好的起步值是：

$$E = M + e*(3*s - 4*s^3) \quad (29.8)$$

这一计算适用于上述的“危险区域”，也就是 $|M| < 30$ 度，且 $0.975 < e < 1$ 时。在范围之外，起步值使用 $E=M$ 即可。

图 6 表示：使用 29.7 公式计算，起步使用 29.8 式，为了达到 10^9 次方精度时所需的迭代次数。

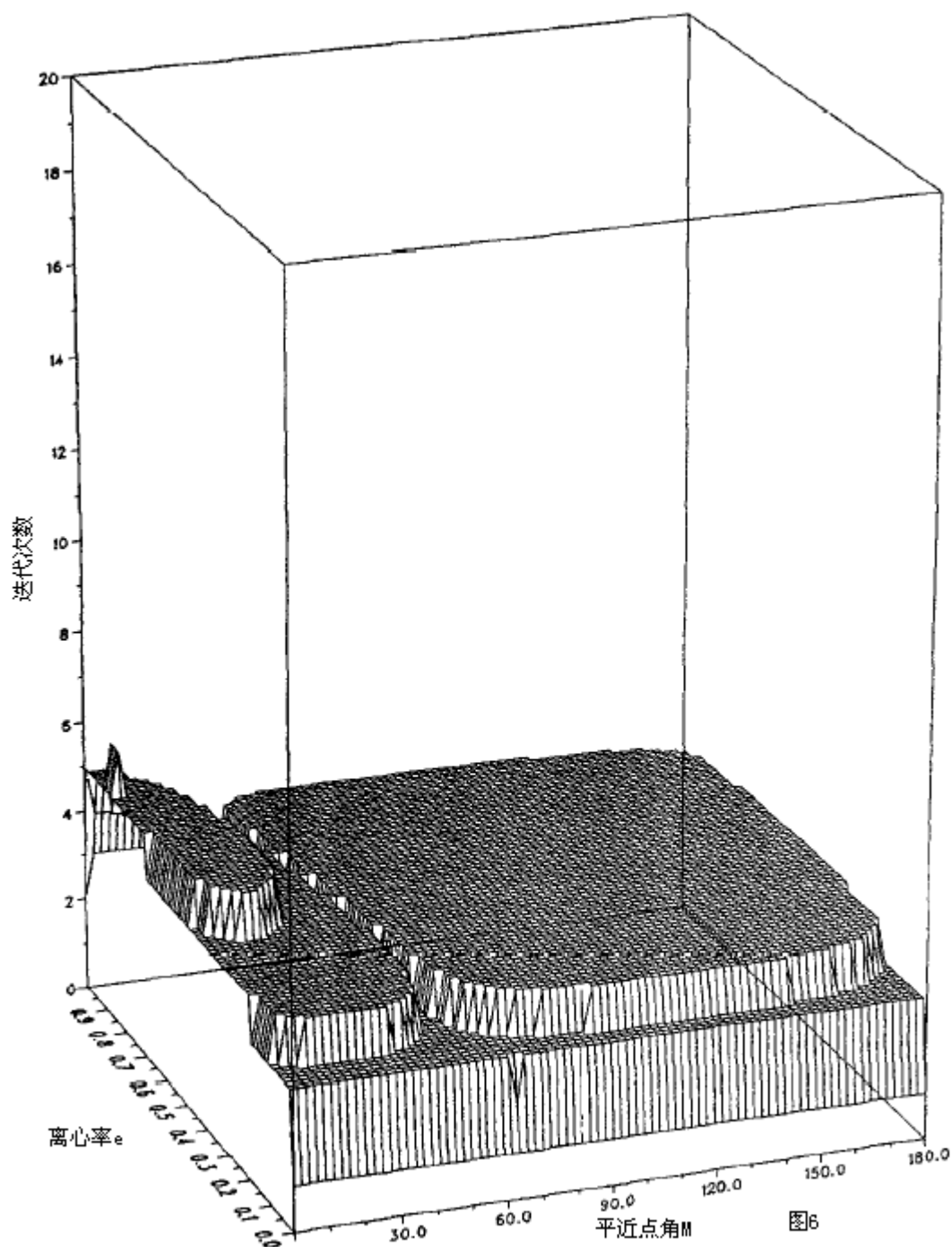


图6

第三种方法:

Roger Sinnott 设计了一种使用二分法求解 E 的方法。二分法在第 5 章已经提到。这个过程是绝对可靠的, 当是 $e=0$ 到 1 的任意数, 它总能收敛到机器所能支持的精度。以下的程序中 E 表示轨道的离心率, M 是平近点角, 单位是弧度。程序的结果是近点角, 单位也是弧度。

要得到 10 位精度，需二分 33 次。在 16 位的 BASIC 语言中，程序的行号为 180 的那个循环语句，可增加为 53 次。最小循环次数要求是： $3.32 \times$ 乘以所需的精度位数，其中 $3.23=1/\log_{10}(2)$ 。

```

100 PI=3.14159265359
110 F=SGN(M) : M=ABS(M)/(2*PI)
120 M=(M-INT(M))*2*PI*F
130 IF M<0 THEN M=M+2*PI
140 F=1
150 IF M>PI THEN F=-1
160 IF M>PI THEN M=2*PI-M
170 E0=PI/2 : D=PI/4
180 FOR J=1 TO 33
190 M=E0-E*SIN(E0)
200 E0=E0+D*SGN(M-M1) : D=D/2
210 NEXT J
220 E0=E0*F

```

第四种方法：

公式： $\tan(E) = \sin(M) / (\cos(M) - e)$ (29.9)

它可计算 E 的近似值，并且仅当 e 的值比较小时才是有效的。

与例 29. a 的数据一样，用 [29.9](#) 式得到

$\tan(E) = 0.08715574/0.89619470 = 0.09725090$

即 E=5.554599 度，准确值是 5.554589，所以此时误差仅 0".035。但在相同离心率时，M=82 度，误差约为 35"。

使用 [29.9](#) 式的最大误差是：

e=0.15 时 0.0327 度

e=0.20 时 0.0783 度

e=0.25 时 0.1552 度

e=0.50 时 1.42 度

e=0.99 时 24.7 度

对于地球, $e=0.0167$, 误差将小于 $0''.2$ 。在这种情况下, 公式 29.9 是可以被安全使用的, 除非精度要求很高。

第三十章 行星的轨道要素

[许剑伟 于家里 2008 年 3 月 29]

虽然目录 II 中提到主要周期项须计算行星的日心坐标位置(第 31 章处理行星位置问题), 但这里更感兴趣的是轨道的“平”要素。(注: 这里的“平”是相对于“瞬时”而言的, 如一周期内的平均)

大部分行星的轨道要素要台表达为多项式形式:

$$a_0 + a_1 * T + a_2 * T^2 + a_3 * T^3$$

式中 T 归算为 J2000 起算的儒略世纪数:

$$T = (\text{JDE} - 2451545.0) / 36525 \quad (30.1)$$

在 2000 年首之前, T 的值是负值, 之后为正值。轨道要素是:

L = 行星平黄经

a = 轨道半长径

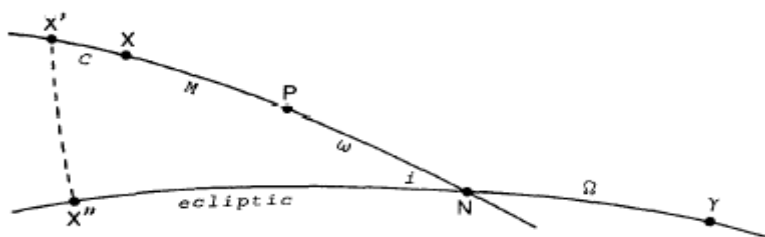
e = 轨道的离心率

i = 行星轨道的倾角(与黄道的夹角)

Ω = 升交点黄经

π = 近日点经度

近日点黄经常表示为 $\bar{\omega}$ (注: 该符号上面还有一横, 我打不出来)。但是, 如果使用该符号, 容易造成混淆, 因为近点角表示为 ω (注: 上面没有一横)。所以, 我们宁愿使用 π 这个符号表示近日点黄经。这样就有 $\pi = \Omega + \omega$ 。



角 $\gamma NX''$ 是黄道的一部分，角 $NPXX'$ 是行星轨道的一部分（也可看作行星轨道面与天球相交的大圆的一部分）。 γ 是春分点（黄经是 0° ），N 是轨道的升交点，P 是行星的近点。某一时刻，行星平位置在 X 点，真位置在 X' 点。这样就有：

Ω = 角 γN = 升交点黄经

ω = 角 NP = 近日点到交点的角距离

π = 角 γN + 角 NP = $\Omega + \omega$ = 近日点平黄经

L = 角 γN + 角 NX = $\Omega + \omega + M$ = 行星平黄经

M = 角 PX = 行星平近点角

C = 角 XX' = 一个中间参数

v = 角 PX' = $M + C$ = 行星的真近点角

i = 轨道倾角 = NP 与 NX'' 的夹角

应注意到， L 与 π 的测量均涉及两个平面。即从 γ 开始，沿着黄道到 N 点，再沿道着轨道。

行星的平近点角是： $M = L - \pi$

表 30. A 结出了水星到海王星各大行星的轨道要素的 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 系数。半长径的单位是天文单位。角度值 (L , i , Ω , π) 的单位是度，这些参数涉及 Date 黄道分点。

表中的值，是从 P. Bretagnon 的行星理论 VSOP87 中导出来的。在第 31 章中查看关于 VSOP82 及 VSOP87 的更多信息。 L , i , Ω , π 涉及平动力学 Date 黄道坐标，与 FK5 坐标系仅有很细微的差别（详见第 24 章）。

在某些情况下，可能希望将轨道要素 L 、 i 、 Ω 、 π 折算到标准坐标中。举个例子来说，如果想要计算某个彗星轨道与某个大行星的最小距离，当前者是关于标准坐标的，在这种情况下，我们就需要进行坐标变换了。

借助表 30. B，可以计算 J2000 坐标的各行星要素，轨道要素 a 和 e 不会因参考系的不同而发生变化，所以可利用 30. A 表来计算。

对于地球，为了避免倾角变化不连续及升交点发生 180° 的跳变，轨道倾角（相对对于 J2000 黄道的夹角）在 J2000.0

之前定为负值。

例 30. a: ——计算 2065 年 6 月 24 日 0 时(力学时)水星的轨道要素。

2065 年 6 月 24.0 = JDE 2475460.5 (本行计算详见第 7 章)

再由 [30.1](#) 式得 $T = +0.654770704997$

由表 30. A 得到

$$\begin{aligned} L &= 252.250906 + 149474.0722491 * 0.654770704997 \\ &+ 0.00030397 * 0.654770704997^2 \\ &+ 0.00000018 * 0.654770704997^3 \\ &= 98123.494702 = 203.494702 \end{aligned}$$

$$a = 0.387098310$$

$$e = 0.20564510$$

$$i = 7.006171$$

$$\Omega = 49.107650$$

$$\pi = 78.475382$$

$$M = L - \pi = 125.019320$$

$$\omega = \pi - \Omega = 29.367732$$

从表 30. A 和 30. B 表明, 在 Date 黄道坐标中, 水星的倾角是增加的, 在 J2000 黄道坐标中, 却是减小的。相反的情况发生在地星和海王星。

在 $T=-30$ 到 $+30$, 金星的轨道倾角(Date 黄道坐标中)是连续增加的, 在 J2000 坐标中, 金星的倾角在+690 年达到最大值。

天王星的轨道倾角(Date 黄道坐标中)在+1000 年达到最大值, 在 J2000 坐标中, 同时期它的倾角却是持续减小的。

在 Date 黄道坐标, 所有行星轨道的交点黄经都是增加的, 但在 J2000 坐标中却是减少的(木星及土星除外)。

[数据表 30. A](#) [数据表 30. B](#)

第三十一章 行星位置

[许剑伟 翻译于家里 2008-03-30 下午]

一、计算方法：

1982 年，巴黎的 P.Bretagnon 发表了行星理论 VSOP82。VSOP 是“Variations Seculaires des Orbites Planetaires”的缩写。VSOP82 由大星行(水星到海王星)的长长的周期项序列组成。给定一个行星及一个时间，对它的序列取和计算，即可获得下述的密切轨道参数。(注：密切轨道是行星的瞬时轨道，详见 32 章)

a = 轨道半长径

λ = 行星的平黄经

$h = e \sin(\pi)$

$k = e \cos(\pi)$

$p = \sin(i/2) \sin(\Omega)$

$q = \sin(i/2) \cos(\Omega)$

式中 e 是轨道的离心率， π 是近日点黄经， i 是倾角， Ω 是升交点黄经。

当 a 、 λ 、 e 和 π (由 h 和 k 得到)， i 及 Ω 已知，某一时行星的空间位置即可获得。

VSOP82 方法有个不便之处是，当不需要完全精度时，应在何处截断。幸运的是，1987 年 Bretagnon 和 Francou 创建了 VSOP87，它提供了直接计算行星日心坐标的周期序列项。也就是说直接算得：

L ，日心黄经

B ，日心黄纬

R ，行星到太阳的距离

要注意的是， L 是行星的真黄经，不是轨道经度。在第 30 章的图中，轨道经度(有时我译为黄经，但要注意，精确计算时这样翻译显得不够准确)是 $\gamma N + NX'$ ，这两段角度分别在两条不同的轨道上。通过行星的真位 x' 垂直画一条黄

经线，在黄道上交于 x'' ，那么 $\gamma x''$ 就是黄经。

虽然 VSOP82 及 VSOP87 方法已在天文文献上发表，但这些理论数据仅保存在磁盘上。经许可，我们在附录 II 中给出 VSOP87 理论的主要周期项。每个星体，其序列标号为 $L_0, L_1, L_2, \dots, B_0, B_1, \dots, R_0, R_1, \dots$ 。

序列 L_0, L_1, \dots 计算黄经 L ；序 B_0, B_1, \dots 计算黄纬； R_0, R_1, \dots 计算距离。

每个水平线下的列表，表示一组周期项，包含四列数字：

1) 序号，这不是计算所必须的，仅是提供一个参考。

2) 三个数字，分别命名为 A, B, C

设 JDE 是标准的儒略日数， τ 是千年数，则表达如下：

$$\tau = (\text{JDE} - 2451545.0) / 365250$$

则每项(表中各行)的值计算公式是： $A \cdot \cos(B + C \cdot \tau)$

如水星的 L_0 表的第 9 行算式为： $1803 \cdot \cos(4.1033 + 5661.3320 \cdot \tau)$

附表 II 中， B, C 的单位是弧度。系数 A 的单位是 10^{-8} 弧度(适用于黄经和黄纬)， 10^{-8} 天文单位(适用于距离)。当系数 A 的数字较小， B 及 C 的小数位数也较少。这样可减少一些无用数字，并不影结果。

对 L_0 表各项取和计算得 L_0 ，对 L_1 表各项取和计算得 L_1 ，其它表类推。按如下算式，可取得行星的 Date 黄道坐标的黄经(单位是弧度)：

$$L = (L_0 + L_1 \tau + L_2 \tau^2 + L_3 \tau^3 + L_4 \tau^4 + L_5 \tau^5) / 10^8 \quad (31.2)$$

用同样的方法继计算 B 和 R 。

到此为止，我们得到行星在动力学 Date 平黄道坐标(Bretagnon 的 VSOP 定义的)中的日心黄经 L 、黄纬 B 。这个坐标系与标准的 FK5 坐标系还有细微差别，详见第 20 章。按如下方法可将 L 和 B 转到 FK5 坐标系中，其中 T 是世纪数， $T = 10\tau$ 。

先计算： $L' = L - 1^\circ.397 \cdot T - 0.00031 \cdot T^2$

然后计算 L 和 B 的修正值：

$$\Delta L = -0''.09033 + 0''.03916 * (\cos(L') + \sin(L')) * \tan(B) \quad (31.3)$$

$$\Delta B = +0''.03916 * (\cos(L') - \sin(L'))$$

仅在十分精确计算时才需进行修正, 如果按附表 II 提供的序列进行计算, 则无需修正。

如何得到行星的地心坐标, 将在第 32 章中叙述。

例 31.a ——计算金星的日心坐标, 时间 1992 年 12 月 20 日 0 时(力学时)。

该日期转为儒略日数是: JDE 2448976.5

这样可得: $\tau = -0.007032169747$

对于金星, 附表 II 中, 其序列 L0 有 24 项(在原 VSOP87 理论中有很多很多项), L1 有 12 项, L2 有 8 项, L3 及 L4 各有 3 项, L5 有 1 项。这些序列取和计算后得到:

$$L0 = +316 \ 402 \ 122 \ L3 = -56$$

$$L1 = +1021 \ 353 \ 038 \ 718 \ L4 = -109$$

$$L2 = +50055 \ L5 = -1$$

因此, 由 [31.2](#) 式即可得到金星的日心黄经

$$L = -68.6592582 \text{ 弧度} = -3933°.88572 = +26°.11428$$

用同样的方法计算日心黄纬 B 及距离。这时金星没有 B5 及 R5 表项。计算结果是:

$$B = -0.0457399 \text{ (弧度)} = -2°.62070, \ R = 0.724603 \text{ (AU)}$$

结果的精度

当我们要取得更高精度时, VSOP87 方法收敛得很慢。当我们截取部分序列进行计算时, 那么产生的误差的数量级是多少呢?

以下经验已经由 Bretagnon 和 Francou 结出:

如果 n 是保留项数, A 是保留项中最小的值, 那么当前截断的序列的误差为:

$$\eta * \sqrt{n} * A, \text{ 式中 } \eta \text{ 小于 } 2, \sqrt{} \text{ 是开方函数}$$

举例来说, 让我们来考虑一下水星的日心黄经。在附表 II 中, 其 L₀ 包含 38 项, 最小系数是 $100 * 10^{-8}$ 弧度。因此, 我们可以估计其最大可能误差约为:

$$2*\sqrt{38}*100*10^{-8} \text{ 弧度} = 2''.54$$

当然序列 L1、L2 等也有截断误差，分别为 $0''.41*\tau$ 、 $0''.08*\tau^2$ 等。

第三十二章 椭圆运动

[许剑伟 翻译于家里 2008-04-03]

本章将描述椭圆轨道的地心坐标计算方法。第一种方法，从地球或其它主行星的日心黄道坐标取得它们的地心黄经及地心黄纬；第二种方法，比较适合小行星及周期彗星，直接获得赤经赤纬；本章使用了太阳的地心直角坐标(见第 25 章)。

第一种方法：

我们描述给定某时刻的主行星的视赤经及赤纬的计算方法。

对于给定的时刻，通过附表 II 中的相应的序列，使用 31 章描述的方法得到行星的日心坐标 L、B、R 以及地球的日心坐标 L_0 、 B_0 、 R_0 。此时不要把 Date 黄道分点坐标转到 FK5 黄道坐标。

然后有：

$$x=R \cos(B) \cos(L) - R_0 \cos(B_0) \cos(L_0) \quad (32.1)$$

$$y = R \cos(B) \sin(L) - R_0 \cos(B_0) \sin(L_0)$$

$$z = R \sin(B) - R_0 \sin(B_0)$$

行星的地心黄经 λ 及黄纬 β 就是：

$$\tan(\lambda)=y/x \quad (32.2)$$

$$\tan(\beta)=z/\sqrt{x^2+y^2}$$

要处理好 λ 的象限。使用两参数函数 ATN2，即 C 语言中的 atan2()， $\lambda=\text{ATN2}(y, x)$ 计算 λ ，或者使用第 1 章的关于“正确象限”中的方法。

然而，用这种方法得到的 λ 和 β 是地心 Date 黄道分点坐标的。如果是高精度计算，必需计算因光速有限引起的视

位置偏移，这个偏移包括：

(a) 光行时间引起的偏移：当我们看到行星的光线时，该光线已经离开行星一段时间了。

(b) 地球运动引起的偏移：地球运动速度与光速矢量合成引起的视位置偏移，就象恒星的周年光行差。

以上两项合并，常称为行星光行差。然而，我们宁可保留“光行差”一词给(b)，因为(b)的效果与恒星光行差是一样的。此外，有些应用中我们无须考虑(b)。假设我们要计算行星引起的恒星星蚀，光行时就需要考虑，而此时如果忽略了恒星的周年光行差，那么行星的(b)的偏移效果也应忽略。类似的，在这种特殊情况下，章动对恒星及行星的影响也可同时忽略。理由是明显的：周年光行差及章动对二者的影响是相同的，并不改变他们的相对位置。

关于(a)及(b)的具体计算：

(a) 光行时引起的位置偏移效果：在某时刻 t ，我们看到的星体是它在 $t-\tau$ 时的位置，因此我们获得的方向是 t 时刻地球位置到 $t-\tau$ 时刻行星位置连线方向，式中 τ 是光线从行星到达地球所需的时间。这个时间可由下式计算：

$$\tau = 0.0057755183 * \Delta \text{ 日}$$

式中 Δ 是行星到地球的距离，单位是天文单位。

$$\Delta = \sqrt{x*x + y*y + z*z}$$

(b) 是恒星光行差引起的偏移效果。也就是式 [22.2](#) 式，式中 θ 等于 $Lo \pm 180^\circ$ 。

然而，以上两种效果可以同时计算。对于一阶精度，我们站在地心看到星体运动，地球则是静止的，这样 t 时刻我们总是看么 $t-\tau$ 时刻的星体位置，换句话说， $t-\tau$ 时行星的真位置方向就是 t 时刻的视位置， $t-\tau$ 时的行星位置与地心连线就是视位置方向，注意，由于地球静止， t 时与 $t-\tau$ 时刻地心位置不变，都是 0。利用伽利略变换再扩展：不管变换到那个坐标系， $t-\tau$ 时的地心位置与 $t-\tau$ 时刻的行星位置的连线方向就是 t 时刻的地心视位置方向。

当然，光行时 τ 的值无法马上取得，因为地球到行星的距离 Δ 未知。但是，这个距离可以通过迭代法取得。即先令 $\Delta=0$ (即 $\tau=0$)，然后使用前几章的方法算出距离。

要把行星的地心黄经 λ 及黄纬 β 从把动力学地心 Date 黄道分点坐标转到 FK5 黄道分点坐标中，如果需要高精度的计算，应使用 31.3 式进行转换，注意把 L 换为 λ ， B 换为 β 。

为了完成行星视位置计算，还应进行章动计算。使用第 21 章的方法计算得到黄经章动 $\Delta\Psi$ 及交角章动 $\Delta\epsilon$ ，在地心黄经中加入 $\Delta\Psi$ ，在黄赤交角中加入 $\Delta\epsilon$ 。接下来就可以使用 [12.3](#) 及 [12.4](#) 式推导出地心视赤经及视赤纬。

Ψ 是行星的距角，即地心看行星与太阳的角距离，用下式计算：

$$\cos(\Psi) = \cos(\beta) * \cos(\lambda - \lambda_{\odot})$$

式中 λ 、 β 是行星的视黄经及黄纬， λ_{\odot} 是太阳的视黄经。太阳的黄纬总时小于 1.2 角秒，要以忽略。

例 32. a ——计算金星的视位置。时间 1992 年 12 月 20 日 12 日 0 日 (TD = DE 2448976.5)

解：

因为行星到地球距离未知，所以光行时未知。不过我们可先计算此时行星的真几何位置。我们得到如下日心坐标 (详见例 31. a)：

$$L = 26^{\circ}.11428 \quad B = -2^{\circ}.62070 \quad R = 0.724603$$

用同样的方法计算地球的坐标：

$$L_{\odot} = 88^{\circ}.35704 \quad B_{\odot} = +0^{\circ}.00014 \quad R_{\odot} = 0.983824 \quad (A)$$

因此，由 [32.1](#) 式、32.4 式及 32.3 式得：

$$x = +0.621746 \quad \Delta = 0.910845$$

$$y = -0.664810 \quad \tau = 0.0052606 \text{ 日}$$

$$z = -0.033134$$

Δ 是 1992 年 12 月 20.0 日金星到地球的真距离。我们现在重新计算 $t-\tau$ 时刻金星的日心坐标，即 JDE = 2448976.5 -

0.0052606。

我们得到：

$$L = 26^\circ.10588, B = -2^\circ.62102, R = 0.724604 \text{ (B)}$$

联合(A)的 L_0 、 B_0 、 R_0 值，再次计算 x 、 y 、 z 等的值：

$$x = +0.621794$$

$$y = -0.664905 \text{ (C)}$$

$$z = -0.033138$$

译者注：这组 x 、 y 、 z 就是 $t-\tau$ 时的行星位置，并且是相对于地球 t 时刻位置描述行体位置的，而不是相对于地球 $t-\tau$ 而言的，所以不含周年光行差，具体可自行作图理解。

得到 $t-\tau$ 时刻的位置后，可重新计算一下距离用光行时 τ ：

$$\Delta = 0.910947$$

$$\tau = 0.0052612 \text{ 日}$$

如果再次重复上述过程，在以上的计算控制的有效位数精度下，计算结果已不再变化。

因此，最后得到 1992 年 12 月 20 日 0 时金星的光行时是 $\tau = 0.0052612$ 日，视距离是 $\Delta = 0.910947$ 。这个距离是星体发出的光被我们看到时，光线传播的距离。

让我们计算金星的地心黄经及黄纬。把(C)中的 x 、 y 、 z 代入 [32.2](#) 式，得到：

$$\lambda = 313^\circ.08102 \quad \beta = -2^\circ.08474$$

式中已修正了光行时，但未修正周年光行差。

由第 22 章，我们得到：

$$e = 0.016711573$$

$$\pi = 102^\circ.88675$$

再由 [22.2](#) 式， $\theta=180^\circ+L_0$ ，算得：

$$\Delta\lambda = -14''.868 = -0^\circ.00413$$

$$\Delta\beta = -0''.531 = -0^\circ.00015$$

这样，视黄经及黄纬（未进行章动修正）是：

$$\lambda = 313^\circ.08102 - 0^\circ.00413 = 313^\circ.07689$$

$$\beta = -2^{\circ}.08474 - 0^{\circ}.00015 = -2^{\circ}.08489$$

此外，我们也可以一次性修正光行时及光行差。当然，这时我们就需要计算 $t-\tau$ 时刻的地球坐标：

$$L_{\odot} = 88^{\circ}.35168, \quad B_{\odot} = +0^{\circ}.00014, \quad R_{\odot} = 0.983825$$

现在联合(B)中的行星坐标，通过 [32.1](#) 及 [32.2](#) 式得到：

$$x = +0.621702 \quad \lambda = 313^{\circ}.07687$$

$$y = -0.664903 \quad \beta = -2^{\circ}.08489$$

$$z = -0.033138$$

最后得到的经纬度非常接近前面的计算结果了。

转到 FK5 坐标系，可利用 [31.3](#) 式：

$$\Delta\lambda = -0''.09027 = -0^{\circ}.00003$$

$$\Delta\beta = +0''.05535 = +0^{\circ}.00001$$

所以改正后的值是：

$$\lambda = 313^{\circ}.07689 - 0^{\circ}.00003 = 313^{\circ}.07686$$

$$\beta = -2^{\circ}.08489 + 0^{\circ}.00001 = -2^{\circ}.08488$$

用第 21 章的公式计算章动：

$$\Delta\Psi = +16''.749, \quad \Delta\varepsilon = -1''.933, \quad \varepsilon = 23^{\circ}.439669$$

λ 加入黄经章动后：

$$\lambda = 313^{\circ}.07686 + 16''.749 = 313^{\circ}.08151$$

最后，利用 [12.3](#) 式用 [12.4](#) 式，得视赤经及视赤纬：

$$\alpha = 316^{\circ}.17291 = 21^{\text{h}}.078194 = 21^{\text{h}} \ 04^{\text{m}} \ 41^{\text{s}}.50$$

$$\delta = -18^{\circ}.88802 = -18^{\circ}53' \ 16''.9$$

使用 VSOP87 准确计算的结果是：

$$\alpha = 21^{\text{h}} \ 04^{\text{m}} \ 41^{\text{s}}.454$$

$$\delta = 18^{\circ}53' \ 16''.84,$$

$$R = 0.91084596。$$

第二种方法：

这里，我们使用轨道要素，涉及 J2000.0 黄道分点球面

坐标、太阳的 J2000.0 黄道分点地心直角坐标 X 、 Y 、 Z 。这些直角坐标可取自天文年历，或者使用第 25 章的方法计算。

在这个方法中，不计算星体（小行星或周期彗星）的日心经度及纬度。相反，我们计算它们的日心直角分点坐标 x 、 y 、 z ，之后使用简单的公式推导出赤经、赤纬及其它量。

已下的轨道要素假设是已知的。比如，它们可以从 IAU 组织取得。

a = 半长轴

e = 离心率

i = 轨道倾角

ω = 近点参数

Ω = 升交点经度

n = 平运动，度/日

式中 i 、 ω 、 Ω 是标准分点起算的。

如果 n 未知，可以使用下式计算：

$$a = q/(1-e), \quad n = 0.9856076686/\sqrt{a^3} \quad (32.6)$$

式中 q 是近点的距离，单位是 AU。第二式中的数值是高斯引力常数 0.01720209895 由弧度转为度的值。

严格的说，对于给定的时刻（即历元），以上所有的要素是有效的。在行星摄动的影响下，这些要素随时间变化（详见本章后面的部分，关于密切椭圆要素）。除非高精度要求，在几个星期甚至几个月内，这些要素可以认为是不变的。例如，在整个彗星的可见时期。

除了上面提到的轨道要素，还有该时刻(历元)的平近点角 M_0 （或者通过近点的时间 T ）。这样就可以计算任意时刻的平近点角 M ；平近点角每日增加 n 度，在 T 时刻 $n=0$ 。

当给出了小行星或周期慧的轨道要素，可用以下方法计算给定日期的地心坐标。首先，我们须计算三个量 a 、 b 、 c 及角度 A 、 B 、 C ，这是给定轨道相关的常数。

设 ε 是黄赤交角。如果轨道要素涉及 J2000.0 标准分点坐标，则 $\varepsilon_{2000}=23^{\circ}26'21''.448$ ，由此算得：

$$\sin(\epsilon) = 0.39777716$$

$$\cos(\epsilon) = 0.91748206$$

接下来计算：

$$F = \cos(\Omega)$$

$$G = \sin(\Omega) * \cos(\epsilon)$$

$$H = \sin(\Omega) * \cos(\epsilon)$$

$$P = -\sin(\Omega) * \cos(i)$$

$$Q = \cos(\Omega) * \cos(i) * \cos(\epsilon) - \sin(i) * \sin(\epsilon) \quad (32.7)$$

$$R = \cos(\Omega) * \cos(i) * \sin(\epsilon) + \sin(i) * \cos(\epsilon)$$

作为验证，我们可以作个关联计算：

$F^2 + G^2 + H^2 = 1$, $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$ 。当然，这个计算不是程序所必须的。

接下来，a、b、c、A、B、C 的值就可得到：

$$\tan(A) = F/P, \quad a = \sqrt{F^2 + P^2}$$

$$\tan(B) = G/Q, \quad b = \sqrt{G^2 + Q^2} \quad (32.8)$$

$$\tan(C) = H/R, \quad c = \sqrt{H^2 + R^2}$$

a、b、c 值是正数值，角 A、B、C 则应置于正确的象限，按如下规则计算：

$\sin(A)$ 与 $\cos(\Omega)$ 同号

$\sin(B)$ 、 $\sin(C)$ 与 $\sin(\Omega)$ 同号

不过我们可以使用二参数的反正切函数，在程序设计语言中有这个函数： $A = \text{ATN2}(F, P)$

注意：上面的这个 a 不是指轨道半长径。

对每个需要计算的位置，先算出星体的平近点角 M，偏近点角 E(见第 29 章)，真近点角 v (见 [29.1](#) 式) 及距离 r (见 [29.2](#) 式)。那么，该星体的日心直角赤道坐标是：

$$x = r * a * \sin(A + \omega + v) \quad 32.9$$

$$y = r * b * \sin(B + \omega + v)$$

$$z = r * c * \sin(C + \omega + v)$$

当我们需要星体的多个位置时，这组公式是完备的。辅助量 a、b、c、A、B、C 仅集合了 i、 Ω 、 ϵ ，是整个星历的常

数。对于每个位置，仅 v 、 r 需要计算。然而，应注意，仅
在无摄动时 i 、 Ω 、 ε 才是常数。

对同一时刻，计算其日心直角坐标 X 、 Y 、 Z （见第 25 章），
或从天文年历中取得。那么，行星或慧星的地心赤经及赤纬
按如下计算出：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= (Y+y)/(X+x) \\ \Delta^2 &= (X+x)^2 + (Y+y)^2 + (Z+z)^2 \quad (32.10) \\ \sin(\delta) &= (Z+z)/\Delta\end{aligned}$$

式中 Δ 是地球到这个位置的距离。 α 的正确象限根据
 $\sin(\alpha)$ ，它与 $(Y+y)$ 同号，不过，和前面的一样，可使用二
参数的反正切函数计算： $\alpha = \text{ATN2}(Y+y, X+x)$ 。

如果 α 是负数，请加上 360 度。然后把 α 除以 15，把角
度转为时角。

星体的赤道坐标 α 、 δ 涉及的坐标，它与太阳的直角坐
标 X 、 Y 、 Z 及轨道要素使用同样的标准分点，只不过使用上
述方法得到的星体位置坐标 α 、 δ 是地心系统坐标。和本章
的“第一种方法”一样，光行时效果是必须计算的，可按如
下方法执行计算。

对于给定的时间 t ，按以上描述的方法计算星体到地球
之间的距离 Δ ，用 32.3 式计算光行时 τ 。重新计算 $t-\tau$ 时刻
的 M 、 E 、 v 、 x 、 y 、 z ，但保持太阳的坐标 X 、 Y 、 Z 不变。 x 、
 y 、 z 代入 32.10 式，即得 α 、 δ 。

当只计算光行时修正时，也就是说不修正光行差及章
动，那么得到的 α 、 δ 称作“天文测量赤经、赤纬”。行星或
慧星的“天文测量位置”是相对于星库中的恒星平位置的而
言的方向（已修正了自行及周年视差）。当然 α 、 δ 是地心坐
标。

星体距角 Ψ （星体-地-日），及相位角 β （日-星体-地），
由下式计算：

$$\cos(\Psi) = ((X+x)X + (Y+y)Y + (Z+z)Z) / (R\Delta) = (R^2 + \Delta^2 - r^2) / (2R\Delta) \quad (32.11)$$

$$\cos(\beta) = ((X+x)x + (Y+y)y + (Z+z)z) / (r\Delta) = (r^2 + \Delta^2 - R^2) / (2r\Delta) \quad (32.12)$$

式中 $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ = 日地距离。角度 Ψ 、 β 都在 0 到 180 度之间。当然，不要混淆上式的 R 与 32.1 式中的 R 及 32.7 式中的 R

星体的星等计算如下。对于慧星，总星等一般由下式计算：

$$m = g + 5 \cdot \log(\Delta) + k \cdot \log(r) \quad \dots\dots 32.13 \text{ 式}$$

式中 g 是视星等， k 是常数（不同慧星 k 的值不一样），通常 k 的值在 5 到 15 之间。

对于小行星，IAU 的 Comission20 给出了新的星等系统 (New Delhi, November 1985)。小行星的星等的估计公式是：
星等= $H+5 \cdot \log(r \cdot \Delta) - 2.5 \cdot \log[(1-G) \cdot \Phi_1 + G \cdot \Phi_2]$ (32.14)

式中：

$$\Phi_1 = \exp[-3.33 \cdot \tan(\beta/2)^{0.63}]$$

$$\Phi_2 = \exp[-1.87 \cdot \tan(\beta/2)^{1.22}]$$

其中 β 是相位角，“exp”是指数函数。当 $0^\circ \leq \beta \leq 120^\circ$ 时 (32.14) 式才是有效的。 H 和 G 是星等参数（每个小行星的 H 和 G 是不相同的）。 H 是绝对可视星等， G 是“斜率参数”。
以下是较亮的小行星及一些不常用星体的 H 、 G 值：

		H	G			H	G
1	Ceres	3.34	0.12	15	Eunomia	5.28	0.23
2	Pallas	4.13	0.11	18	Melpomene	6.51	0.25
3	Juno	5.33	0.32	20	Massalia	6.50	0.25
4	Vesta	3.20	0.32	433	Eros	11.16	0.46
5	Astraea	6.85	0.15	1566	Icarus	16.4	0.15
6	Hebe	5.71	0.24	1620	Geographos	15.60	0.15
7	Iris	5.51	0.15	1862	Apollo	16.25	0.09
8	Flora	6.49	0.28	2060	Chiron	6.0	0.15
9	Metis	6.28	0.17	2062	Aten	16.80	0.15

公式 (32.13) 和 (32.14) 中，到太阳的距离 r 及到地球距离 Δ 用天文单位，并且式中所有的对数计算均以 10 为底。

例 32. b: ——计算周期彗星 Encke 的地心坐标, 时间:
1990 年 10 月 6.0 TD, 使用以下轨道要素 (见例 23. b):

$$T = 1990 \text{ 年 } 10 \text{ 月 } 28.54502 \text{ TD}$$

$$a = 2.2091404 \text{ AU}$$

$$e = 0.8502196$$

J2000.0 黄道分点坐标下的:

$$i = 11^\circ.94524$$

$$\Omega = 334^\circ.75006$$

$$\omega = 186^\circ.23352$$

解:

首先计算轨道的辅助常数:

$$F = +0.90445559 \quad P = +0.41733084$$

$$G = -0.39136830 \quad Q = +0.72952209$$

$$H = -0.16967893 \quad R = +0.54187867$$

因此, 利用 [32.8](#) 式得:

$$A = 65^\circ.230615 \quad a = 0.99609485$$

$$B = 331^\circ.787680 \quad b = 0.82787174$$

$$C = 342^\circ.613052 \quad c = 0.56782342$$

轨道半长轴 $a=2.2091404$ 已知, 则由 [32.6](#) 式的第 2 式算出 $n=0.300171252$ 度/日。

对于给定的时间(1990 年 10 月 6.0), 从近日点起算, 时间是 -22.54502 日。因此, 平近点角是:

$$M = -22.54502 \times 0.300171252 = -6^\circ.767367$$

那么, 我们得到:

$$E = -34^\circ.026714 \quad x = +0.2508066$$

$$v = -94^\circ.163310 \quad y = +0.4849175$$

$$r = 0.6524867 \quad z = +0.3573373$$

同时刻, 太阳的 J2000.0 标准分点地心直角赤道坐标使用 VSOP87 行星理论计算结果是:

$$X = -0.9756732, \quad Y = -0.2003254, \quad Z = -0.0868566$$

从而得： $\Delta = 0.8243689$ ，光行时 $\tau = 0.00476$ 日。

重新计算 $t-\tau$ 时刻慧星的位置，即 1990 年 10 月 5.99524 时刻。我们得到：

$$M = -6^\circ.768796$$

$$E = -34^\circ.031552 \quad x = +0.2509310$$

$$v = -94^\circ.171933 \quad y = +0.4849477$$

$$r = 0.6525755 \quad z = +0.3573712$$

及：

$$X+x = -0.7247422$$

$$Y+y = +0.2846223$$

$$Z+z = +0.2705146$$

$$\Delta = 0.8242811$$

由此，我们计算出天文赤经、天文赤纬及距角：

$$\alpha_{2000} = 158^\circ.558965 = 10^{\text{h}} 34^{\text{m}} 14^{\text{s}}.2$$

$$\delta_{2000} = +19^\circ.158496 = +19^\circ.09'31''$$

$$\Psi = 40^\circ.51$$

密切轨道要素注意点

“平”轨道要素（如第 30 章给出的主行星的轨道要素），指“平”参考轨道的要素。它们是缓慢变化的轨道。

然而，对于周期慧星及数以千计的小行星，没有平轨道要素可以计算。相反，轨道要素的计算是用给定的历元时刻的“瞬时”轨道进行计算，这种“瞬时”轨道也叫作“密切轨道要素”（或叫“勿切轨道要素”）。并且，有效的“瞬间”就是密切历元。

[某一历元时刻的密切要素是指无摄动的椭圆轨道要素，这个椭圆轨道是密切轨道，是突然不受摄动的轨道，此刻不受摄动的瞬时位置和速度等于此刻它受到摄动情况下的瞬时位置和速度。因此，密切要素包含了其它行星摄动影响（中国话：受其它星体摄动，密切要素不断改变），所以，密切要素与平要素不同，它是周期变化的。]

平要素变化缓慢（例如：火星平轨道离心率在 1900 年是 0.09331，在 2000 年是 0.09340），密切要素变化则比较快，不过不会造成平要素改变。

作为一个例子，让我们给出下列 Ceres 小行星的两个历元的密切要素（仅 200 天）。这些要素取自 Leningrad 小行年历。 i 、 ω 、 Ω 涉及 1950.0 标准分点坐标。

历元(TD):	1980-12-27.0	1981-7-15.0
半长轴(AU):	$a = 2.7663951$	$a = 2.7671238$
离心率:	$e = 0.0772343$	$e = 0.0774937$
倾角(度):	$i = 10.59878$	$i = 10.59815$
近点参数(度):	$\omega = 73.89555$	$\omega = 73.90189$
升交点黄经(度):	$\Omega = 80.10259$	$\Omega = 80.09660$
平近点角(度):	$M = 319.23914$	$M = 2.08133$
平运动(度/天):	$n = 0.21420655$	$n = 0.21412194$

从 1980 年 12 月 27 日到 1987 年 7 月 15 日，“瞬时轨道”的半长轴增加了 0.00073AU；然而，我们不能由此推断说在这 200 天里，Ceres 小行星到太阳的平距离增加了 109000 千米。

在 1980 年 12 月 27 日，Ceres 的瞬时周期是 1680.62 日（用 360 度除以 n 得到）；200 天后，周期增加为 1681.28 日。

海王星供了一个很好的例证。目前，它的平轨道离心率是 0.0090，而密切轨道的离心率：在 1964 年 11 月达到了最大值 0.0124，在 1970 年 10 月达到一个最小值 0.0039，另一个最大值 0.0122 则在 1976 年 12 月，等等。这些快速的变化并不令人吃惊的：海王星的密切轨道涉及了太阳的位置和速度，太阳本身围绕太阳系中心振动（主要是大行星木星、土星的运动引起的），因此如果以太阳系中心（不是太阳）计算海王星的轨道要素，那么轨道要素的变化就会小很多。

周期彗星及小行星的精确星历可以使用数值积分方法计算取得，这时，密切轨道要素则可为这种计算供初始值。

密切要素可以用于计算密切历元的实际位置及运动，也

计算星历时，使用无摄动的密切轨道，将产生误差，为了使我们对这种误差积累有个认识，我们使用以上提到的 Ceres 的 1981 年 7 月 15 日的密切要素。对于 Ceres 的日心黄经，使用这里的“无摄”方法计算，再与 Duncombe 的精确结果比较，我们发现，在该历元的 280 天后，误差小于 $9''$ ，在最初的 40 天，误差小于 $40''$ ，180 天后达到最大值 $8''$ ，但再往后几个月，误差达到一个很大的负值：

$$\Delta\lambda(\text{角秒}) \quad 0+1 \quad +3 \quad +5 \quad +7 \quad +7 \quad +3 \quad -8 \quad -26 \quad -52 \quad -86$$

$\Delta\lambda$ 更远期的变化在下图中显示。图中的波动曲线描述了误差随时间变化的关系。所以，在这一特殊情况下，误差不是持增长的（而波动增长）。我们得到如下更远期的 Ceres 的黄经误差值：

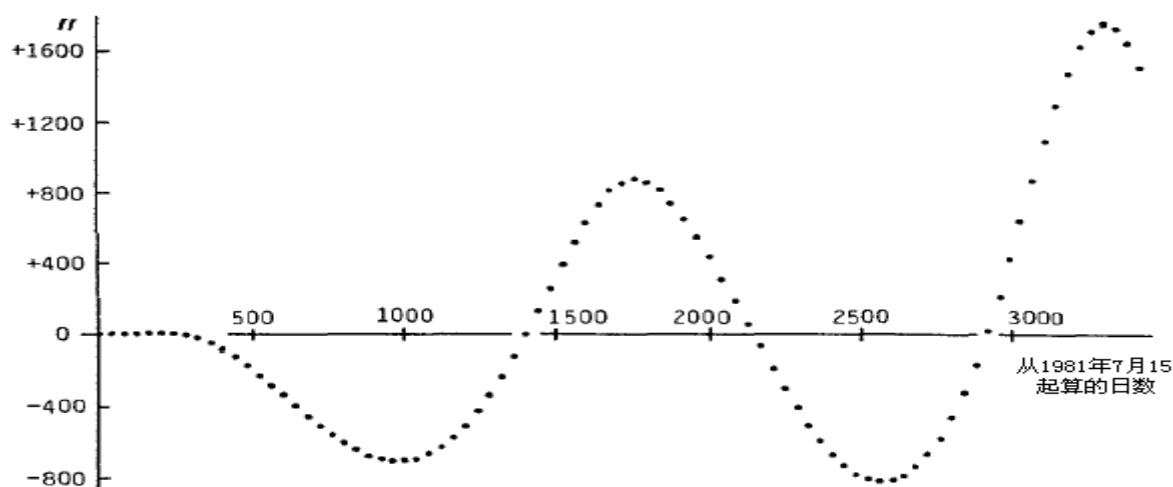
1982 年 1 月 +8"

1984 年 3 月中旬 -708"

1986 年 5 月中旬 -864"

1988 年 7 月 -825"

1990 年 8 月 +1754"



此图是：用密切密要素，并且忽略摄动，计算出的黄经的误差 $\Delta\lambda$ 随时间变化的曲线。

$\Delta\lambda$ 的单位是：角秒

横坐标：1981 年 7 月 15.0 起算的日数

数据点的间隔 40 天。

关于中心方程

如果离心率比较小，解第 29 章的开普勒方程可以使用 [29.1](#) 式，那么，关于 C （即 $v-M$ ）的中心方程，可以使用以下关于 e 和 M 的多项式直接计算：

$$C = (2e - e^3/4 + 5/96e^5) \sin M + (5/4e^2 - 11/24e^4) \sin 2M + (13/12e^3 - 43/64e^5) \sin 3M + (e^4 * 103/96) \sin 4M + (1097/960e^5) \sin 5M$$

结果表达为弧度单位，乘上 $180/\pi$ 或 57.29577951 后可转为度单位。此公式推导自一个级数展开式，在 e 的 5 次方之后截断。因此该式适合于小离心率。如果离心率很小，那么 e 的 4 次方及 5 次方项可以忽略。

最大误差为：

e 的值	算到 e^4 (")	忽略 e^4 和 e^5 (")
0.03	0.0003	0.24
0.05	0.007	1.8
0.10	0.45	30
0.15	5	152
0.20	29	483
0.25	111	1183
0.30	331	2456

还有一个距离的展开式，保留到离心率 e 的 5 次方项：

$$r/a = 1 + e^2/2 - (e - 3/8e^3 + 5/192e^5) \cos M - (e^2/2 - e^4/3) \cos 2M - (3/8e^3 - 45/128e^5) \cos 3M - (e^4/3) \cos 4M - (125/384e^5) \cos 5M$$

椭圆轨道上星体的速度

星体在一个无摄动的椭圆轨道上，瞬时移动的速度（千米/秒）是： $V = 42.1219 * \sqrt{1/r - 1/(2a)}$

式中 r 是星体到太阳的距， a 是轨道的半长轴，二者的单位是天文单位。

如果 e 是轨道的离心率，那么在近日点及远日点的速度（千米/秒）分别是：

$$V_p = (29.7847/\sqrt{a}) \sqrt{(1+e)/(1-e)}$$

$$V_a = (29.7847/\sqrt{a}) \sqrt{(1-e)/(1+e)}$$

例 32. c

周期彗星 Halley, 1986 回来的。我们有： $a = 17.9400782$ ， $e = 0.96727426$ ，以上密切要素在历元 1986 年 2 月 19.0TD 时刻严格有效。

解：

对于这个轨道，近日点速度和远日点速度分别：

$$V_p = 54.52 \text{ 千米/秒}, \quad V_a = 0.91 \text{ 千米/秒}$$

在与太阳距离 $r=1\text{AU}$ 时，该彗星的速度是 $V = 41.53$ 千米/秒。

椭圆轨道的长度(周长)

有个精确的椭圆面积公式（面积= πab ），却没有一个有限项的普通函数精确表达椭圆的周长 L 。在下面式中， e 是椭圆的离心率， a 是半长轴， b 是半短轴， $b=a*\sqrt{1-e^2}$ 。

1、Ramanujan 在 1914 年给出了一个近似公式： $L = \pi(3(a+b) - \sqrt{(a+3b)*(3a+b)})$

当 $a=b$ 时（正圆时），误差为零。 $e=1$ 时（无限偏的椭圆），误差为 0.4155%。

2、另一个有趣的计算椭圆周长的方法：设 A 、 G 和 H 分别是半长轴 a 和半短轴 b 的算术平均、几何平均、调和平均，即：

$$A = (a+b)/2$$

$$G = \sqrt{a \cdot b}$$

$$H = 2 \cdot a \cdot b / (a + b)$$

$$\text{那么有: } L = \pi (21A - 2G - 3H) / 8$$

当 $e < 0.88$ 时误差 $< 0.001\%$, 当 $e < 0.95$ 时误差 $< 0.01\%$ 。

但是, 当 $e = 0.997$ 时误差 1% , 当 $e = 1$ 时误差 3% 。

3、一个级数展开公式: 下式中:

$$P_n = [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) / (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n)]^2$$

$$L = 2\pi a (1 - P_2 e^2 / 1 - P_4 e^4 / 3 - P_6 e^6 / 5 - \dots)$$

括号内的表达式的值是:

$$e = 0.05 \text{ 时, } 0.99937$$

$$e = 0.10 \text{ 时, } 0.99750$$

$$e = 1.00 \text{ 时, } 0.63662 = 2/\pi$$

4、收敛更快的公式, 下式中 $m = (a-b)/(a+b)$

$$L = 2\pi a / (1+m) (1 + P_2 e^2 / 1^2 + P_4 e^4 / 3^2 + P_6 e^6 / 5^2 + P_8 e^8 / 7^2 + \dots)$$

例 32. d: 周期彗 Halley。使用 1986 年回归的要素 (见例 32. c), 我们得到轨道周长是 $77.07 \text{ AU} = 11530$ 百万千米。

第三十三章 抛物线运动

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 27 日]

在本章, 我们将给出彗星围绕太阳做抛物线运动的位置计算公式。我们将假设轨道要素是不变的 (不受行星的摄动), 这些要素涉及历元 (如 2000. 0) 标准分点坐标。

假设以下轨道要素已知:

T = 通过近点的时间

q = 近点距离, 单位 AU

i = 倾角

ω = 近点参数

Ω = 升交点黄经

首先, 计算辅助常数 A 、 B 、 C 、 a 、 b 、 c (如同椭圆轨道

一样), 详见公式(32.7)和(32.8)。那么, 可按如下方法计算慧星位置。

设 $t-T$ 是从近点起算的时间, 单位是日。在近点时刻之前, 这个量是负值。计算:

$$W = (0.03649116245/q^{3/2})(t - T) \quad (33.1)$$

式中的数值常数等于 $3k/\text{sqrt}(2)$, 其中 k 是高斯引力常数 0.01720209895。

那么, 慧星的真近点角和径距离 r 由下式得到:

$$\tan(v/2) = s, \quad r = q(1 + s^2) \quad (33.2)$$

$$\text{式中 } s \text{ 是以下方程的根: } s^3 + 3s - W = 0 \quad (33.3)$$

应注意, 在近日点之前的某一时刻, s 是负值, v 在-180度到 0 度之间。在近日点之后, $s > 0$, v 在 0 到 180 度之间。在经过近点的时刻, $s=0$, $v=0$ 度, $r=q$ 。

求解方程(33.3)的方法有多种, 此方程称为 Barker 方程。

1、用迭代法可轻松解出此方程。这个算法也是笔者的偏好, 因为这个迭代公式很简单, 收敛快速, 也没有涉及三角函数或立方根, 不管 $t-T$ 是正还是负, 计算过程匀有效。

s 的起步值可能任选, 取 $s=0$ 是个良好的选择。 s 的更佳值是:

$$(2s^3 + W)/(s^2 + 1)/3 \quad (33.4)$$

重复计算, 直到取得正确值为止。应当注意, 表达式(33.4)中需计算 s 的立方, 如果 s 是负值, 在有些计算机中是不允许的, 我们不妨用 $s*s*s$ 代替 s^3 。

2、不用迭代法解方程(33.3), s 可由下式直接取得 (J.Bauschinger, Tafeln zur Theoretischen Astronomie, 第 9 页, Leipzig, 1934):

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta &= \frac{2}{W} = 54.807791 \frac{q\sqrt{q}}{t-T} \\ \tan \gamma &= \sqrt[3]{\tan \frac{\beta}{2}} \\ s &= \frac{2}{\tan 2\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (33.5)$$

常数54.807791等于 $\frac{2\sqrt{2}}{3k}$ ，其中，k是高斯引力常数

这种方法不需要迭代，但出现了两个问题：

——经过近点时， $t-T$ 等于零，因此 W 也是 0，这样 $2/W$ 就变成无穷大。在这种情况下，可得到瞬时值 $v=0^\circ$ 和 $r=q$ ，但是这种可能出现的问题必需在程序中预防（防分母为零！）。

——在近点之前，我们有 $W<0$ ，因此 $\tan\beta$ 是负值。但是，在这种情况下， $\tan(\beta/2)$ 也是负值，计算机无法计算负值的立方根。在(33.5)的第一式中，用 W 的绝对值代换 W 就可避免这个困难，在计算完成后， s 的符号应取反。

例如，在 BASIC 中，公式(33.1)和(33.3)可按如下编写程序，其中 T 代表近日点起算的天数 $t - T$ ：

```
IF T = 0 THEN
W = 0.03649116245*T/(Q*SQR(Q))
B = ATN(2/ABS(W))
S = 2/TAN(2*ATN(TAN(B/2)^(1/3)))
IF T<0 THEN S = -S
```

3、以下方法是比较简单的，也不使用三角函数。根式下的所有表达式取正值，sqrt3 指开 3 方。

$$G = W/2, \quad Y = \sqrt[3]{G + \sqrt{G^2+1}}, \quad s = Y - 1/Y \quad (33.6)$$

当得到 s 后， v 和 r 可以利用(33.2)式得到，之后的计算如同椭圆运动，使用公式(32.9)和(32.10)，并使用同样的方法考虑光行时。

第一个公式(33.2)得到的 $v/2$ 介于 -90° 到 $+90^\circ$ 之间，这是反正弦函数的区间。所以 v 在 -180° 到 $+180^\circ$ 之间，所在象限也是正确的，所以无需额外的检测。

在抛物线运动中， $e=1$ ，而公转的 a 和周期是无穷大；平日运动是 0，平近点角及偏近点角也不存在(实际上，它们是 0)。

例 33. a: 计算 Helin-Roman(1989s=1989IX) 慧星的真近点角和它到太阳的距离，时间：1989 年 10 月 31.0 TD，使用以下值：

$$T = 1989 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 20.29104 \text{ TD}$$

$$q = 1.3245017$$

这是 B. G Marsden(《小行星通告》NO.16001, 1990 年 3 月 11 日)计算的抛物线轨道要素。

对于这个给定的时刻(1989 年 10 月 31.0)，近点起算的时间则是 $t-T=+71.70896$ 日。因此，由公式(33.1)得：

$$W = +1.71665231$$

起步取 $s=0$ ，利用迭代公式(33.4)，我们依次得到近似值：

$$0.000 \ 0000$$

$$0.572 \ 2174$$

$$0.525 \ 1685$$

$$0.524 \ 2029$$

$$0.524 \ 2025$$

因此， $s=+0.5242025$ ，所以得： $v = +55^\circ.32728$ $r = 1.688459$

如果不使用迭代方法，利用公式(33.6)，我们得到：

$$G = 0.858326155$$

$$Y = 1.295879323$$

$$s = Y - 1/Y = 0.5242025$$

结果和前面的一样。

第三十四章 准抛物线

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 1 日]

离心率为 1 意味着轨道是抛物线；在这种情况下，给定时刻的星体位置容易算出(参见第 33 章)。如果轨道是高离心率的(0.98 到 1.1)，但它不等于 1，要对付它则有些麻烦了。离心率大于 1 意味着轨道是双曲线。

德国天文学家 Werner Landgraf 给出了一个有趣的 BASIC 程序 [1]，基于 Karl Stumpff 的著作《Himmelsmechanik》卷.I(柏林，1959)。以下，我们给出了 Landgraf 的程序，并作了少量形式上的修改。

首先计算：

$$Q = \frac{k}{2q} \sqrt{\frac{1+e}{q}} \quad \gamma = \frac{1-e}{1+e}$$

式中，k 和前面的一样，是高斯引力常数，e 是轨道离心率，q 是近日点距离(天文单位)。

然后使用迭代法解以下关于 s 的方程：

$$s = Qt - (1-2\gamma)\frac{s^3}{3} + \gamma(2-3\gamma)\frac{s^5}{5} - \gamma^2(3-4\gamma)\frac{s^7}{7} + \dots \quad (34.1)$$

式中 t 是近日点之前(-)或之后(+)的天数。利用真正的抛物线轨道计算出 s [公式(33.1)中的 W 换为 Qt/3] (译者注：原文可能有误，应是 W=3Qt)，把它做为初值代入上式右边，这样的计算将得到改进后的 s，继续迭代，直到 s 停止变化。

一旦 s 值找到后，真近点角 v 和到太阳的距离 r 可由下式计算：

$$\tan \frac{v}{2} = s \quad r = \frac{q(1+e)}{1+e \cos v}$$

地心位置坐标的计算可以用“椭圆运动”和“抛物线运动”相同的方法处理。

以下是 Landgraf 的 BASIC 程序，我们对它做了轻微的修改。它对高离心率的椭圆轨道(e 略小于 1)、精确的抛物线轨道以及轻微双曲线轨道(e 略大于 1)均有效。程序采用弧度制工作。

```
10 P1=4*ATN(1) : R1=180/P1
12 K=0.01720209895
14 D1=10000 : C=1/3 : D=1E-9
16 INPUT "PERIHELION DISTANCE = "; Q
18 INPUT "ECCENTRICITY = "; E0
20 Q1=K*SQR((1+E0)/Q)/(2*Q) : G=(1-E0)/(1+E0)
22 INPUT "DAYS FROM PERIHELION = "; T
24 IF T<>0 THEN 28
26 R=Q : V=0 : GOTO 72
28 Q2=Q1*T
30 S=2/(3*ABS(Q2))
32 S=2/TAN(2*ATN(TAN(ATN(S)/2)^C))
34 IF T<0 THEN S=-S
36 IF E0=1 THEN 66
38 L=0
40 S0=S : Z=1 : Y=S*S : G1=-Y*S
42 Q3=Q2+2*G*S*Y/3
44 Z=Z+1
46 G1=-G1*G*Y
48 Z1=(Z-(Z+1)*G)/(2*Z+1)
50 F=Z1*G1
52 Q3=Q3+F
54 IF Z>50 OR ABS(F)>D1 THEN 78
56 IF ABS(F)>D THEN 44
58 L=L+1 : IF L>50 THEN 78
60 S1=S : S=(2*S*S*S/3+Q3)/(S*S+1)
62 IF ABS(S-S1)>D THEN 60
64 IF ABS(S-S0)>D THEN 40
66 V=2*ATN(S)
68 R=Q*(1+E0)/(1+E0*COS(V))
70 IF V<0 THEN V=V+2*P1
72 PRINT "TRUE ANOMALY = "; V*R1
74 PRINT "RADIUS VECTOR (A.U.) = "; R
76 PRINT : GOTO 22
78 PRINT "NO CONVERGENCE"
80 PRINT : GOTO 22
```

10 行：第一个公式是获得圆周率 π 的技巧。

12 行：高斯常数 k

14 行: $D=10^{-9}$, 用于调节精度, 使用符合计算机的精度。如果需要, 也可以使用 10^{-8} 或 10^{-10} 。

26 行: 当 $t=0$ 时(天体刚好在近日点), 我们有 $r=1$ 和 $v=0$ 度。

36 行: 如果轨道是精确的抛物线, s 的值已经找到。

54 行: 如果公式(34.1)的项数超过 50 项, 或者这些项太大而造成不收敛。

56 行: 只要公式(34.1)的项不够小, 下一个项将被计算。

58 行: 如果 50 次迭后还得不到结果, 必须停止计算。

60 和 62 行: 用迭代法解方程(34.1)。这是一次迭代内部的迭代。

作为一个练习, 试计算以下情况:

数据			结果	
近点距离	离心率	天数	真近点角	到太阳的距离
q (AU)	e	t	v ($^{\circ}$)	r (AU)
0.921 326	1.000 00	138.4783	102.744 26	2.364 192
0.100 000	0.987 00	254.9	164.500 29	4.063 777
0.123 456	0.999 97	-30.47	221.911 90	0.965 053
3.363 943	1.057 31	1237.1	109.405 98	10.668 551
0.587 1018	0.967 2746	20	52.853 31	0.729 116
0.587 1018	0.967 2746	0	0	0.587 1018

在计算了一些情况之后, 你应知道, $|t|$ 越大所需的计算时间开销也越大, e 偏离 1 越大时间开销越大。下表给出了在 HP-85 微机上的一些时间开销以及真近点角 v (已四舍五入) 和迭代的次数 L 。

q	e	t	时间开销(秒)	v	L
0.1	0.9	10	14	126°	17
		20	47	142°	30
		30	不收敛	—	—
0.1	0.987	10	4	123°	7
		20	5	137°	8
		30	6	143°	10
		60	9	152°	12
		100	14	157°	16
		200	28	163°	23
		400	87	167°	38
		500	不收敛	—	—
0.1	0.999	100	3	156°	6
		200	4	161°	7
		500	5	166°	8
		1 000	7	169°	10
		5 000	18	174°	18
1	0.999 99	100 000	2	172°.5	4
		10 000 000	5	178°.41	8
		14 000 000	6	178°.58	9
		17 000 000	7	178°.68	9
		18 000 000	不收敛	—	—

$q=0.1$ 且 $e=0.9$ 时, 当 $t=20$ 日, 所需计算时间是 47 秒。
 $t=30$ 时, 不收敛。

$q=0.1$ 且 $e=0.999$ 时, 当 $t=5000$ 日, 仍没有问题。

$q=1$ 且 $e=0.99999$, 即使 $t=17000000$ 日也没有问题, 这是近日点之后的 465 个世纪, 天体到太阳的距离是 7220 个天文单位(至少在理论上)。

参考资料

1、《天空和望远镜》, 卷 73, 第 535–536 页(1987 年 5 月)

第三十五章 一些行星现象的计算

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 3 日]

有两种不同的基本方法用于计算行星现象, 如金星的最

大距角、火星的“冲”：

(i) 比较行星与太阳的精确位置。

(ii) 使用公式，并采用一些周期项对其修正。

第一种方法有利于得到精确的结果，因为使用了高精度的天体位置坐标。不过，有个不便之处就是，需要有精确的星历表或精确的星历计算。

第二种方法，可以快速的容易的执行任意一年的计算。结果不如第一种方法精确，但对于多数应用来说是足够的，如用于历史研究，甚至可以用于精确计算的首次估值(如迭代计算)。

在本章，我们将提供水星到海王星的几种相对位置关系的公式：与太阳的“冲”、“会合”以及最大距角。

“冲”与“会合”

从表 35. A 中的某一行，可以得到 A、B、 M_0 和 M_1 的值。

设 Y 是某一行星现象的时间估计，表达为带小数的年。使如 1993.0 表示 1993 年的年首，2028.5 表示 2028 年的年中，等等。

表 35. A

事件	A	B	M_0	M_1
水星 内会合	2451612.023	115.877 4771	63.5867	114.208 8742
	2451554.084	115.877 4771	6.4822	114.208 8742
金星 内会合	2451996.706	583.921 361	82.7311	215.513 058
	2451704.746	583.921 361	154.9745	215.513 058
火星 冲	2452097.382	779.936 104	181.9573	48.705 244
	2451707.414	779.936 104	157.6047	48.705 244
木星 冲	2451870.628	398.884 046	318.4681	33.140 229
	2451671.186	398.884 046	121.8980	33.140 229
土星 冲	2451870.170	378.091 904	318.0172	12.647 487
	2451681.124	378.091 904	131.6934	12.647 487
天王星 冲	2451764.317	369.656 035	213.6884	4.333 093
	2451579.489	369.656 035	31.5219	4.333 093
海王星 冲	2451753.122	367.486 703	202.6544	2.194 998
	2451569.379	367.486 703	21.5569	2.194 998

$$JDE_0 = A + k B \quad M = M_0 + k M_1 (\text{度})$$

整数 k 接近于: $(365.2425Y + 1721060 - A)/B$ (35.1)
 应注意, k 必须是整数, 非整数是无意义的。依次 k , 依次对应相应事件日期。 $k=0$, 对应 2000 年 1 月 1 日之后第一个, 2000 年之前 k 为负值。(其实 $365.2425 \times 2000 + 1721060 = 2451545$)。

然后计算: $JDE_{\circ} = A + kB$, $M = M_0 + kM_1$

JDE_{\circ} 是儒略历书日, 对应行星“平相对位置(看做匀速圆周运动)”的发生时间, M 是此刻地球的平近点角。

接下来计算 M 、 a 、 L 、 c 、 d 、 e 、 g 等角度, 用于周期项计算。

M 是带小数点的角度, 单位是度。根据计算机或程序设计语言的需要, 可以转到 0 到 360 度(通过加上或减去 360 度的整倍数), 还可以转到弧度制。

T 是 2000 年起算的儒略世纪数: $T = (JDE_{\circ} - 2451545)/36525$, 公元 2000 之后, T 为正, 之前为负。

对于木星到海王星, 还需计算以下几个角度:

$$\begin{aligned} \text{木星: } a &= 82.74 + 40.76 T \\ &a = 82.74 + 40.76 T \\ \text{土星: } L &= 29.86 + 1181.36 T \\ &c = 14.13 + 590.68 T \\ &d = 220.02 + 1262.87 T \\ \text{天王星: } e &= 207.83 + 8.51 T \\ &f = 108.84 + 419.96 T \\ \text{海王星: } e &= 207.83 + 8.51 T \\ &g = 276.74 + 209.98 T \end{aligned}$$

真相对位置发生时间 JDE 是: “平时间” JDE_{\circ} + 周期项修正量。这些修正量详见表 35.B, 是关于角度 M 的周期项的和。由于行星轨道的世纪变化, 周期项系数随时间缓变化, 因此表中存在 T 和 T 的平方项。

例如, 水星的内会合, 修正量是:

$$\begin{aligned}
&+ 0.0545 + 0.0002T \\
&+ (-6.2008 + 0.0074T + 0.00003T^2) \sin M \\
&+ (-3.2750 - 0.0197T + 0.00001T^2) \cos M \\
&+ (0.4737 - 0.0052T - 0.00001T^2) \sin 2M + \text{等等} \dots
\end{aligned}$$

这种方法得到的已修正的时间，其一个儒略历书日 (JDE)，因此是力学时尺度。可以减去 ΔT (单位是天，参见第 9 章) 转为基于 UT 时的标准儒略日 (JD)。不过，在公元 1500 到 2100 年， $-\Delta T$ 可以忽略。

最后，利用标准程序 (见第 7 章)，可以把 JD 转为日期格式。

例 35. a ——计算 1993 年 10 月 1 日附近，水星的内会合。

由表 35. A 的水星内会合部分，我们有：

$$A = 2451612.023$$

$$B = 115.8774771$$

$$M_0 = 63.5867$$

$$M_1 = 114.2088742$$

从年首起算，10 月 1 日是一年中 $3/4$ ，因此 1993 年 10 月 1 日 = $1993.75 = Y$ ，由公式 (35. 1) 得到 -20.28 ，因此 $k = -20$ (记住， k 必须是一个整数)。那么：

$$JDE_{\circ} = 2449294.473$$

$$M = -2220^{\circ}.5908 = +299^{\circ}.4092$$

$$T = -0.06162$$

对表 35. B 中相关的部分 (水星内会合) 的周期项取和计算得 $+3.171$ ，因此：

$JDE = JDE_{\circ} + 3.171 = 2449297.644$ ，对应 1993 年 11 月 6 日 3h TD，舍入到小时，这就是确切的时间。

例 35. b ——计算 2125 年土星与太阳会合时间。

表 35. A 的土星会合数据：

$$A = 2451681.124$$

$$B = 378.091904$$

$$M_0 = 131.6934$$

$$M_1 = 12.647487$$

$Y=2125.0$ (即 2125 年的年首)，由表达式 (35.1) 得到 +120.39。因为我们查找 2125 年之后的首个土星——太阳会合，所以取 $k=+121$ ，而不是 +120。那么：

$$JDE_o = 2497430.244$$

$$M = 1662^\circ.0393 = 222^\circ.0393$$

$$T = +1.25627$$

另外，对于土星，还要计算以下附加角度：

$$a = 133^\circ.95, b = 73^\circ.97, c = 36^\circ.18, d = 6^\circ.53$$

对表 35.B (土星与太阳会合相关的数据) 的项取和计算得 +7.659，因此：

$JDE = JDE_o + 7.659 = 2497437.903$ ，对应 2125 年 8 月 26 日 10h TD。

使用更精确的方法计算，得到的正确时刻是 2125 年 8 月 26 日 11h TD。

水星和金星的最大距角

为了计算水星或金星的最大距角发生的时刻，我们从最近的内会合开始。所以，我们按以上说明的方法计算 k 、 JDE_o 、 M 和 T 。我们不计算真会合时刻，相反，我们使用表 35.C 的周期项计算水星“平”内会合的修正量，得到最大东或西距角发生的时刻。在同一表中，还提供了计算最大距角的周期项。

别忘了，如果行星在太阳的东边，那么晚上在西边可视 (太阳下山后，往西看，黄道附近可见星体)，如果行星距角是西 (黄道附近，太阳西边)，那么早晨在东方可见星体，即太阳升起之前可清晰看到星体。

行星到太阳的距角最大值的单位是“度”，是带小数的。最大距角指：在地心看，行星到太阳圆面中心的角距离，而不是二星体的地心黄道经的最大差值。行星到太阳的距角没有官方定义，我们可以考虑以下两种不同的定义：

(a) 星体到太阳圆面中心的角距离

(b) 星体与太阳圆面中心的地心黄经之间的差值

这两种不同的定义均在天文文献中使用。1960 年起,《天文历书》就已开始使用(a)定义,在 1981 年以后《天文年历》继承之。我们更喜欢这种定义。例如,金星在“内会合”附近的可视性,主要和行星与太阳的角度差有关,而不是它们的黄经差。

然而,法国天文学家使用(b)定义,例如,在它们的《Annuaire du Bureau des Longitudes》,第 275 页 1900 卷,我们看到:

"Les plus grandes élongations des planètes inférieures: la différence des longitudes géocentriques de la planète et du Soleil est maximale.."

使用(a)定义与(b)定义,得到的结果会有些不同。例如,1990 年 8 月 11 日,水星的最大距角:太阳和水星黄经的差值在 15h UT 时刻达到最大值($27^{\circ}22'$),结果如同《Annuaire du Bureau des Longitudes》第 277 页所讲到的。但是,最大角度差发生在 21h,其值为 $27^{\circ}25'$ 。

例 35. c ——找出 1993 年 11 月,水星西最大距角发生的时刻。

我们从 1993 年 11 月的“内会合”开始计算,由此得到(参见例 35. a):

$$JDE_{\circ} = 2449294.473, \quad M = 299^{\circ}.4092, \quad T = -0.06162$$

把 M 和 T 的值代入表 35. C 的相应部分(水星,西最大距角):

$$\text{修正量} = +19.665 \text{ 天}, \quad \text{距角} = 19^{\circ}.7506$$

因此,水星的西最大距角发生在:

$$JDE = JDE_{\circ} + 19.667 = 2449314.14$$

对应 1993 年 11 月 22 日 15h TD, 最大距角是 $19^{\circ}.7506 = 19^{\circ}45'$ 。

结果的精度

很明显，表 35. B 和 35. C 仅对有限的时间范围有效，即在公元 2000 年前后几千年内有效，而不是百万年！因此，不要把本章的方法用于公元-2000 以前或公元 4000 年以后。

对于现代时间，即公元 1800 到 2000 年，水星和金星现象发生时刻的误差小于 1 小时，土星、天王星和海王星 2 小时，火星 3 小时，木星 4 小时。

可以预见，在公元-2000 和 4000 年，最大可能误差会大一些。另一方面，如果计算的历元接近公元 2000 年，即 1900 到 2100 年，那么 T^2 项可以安全的忽略。

练习

在以下情况下，测试你的程序；所有的时间是 TD 时间。

水星 内会合 1631 年 11 月 07 日 07h (a)

金星 内会合 1882 年 12 月 06 日 17h (b)

火星 “冲” 2729 年 09 月 09 日 03h (c)

木星 “冲” -6 年 09 月 15 日 07h (d)

土星 “冲” -6 年 09 月 14 日 09h (d)

天王 “冲” 1780 年 12 月 17 日 14h (e)

海王 “冲” 1846 年 08 月 20 日 04h (f)

(a) 第一次观测到水星经过日圆盘(Gassendi, 在巴黎)

(b) 公元 2004 以前，金星最后一次凌日。

(c) 一次火星的近日“冲”

(d) 木星和土星的“冲”时刻相差小于 1 天，在那年，在两行星之间出现三体会合。

(e) Willian Herschel 发现天王星之前的 3 个月

(f) 海王星被发现之前的 1 个月。

表 35.B
周期项, 单位是天

	水星 内会合	水星 外会合
	-----	-----
$\sin M$	$+0.0545 + 0.0002 T$	$-0.0548 - 0.0002 T$
$\cos M$	$-6.2008 + 0.0074 T + 0.00003 T^2$	$+7.3894 - 0.0100 T - 0.00003 T^2$
$\sin 2M$	$-3.2750 - 0.0197 T + 0.00001 T^2$	$+3.2200 + 0.0197 T - 0.00001 T^2$
$\cos 2M$	$+0.4737 - 0.0052 T - 0.00001 T^2$	$+0.8383 - 0.0064 T - 0.00001 T^2$
$\sin 3M$	$+0.8111 + 0.0033 T - 0.00002 T^2$	$+0.9666 + 0.0039 T - 0.00003 T^2$
$\cos 3M$	$+0.0037 + 0.0018 T$	$+0.0770 - 0.0026 T$
$\sin 4M$	$-0.1768 + 0.00001 T^2$	$+0.2758 + 0.0002 T - 0.00002 T^2$
$\cos 4M$	$-0.0211 - 0.0004 T$	$-0.0128 - 0.0008 T$
$\sin 5M$	$+0.0326 - 0.0003 T$	$+0.0734 - 0.0004 T - 0.00001 T^2$
$\cos 5M$	$+0.0083 + 0.0001 T$	$-0.0122 - 0.0002 T$
	$-0.0040 + 0.0001 T$	$+0.0173 - 0.0002 T$
	金星 内会合	金星 外会合
	-----	-----
$\sin M$	$-0.0096 + 0.0002 T - 0.00001 T^2$	$+0.0099 - 0.0002 T - 0.00001 T^2$
$\cos M$	$+2.0009 - 0.0033 T - 0.00001 T^2$	$+4.1991 - 0.0121 T - 0.00003 T^2$
$\sin 2M$	$+0.5980 - 0.0104 T + 0.00001 T^2$	$-0.6095 + 0.0102 T - 0.00002 T^2$
$\cos 2M$	$+0.0967 - 0.0018 T - 0.00003 T^2$	$+0.2500 - 0.0028 T - 0.00003 T^2$
$\sin 3M$	$+0.0913 + 0.0009 T - 0.00002 T^2$	$+0.0063 + 0.0025 T - 0.00002 T^2$
$\cos 3M$	$+0.0046 - 0.0002 T$	$+0.0232 - 0.0005 T - 0.00001 T^2$
	$+0.0079 + 0.0001 T$	$+0.0031 + 0.0004 T$

表 35.B

	火星 “冲”	火星 与太阳会合
	-----	-----
$\sin M$	$-0.3088 + 0.00002 T^2$	$+0.3102 - 0.0001 T + 0.00001 T^2$
$\cos M$	$-17.6965 + 0.0363 T + 0.00005 T^2$	$+9.7273 - 0.0156 T + 0.00001 T^2$
$\sin 2M$	$+18.3131 + 0.0467 T - 0.00006 T^2$	$-18.3195 - 0.0467 T + 0.00009 T^2$
$\cos 2M$	$-0.2162 - 0.0198 T - 0.00001 T^2$	$-1.6488 - 0.0133 T + 0.00001 T^2$
$\sin 3M$	$-4.5028 - 0.0019 T + 0.00007 T^2$	$-2.6117 - 0.0020 T + 0.00004 T^2$
$\cos 3M$	$+0.8987 + 0.0058 T - 0.00002 T^2$	$-0.6827 - 0.0026 T + 0.00001 T^2$
$\sin 4M$	$+0.7666 - 0.0050 T - 0.00003 T^2$	$+0.0281 + 0.0035 T + 0.00001 T^2$
$\cos 4M$	$-0.3636 - 0.0001 T + 0.00002 T^2$	$-0.0823 + 0.0006 T + 0.00001 T^2$
$\sin 5M$	$+0.0402 + 0.0032 T$	$+0.1584 + 0.0013 T$
$\cos 5M$	$+0.0737 - 0.0008 T$	$+0.0270 + 0.0005 T$
	$-0.0980 - 0.0011 T$	$+0.0433$
	木星 “冲”	木星 与太阳会合
	-----	-----
$\sin M$	$-0.1029 - 0.00009 T^2$	$+0.1027 + 0.0002 T - 0.00009 T^2$
$\cos M$	$-1.9658 - 0.0056 T + 0.00007 T^2$	$-2.2637 + 0.0163 T - 0.00003 T^2$
$\sin 2M$	$+6.1537 + 0.0210 T - 0.00006 T^2$	$-6.1540 - 0.0210 T + 0.00008 T^2$
$\cos 2M$	$-0.2081 - 0.0013 T$	$-0.2021 - 0.0017 T + 0.00001 T^2$
$\sin 3M$	$-0.1116 - 0.0010 T$	$+0.1310 - 0.0008 T$
$\cos 3M$	$+0.0074 + 0.0001 T$	$+0.0086$
$\sin a$	$-0.0097 - 0.0001 T$	$+0.0087 + 0.0002 T$
$\cos a$	$0 + 0.0144 T - 0.00008 T^2$	$0 + 0.0144 T - 0.00008 T^2$
	$+0.3642 - 0.0019 T - 0.00029 T^2$	$+0.3642 - 0.0019 T - 0.00029 T^2$

表 35.B

	土星 “冲”	土星 与太阳会合
$\sin M$	$-0.0209 + 0.0006 T + 0.00023 T^2$	$+0.0172 - 0.0006 T + 0.00023 T^2$
$\cos M$	$+4.5795 - 0.0312 T - 0.00017 T^2$	$-8.5885 + 0.0411 T + 0.00020 T^2$
$\sin 2M$	$+1.1462 - 0.0351 T + 0.00011 T^2$	$-1.1470 + 0.0352 T - 0.00011 T^2$
$\cos 2M$	$+0.0985 - 0.0015 T$	$+0.3331 - 0.0034 T - 0.00001 T^2$
$\sin 3M$	$+0.0733 - 0.0031 T + 0.00001 T^2$	$+0.1145 - 0.0045 T + 0.00002 T^2$
$\cos 3M$	$+0.0025 - 0.0001 T$	$-0.0169 + 0.0002 T$
$\sin a$	$+0.0050 - 0.0002 T$	$-0.0109 + 0.0004 T$
$\cos a$	$0 - 0.0337 T + 0.00018 T^2$	$0 - 0.0337 T + 0.00018 T^2$
$\sin b$	$-0.8510 + 0.0044 T + 0.00068 T^2$	$-0.8510 + 0.0044 T + 0.00068 T^2$
$\cos b$	$0 - 0.0064 T + 0.00004 T^2$	$0 - 0.0064 T + 0.00004 T^2$
$\sin c$	$+0.2397 - 0.0012 T - 0.00008 T^2$	$+0.2397 - 0.0012 T - 0.00008 T^2$
$\cos c$	$0 - 0.0010 T$	$0 - 0.0010 T$
$\sin d$	$+0.1245 + 0.0006 T$	$+0.1245 + 0.0006 T$
$\cos d$	$0 + 0.0024 T - 0.00003 T^2$	$0 + 0.0024 T - 0.00003 T^2$
	$+0.0477 - 0.0005 T - 0.00006 T^2$	$+0.0477 - 0.0005 T - 0.00006 T^2$

表 35.B

	天王星 “冲”	天王星 与太阳会合
$\sin M$	$+0.0844 - 0.0006 T$	$-0.0859 + 0.0003 T$
$\cos M$	$-0.1048 + 0.0246 T$	$-3.8179 - 0.0148 T + 0.00003 T^2$
$\sin 2M$	$-5.1221 + 0.0104 T + 0.00003 T^2$	$+5.1228 - 0.0105 T - 0.00002 T^2$
$\cos 2M$	$-0.1428 + 0.0005 T$	$-0.0803 + 0.0011 T$
$\sin 3M$	$-0.0148 - 0.0013 T$	$-0.1905 - 0.0006 T$
$\cos 3M$	0	$+0.0088 + 0.0001 T$
$\cos e$	$+0.0055$	0
$\cos f$	$+0.8850$	$+0.8850$
	$+0.2153$	$+0.2153$
	海王星 “冲”	海王星 与太阳会合
$\sin M$	$-0.0140 + 0.00001 T^2$	$+0.0168$
$\cos M$	$-1.3486 + 0.0010 T + 0.00001 T^2$	$-2.5606 + 0.0088 T + 0.00002 T^2$
$\sin 2M$	$+0.8597 + 0.0037 T$	$-0.8611 - 0.0037 T + 0.00002 T^2$
$\cos 2M$	$-0.0082 - 0.0002 T + 0.00001 T^2$	$+0.0118 - 0.0004 T + 0.00001 T^2$
$\cos e$	$+0.0037 - 0.0003 T$	$+0.0307 - 0.0003 T$
$\cos g$	-0.5964	-0.5964
	$+0.0728$	$+0.0728$

表 35.C
最大距角的周期项

水星, 最大东距角(晚可视)		
	对平“内会合”的修正量(天)	距角(度)
	$-21.6101 + 0.0002 T$	22.4697
$\sin M$	$-1.9803 - 0.0060 T + 0.00001 T^2$	$-4.2666 + 0.0054 T + 0.00002 T^2$
$\cos M$	$+1.4151 - 0.0072 T - 0.00001 T^2$	$-1.8537 - 0.0137 T$
$\sin 2M$	$+0.5528 - 0.0005 T - 0.00001 T^2$	$+0.3598 + 0.0008 T - 0.00001 T^2$
$\cos 2M$	$+0.2905 + 0.0034 T + 0.00001 T^2$	$-0.0680 + 0.0026 T$
$\sin 3M$	$-0.1121 - 0.0001 T + 0.00001 T^2$	$-0.0524 - 0.0003 T$
$\cos 3M$	$-0.0098 - 0.0015 T$	$+0.0052 - 0.0006 T$
$\sin 4M$	+0.0192	$+0.0107 + 0.0001 T$
$\cos 4M$	$+0.0111 + 0.0004 T$	$-0.0013 + 0.0001 T$
$\sin 5M$	-0.0061	-0.0021
$\cos 5M$	$-0.0032 - 0.0001 T$	+0.0003

表 35.C

水星, 最大西距角(晨可见)		
	对平“内会合”的修正量(天)	距角(度)
	$+21.6249 - 0.0002 T$	$22.4143 - 0.0001 T$
$\sin M$	$+0.1306 + 0.0065 T$	$+4.3651 - 0.0048 T - 0.00002 T^2$
$\cos M$	$-2.7661 - 0.0011 T + 0.00001 T^2$	$+2.3787 + 0.0121 T - 0.00001 T^2$
$\sin 2M$	$+0.2438 - 0.0024 T - 0.00001 T^2$	$+0.2674 + 0.0022 T$
$\cos 2M$	$+0.5767 + 0.0023 T$	$-0.3873 + 0.0008 T + 0.00001 T^2$
$\sin 3M$	+0.1041	$-0.0369 - 0.0001 T$
$\cos 3M$	$-0.0184 + 0.0007 T$	$+0.0017 - 0.0001 T$
$\sin 4M$	$-0.0051 - 0.0001 T$	+0.0059
$\cos 4M$	$+0.0048 + 0.0001 T$	$+0.0061 + 0.0001 T$
$\sin 5M$	+0.0026	+0.0007
$\cos 5M$	+0.0037	-0.0011

表 35.C

金星，最大东距角(晚可见)		
	对平“内会合”的修正量(天)	距角(度)
$\sin M$	$-70.7600 + 0.0002 T - 0.00001 T^2$	$46.3173 + 0.0001 T$
$\cos M$	$+1.0282 - 0.0010 T - 0.00001 T^2$	$+0.6916 - 0.0024 T$
$\sin 2M$	$+0.2761 - 0.0060 T$	$+0.6676 - 0.0045 T$
$\cos 2M$	$-0.0438 - 0.0023 T + 0.00002 T^2$	$+0.0309 - 0.0002 T$
$\sin 3M$	$+0.1660 - 0.0037 T - 0.00004 T^2$	$+0.0036 - 0.0001 T$
$\cos 3M$	$+0.0036 + 0.0001 T$	
	$-0.0011 + 0.00001 T^2$	
金星，最大西距角(晨可见)		
	对平“内会合”的修正量(天)	距角(度)
$\sin M$	$+70.7462 - 0.00001 T^2$	46.3245
$\cos M$	$+1.1218 - 0.0025 T - 0.00001 T^2$	$-0.5366 - 0.0003 T + 0.00001 T^2$
$\sin 2M$	$+0.4538 - 0.0066 T$	$+0.3097 + 0.0016 T - 0.00001 T^2$
$\cos 2M$	$+0.1320 + 0.0020 T - 0.00003 T^2$	-0.0163
$\sin 3M$	$-0.0702 + 0.0022 T + 0.00004 T^2$	$-0.0075 + 0.0001 T$
$\cos 3M$	$+0.0062 - 0.0001 T$	
	$+0.0015 - 0.00001 T^2$	

第三十六章 冥王星

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 2 日]

和大多数小行星(参见第 32 章)一样，冥王星没有可以使用的解析理论。不过，精确描述该行星运动的适用于 1885 年到 2099 年的表达式(1950.0 坐标)已由 Goffin、Meeus 和 Steyaer1[1]构建。周期项系数使用最小二科法确定，冥王星的日心运动基本数值积分是 E.Goffin 完成的，已经考虑了 8 大主星行的摄动。这种积分基于 Seidelmann 等人的吻

切轨道要素，这些要素是通过数值积分并使之吻合 1914 年到 1979 年所有已观测到的可采用的冥王星位置而得到的。

再次使用 Goffin 的数值积分，我们重新计算出这些周期项，但现在是涉及新的标准分点 J2000.0 (而不是 B1950.0) 坐标的冥王星日心黄经和黄纬。结果在表 36. A 中。

----- 计算结果

得用公式(21.1)计算出历元 J2000.0 起算的儒略世纪数 T，然后计算以下角度(单位是度)：

$$\begin{aligned} J &= 34.35 + 3034.9057 T \\ S &= 50.08 + 1222.1138 T \\ P &= 238.96 + 144.9600 T \end{aligned}$$

然后计算表 36. A 的周期项。其中 α 是角度 J、S、P 的线性组合，即

$$\alpha = iJ + jS + kP$$

每行的贡献值是： $A \sin \alpha + B \cos \alpha$

例如，第 13 行，我们读出数值是 0, 2, -1，所以参数 $\alpha = 2S - P$ ，对纬度的贡献是 $-94 * \sin \alpha + 210 * \cos \alpha$

在表 36. A 中，对于黄经和黄纬，其系数 A 和 B 的单位是 10^{-6} 度，径矢(天太阳距离)的单位是 10^{-7} 天文单位。

冥王星的日心黄经 l 和黄纬 b (单位是度) 以及距离 r 则由下式得到：

$$l = 238.956785 + 144.96T + \text{黄经周期项之和}$$

$$b = -3.908202 + \text{黄纬周期项之和}$$

$$r = 40.7247248 + \text{距离周期项之和}$$

本方法得到的黄经黄纬是 J2000.0 标准分点日心坐标的，而不是太阳系质心坐标的。

按此法计算， l 的误差小于 $0''.6$ ， b 的误差小于 $0''.2$ ，距离误差小于 0.00002 AU，它是当时建立的冥王星运动数值积分的精度，在 1885-2099 年的范围内有效，超出此范围这种方法是无效的。

把冥王星坐标转换到 2000.0 地心天体测量赤道坐标 α 和 δ :

(1) 计算太阳的 2000.0 地心直角坐标赤道坐标 X、Y、Z (参见第 25 章);

(2) 冥王星坐标:

$$\begin{aligned} x &= r \cos l \cos b \\ y &= r (\sin l \cos b \cos \varepsilon - \sin b \sin \varepsilon) \\ z &= r (\sin l \cos b \sin \varepsilon + \sin b \cos \varepsilon) \end{aligned} \quad (36.1)$$

ε 是 J2000.0 平黄赤交角, 所以有:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= 0.397\,777\,156 \\ \cos \varepsilon &= 0.917\,482\,062 \end{aligned}$$

(3) 利用公式 (32.10) 得到 α 和 δ 以及冥王星到地球的距离 Δ

不过, 光行时还必须考虑。参见第 32 章的公式 (32.3)。因此, 为了获得某时刻的 α 和 δ , 应计算比该时刻更早 “光行时间 τ ” 的那个时刻的 l 、 b 、 r 。

也许你会感到奇怪, 我们的方案中为什么不需要天王星和海王星的平黄经。原因是, 天王星的平动几乎是海王星的 2 倍, 或是冥王星的 3 倍。正是由于这个原因, 角参数 $2N-P$ (式中 N 是海王星的平经度) 几乎等于 $2P$ 。在短短的 214 年期间, 这种微小的差别不易被觉察, 所以表 36.A 中不包含 $2N-P$ 的角参数, 它的效果合并到了角参数为 $2P$ 的项。同样由于这个原因, 也没有 $S-4P$ 、 $S-3P$ 、 $S-2P$ 、 $J-5P$ 、 $J-4P$ 和 $2S-3P$, 它们分别接近于 $4P$ 、 $5P$ 、 $6P$ 、 $2S-P$ 、 $2S$ 和 $J-S+P$ 。

例 36.a: —— 1992 年 10 月 13.0 TD = JDE 2448908.5, 试计算:

(1) 冥五星的日心几何坐标;

(2) 地心天文观测坐标 α 和 δ 。

解:

(1) 我们得到:

$$T = -0.072\,183\,4360$$

$$J = -184^{\circ}.719\,921$$

$$S = -38^{\circ}.136\,373$$

$$P = 228^{\circ}.496\,289$$

$$\text{黄经周期项之和: } + 4247019$$

$$\text{黄纬周期项之和: } + 18495889$$

$$\text{距离周期项之和: } -110133423$$

由此得:

$$l = 228^{\circ}.493\,074 + 4^{\circ}.247\,019 = 232^{\circ}.740\,09$$

$$b = -3^{\circ}.908\,202 + 18^{\circ}.495\,889 = +14^{\circ}.587\,69$$

$$r = 40.724\,7248 - 11.013\,3423 = 29.711\,383\text{ AU}$$

(2) 对于这个给定的时间, 太阳的 2000.0 直角赤道坐标是(参见例 25. b) 是:

$$X = -0.937\,3959$$

$$Y = -0.313\,1679$$

$$Z = -0.135\,7792$$

把上面得到的 l 、 b 、 r 代入公式 (36.1) 得:

$$x = -17.408\,3314$$

$$y = -23.973\,1135$$

$$z = -2.237\,4336$$

因此, 由公式 (32.10) 和 (32.3) 得:

$$\Delta = 30.529\,024\text{ AU} \quad \text{和} \quad \tau = 0.17632\text{ 日}$$

其中 Δ 是冥王星到地心的真距离

现在, 重新计算 $1992\text{ 年 }10\text{ 月 }13.0 - 0.17632 = 10\text{ 月 }12.82368$ 时刻行星的日心坐标。结果是:

$$l = 232^{\circ}.73887$$

$$b = +14^{\circ}.58788$$

$$r = 29.711\,366$$

因此:

$$x = -17.408\,7937 \quad \Delta = 30.529\,017$$

$$y = -23.972\,7795 \quad \tau = 0.17632\text{ 日}$$

$$z = -2.237\,1895$$

我们得到 τ 的值与前面的一样, 所以无需继续迭代。

1992 年 10 月 13.0 日 TD, 冥王星的 2000.0 天文观测坐标则可由 (32.10) 式得到:

$$\alpha = 232^{\circ}.93172 = 15^{\text{h}}31^{\text{m}}43^{\text{s}}.6$$

$$\delta = -4^{\circ}.45800 = -4^{\circ}27'29''$$

公元 2000 年附近，冥王星的平轨道要素是：

$$\begin{aligned} a &= 39.543 \text{ AU} \\ e &= 0.2490 \\ \left. \begin{aligned} i &= 17^{\circ}.140 \\ \Omega &= 110^{\circ}.307 \\ \omega &= 113^{\circ}.768 \end{aligned} \right\} 2000.0 \end{aligned}$$

参考资料

1、E. Goffin、J. Meeus 和 C. Steyaert，“冥王星运动的精确表示”，《天文学和天体物理学》，卷 155，第 323–325 页 (1986)。

2、P. K. Seidelmann, G. H. Kaplan, K. F. Pulkkinen, E. J. Santoro, 和 T. C. Van Flandern, 《Icarus》，卷 44，第 20 页 (1980)。

第三十七章 行星的近点和远点

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 2 日]

一个行星在近点或远点对应的儒略日时间由以下公式计算：

水星	JDE = 2451 590.257 + 87.969 349 63 k - 0.000 000 0000 k^2
金星	JDE = 2451 738.233 + 224.700 818 7 k - 0.000 000 0327 k^2
地球	JDE = 2451 547.507 + 365.259 635 8 k + 0.000 000 0158 k^2
火星	JDE = 2452 195.026 + 686.995 784 3 k - 0.000 000 1187 k^2
木星	JDE = 2455 636.938 + 4332.897 090 k + 0.000 1368 k^2
土星	JDE = 2452 830.11 + 10764.217 31 k + 0.000 826 k^2
天王星	JDE = 2470 213.5 + 30694.8767 k - 0.005 41 k^2
海王星	JDE = 2468 895.7 + 60190.32 k + 0.031 75 k^2

近日点对应 k 是一个整数, 这个整数加 0.5 对应远日点。其它的 k 值是毫无意义的。

零或正的 k 值指 2000 年之后, 如果 $k < 0$, 则对应 2000 年之前的日期。

例如, $k = +14$ 和 $k = -222$ 表示过经过近日点, 而 $k = +27.5$ 或 $k = -119.5$ 是远日点。

k 的大约值由下式计算得到, 式中的“year”可以是带小数的年。

水星	$k \approx 4.15201 (\text{year} - 2000.12)$
金星	$k \approx 1.62549 (\text{year} - 2000.53)$
地球	$k \approx 0.99997 (\text{year} - 2000.01)$
火星	$k \approx 0.53166 (\text{year} - 2001.78)$
木星	$k \approx 0.08430 (\text{year} - 2011.20)$
土星	$k \approx 0.03393 (\text{year} - 2003.52)$
天王星	$k \approx 0.01190 (\text{year} - 2051.1)$
海王星	$k \approx 0.00607 (\text{year} - 2047.5)$

例 37. a: ——1978 年 10 月 15 日(即 1978.79)附近, 金星经过近日点的具体时间。

k 的估值是 $1.62549(1978.79 - 2000.53) = -35.34$, 因 k 必须是整数(近日!), 我们取 $k = -35$ 。代入金星的公式, 得到:

$$\text{JDE} = 2443873.704$$

对应 1978 年 12 月 31.204 = 1978 年 12 月 31 5h 力学时。

例 37. b: ——计算公元 2032 年火星经过远日点的时刻。

取“year”=2032.0, 我们得到 $k \approx +16.07$ 。因为 k 必须是整数加 0.5(远日!), 所以 2032 年之后的第一个火星远日点出现在 $k = +16.5$ 。

使用火星的公式及这个 k 值, 得到 $\text{JDE} = 2463530.456$,

对应 2032 年 10 月 24.956 日或 2032 年 10 月 24 日 23h 力学时。

应注意，JDE 的计算公式是基于无摄动的椭圆轨道，所以，火星的近(或远)日点时刻误差可能达到数小时。

由于行星之间相互摄动，使用这里描述的方法，木星近(或远)日点时刻的计算误差可达半个月，对于土星则可达 1 个月以上。

例如，把 $k=-2.5$ 代入木星的公式，得到远日点时刻是 1981 年 7 月 19 日，而正确的日期是 1981 年 7 月 28 日。对于土星， $k=-2$ 时得到 1944 年 7 月 30 日，而该星行真正达到近日点是 1944 年 9 月 8 日。

天王星和海王星的误差更大。对于这些行星式，只不过是为了公式完整性而给出的。

精确的值，可以在接近预期时间附近选取几个时刻，计算出行星到太阳的距离，然后找出距离最大(或最小)的时刻。以下是土星(1920—2050 年)及天王星(1750—2100 年)的近日点(P)和远日点(A)的日期。在日期之后，是它们到太阳的距离，单位是天文位。这些日期是使用完整的 P. Bretagnon 的 VSOP87 理论得到的。

土星				天王星			
A	1929 Nov 11	10.0468		A	1756 Nov 27	20.0893	
P	1944 Sep 8	9.0288		P	1798 Mar 3	18.2890	
A	1959 May 29	10.0664		A	1841 Mar 16	20.0976	
P	1974 Jan 8	9.0153		P	1882 Mar 23	18.2807	
A	1988 Sep 11	10.0444		A	1925 Apr 1	20.0973	
P	2003 Jul 26	9.0309		P	1966 May 21	18.2848	
A	2018 Apr 17	10.0656		A	2009 Feb 27	20.0989	
P	2032 Nov 28	9.0149		P	2050 Aug 17	18.2830	
A	2047 Jul 15	10.0462		A	2092 Nov 23	20.0994	

海王星的情况比较特别。该行星运动得很慢，轨道率心

率很小。另一方面，太阳围绕太阳系质心振动(主要是木星和土星的运动引起的)。因此海王星到太阳的距离(不是到太阳系质心的距离)两次达到最大和最小。

例如，我们有以下海王星距离的极值

极小	1876 Aug. 28	$r = 29.8148$ AU
极大	1881 Dec. 12	29.8213
极小	1886 July 11	29.8174

公转半周后，接近轨道的远日点部分，我们得到以下极值：

极大	1959 July 13	$r = 30.3317$ AU
极小	1965 Oct. 6	30.3227
极大	1968 Nov. 21	30.3241

1881 年没有远日点，因为此时海王星在近日点附近。类似的，1965 年也没有。作者杜撰了两个名词“假近日点”和“假远日点”，分别对应单一的极大或极小值。

图 1 表示 1954 年到 1972 年，海王星到太阳的距离。注意，图中的(1)日主远日点，(2)是“假近日点”，(3)是第二远日点。

图 1：

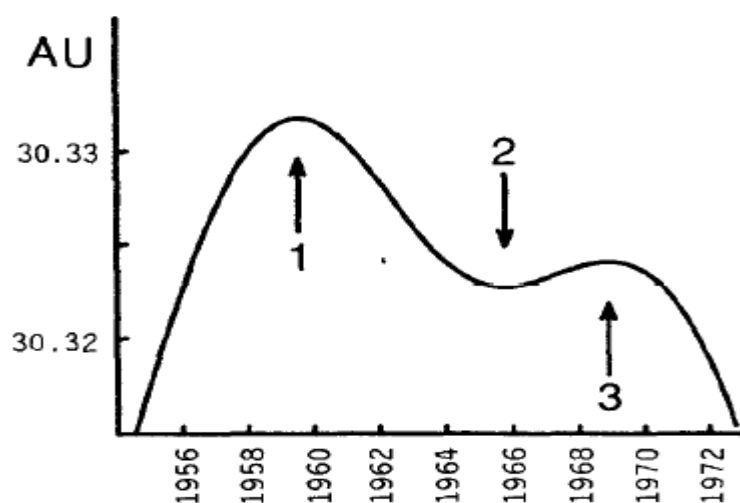
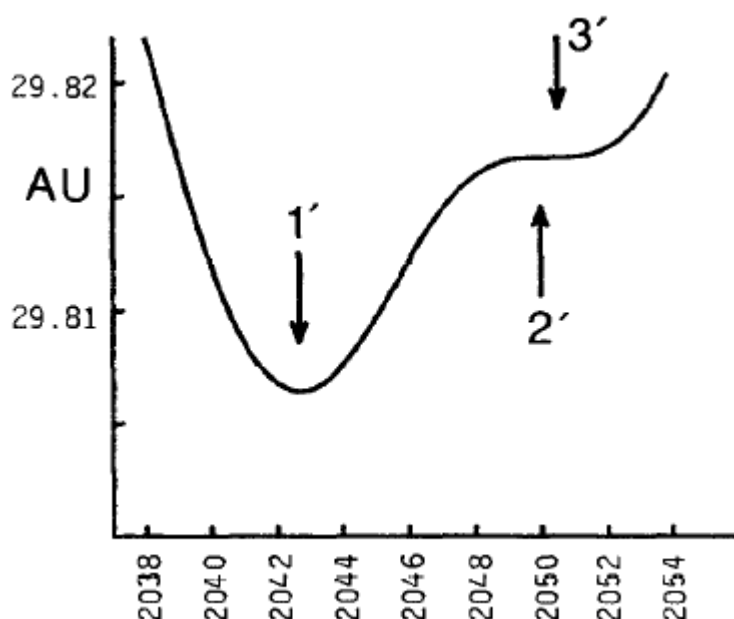


图 2:



公转半周后，如图 2 所示。这几乎是一种“临界情况”：主近日点(1')发生在 2042 年，而 2049—2050 年，从“假远日点(2')”到第二近日点(3')，到太阳的距离减小得非常缓慢：

极小	2042 Sep. 5	$r = 29.8064$ AU
极大	2049 Oct. 24	29.816711
极小	2050 June 25	29.816696

对于地球，应注意，公式给出的 JDE 针对地月系统的质心有效。由于月球运动，日地距离与日到质心距离的最大(或最小)时刻的差别可能超过 1 天[2]。比如， $k=-10$ ，由上面关于地球的公式得到 $JDE = 2447894.911$ ，对应 1990 年 1 月 3.41 日，而正确的时刻是 1990 年 1 月 4 日 17h TD。

地球的正确值，可以通过以下方法修得到。先计算以下角度，单位是度：

$$\begin{aligned}
A_1 &= 328.41 + 132.788\,585\,k \\
A_2 &= 316.13 + 584.903\,153\,k \\
A_3 &= 346.20 + 450.380\,738\,k \\
A_4 &= 136.95 + 659.306\,737\,k \\
A_5 &= 249.52 + 329.653\,368\,k
\end{aligned}$$

记住，近日点对应 k 值为整数，远日点对应 k 值为整数加 0.5。那么我们有以下修正项，单位是“日”：

近日点	远日点	
+1.278	-1.352	$\times \sin A_1$
-0.055	+0.061	$\sin A_2$
-0.091	+0.062	$\sin A_3$
-0.056	+0.029	$\sin A_4$
-0.045	+0.031	$\sin A_5$

在 1980—2019 年，这种计算方法的平均误差小于 3 小时，最大 6 小时。

例如， $k=-10$ ，我们得到修正量是+1.261 日，上面已提到 JDE=2447894.911，修正后是 2447896.172，对应 1990 年 1 月 4 日 16h TD，已非常接近精确值。

表 37.A 给出了 1991 到 2010 年地球经过近日点和远日点的时间，保留到 0.01 小时，并附有日地距离。这些数据使用完整的 VSOP87 理论精确计算得到的，而不是使用上面所述的“近似”方法。

表 37.A
地球近日点和远日点发生时刻，力学时，1991—2010年

Year	Perihelion			Aphelion		
		h			h	
1991	Jan. 3	3.00	0.983 281	July 6	15.46	1.016 703
1992	3	15.06	324	3	12.14	740
1993	4	3.08	283	4	22.37	666
1994	2	5.92	301	5	19.30	724
1995	4	11.10	302	4	2.29	742
1996	Jan. 4	7.43	0.983 223	July 5	19.02	1.016 717
1997	1	23.29	267	4	19.34	754
1998	4	21.28	300	3	23.86	696
1999	3	13.02	281	6	22.86	718
2000	3	5.31	321	3	23.84	741
2001	Jan. 4	8.89	0.983 286	July 4	13.65	1.016 643
2002	2	14.17	290	6	3.80	688
2003	4	5.04	320	4	5.67	728
2004	4	17.72	265	5	10.90	694
2005	2	0.61	297	5	4.98	742
2006	Jan. 4	15.52	0.983 327	July 3	23.18	1.016 697
2007	3	19.74	260	6	23.89	706
2008	2	23.87	280	4	7.71	754
2009	4	15.51	273	4	1.69	666
2010	3	0.18	290	6	11.52	702

参考资料:

1、J.Meeus, "Le centre de gravite du systeme solaire et le mouvement de Neptune", 《Ciel et Terre》(比利时), 卷 68, 第 288-292 页(1952 年 11 月-12 月)

2、J.Meeus, "A propos des passages de la Terre au perihelie", 《Astronomie》(法国), 卷 97, 第 294-296(1983 年 6 月)

第三十八章 经过交点

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 3 日]

给出行星或彗星的轨道要素, 该天体经过其轨道交点的时间 t , 按如下方法可以很容易的计算出来:

在升交点: $v = -\omega$ 或 $360^\circ - \omega$

在降交点: $v = 180^\circ - \omega$

和前面的一样, v 是真近点角, ω 是近日点参数。那么, 使用 v 值就可进行以下计算。

椭圆轨道的情况

计算偏近点角 E :

$$\tan(E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)} \tan(v/2) \quad (38.1)$$

式中, e 是轨道率心率。平近点角 M 由下式计算:

$$M = E - e \sin E \quad (38.2)$$

在公式(38.2)中, E 应表达为弧度。 M 的值也是弧度。然而, 如果 E 表达为“度”且计算机也工作在“度”模式, 那么, 应把公式(38.2)中的弧度制的 e 换为角度制的 e_0 , 即 $e_0 = e * 57.29577951$ 。

把 M 转为“度”单位。那么, 如果 T 是经过近日点的时间, n 是每日平运动(单位: 度/天), 所需的经过交点的时间是:

$$t = T + M/n \text{ 日} \quad (38.3)$$

此时对应的径矢 r 由下式计算：

$$r = a (1 - e \cos E) \quad (38.4)$$

式中 a 是轨道的半长轴，天文单位。

如果 n 未给出，可以使用 (32.6) 式得到。

抛物线轨道的情形

$$\text{计算：} s = \tan (v/2)$$

$$\text{那么：} t = T + 27.403895 (s^3 + 3s) q^{3/2} \text{ 天}$$

式中近日点距离 q 的单位是 AU。此刻对应的径矢 r 是：

$$r = q (1 + s^2)$$

注意：——交点是轨道与黄道的交点！交点所涉及的黄道的历元与轨道要素所用的分点的历元是相同的。例如，如果轨道要素是涉及 1950.0 标准分点的，那么以上公式得到的是经过“1950.0 黄道交点”的时间，而不是在当日黄道上的交点。这种差别通常可以忽略，除非倾角非常小或运动十分缓慢。

例 38.a —— 1986 年回归的周期彗星 Halley，W. Landgraf [小行星通告 No. 10634(1986 年 4 月 24 日)] 提供了以下轨道要素：

$$T = 1986 \text{ 年 } 2 \text{ 月 } 9.45891 \text{ TD}$$

$$\omega = 111^\circ.84644$$

$$e = 0.96727426$$

$$n = 0.01297082 \text{ 度/日}$$

$$a = 17.9400782$$

近日点参数 ω 是涉及 1950.0 标准分点的。

对于经过升交点，我们有：

$$v = 360^\circ - \omega = 248^\circ.15356$$

$$\tan(E/2) = -0.1906646$$

$$E = -21^\circ.5894332$$

$$M = -21^\circ.5894332 - (0.96727426 * 57^\circ.29577951) \sin(21^\circ.5894332) = -1^\circ.1972043$$

$$t = T + (-1.1972043)/0.01297082 = T - 92.2998 \text{ 日}$$

因此，慧星经过升交点(在 1950.0 黄道上)发生在近日点之后 92.2998 日，即 1985 年 11 月 9.16 日 TD。

由公式(38.4)得到 $r = 1.8045\text{AU}$ 。所以，在它的升交点，著名的慧星稍微在火星的轨道之外。

对于降交点，类似得到：

$$v = 180^\circ - \omega = 68^\circ.15356$$

$$E = +9^\circ.9726067$$

$$M = +0^\circ.3749928$$

$$t = T + 28.9105 \text{ 日} = 1986 \text{ 年 } 3 \text{ 月 } 10.37 \text{ TD}$$

$$r = 0.8493 \text{ AU, 在金星和地球轨道之间}$$

事实上，慧星运动($i=162^\circ$)是逆行的，这里离题了。不管怎样， ω 总是从升交点，沿道天体运动方向测量的。

例 38. b ——对于慧星 Helin-Roman(1989s = 1989IX), Marsden(小行星通告 No. 16001, 1990 年 3 月 11 日)已经计算出了以下抛物线轨道要素：

$$T = 1989 \text{ 年 } 8 \text{ 月 } 20.29104 \text{ TD}$$

$$q = 1.3245017\text{AU}$$

$$\omega = 154^\circ.90425 \text{ (1950.0)}$$

对于升交点，我们有：

$$v = -\omega = -154^\circ.90425$$

$$s = -4.4929389$$

$$t = T - 4351.68 \text{ 日} = 1977 \text{ 年 } 9 \text{ 月 } 20 \text{ 日}$$

$$r = 28.06 \text{ AU}$$

对于降交点，我们有：

$$v = 180^\circ - \omega = +25^\circ.09575$$

$$s = -0.2225715$$

$$t = T + 28.3527 \text{ 日} = 1989 \text{ 年 } 9 \text{ 月 } 17.644 \text{ 日 TD}$$

$$r = 1.3901 \text{ AU}$$

例 38. c ——计算 1970.0 附近，金星经过升交点的时间。我们使用表 30. A 中的轨道要素。我们得到：

$a = 0.723329820$, 因此 $n = 1.602137$
 $e = 0.00677188 - 0.000047766T + 0.0000000975T^2$
 $\omega = \pi - \Omega = 54^\circ.883787 + 0^\circ.5010998T - 0^\circ.0014800T^2$
 T^3 次可以安全的忽略掉。 e 和 ω 随时间变化非常缓慢。
 我们计算历元 1979.0 的相关值, 那么 $T=0.21$ 。我们得到:

$$e = 0.00678192, \omega = 54^\circ.778491$$

然后依次有:

$$v = -\omega = -54^\circ.778491$$

$$E = -54^\circ.461669$$

$$M = -54^\circ.145475$$

$$t = T - 33.7958 \text{ 日}$$

在例 37.a, 我们已经知道金星经过近日点的时间是 $T=1978$ 年 12 月 31.204。因此, 我们有:

$t = 1978$ 年 11 月 27.408 日 或 1978 年 11 月 27 日 10h TD。

重要注意

本章的算法是假设天体运动在无摄动的轨道上。要获得完全精度, 应在预期的时间附近计算 3 个或 5 个时刻的天体日心黄纬。当然, 在交点时, 我们有黄纬 = 零。

1990 年 9 月 4 日土星达到它的轨道的降交点(当日黄道上), 在 2005 年 1 月 8 日达到升交点。

1984 年 12 月 21 日天王星在降交点, 2029 年 5 月 19 日经过升交点。

对于海王星, 我们有:

升交点: 1920 年 06 月 03 日

降交点: 2003 年 08 月 11 日

升交点: 2084 年 12 月 30 日

第三十九章 视差修正

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 22 日]

译者注：观测者在两个不同位置看同一天体的方向之差。可用观测者的两个不同位置之间的连线（基线）对天体的张角来表示。天体的视差与天体到观测者的距离之间存在着简单的三角关系，因此能以视差的值表示天体的距离，而以此测定天体距离的方法称为三角视差法。在测定太阳系内天体的距离时，以地球半径为基线，所得视差称为周日视差。周日视差随着天体的高度变化而改变，当天体位于地平时，它的周日视差达到极大值，称为周日地平视差。当观测者位于赤道时，天体的周日地平视差具有最大值，称为赤道地平视差。在测定恒星的距离时，以地球绕太阳公转的轨道半长径（即太阳和地球的平均距离）为基线，所得视差称为周年视差。假设恒星位于黄极方向时的周年视差称为恒星周年视差，简称恒星视差，常用 π 表示。恒星视差只与恒星至太阳的距离有关，所以通常用 π 表示恒星距离。所有恒星的 π 值都小于 $1''$ 。由于太阳在空间运动所产生的视差称为长期视差，也称视差动。它取太阳在一年里所走过的距离为基线。本章讲述的是周日视差。

假设已知一个星体(如月亮、太阳、行星、彗星)的地心坐标已知，我们希望计算它的“以地面某点为中心”的坐标。地心坐标：就象我们站在地球中心看天体位置。“地面”坐标：我们站在一个地面观测点看天体。“地面某点为中心”的坐标英语单词是“topocentric”，地心坐标的英语单词是“Geocentric”，它们都有一个“centric”，表示“中心”的意思。对于“topocentric”，我们可以参考希腊语：topos = place(位置，空间位置)，再比较英语“Topology” = “拓朴，布局”。

译者注：为了翻译方便，下文将对“以地面某点为中心的坐标”简称为“站心坐标”，但要注意，本书所有翻译中，对坐标的描述如果含有“心”字，都是指“以...为中心”的坐标。比如“站心坐标”与“站点坐标”是完全不同的，前者指以某个观测站为中心的坐标，后者指站本身的位置坐

标(只是未指明以谁为坐标中心)。“地平坐标”中没有含“心”字,通常默认是“站心地平坐标”,“赤道坐标”默认为“地心赤道坐标”。

站心赤道坐标中的视差

换句话说,当地心赤经 α 和赤纬 δ 已知,为了得到站心赤经 $\alpha'=\alpha+\Delta\alpha$, 赤纬 $\delta'=\delta+\Delta\delta$, 我们需找到 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ (赤经和赤纬的视差修正)。

设 ρ 是地心半径, ϕ' 是观测者的地心纬度。 $\rho\sin\phi'$ 和 $\rho\cos\phi'$ 可以使用第 10 章描述的方法计算。

设 π 是星体的赤道地平视差。对于太阳、行星和彗星,经常适合使用它们到地球的距离 Δ 替代视差:

$$\sin \pi = \frac{\sin 8''.794}{\Delta}$$

或使用下式也有足够精度

$$\pi = \frac{8''.794}{\Delta} \quad (39.1)$$

如果 H 是天体的地心时角, 则有以下严格的公式:

$$\tan \Delta\alpha = \frac{-\rho \cos \phi' \sin \pi \sin H}{\cos \delta - \rho \cos \phi' \sin \pi \cos H} \quad (39.2)$$

对于赤纬, 不必计算 $\Delta\delta$, 用下式可直接算出 δ' :

$$\tan \delta' = \frac{(\sin \delta - \rho \sin \phi' \sin \pi) \cos \Delta\alpha}{\cos \delta - \rho \cos \phi' \sin \pi \cos H} \quad (39.3)$$

除了月亮, 以下不太严格的公式常代替 (39.2) 和 (39.3):

$$\Delta\alpha = \frac{-\pi \rho \cos \phi' \sin H}{\cos \delta} \quad (39.4)$$

$$\Delta\delta = -\pi (\rho \sin \phi' \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos H \sin \delta) \quad (39.5)$$

如果 π 的单位是角秒，那么 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 的单位也是角秒。
 $\Delta\alpha$ 除以 15 以后可转为“秒”单位。

应注意， $\Delta\alpha$ 是小角度，对于月亮，其值在-2 度到+2 度之间，当然，对于行星则非常小。

以下是可供选择的一种方法：

先计算：

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos \delta \sin H \\ B &= \cos \delta \cos H - \rho \cos \phi' \sin \pi \\ C &= \sin \delta - \rho \sin \phi' \sin \pi \end{aligned} \right\} \quad (39.6)$$

$$q = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (39.7)$$

那么地平时角 H' 和赤纬 δ' 可由下式得到：

$$\tan H' = \frac{A}{B} \quad \sin \delta' = \frac{C}{q}$$

例 39. a: ——2003 年 8 月 28 日 3h 17m 00s UT 时，试计算火星的站心赤经和赤纬。观测点在 Palomar 天文台，由例 10. a 得到该地的：

$$\begin{aligned} \rho \sin \phi' &= +0.546\,861 \\ \rho \cos \phi' &= +0.836\,339 \\ L = \text{经度} &= +7^{\text{h}}47^{\text{m}}27^{\text{s}} \text{ (西)} \end{aligned}$$

这个时刻，火星的地心视赤道坐标，可由精确的星历表插值得到：

$$\alpha = 22^{\text{h}}38^{\text{m}}07^{\text{s}}.25 = 339^{\circ}.530\,208$$

$$\delta = -15^{\circ}46'15''.9 = -15^{\circ}.771\,083$$

此时，行星的距离是 0.37276AU，因此，由公式(39.1)，得到它的赤道地平视差是 $\pi=23''.592$ 。

我们仍然需要地心时角，它等于 $H = \theta_{\odot} - L - \alpha$ ，式中 θ_{\odot} 是格林尼治视恒星时(可使用第 11 章的方法)，对于这个时刻， $\theta_{\odot} = 1^{\text{h}}\,40^{\text{m}}\,45^{\text{s}}$ ，因此：

$$H = 1^{\text{h}}40^{\text{m}}45^{\text{s}} - 7^{\text{h}}47^{\text{m}}27^{\text{s}} - 22^{\text{h}}38^{\text{m}}07^{\text{s}}$$

$$= -28^{\text{h}}44^{\text{m}}49^{\text{s}} = -431^{\circ}.2042 = +288^{\circ}.7958$$

由公式(39.2)得：

$$\tan \Delta\alpha = \frac{+0.000\,090\,557}{+0.962\,324}$$

因此：

$$\Delta\alpha = +0^{\circ}.005\,3917 = +1^{\text{s}}.29$$

$$\alpha' = \alpha + \Delta\alpha = 22^{\text{h}}38^{\text{m}}08^{\text{s}}.54$$

由公式(39.3)得：

$$\tan \delta' = \frac{-0.271\,857\,13}{+0.962\,324\,47} \quad \text{因此：} \delta' = -15^{\circ}46'30''.0$$

如果用不严格公式(39.4)和(39.5)代替(39.2)和(39.3)，我们得到：

$$\Delta\alpha = +19''.409 = +1^{\text{s}}.29, \text{ as above ;}$$

$$\Delta\delta = -14''.1, \text{ 因此 } \delta' = \delta - 14''.1 = -15^{\circ}46'30''.0, \text{ 结果和上面的一样}$$

作为练习，对月亮执行计算，同样在 Palomar 天文台，使用以下虚构的数据，例如：

$$\alpha = 1^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}.00 = 15^{\circ}.000\,000 \quad H = 4^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}.00 = +60^{\circ}.000\,000$$

$$\delta = +5^{\circ}.000\,000 \quad \pi = 0^{\circ}59'00''$$

你先使用 (39.2) 和 (39.3) 计算。然后使用 (39.6) 和 (39.7) 计算。你将得到相同的结果。你再使用不严格表达式 (39.4) 和 (39.5) 计算，并比较结果的差别。

我们来考虑相反的问题，从已观测到的站心坐标 α' 和 δ' 推算出地心坐标 α 和 δ 。对行星和慧星，修正量 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 是很小的，所以可以直接使用公式 (39.4) 和 (39.5) 得到，站心坐标减去这个修正量即可。

站心地平坐标中的视差

天顶的视差总是很小的(如果地球是个球形的，视差为零)。在地平上，天顶的视差总是小于 $\pi/300$ ，式中 π 是天体的赤道地平视差。

由于视差，天体的视地平纬度小于“地心”纬度 h 。除了高精度的需要，地平纬度的视差 p 可用下式计算：

$$\sin(p) = \rho \sin(\pi) \cos(h)$$

除了月亮，视差是很小的，所以可以认为 p 和 π 与它们的正弦量的相等的，所以： $p = \rho \pi \cos(h)$

ρ 是指观测者到地心的距离，以赤道半径为单位(详见第 10 章)。很多情况下，可简单写作 $\rho=1$ 。

在黄道坐标中的视差

可以直接从“地心”黄道坐标计算出天体(月亮或行星)的地平坐标。以下公式由 Joseph Johann von Littrow 提供(《Theoretische and Pratische Astronomie》卷 I, 第 91 页, 维也纳, 1821), 不过, 形式上稍做修改。这些表达式是严格的。

设：

λ = 天体的地心黄经

β = 它的地心黄纬

s = 它的地心视半径

λ', β', s' = 与上面相同的量，但它们站心坐标

φ = 观测者纬度

ε = 黄赤交角

θ = 本地恒星时

π = 天体的赤道地平视差

对于给定的位置，用第 10 章的方法计算出 $\rho \sin \varphi'$ 和 $\rho \cos \varphi'$ 。为了书写简捷，这两个量分别写为 S 和 C，那么：

$$N = \cos \lambda \cos \beta - C \sin \pi \cos \theta$$

$$\tan \lambda' = \frac{\sin \lambda \cos \beta - \sin \pi (S \sin \varepsilon + C \cos \varepsilon \sin \theta)}{N}$$

$$\tan \beta' = \frac{\cos \lambda' (\sin \beta - \sin \pi (S \cos \varepsilon - C \sin \varepsilon \sin \theta))}{N}$$

$$\sin s' = \frac{\cos \lambda' \cos \beta' \sin s}{N}$$

作为练习，试计算 $\lambda' \beta' s'$ ，使用以下数据：

$$\lambda = 181^\circ 46' 22''.5$$

$$\beta = +2^\circ 17' 26''.2$$

$$\pi = 0^\circ 59' 27''.7$$

$$s = 0^\circ 16' 15''.5$$

$$\phi = +50^\circ 05' 07''.8, \text{ at sea level}$$

$$\varepsilon = 23^\circ 28' 00''.8$$

$$\theta = 209^\circ 46' 07''.9$$

答案：

$$\lambda' = 181^\circ 48' 05''.0$$

$$\beta' = +1^\circ 29' 07''.1$$

$$s' = 0^\circ 16' 25''.5$$

第四十章 行星圆面被照亮的比例及星等

[许剑伟 于家里 2008 年 5 月 3 日]

从地球上，行星圆面被照亮部分的比例，可由下式计算：

$$k = (1 + \cos i) / 2 \quad (40.1)$$

式中 i 是相位角，它由下式计算：

$$\cos i = (r^2 + \Delta^2 - R^2) / (2r\Delta)$$

式中 r 是行星到太阳的距离， Δ 是它到地球的距离， R 是日地距离，全部使用天文单位。

联立这两个公式，得：

$$k = ((r+\Delta)^2 - R^2) / (4r\Delta) \quad (40.2)$$

如果行星的位置已经使用第 32 章的“第一种方法”得到，那么我们有(使用原来的符号)：

$$\cos i = (R - R_0 \cos B \cos (L - L_0)) / \Delta \quad (40.3)$$

或者：

$$\cos i = (x \cos B \cos L + y \cos B \sin L + z \sin B) / \Delta \quad (40.4)$$

行星被照亮的边缘的中心的位位置角，可以使用第 51 章月亮的计算方法。

例 40. a ——计算 1992 年 12 月 20 日 0h TD，金星圆面被照亮部分的比例。

在“例 32. a”中，我们已得到该时刻的参数：

$$r = 0.724604 \text{ (原处是 } R), R = 0.983824 \text{ (原处是 } R_0), \\ \Delta = 0.910947$$

因此，利用公式(40.2)， $k=0.647$ 。

或者，使用“例 32. a”中的： L_0 和 R_0 (来自 A 式)， L 、 B 、 R (来自 B 式)， x 、 y 、 z (来自 C 式)，及 $\Delta=0.910947$ ，再利用公式(40.3)和(40.4)，这两式均得到 $\cos(i)=0.29312$ ，因此 $k=0.647$ ，与上面的相同。

对于水星和金星， k 的值在 0 到 1 之间。对于火星， k 的值从不小于 0.838(大约)。对于木星，相位角 i 总是小于 12 度，因此 k 的值在 0.989 到 1 之间变化。对于土星， i 的值总是小于 6.5 度，所以从地球上看来，该行星的 k 值仅在 0.997 到 1 之间变化。

在金星的情况下， k 可以使用以下方法估算。

利用公式(21.1)计算出 T。那么：

$$V = 261^\circ.51 + 22518^\circ.443T$$

$$M = 177^\circ.53 + 35999^\circ.050T$$

$$M' = 50^\circ.42 + 58517^\circ.811T$$

$$W = V + 1^\circ.91 \sin M + 0^\circ.78 \sin M'$$

$$\Delta^2 = 1.52321 + 1.44666 \cos W \quad (\Delta > 0)$$

$$k = ((0.72333 + \Delta)^2 - 1) / (2.89332\Delta)$$

另外，金星距角 ψ 的估值是： $\cos \psi = (\Delta^2 + 0.4768) / (2\Delta)$

例 40. b —— 和例 40. a 一样，但我们现在使用上面描述的估算法。

我们依次得到：

$$JD = 2448\,976.5$$

$$T = -0.070\,321\,697$$

$$V = -1322^\circ.025 = +117^\circ.975$$

$$M = -2353^\circ.984 = +166^\circ.016$$

$$M' = -4064^\circ.652 = +255^\circ.348$$

$$W = V + 0^\circ.462 - 0^\circ.755$$

$$W = 117^\circ.682$$

$$\Delta^2 = 0.851\,144$$

$$\Delta = 0.922\,575$$

$$k = 0.640$$

正确的值参见“例 40. a”，是 0.647。

行星的星等

从地球上，某时刻行星的视(恒星)星等依赖于：行星到地球的距离 Δ 、它到太阳的距离(r)以及相位角(i)。对于土星，星等还与土星环的状态有关。

G. Muller 的公式基于 1877 到 1891 年的观测，曾在天文年历中使用多年。以下是可视星等的数值表达：

$$\text{水星} \quad +1.16 + 5 \log r\Delta + 0.02838 (i - 50) + 0.000\,1023 (i - 50)^2$$

$$\text{金星} \quad -4.00 + 5 \log r\Delta + 0.01322 i + 0.000\,000\,4247 i^3$$

$$\text{火星} \quad -1.30 + 5 \log r\Delta + 0.01486 i$$

$$\text{木星} \quad -8.93 + 5 \log r\Delta$$

$$\text{土星} \quad -8.68 + 5 \log r\Delta + 0.044 |\Delta U| - 2.60 \sin |B| + 1.25 \sin^2 B$$

$$\text{天王星} \quad -6.85 + 5 \log r\Delta$$

$$\text{海王星} \quad -7.05 + 5 \log r\Delta$$

式中 i 的单位是度； r 和 Δ 的单位是天文单位，对数计

算是以 10 为底的。对于土星， ΔU 和 B 与土星环有关，在第 44 章中定义；注意， ΔU 和 B 应为正值， ΔU 单位是度。（做为估算，相位角 i 可能用 ΔU 替换）。

当然，Muller 的表达式并不完美。例如，对于木星，没有考虑相位角效果。土星的公式中，在阳的地平纬度 B' 在行星环之上没有考虑；当 B 和 B' 符号相反，环的暗的一边朝向地球，但 Muller 没有考虑这种情况。

在任何情况下，这样计算的星等应舍入到 0.1，舍入到 0.01 是没有意义的。例如，火星本来的亮度的差异可达 0.3 星等，火星的一些区域的暗纹比其它区域多，所以一些行星的亮度与它们朝向我们的表面有关。极帽变化和较大的沙尘暴也会影响星等。对于木星和土星，还有变化的大气现象等。

例 40. c ——1992 年 12 月 20.0 TD 金星的星等。

从例 40. a，我们有： $r = 0.724604$ ， $\Delta = 0.910947$ ， $\cos i = 0.29312$

因此 $i = 72.96$ 度。

由 Muller 的金星公式得：星等 = -3.8。

例 40. d —— 1992 年 12 月 16.0 TD 土星的星等。

从例 44. a，我们有： $r = 9.867882$ ， $B = 16.442$ 度， $\Delta = 10.464606$ ， $\Delta U = 4.198$ 度

由 Muller 的土星公式得：星等 = +0.9。

自从 1984 年，美国《天文年历》使用了其它计算行星可视星等的公式，并申明这些新的表达式是“D. L. Harris 建立的”。事实上，在他的论文[3]中，Harris 并没有提供新的表达式。

对于水星和金星，Harris(其论文的第 277 和 288 页)只是提到表达式是法国天文学家 A. Danjon 推导的。Harris 讲到绝对星等和相位系数的值是他人创建的，而他自己并没有打算或给了新的表达式。

如果 r 、 Δ (天文单位)、 i (度单位)与前面所述的一样，

1984 年开始,《天文年历》使用的新的表达式是:

水星	$-0.42 + 5 \log r\Delta + 0.0380 i - 0.000\,273 i^2 + 0.000\,002 i^3$
金星	$-4.40 + 5 \log r\Delta + 0.0009 i + 0.000\,239 i^2 - 0.000\,000\,65 i^3$
火星	$-1.52 + 5 \log r\Delta + 0.016 i$
木星	$-9.40 + 5 \log r\Delta + 0.005 i$
土星	与Muller的公式相同, 只是把绝对星等值-8.8换为-8.68
天王星	$-7.19 + 5 \log r\Delta$
海王星	$-6.87 + 5 \log r\Delta$
冥王星	$-1.00 + 5 \log r\Delta$

小行星的星等详见第 32 章。

参考资料

- 1、《天文历书的补充解释》(伦敦, 1961), 第 314 页。
- 2、1984 年《天文年历》(华盛顿), 第 L8 页; 以及以后的卷。
- 3、Danjon Harris, “行星及某某星(原文看不清)的光度测量和色度测量”, 第 8 章(第 272ff 页)... (原文看不清)

第四十一章 火星物理表面星历计算(未译)

第四十二章 木星物理表面星历计算(未译)

第四十三章 木星的卫星位置(未译)

第四十四章 土星环(未译)

第四十五章 月球位置

[许剑伟 2008-02-27 日 译于莆田十中]

为了准确计算出某时刻月球的准确位置，须计算月球黄经黄纬及距离的数百个周期项。这已超出本书的范围，这里仅考虑主要的周期项，得到的黄经精度是 $10''$ ，纬度精度是 $4''$ 。

利用本章描述的算法，可得到地心 Date 平黄道分点(译者注：平黄道与平赤道的升交点，近似春分点)的月心位置坐标：黄经(λ)、黄纬(β)及地心到月心距离(Δ 千米)。另外，赤道地平视差 π 由下式获得：

$$\sin\pi=6378.14/\Delta$$

一、计算方法：

本章的周期项是基于 ELP-2000/82 月球理论。但 L' ， D ， M ， M' ， F 平参数使用 Chapront 的改进表达式。

T 使用 [21.1](#) 式计算， T 表达为 J2000 起算的世纪数，并取足够的小数位(至少 9 位，每 0.000 000 001 世纪月球移动 1.7 角秒)。

使用以下表达式计算角度 L' ， D ， M ， M' ， F ，角度单位是度。为避免出现大角度，最后结果还应转为 0—360 度。

月球平黄经：

$$L'=218.3164591+481267.88134236T-0.0013268T^2+T^3/538841-T^4/65194000$$

月日距角：

$$D=297.8502042+445267.1115168T-0.0016300T^2+T^3/545868-T^4/113065000$$

太阳平近点角：

$$M=357.5291092+35999.0502909T-0.0001536T^2+T^3/24490000$$

月亮平近点角：

$$M'=134.9634114+477198.8676313T+0.0089970T^2+T^3/$$

$$69699 - T^4 / 14712000$$

月球经度参数(到升交点的平角距离):

$$F = 93.2720993 + 483202.0175273T - 0.0034029T^2 - T^3 / 3 \\ 526000 + T^4 / 863310000$$

三个必要的参数:

$$A1 = 119.75 + 131.849T$$

$$A2 = 53.09 + 479264.290T$$

$$A3 = 313.45 + 481266.484T$$

取和计算 45.A 表中各项(ΣI 及 Σr), 取和计算 45.B 表中各项(Σb)。 ΣI 与 Σb 是正弦项取和, Σr 是余弦项取和。正余弦项表达为 $A \sin(\theta)$ 或 $A \cos(\theta)$, 式中的 θ 是表中 D、M、M'、F 的线性组合, 组合系数在表 45.A 及 45.B 相应的列中, A 是振幅。

以表 45.A 第 8 行为例:

$$I8 = A \sin(\theta) = +57066 * \sin(2D - M - M' + 0)$$

$$r8 = A \cos(\theta) = -152138 * \cos(2D - M - M' + 0)$$

同理可计算第 1、2、3、4.... 各行, 得到 $I1$ 、 $I2$ 、 $I3...$ 及 $r1$ 、 $r2$ 、 $r3...$

$$\text{最后 } \Sigma I = I1 + I2 + I3 + \dots; \Sigma r = r1 + r2 + r3 + \dots$$

然而, 表中的这些项包含了了 M(太阳平近点角), 它与地球公转轨道的离心率有关, 就目前而言离心率随时间不断减小。由于这个原因, 振幅 A 实际上是个变量(并不是表中的常数), 角度中含 M 或 -M 时, 还须乘上 E, 含 2M 或 -2M 时须乘以 E 的平方进行修正。E 的表达式如下:

$$E = 1 - 0.002516T - 0.0000074T^2$$

此外, 还要处理主要的行星摄动问题 ($A1$ 与金星摄动相关, $A2$ 与木星摄动相关, L' 与地球扁率摄动相关):

$$\Sigma I += +3958 * \sin(A1) + 1962 * \sin(L' - F) + 318 \\ * \sin(A2)$$

$$\Sigma b += -2235 * \sin(L') + 382 * \sin(A3) + 175 * \sin(A1 \\ - F) + 175 * \sin(A1 + F) + 127 * \sin(L' - M') - 115$$

$$* \sin(L' + M')$$

最后得到月球的坐标如下：

$$\lambda = L' + \Sigma I / 1000000 \text{ (黄经单位: 度)}$$

$$\beta = \Sigma b / 1000000 \text{ (黄纬单位: 度)}$$

$$\Delta = 385000.56 + \Sigma r / 1000 \text{ (距离单位: 千米)}$$

因 45.A 及 45.B 表中的振幅系数的单位是 10^{-6} 度及 10^{-3} 千米，所以上式计算时除以 1000000 和 1000。

二、两个计算用的表：

[表 45.A]

月球黄经周期项(ΣI)及距离(Σr)

黄经单位：0.000001 度，距离单位：0.001 千米

角度的组合系数	ΣI 的各项振幅 A	Σr 的各项振幅 A
D M M' F	(正弦振幅)	(余弦振幅)

0	0	1	0	6288744	-20905355
2	0	-1	0	1274027	-3699111
2	0	0	0	658314	-2955968
0	0	2	0	213618	-569925
0	1	0	0	-185116	48888
0	0	0	2	-114332	-3149
2	0	-2	0	58793	246158
2	-1	-1	0	57066	-152138
2	0	1	0	53322	-170733
2	-1	0	0	45758	-204586
0	1	-1	0	-40923	-129620
1	0	0	0	-34720	108743
0	1	1	0	-30383	104755
2	0	0	-2	15327	10321
0	0	1	2	-12528	0
0	0	1	-2	10980	79661

4	0	-1	0	10675	-34782
0	0	3	0	10034	-23210
4	0	-2	0	8548	-21636
2	1	-1	0	-7888	24208
2	1	0	0	-6766	30824
1	0	-1	0	-5163	-8379
1	1	0	0	4987	-16675
2	-1	1	0	4036	-12831
2	0	2	0	3994	-10445
4	0	0	0	3861	-11650
2	0	-3	0	3665	14403
0	1	-2	0	-2689	-7003
2	0	-1	2	-2602	0
2	-1	-2	0	2390	10056
1	0	1	0	-2348	6322
2	-2	0	0	2236	-9884
0	1	2	0	-2120	5751
0	2	0	0	-2069	0
2	-2	-1	0	2048	-4950
2	0	1	-2	-1773	4130
2	0	0	2	-1595	0
4	-1	-1	0	1215	-3958
0	0	2	2	-1110	0
3	0	-1	0	-892	3258
2	1	1	0	-810	2616
4	-1	-2	0	759	-1897
0	2	-1	0	-713	-2117
2	2	-1	0	-700	2354
2	1	-2	0	691	0
2	-1	0	-2	596	0
4	0	1	0	549	-1423

0	0	4	0	537	-1117
4	-1	0	0	520	-1571
1	0	-2	0	-487	-1739
2	1	0	-2	-399	0
0	0	2	-2	-381	-4421
1	1	1	0	351	0
3	0	-2	0	-340	0
4	0	-3	0	330	0
2	-1	2	0	327	0
0	2	1	0	-323	1165
1	1	-1	0	299	0
2	0	3	0	294	0
2	0	-1	-2	0	8752

[表 45. B]
月球黄纬周期项(ΣI), 单位: 0.000001 度

角度的组合系数 ΣI 的各项振幅 A
D M M' F (正弦振幅)

0	0	0	1	5128122
0	0	1	1	280602
0	0	1	-1	277693
2	0	0	-1	173237
2	0	-1	1	55413
2	0	-1	-1	46271
2	0	0	1	32573
0	0	2	1	17198
2	0	1	-1	9266

0	0	2	-1	8822
2	-1	0	-1	8216
2	0	-2	-1	4324
2	0	1	1	4200
2	1	0	-1	-3359
2	-1	-1	1	2463
2	-1	0	1	2211
2	-1	-1	-1	2065
0	1	-1	-1	-1870
4	0	-1	-1	1828
0	1	0	1	-1794
0	0	0	3	-1749
0	1	-1	1	-1565
1	0	0	1	-1491
0	1	1	1	-1475
0	1	1	-1	-1410
0	1	0	-1	-1344
1	0	0	-1	-1335
0	0	3	1	1107
4	0	0	-1	1021
4	0	-1	1	833
0	0	1	-3	777
4	0	-2	1	671
2	0	0	-3	607
2	0	2	-1	596
2	-1	1	-1	491
2	0	-2	1	-451
0	0	3	-1	439
2	0	2	1	422
2	0	-3	-1	421
2	1	-1	1	-366

2	1	0	1	-351
4	0	0	1	331
2	-1	1	1	315
2	-2	0	-1	302
0	0	1	3	-283
2	1	1	-1	-229
1	1	0	-1	223
1	1	0	1	223
0	1	-2	-1	-220
2	1	-1	-1	-220
1	0	1	1	-185
2	-1	-2	-1	181
0	1	2	1	-177
4	0	-2	-1	176
4	-1	-1	-1	166
1	0	1	-1	-164
4	0	1	-1	132
1	0	-1	-1	-119
4	-1	0	-1	115
2	-2	0	1	107

例 45. a—— 计算月球的地心黄经、黄纬、距离及赤道视差，时间 1992 年 4 月 0 时(力学时)，结果如下：

JDE = 2448724.5(儒略日) A1 = 109°.57

T = -0.077221081451 A2 = 123°.78

L' = 134°.290186 A3 = 229°.53

D = 113°.842309 E = 1.000194

M = 97°.643514 $\Sigma I = -1127527$ (含 A1, A2 等项)

M' = 5°.150839 $\Sigma b = -3229127$ (含 A1, A2 等项)

F = 219°.889726 $\Sigma r = -16590875$

从以上算出：

$$\lambda = 134^{\circ}.290186 - 1^{\circ}.127527 = 133^{\circ}.162659$$

$$\beta = -3^{\circ}.229127 = -3^{\circ}13'45''$$

$$\Delta = 385000.56 - 16590.875 = 368409.7 \text{ km}$$

$$\pi = \arcsine(6378.14/368409.7) = 0^{\circ}.991990 = 0^{\circ}59'31''.2$$

要获得地心视黄经，还应加上黄经章动($\Delta\psi$)， $\Delta\psi = +16''.595 = +0^{\circ}.004610$ ，得到：

$$\lambda_{\text{视}} = 133^{\circ}.162659 + 0^{\circ}.004610 = 133^{\circ}.167269 = 133^{\circ}10'02''$$

瞬时黄赤交角 = 平黄赤交角(ϵ_0) + 交角章动($\Delta\epsilon$)：

$$\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon = 23^{\circ}26'26''.29 = 23^{\circ}.440636 \text{ (注：章动计算详见 21 章)}$$

这样就可得到月球的地心视赤经和视赤纬：

$$\alpha = 134^{\circ}.688473 = 8^{\text{h}} 58^{\text{m}} 45^{\text{s}}.2$$

$$\delta = +13^{\circ}.768366 = +13^{\circ}46'06''$$

利用完整的 ELP-2000/82 月球理论获得的准确值是(注：不妨同以上计算结果比较)：

$$\lambda = 133^{\circ}10'00'' \quad \alpha = 8^{\text{h}} 58^{\text{m}} 45^{\text{s}}.1$$

$$\beta = -3^{\circ}13'45'' \quad \delta = +13^{\circ}46'06''$$

$$\Delta = 368405.6 \text{ km} \quad \pi = 0^{\circ}59'31''.2$$

三、月球的升交点和近地点

根据 Chapront[2]，月球升交点(平)黄经 Ω 及(平)近点角 π ，可由以下二式计算(单位是度)

$$\Omega = 125.0445550 - 1934.1361849T + 0.0020762T^2 + T^3/467410 - T^4/60616000$$

$$\pi = 83.3532430 + 4069.0137111T - 0.0103238T^2 - T^3/80053 + T^4/18999000$$

式中 T 的单位与上文的相同(即：J2000 起算的世纪数)，这些经度是指黄经(Date 平黄道分点起算的经度)。

从 Ω 的公式中，我们可以找到升(或降)交点等于春风点的瞬时，即 $\Omega=0^{\circ}$ 或 180° 。在 1910 至 2110 期间，这种情况发生在如下日期：

$\Omega=0^\circ$ $\Omega=180^\circ$

1913 年 05 月 27 1922 年 09 月 16
1932 年 01 月 06 1941 年 04 月 27
1950 年 08 月 17 1959 年 12 月 07
1969 年 03 月 29 1978 年 07 月 19
1987 年 11 月 08 1997 年 02 月 27
2006 年 06 月 19 2015 年 10 月 10
2025 年 01 月 29 2034 年 05 月 21
2043 年 09 月 10 2052 年 12 月 30
2062 年 04 月 22 2071 年 08 月 12
2080 年 12 月 01 2090 年 03 月 23
2099 年 07 月 13 2108 年 11 月 03

第四十六章 月面被照亮部分

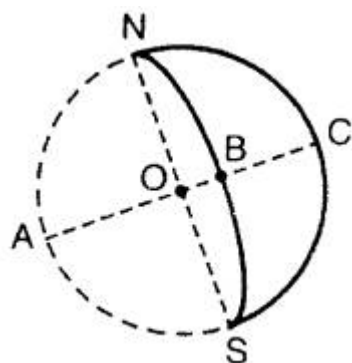
[许剑伟 译于家里 2008 年 4 月 5 日]

月亮表面被照亮的比例：

月面被照亮的部分用 k 来表示，它取决于从月心看地日的距角(注：所谓距角指星体到太阳的角距离)，这个距角叫做相位角 (i)。公式如下：

$$k = (1 + \cos(i)) / 2 \quad (46.1)$$

这个值是照亮区与整个月面的比例，也是与月角直径(图中 NS)相垂直的直径(图中 AC)的被照亮的长度与月面直径的比值(译者注： $k=BC/AC$)，请参考下图。



NCS = 被照亮的一面
 N = 北月角
 S = 南月角
 C = 被照亮的边缘的中点
 NOS = 月角连线
 NBS = 明暗分界线（一个弧）
 月面被照亮的部分 k = 长度比 BC: AC = 面积比 NBSC:
 NASC

地心观测的相位角 i ，可以使用以下方法得到。

首先，找出地心坐标中的月球距角 Ψ （日月之间的角距离），可使用如下方法之一：

$$\cos(\psi) = \sin(\delta_o) * \sin(\delta) + \cos(\delta_o) * \cos(\delta) * \cos(\alpha_o - \alpha) \quad (46.2)$$

$$\cos(\psi) = \cos(\beta) * \cos(\lambda - \lambda_o)$$

式中， $(\alpha_o, \delta_o, \lambda_o)$ 和 $(\alpha, \delta, \lambda)$ 分别是地心坐标中太阳和月亮的（视赤经、视赤纬、视黄经）， β 是月球的地心黄纬。

（译者注：请注意区分月心坐标下的地球距角 i 与地心坐标下的月球距角 ψ ，日月地连成三角形， i 与 ψ 就是这个三角形中的二个角。）

然后，我们有以下下算式：

$$\tan(i) = R * \sin(\psi) / (\Delta - R * \cos(\psi)) \quad (46.3)$$

式中 R 是日地距离， Δ 是月地距离，二者的距离单位是千米。 ψ 和 i 均在 0 到 180 度之间。当 i 已知，则可由 46.1 式算出。

当然，计算 k 是不需要高精度的日、月的地心位置坐标。1 分的精度已经足够了。

如果高精度要求不高，使用 $\cos(i) = -\cos(\psi)$ 计算 i 即可，这样计算， k 的结果误差不会超过 0.0014。

较低精度下，使用如下忽略月球纬度的方法计算 i 的近似值，结果仍然比较好：

$$i = 180^\circ - D \quad (46.4)$$

$$-6^\circ.289 \sin(M') + 2^\circ.100 \sin(M) - 1^\circ.274 \sin(2D - M') \\ - 0^\circ.658 \sin(2D) - 0^\circ.214 \sin(2M') - 0^\circ.110 \sin(D)$$

式中角度 D 、 M 和 M' 通过 (45.2) 式和 (45.4) 式得到。
在这种情况下，无需计算日月的地心位置坐标。

月亮明亮边缘的位置角（月亮的弓背中点 C 的位置角）

月亮明亮边缘的位置角 χ 是月亮被照亮部分的边缘的中点 C 的位置角， χ 角是从月面北点朝东方转到 C 点，不是从月球自转轴起算（也不是从北月角起算，译者注：沿北极到月心再到南极画经圈，该经圈与月面上方的交点就是北点）。可以通过下面的公式得到：

$$\tan(\chi) = \frac{\cos(\delta_o) \sin(\alpha_o - \alpha)}{\sin(\delta_o) \cos(\delta) - \cos(\delta_o) \sin(\delta) \cos(\alpha_o - \alpha)} \quad (46.5)$$

式中 α_o ， δ_o ， α 和 δ 的含意和前面的相同。

角 χ 在 270 度左右是上弦月，90 度左右是满月。应使用 ANT2 函数计算角 χ ，确保结果在正确象限里。公式 (46.5) 里的分子、分母是 ANT2() 的两个传入参数。

当 χ 表示月亮被照亮边缘中点的位置角，那么南北两个月角的位置角是 $\chi + 90$ 度和 $\chi - 90$ 度。

使角 χ 的好处是，它明确定义了月亮被照亮面的边缘。

要注意的是：角 χ 不是从天顶开始测量的，被照亮面边缘的天顶角是 $\chi - q$ ，这里 q 是视差角（参见第 11 章）。

最后，46.5 式还可以应用于行星的计算。

例 46. a —— 1992 年 4 月 12 日 0 TD 时刻的月亮
在例子 45. a 中我们得到了那一时间的：

$$\alpha = 134^\circ.6885$$

$$\delta = +13^\circ.7684$$

$$\Delta = 368\,408 \text{ km}$$

同一时刻的太阳的视位置和距离是：

$$\alpha_o = 1\text{h } 22\text{m } 37\text{s}.9 = 20^\circ.6579$$

$$\delta_o = +8041'47'' = +8^\circ.6964$$

$$R = 1.0024977 \text{ AU} = 149971520 \text{ km}$$

根据公式 (46.2) 由 $\cos(\Psi) = -0.354991$, 得到 $\Psi = 110.7929$ 度。然后可得:

$$\tan(i) = +2.615403, \text{ 使用 } 46.3 \text{ 式得到:}$$

$$i = 69^\circ.0756$$

接下来, 根据 46.1 式, $k = 0.6786$, 约等于是 0.68。

如果我们使用近似关系 $\cos(i) = -\cos(\psi)$, 我们算得 $k = 0.6775$, 也约等于 0.68。

现在我们使用近似式 46.4 计算。在例子 45. a 中我们得到瞬时值:

$$D = 113^\circ.8423$$

$$M = 97^\circ.6435$$

$$M' = 5^\circ.1508$$

然后使用公式 (46.4) 得到 $i = 68^\circ.88$, 再通过公式 (46.1) 得到 $k = 0.6802$, 也约等于 0.68。

最后, 依照公式 (46.5) 得到:

$$\tan(\chi) = (-0.90283) / (+0.24266)$$

$$\text{得 } \chi = 285.0 \text{ 度}$$

第四十七章 月相

[许剑伟 译于家里 2008-4-6]

新月, 半满上弦月, 满月, 半满下弦月时刻依照如下的精确定义, 分别是在月亮视黄经与太阳视黄经相差为 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 那个时刻。

因此, 计算这些时刻的月相, 需要分别计算太阳和月亮的视黄经。(然而, 章动的影响可以忽略, 因为黄经章动 $\Delta\psi$ 对太阳和月亮乃至其它星体的影响是一样的, 计算日月视黄经之差时章动部分完全相消)

如果对精度要求不高，可以使用本章描述的方法计算月相。这些公式基于 Chapront's ELP-2000/82 月亮理论（在 45 章中说过该理论已改善了 M, M' 等参数），以及 Bretagnon 和 Francou 的 VSOP 行星理论的太阳计算部分。时间使用历书儒略日（JDE），因此是力学时。

以下是平月相的时间，它已修正了太阳光差及月球光行时：

$$\text{JDE} = 2451550.09765 + 29.530588853 * k + 0.0001337 * T^2 - 0.000000150 * T^3 + 0.00000000073 * T^4 \quad (47.1 \text{ 式})$$

式中 k 是给定的新月的一个整数值，当 k 的值

增加了 0.25，为“平半满上弦月”时刻；

增加了 0.50，为“平满月”时刻；

增加了 0.75，为“平半满下弦月”时刻。

任意其他的 k 值将导致没有意义的结果！2000 年 1 月 6 日相应的值是 $k=0$ 。计算 2000 年以前的月相， k 取负数。例如：

+479.00 和 -2793.00 对应于新月，+479.25 和 -2792.75 对应于半满上弦月，+479.50 和 -2792.50 对应于满月，+479.75 和 -2792.25 对应于半满下弦月。

k 可以通过下面的公式近似得到： $k \approx (\text{year} - 2000) * 12.3685$ (47.2 式)

式中的“year”是带小数点的十进制数，例如 1987.25 表示 1987 年 3 月末（因为这 0.25 年是从 1987 年的年首起算的）。这个符号“ \approx ”表示“约等于”。

最后，47.1 式里 T 是 J2000.0 起算的儒略世纪数，用下式可得到足够的精度： $T = k / 1236.85$ (47.3 式)

因此在历元 J2000.0 之前是负数的。

接下来，通过使用式 45.6 式计算 E ，以及下面的几个角度。这些角度的单位是度，如果需要，可将它们转到 0—360 度。如果有必要，还可以转换为弧度表示。

JDE 时刻的角参数：

太阳平近点角：

$$M=2.5534+29.10535669k-0.0000218T^2-0.00000011T^3 \quad (47.4)$$

月亮的平近点角：

$$M'=201.5643+385.81693528k+0.0107438T^2+0.00001239T^3-0.000000058T^4 \quad (47.5)$$

月亮的纬度参数：

$$F=160.7108+390.67050274k-0.0016341T^2-0.00000227T^3+0.000000011T^4 \quad (47.6)$$

月亮轨道升交点经度：

$$\Omega=124.7746-1.56375580k+0.0020691T^2+0.00000215T^3 \quad (47.7)$$

行星的参数：

$$A1 = 299.77 + 0.107408k - 0.009173T^2$$

$$A2 = 251.88 + 0.016321k$$

$$A3 = 251.83 + 26.651886k$$

$$A4 = 349.42 + 36.412478k$$

$$A5 = 84.66 + 18.206239k$$

$$A6 = 141.74 + 53.303771k$$

$$A7 = 207.14 + 2.453732k$$

$$A8 = 154.84 + 7.306860k$$

$$A9 = 34.52 + 27.261239k$$

$$A10= 207.19 + 0.121824k$$

$$A11= 291.34 + 1.844379k$$

$$A12=161.72 + 24.198154k$$

$$A13= 239.56 + 25.513099k$$

$$A14= 331.55 + 3.592518k$$

要计算真月相（视月相）发生的时刻，请对 JDE 加上下面的修正，以日为单位：

表1			表2	
新月	满月	周期	半满上弦或下弦	周期
-0.40720	-0.40614	$\times \sin M'$	-0.62801	$\times \sin M'$
+0.17241 $\times E$	+0.17302 $\times E$	M	+0.17172 $\times E$	M
+0.01608	+0.01614	$2M'$	-0.01183 $\times E$	$M' + M$
+0.01039	+0.01043	$2F$	+0.00862	$2M'$
+0.00739 $\times E$	+0.00734 $\times E$	$M' - M$	+0.00804	$2F$
-0.00514 $\times E$	-0.00515 $\times E$	$M' + M$	+0.00454 $\times E$	$M' - M$
+0.00208 $\times E^2$	+0.00209 $\times E^2$	$2M$	+0.00204 $\times E^2$	$2M$
-0.00111	-0.00111	$M' - 2F$	-0.00180	$M' - 2F$
-0.00057	-0.00057	$M' + 2F$	-0.00070	$M' + 2F$
+0.00056 $\times E$	+0.00056 $\times E$	$2M' + M$	-0.00040	$3M'$
-0.00042	-0.00042	$3M'$	-0.00034 $\times E$	$2M' - M$
+0.00042 $\times E$	+0.00042 $\times E$	$M + 2F$	+0.00032 $\times E$	$M + 2F$
+0.00038 $\times E$	+0.00038 $\times E$	$M - 2F$	+0.00032 $\times E$	$M - 2F$
-0.00024 $\times E$	-0.00024 $\times E$	$2M' - M$	-0.00028 $\times E^2$	$M' + 2M$
-0.00017	-0.00017	Ω	+0.00027 $\times E$	$2M' + M$
-0.00007	-0.00007	$M' + 2M$	-0.00017	Ω
+0.00004	+0.00004	$2M' - 2F$	-0.00005	$M' - M - 2F$
+0.00004	+0.00004	$3M$	+0.00004	$2M' + 2F$
+0.00003	+0.00003	$M' + M - 2F$	-0.00004	$M' + M + 2F$
+0.00003	+0.00003	$2M' + 2F$	+0.00004	$M' - 2M$
-0.00003	-0.00003	$M' + M + 2F$	+0.00003	$M' + M - 2F$
+0.00003	+0.00003	$M' - M + 2F$	+0.00003	$3M$
-0.00002	-0.00002	$M' - M - 2F$	+0.00002	$2M' - 2F$
-0.00002	-0.00002	$3M' + M$	+0.00002	$M' - M + 2F$
+0.00002	+0.00002	$4M'$	-0.00002	$3M' + M$

仅仅在半满相位时要做下面的计算：

$$W = 0.00306 - 0.00038 \times E \times \cos(M) + 0.00026 \times \cos(M') - 0.00002 \times \cos(M' - M) + 0.00002 \times \cos(M' + M) + 0.00002 \times \cos(2F)$$

附加修正：

半满上弦月：+ W，半满下弦月：- W

给所有月相时刻另外加上的修正量 $A_n/1000000$ ，式中 A_n 为以下 14 个参数的和：

$$325\sin(A_1) + 165\sin(A_2) + 164\sin(A_3) + 126\sin(A_4) + 110\sin(A_5) + 62\sin(A_6) + 60\sin(A_7) + 56\sin(A_8) + 47\sin(A_9) + 42\sin(A_{10}) + 40\sin(A_{11}) + 37\sin(A_{12}) + 35(\sin(A_{13}) + 23\sin(A_{14}))$$

例 47. a ——计算 1977 年 2 月产生新月的那一时刻。

1977 年 2 月中旬相当于 1977.13，因此我们使用公式 (47.2)：

$$k \approx (1977.13 - 2000) * 12.3685 = -282.87$$

根据在新月时刻 k 是整数 $k=-283$ 。然后依照公式 (47.3) 得到 $T=-0.22881$ ，之后再用公式 (47.1) 得：JDE = 2443192.94101

根据 $k=-283$ 和 $T=-0.22881$ 我们又将进一步得到：

$$E = 1.0005753$$

$$M = -8234^{\circ}.2625 = 45^{\circ}.7375$$

$$M' = -108984^{\circ}.6278 = 95^{\circ}.3722$$

$$F = -110399^{\circ}.0416 = 120^{\circ}.9584$$

$$\Omega = 576^{\circ}.3176 = 207^{\circ}.3176$$

累加第一组周期参数（新月）结果是-0.28916，需要的 14 个额外修正参数是-0.00068。因此，新月真实的时间是：

$$JDE=2443192.94101-0.28916-0.00068=2443192.65117$$

这相当于 1977 年 2 月 18.15117 TD = 1977 年 2 月 18, 3h37m41s TD

通过 ELP-2000/82 理论计算出的正确结果是 3h37m40s TD。

在 1977 年 2 月， $\Delta T=TD-UT$ 的结果实际等于 48 秒。因此，1977 年 2 月 18 日的新月出现在世界时 3h37m。可以参看例子 9. a。

例 47. b——计算公元 2044 年第一个半满下弦月出现的时间。

这里‘year’=2044，公式 (47.2) 得到 $k \approx +544.21$ ，所以我们将使用的值是 $k=+544.75$ 。

然后，使用公式 (47.1)，JDE=2467 636.88595。

累加第一组周期参数（半满下弦月）=-0.39153。

半满下弦月附加修正参数=-W=-0.0251。

累加 14 个附加修正参数=-0.00007。

因此半满下弦月的时间是：2467636.88595 - 0.39153 -

$0.00251 - 0.00007 = 2467636.49184$ ，相当于 2044 年 1 月 21 日，23h48m15s TD。

误差：

我们比较了从 1980 年到 2020 年中期，本章描述的算法得出的结果和 ELP-2000/82 以及 VSOP 87 理论得出的精确时间。

项目 平均 最大误差(秒)

新月 3.6 16.4

上弦 3.8 15.3

满月 3.8 17.4

下弦 3.8 13.0

全部相位的平均误差 = 3.72 秒

如果允许一些分钟级的误差，我们可以去掉微小的 14 个周期参数。

两个连续新月的平均间隔时间是 29.530589 天，或 29 天 12 小时 44 分 03 秒。这个叫日月合朔周期。不过，因受到太阳的强列摄动，连续的新月之间的时间间隔（或叫做阴历月），变化非常大。参看表 47.A 或者参考文献[1]。

表 47.A(在 1900 到 2100 年之间，极短和极长的阴历月)

新月日期	下一个月	阴历月的时期
1903 年 6 月 25 日	1903 年 7 月 24 日	29 天 06 小时 35 分
2035 年 6 月 6 日	2035 年 7 月 5 日	29 天 06 小时 39 分
2053 年 6 月 16 日	2053 年 7 月 15 日	29 天 06 小时 35 分
2071 年 6 月 27 日	2053 年 7 月 27 日	29 天 06 小时 36 分
1955 年 12 月 14 日	1956 年 1 月 13 日	29 天 19 小时 54 分
1973 年 12 月 24 日	1974 年 1 月 23 日	29 天 19 小时 55 分

参考文献

1. J.Meeus ， 《 ‘Les durées extrêmes de la lunaison’, l’Astronomie》(法国天文学家)，102 卷，288-289 页（1988 年 7-8 月）。

第四十八章 月亮的近地点和远地点

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 22 日]

在本章，将描述一种近似计算月亮与地球之间距离的最小值(近地点)和最大值(远地点)的方法。计算出的时间结果是儒略历书日(JDE)，因此是均匀的时间(力学时间)。我们的表达式基于 Chapront's 的月球理论 ELP-2000/82，并包含 D、M 等的改进表达表(在第 45 章中已提到)。

首先，利用下式计算平近点或远点时刻：

$$\text{JDE} = 2451534.6698 + 27.55454988k - 0.0006886T^2 - 0.000001098T^3 + 0.0000000052T^4 \quad (48.1)$$

式中，k 是整数对应近点，增加 0.5 则是远点。重要：其它 k 值是毫无意义的！

当 k=0 时，对应 1999 年 12 月 22 日的近点。所以，例如：

k = +318 和 -25，对应近点

k = +429.5 和 -1209.5 对应远点

k = +224.87 是个错误的值

K 的估计值由下式得到：

$$k \approx (\text{year} - 1999.97) * 13.2555 \quad (48.2)$$

式中“year”是带小数的，例如 2041.33，对应 2041 年 4 月。

最后，公式(48.1)中的 T 是儒略世纪数，历元 2000.0 起算。由于式可得到足够使用的精度：

$$T = k/1325.55 \quad (48.3)$$

计算以下角度。它们的单位是度，还可以转到 0 到 360 度范围。如果需要，还可以转为弧度。

JDE 时刻的月亮平距角：

$$D = 171.9179 + 335.9106046k - 0.0100250T^2 - 0.00001156T^3 + 0.000000055T^4$$

太阳平近点角：

$$M = 347.3477 + 27.1577721k - 0.0008323T^2 - 0.0000010T^3$$

月亮纬度参数：

$$F = 316.6109 + 364.5287911k - 0.0125131T^2 - 0.0000148T^3$$

由公式(48.1)得到 JDE，对表 48.A 中的各周期项求和，根据情况，选择近点的数据或远点的数据。

月亮的赤道地平视差，通过对表 48.B 各周期项取和计算得到。

从表 48.A 和 48.B 看出：

——时间计算，周期项使用正弦。视差计算，使用余弦。

——达到某一指定的系数值，近点的周期项比远点的周期项多。

——依次含有“2D”倍数的序列(如 2D-M, 4D-M, 6D-M 等)，在近地点中，其系数的正负号是交错的，而在远地点的表中，其系数的符号是相同的。

——最大的周期项系数(角参数为 2D 的那个周期项)，近地点的要比远地点的大得多。其造成的结果是，最大可能的平近地点与真近地点的差值可达 45 小时，而对于远点，这个差值最多 13 个小时。还有，月亮的近地点距离变化范围很大(大约在 356370 到 370350 千米之间)，比远地点距离(404050 到 406720 千米)变化大。

例 48. a ——计算 1988 年 10 月的月亮远地点。

因为初始时间是 10 月，对应 0.75 年(当年的年首起算)，所以 $\text{year} = 1988.75$ 。把它代入公式(48.2)，得到 $k \approx -148.73$ 。因此，我们取 $k = -148.5$ (远点！)。

由公式(48.3)和(48.1)得：

$$T = -0.112029 \quad \text{JDE} = 2447442.8191$$

然后，我们得：

$$D = -49710^\circ.8070 = 329^\circ.1930$$

$$M = -3685^{\circ}.5815 = 274^{\circ}.4185$$

$$F = -53815^{\circ}.9147 = 184^{\circ}.0853$$

对 48. A(选择远点数据)各项取和 = -0.4654 日

对 48. B(选择远点数据)各项取和 = 3240.679

因此,远地点对应时间是: $JDE = 2447442.8191 - 0.4654$
 $= 2447442.3537$

它对应 1988 年 10 月 7 日 20h 29m TD。相应月亮的赤道地平视差是 $3240''.679$, 或 $0^{\circ}54'00''.679$ 。

准确值是 20h 30m TD 和 $0^{\circ}54'00''.671$

表 48. A

时间的周期项, 单位: 日

sin 角参数	系数	近地点	sin 角参数	系数
2D	-1.6769		2D - 2M	-0.0027
4D	+0.4589		4D - 2M	+0.0024
6D	-0.1856		6D - 2M	-0.0021
8D	+0.0883		22D	-0.0021
2D - M	-0.0773 + 0.00019 T		18D - M	-0.0021
M	+0.0502 - 0.00013 T		6D + M	+0.0019
10D	-0.0460		11D	-0.0018
4D - M	+0.0422 - 0.00011 T		8D + M	-0.0014
6D - M	-0.0256		4D - 2F	-0.0014
12D	+0.0253		6D + 2F	-0.0014
D	+0.0237		3D + M	+0.0014
8D - M	+0.0162		5D + M	-0.0014
14D	-0.0145		13D	+0.0013
2F	+0.0179		20D - M	+0.0013
3D	-0.0112		3D + 2M	+0.0011
10D - M	-0.0104		4D + 2F - 2M	-0.0011
16D	+0.0086		D + 2M	-0.0010
12D - M	+0.0069		22D - M	-0.0009
5D	+0.0066		4F	-0.0008
2D + 2F	-0.0053		6D - 2F	+0.0008
18D	-0.0052		2D - 2F + M	+0.0008
14D - M	-0.0046		2M	+0.0007
7D	-0.0041		2F - M	+0.0007
2D + M	+0.0040		2D + 4F	+0.0007
20D	+0.0032		2F - 2M	-0.0006
D + M	-0.0032		2D - 2F + 2M	-0.0006
16D - M	+0.0031		24D	+0.0006
4D + M	-0.0029		4D - 4F	+0.0005
9D	+0.0027		2D + 2M	+0.0005
4D + 2F	+0.0027		D - M	-0.0004

表 48. A (续)

时间的周期项, 单位: 日

sin 角参数	系数	远地点	sin 角参数	系数
$2D$	+0.4392		$8D - M$	+0.0011
$4D$	+0.0684		$4D - 2M$	+0.0010
M	+0.0456 - 0.00011 T		$10D$	+0.0009
$2D - M$	+0.0426 - 0.00011 T		$3D + M$	+0.0007
$2F$	+0.0212		$2M$	+0.0006
D	-0.0189		$2D + M$	+0.0005
$6D$	+0.0144		$2D + 2M$	+0.0005
$4D - M$	+0.0113		$6D + 2F$	+0.0004
$2D + 2F$	+0.0047		$6D - 2M$	+0.0004
$D + M$	+0.0036		$10D - M$	+0.0004
$8D$	+0.0035		$5D$	0.0004
$6D - M$	+0.0034		$4D - 2F$	-0.0004
$2D - 2F$	-0.0034		$2F + M$	+0.0003
$2D - 2M$	+0.0022		$12D$	+0.0003
$3D$	-0.0017		$2D + 2F - M$	+0.0003
$4D + 2F$	+0.0013		$D - M$	-0.0003

表 48.B

视差的周期项, 单位: 角秒

近地点					
3629 ^{''} .215			+0 ^{''} .067 × cos	10D - M	
+63.224	× cos	2D	+0.054	4D + M	
-6.990		4D	-0.038	12D - M	
+2.834	}	2D - M	-0.038	4D - 2M	
-0.0071 T			+0.037	7D	
+1.927		6D	-0.037	4D + 2F	
-1.263		D	-0.035	16D	
-0.702		8D	-0.030	3D + M	
+0.696	}	M	+0.029	D - M	
-0.0017 T			-0.025	6D + M	
-0.690		2F	+0.023	2M	
-0.629	}	4D - M	+0.023	14D - M	
+0.0016 T			-0.023	2D + 2M	
-0.392		2D - 2F	+0.022	6D - 2M	
+0.297		10D	-0.021	2D - 2F - M	
+0.260		6D - M	-0.020	9D	
+0.201		3D	+0.019	18D	
-0.161		2D + M	+0.017	6D + 2F	
+0.157		D + M	+0.014	2F - M	
-0.138		12D	-0.014	16D - M	
-0.127		8D - M	+0.013	4D - 2F	
+0.104		2D + 2F	+0.012	8D + M	
+0.104		2D - 2M	+0.011	11D	
-0.079		5D	+0.010	5D + M	
+0.068		14D	-0.010	20D	
远地点					
3245 ^{''} .251			+0 ^{''} .052 × cos	6D	
-9.147	× cos	2D	+0.043	2D + M	
-0.841		D	+0.031	2D + 2F	
+0.697		2F	-0.023	2D - 2F	
-0.656	}	M	+0.022	2D - 2M	
+0.0016 T			+0.019	2D + 2M	
+0.355		4D	-0.016	2M	
+0.159		2D - M	+0.014	6D - M	
+0.127		D + M	+0.010	8D	
+0.065		4D - M			

使用本章描述的方法, 我们计算了月亮的 600 个近地点和 600 个远地点, 也就是从 1977 年 6 月到 2022 年 8 月。与

ELP-2000/82 理论的精确结果比较，最大误差如下：

时间的误差：近地点 31 分，远地点 3 分

视差的误差：近地点 $0''.124$ ，远地点 $0''.051$

相应的距离误差分别是：12km 和 6km

这 600 个计算时间的误差分布如下：

误差值	近地点	远地点
1 分	151	478
2 分	264	589
3 分	385	599
4 分	460	
5 分	492	
10 分	572	

两次连续的近地点，平均时间间隔是 27.5545 日(或 27 天 13 时 19 分)，这就是月亮的近地点周期。然而，由于太阳的摄动，连续近地点的具体时间间隔变化很大，在极值 24 天 16 小时到 28 天 13 小时之间。例如：

近地点：1997 年 12 月 09 日 16h.9

近地点：1998 年 01 月 03 日 08h.5

相差：24 天 16 小时

近地点：1990 年 12 月 02 日 10h.8

近地点：1990 年 12 月 30 日 23h.8

相差：28 天 13 小时

然而，两次连续远地点的时间间隔的变化范围比较窄，即在 26.98 到 27.90 天之间(26 天 23.5 小时和 27 天 21.5 小时)。

月亮近地点和远地点距离的极值

在 1500 年到 2500 年之前，14 次月亮接近地球小于 356425km，同样次数距离超过 406710km。这些情况列表于表 48.C。日期是 UT 日期。

计算时采有 Chapront 的月球运动理论 ELP-2000/82，我

们忽略了所有周期项系数小于 0.0005km(50 厘米)。计算表明, 在 1000 年范围内, 地球中心到月球中心的距离的极值是:

2257 年 1 月 1 日: 356371km

2266 年 1 月 7 日: 406720km

20 世纪的最小近地点发生在 1912 年 1 月 4 日, 早期, 已被《天空和望远镜》副主编 Roger W. Sinnott 发现。

我们看到, 这些近地点和远地点的极值全部发生在南半球科天月份, 周期是年(地球靠近太阳)。显然, 日地距离的变化有点影响月地距离。

表 48.C 近地点和远地点极值 公元1500到2500

近地点 < 356 425 km		远地点 > 406 710 km	
1548 Dec 15	356 407 km	1921 Jan 9	406 710 km
1566 Dec 26	356 399	1984 Mar 2	406 712
1771 Jan 30	356 422	2107 Jan 23	406 716
1893 Dec 23	356 396	2125 Feb 3	406 720
1912 Jan 4	356 375	2143 Feb 14	406 713
1930 Jan 15	356 397	2247 Dec 27	406 715
2052 Dec 6	356 421	2266 Jan 7	406 720
2116 Jan 29	356 403	2284 Jan 18	406 714
2134 Feb 9	356 416	2388 Nov 29	406 715
2238 Dec 22	356 406	2406 Dec 11	406 718
2257 Jan 1	356 371	2424 Dec 21	406 712
2275 Jan 12	356 378	2452 Jan 21	406 710
2461 Jan 26	356 408	2470 Feb 1	406 714
2479 Feb 7	356 404	2488 Feb 12	406 711

参考资料

- 1、Roger W. Sinnott, 1981 年 3 月 4 日给 Jean Meeus 的信件。
- 2、J. Meeus“月亮近日点与远日点的极值”, 《天空和望远镜》卷 62, 第 110-111 页(1981 年 8 月)。

第四十九章 月亮的升降交点

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 23 日]

当月亮中心经过它的轨道的升或降交点，它的地心黄纬是零。以下将得到轨道升或降交点的时刻大约值。结果表达为力学时(JDE，儒略历书日)。

当经过升交点，置 $k=1$ 个整数。当经过降交点时，置 k 为 1 个整数加上 0.5。重要： k 取任何其它值将毫无意义。

每个 k ，顺序地对应月亮经过每次升交点，当 $k=0$ 是，对应 2000 年 1 月 21 日经过升交点， k 为负值表示该日之前的升交点。

例如， $k=+233.0$ 和 -147.0 对应一个升交点， $+223.5$ 和 -146.5 对应一个降交点，而 $k=+144.76$ 是无效的值。

下式可计算出 k 的估计值：

$$k \approx (\text{year} - 2000.05) \times 13.4223 \quad (49.1)$$

式中 year 可以带有小数。那么： $T = k/1342.23$

以下角度的单位是度：

$$D = 183.6380 + 331.737\,356\,91\,k + 0.001\,5057\,T^2 \\ + 0.000\,002\,09\,T^3 - 0.000\,000\,010\,T^4$$

$$M = 17.4006 + 26.820\,372\,50\,k + 0.000\,0999\,T^2 + 0.000\,000\,06\,T^3$$

$$M' = 38.3776 + 355.527\,473\,22\,k + 0.012\,3577\,T^2 \\ + 0.000\,014\,628\,T^3 - 0.000\,000\,069\,T^4$$

$$\Omega = 123.9767 - 1.440\,989\,49\,k + 0.002\,0625\,T^2 \\ + 0.000\,002\,14\,T^3 - 0.000\,000\,016\,T^4$$

$$V = 299.75 + 132.85\,T - 0.009\,173\,T^2$$

$$P = \Omega + 272.75 - 2.3\,T$$

接下来，经过升或降交点的时刻由以下表达式得到。式中包含 M (太阳平近点角) 的项还应乘以 E ，这些项在式中用 “*” 标明， E 由公式 (45.6) 得到。

$$\begin{aligned}
 \text{JDE} = & 2451\,565.1619 + 27.212\,220\,817\,k \\
 & + 0.000\,2572\,T^2 \\
 & + 0.000\,000\,021\,T^3 \\
 & - 0.000\,000\,000\,088\,T^4 \\
 & - 0.4721\,\sin M' \\
 & - 0.1649\,\sin 2D \\
 & - 0.0868\,\sin (2D - M') \\
 & + 0.0084\,\sin (2D + M') \\
 * & - 0.0083\,\sin (2D - M) \\
 * & - 0.0039\,\sin (2D - M - M') \\
 & + 0.0034\,\sin 2M' \\
 & - 0.0031\,\sin (2D - 2M') \\
 * & + 0.0030\,\sin (2D + M) \\
 * & + 0.0028\,\sin (M - M') \\
 * & + 0.0026\,\sin M \\
 & + 0.0025\,\sin 4D \\
 & + 0.0024\,\sin D \\
 * & + 0.0022\,\sin (M + M') \\
 & + 0.0017\,\sin \Omega \\
 & + 0.0014\,\sin (4D - M') \\
 * & + 0.0005\,\sin (2D + M - M') \\
 * & + 0.0004\,\sin (2D - M + M') \\
 * & - 0.0003\,\sin (2D - 2M) \\
 * & + 0.0003\,\sin (4D - M) \\
 & + 0.0003\,\sin V \\
 & + 0.0003\,\sin P
 \end{aligned}$$

例 49. a: ——计算 1987 年 5 月，月亮经过升交点的时刻。

从年首起算，5 月中旬对应 0.37 年，把 $\text{year}=1987.37$ 代入公式 (49.1)，得到大约值 $k=-170.19$ ，对于升交点， k 必须是整数，所以 $k=-170$ ，那么，我们得到：

$$\begin{aligned}
T &= -0.126655 \\
D &= -56211^\circ.71265 = 308^\circ.28735 \\
M &= -4542^\circ.06272 = 137^\circ.93728 \\
M' &= -60401^\circ.29265 = 78^\circ.70735 \\
\Omega &= 368^\circ.9449 = 8^\circ.9449 \\
V &= 282^\circ.92 \\
P &= 641^\circ.99 = 281^\circ.99 \\
E &= 1.000319
\end{aligned}$$

最后的结果是 $JDE = 2446938.76803$ ，对应 1987 年 5 月 23.26803 日 = 1987 年 5 月 23 日 6h 26m.0 TD。

正确的结果是：5 月 23 日 6h 25m.6 TD

下表给出：使用本章算法的计算结果与精确结果比较的误差概念：

年份	交点	交点数量	最大误差 (秒)	误差小于 60秒的个数	误差大于 120秒的个数
1980 to 2020	升	551	142	487	3
1980 to 2020	降	551	132	469	2
0 to 40	升	551	144	444	5
0 to 40	降	551	135	478	2

第五十章 月亮的最大赤纬

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 23 日]

月亮轨道平面与黄道平面的夹角是 5 度。因此，在天空中，月亮基本上沿道黄道运动，每运动一周(27 天)，它将达到最大北纬(在金牛座，双子座，或者在北部猎户座)，两星期后，它将达到最大南纬(人马座或 Ophiuchus 座)。

因为月亮轨道与黄道的夹角是 5 度，天赤道与黄道的夹角是 23 度，所以月亮赤纬的大约在 18 度到 28 度（北或南）之间。当月亮轨道升交在春风点附近(如 1987 年，参见第 45

章末尾)，月亮达很高的北纬或南纬，大约+28.5 度和-28.5 度，这样的位置每 18.6 年重复，它是月亮升交点旋转运动的周期。

在本章，将给出一种大约计算月亮最大赤纬发生时刻的方法，以及此刻的纬度值。得到的数据是月亮面中心的地心坐标数据。

设 k 是整数，负数对应公元 2000 年以前。每个 k 依次对应月亮的各个最大南纬或北纬。当 $k=0$ 对应 2000 年 1 月。重要： k 取非整数值是毫无意义的。

用下式计算 k 的估计值：

$$k \approx (\text{year} - 2000.03) \times 13.3686 \quad (50.1)$$

式中的 year 可以带小数。然后： $T = k/1336.86$ 。

以下角度的单位是度，方括号内的数据用于南纬。

$$D = 152.2029 + 333.070\,5546\,k - 0.000\,4025\,T^2 + 0.000\,000\,11\,T^3 \\ [345.6676]$$

$$M = 14.8591 + 26.928\,1592\,k - 0.000\,0544\,T^2 - 0.000\,000\,10\,T^3 \\ [1.3951]$$

$$M' = 4.6881 + 356.956\,2795\,k + 0.010\,3126\,T^2 + 0.000\,012\,51\,T^3 \\ [186.2100]$$

$$F = 325.8867 + 1.446\,7806\,k - 0.002\,0708\,T^2 - 0.000\,002\,15\,T^3 \\ [145.1633]$$

最大北纬或南纬对应的时间是：

$$\text{JDE} = 2451\,562.5897 + 27.321\,582\,241\,k + 0.000\,100\,695\,T^2 \\ [2451\,548.9289] - 0.000\,000\,141\,T^3 \\ + \text{表50.A的周期项}$$

在表 50. A 中，周期项含有 M (太阳平近点角)的，应乘上 E ， E 由公式(45.6)得到，表中使用“*”指出了这些项。

最大赤纬由下式计算，单位是度：

$$\delta = 23.6961 - 0.013\,004\,T + \text{表50.B的周期项}$$

在表 50.B 中，周期含有“*”号的应乘以 E。应注意，得到的是最大赤纬的绝对值，在计算最大南纬时，这个赤纬并没有负号。

表 50.A

月亮最大赤纬时间计算的周期项，单位：天

系数			系数		
北纬	南纬		北纬	南纬	
d	d		d	d	
+0.8975	-0.8975	$\cos F$	+0.0030	+0.0030	$\sin (2D + M')$
-0.4726	-0.4726	$\sin M'$	-0.0029	+0.0029	$\cos (M' + 2F)$
-0.1030	-0.1030	$\sin 2F$	-0.0029	-0.0029	$\sin (2D - M) *$
-0.0976	-0.0976	$\sin (2D - M')$	-0.0027	-0.0027	$\sin (M' + F)$
-0.0462	+0.0541	$\cos (M' - F)$	+0.0024	+0.0024	$\sin (M - M') *$
-0.0461	+0.0516	$\cos (M' + F)$	-0.0021	-0.0021	$\sin (M' - 3F)$
-0.0438	-0.0438	$\sin 2D$	+0.0019	-0.0019	$\sin (2M' + F)$
+0.0162	+0.0112	$\sin M *$	+0.0018	-0.0006	$\cos (2D - 2M' - F)$
-0.0157	+0.0157	$\cos 3F$	+0.0018	-0.0018	$\sin 3F$
+0.0145	+0.0023	$\sin (M' + 2F)$	+0.0017	-0.0017	$\cos (M' + 3F)$
+0.0136	-0.0136	$\cos (2D - F)$	+0.0017	+0.0017	$\cos 2M'$
-0.0095	+0.0110	$\cos (2D - M' - F)$	-0.0014	+0.0014	$\cos (2D - M')$
-0.0091	+0.0091	$\cos (2D - M' + F)$	+0.0013	-0.0013	$\cos (2D + M' + F)$
-0.0089	+0.0089	$\cos (2D + F)$	+0.0013	-0.0013	$\cos M'$
+0.0075	+0.0075	$\sin 2M'$	+0.0012	+0.0012	$\sin (3M' + F)$
-0.0068	-0.0030	$\sin (M' - 2F)$	+0.0011	+0.0011	$\sin (2D - M' + F)$
+0.0061	-0.0061	$\cos (2M' - F)$	-0.0011	+0.0011	$\cos (2D - 2M')$
-0.0047	-0.0047	$\sin (M' + 3F)$	+0.0010	+0.0010	$\cos (D + F)$
-0.0043	-0.0043	$\sin (2D - M - M') *$	+0.0010	+0.0010	$\sin (M + M') *$
-0.0040	+0.0040	$\cos (M' - 2F)$	-0.0009	-0.0009	$\sin (2D - 2F)$
-0.0037	-0.0037	$\sin (2D - 2M')$	+0.0007	-0.0007	$\cos (2M' + F)$
+0.0031	-0.0031	$\sin F$	-0.0007	-0.0007	$\cos (3M' + F)$

表 50.B
月亮赤纬最大值, 单位: 度

系数			系数		
北纬	南纬		北纬	南纬	
°	°		°	°	
+5.1093	-5.1093	$\sin F$	+0.0038	-0.0038	$\cos (2M' - F)$
+0.2658	+0.2658	$\cos 2F$	-0.0034	+0.0034	$\cos (M' - 2F)$
+0.1448	-0.1448	$\sin (2D - F)$	-0.0029	-0.0029	$\sin 2M'$
-0.0322	+0.0322	$\sin 3F$	+0.0029	+0.0029	$\sin (3M' + F)$
+0.0133	+0.0133	$\cos (2D - 2F)$	-0.0028	+0.0028	$\cos (2D + M - F) *$
+0.0125	+0.0125	$\cos 2D$	-0.0028	-0.0028	$\cos (M' - F)$
-0.0124	-0.0015	$\sin (M' - F)$	-0.0023	+0.0023	$\cos 3F$
-0.0101	+0.0101	$\sin (M' + 2F)$	-0.0021	+0.0021	$\sin (2D + F)$
+0.0097	-0.0097	$\cos F$	+0.0019	+0.0019	$\cos (M' + 3F)$
-0.0087	+0.0087	$\sin (2D + M - F) *$	+0.0018	+0.0018	$\cos (D + F)$
+0.0074	+0.0074	$\sin (M' + 3F)$	+0.0017	-0.0017	$\sin (2M' - F)$
+0.0067	+0.0067	$\sin (D + F)$	+0.0015	+0.0015	$\cos (3M' + F)$
+0.0063	-0.0063	$\sin (M' - 2F)$	+0.0014	+0.0014	$\cos (2D + 2M' + F)$
+0.0060	-0.0060	$\sin (2D - M - F) *$	-0.0012	+0.0012	$\sin (2D - 2M' - F)$
-0.0057	+0.0057	$\sin (2D - M' - F)$	-0.0012	-0.0012	$\cos 2M'$
-0.0056	-0.0056	$\cos (M' + F)$	-0.0010	+0.0010	$\cos M'$
+0.0052	-0.0052	$\cos (M' + 2F)$	-0.0010	-0.0010	$\sin 2F$
+0.0041	-0.0041	$\cos (2M' + F)$	+0.0006	+0.0037	$\sin (M' + F)$
-0.0040	-0.0040	$\cos (M' - 3F)$			

例 50. a: ——1988 年 12 月, 月亮的最大北纬。
由公式(50.1)得 year=1988.95, 我们得到 $k \approx -148.12$,
所以取 $k = -148$ 。因此:

$$\begin{aligned}
 T &= -0.110707 & M' &= -52824^\circ.8411 = 95^\circ.1589 \\
 D &= -49142^\circ.2392 \approx 177^\circ.7608 & F &= 111^\circ.7631 \\
 M &= -3970^\circ.5085 = 349^\circ.4915 & E &= 1.000278
 \end{aligned}$$

我们得到 JDE = 2447518.3347, 对应 1988 年 12 月
22.8347 日 = 1988 年 12 月 22 日 20h 02m TD。

正确值是 12 月 22 日 20h 01m TD。

得到的最大北纬是 $+28^\circ.1562 = +28^\circ 09' 22''$ 。正确值是
 $+28^\circ 09' 13''$ 。

例 50. b: ——如果我们计算最大南纬, $k = +659$, 我们得到 $JDE = 2469533.0834$, 对应 2049 年 4 月 21 日 14h TD, 赤纬是 $\delta = 22^\circ.1384$, 所以最大南纬是 $-22^\circ.08'$ 。

例 50. c: ——若计算 公元-4 年 3 月中旬的月亮最大北纬, 我们有 $year = "-4 \text{ 年之后 } 0.2 \text{ 年}"$, 所以 $year = -4 + 0.2 = -3.8$, 不是 -4.2 !

那么 k 的大约值是 -26788.40 , 因此 $k = -26788$ (是一个整数!)。

然后, 我们得到 $JDE = 1719672.1337$, 对应 -4 年 3 月 16 日 15h TD。

最大北纬 $= 28^\circ.9739 = +28^\circ 58'$ 。

使用本章描述的方法, 我们计算了 600 个最大北韦和 600 个最大南纬, 即从 1977 年 8 月到 2022 年 6 月。最大时间误差为 10 分, 最大赤纬值的最大误差是 $26''$ 。误差小于 3 分钟的占 69%, 误差小于 $10''$ 的占 74%。

表 50. A 和 50. B 的周期项系数, 是使用历元 2000.0 的黄赤交角计算的。这造成的后果是, 随时间的增加, 结果的误差变大, 但是在 -1000 年到 +5000 年最大可能误差不超过半小时。

第五十一章 月面计算

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 28 日]

视觉天平动(几何天平动)

月球自转的平周期等于它绕地球运转的平恒星周期。月球平赤道与黄道的交角是个常数 I , 在月球平赤道面与月球轨道面的交线上包含了月亮赤道的降交点(轨道的升交点)。

因此, 从平均效果来看, 月亮的同一半球面总是朝向地球的。但时, 由于天平动(视摆动), 月亮表面可视部分有所

增加。天平动：主要是由于观测点与月球的几何位置发生变化，在视觉上月亮好像在摆动，称为几何天平动；另外，在地球引力的作用下，月球自转轴也会发生真实的摆动，称为物理天平动，不过它比几何天平动要小得多。[译者注：本段的部分文字看不清，限于译者水平，无法译出，故猜测原作者的意图，间接翻译，可能不够准确]

月亮视圆面的“平”中心是月面学坐标系统的参考点(在月亮表面)。[译者注：平中心在月球的平赤道上，以月心为坐标原点，以“平”中心作为起点参考的坐标，经度是自西向东测量为正，下文译为月心坐标，如月心月面经纬度等。]月球子午圈是经过视月面平中心的子午圈，月面经度是从月亮子午圈起算的，向 Mare Crisium(在月面上)为正，即，在地心天球向西测量为正。月面纬度是从月亮赤道面起算的，向北为正，也就是包含 Mare Serenitatis 的半球为正。

任意时刻，月面视中心到平中心的偏差是天平动效果总和的表现。这个偏差量是从此刻的视中心开始测量的。

地球的月心经度纬度，可在天文年历中得到，它实际上就是，站在地心看到的月面视中心的月心坐标(由于地于周日运动，在地心与在地平看到的月面中心是不同的)，也就是说地球的月心坐标等于月面视中心的月心坐标。反过来看，如果站在月面视中心，则地心在天顶。当经度天平动(即地球的月心经度)为正时，月面平中心在天球上是向东的，那么月面西边缘区域将看到更多一些。当地球的月面纬度为正时，月面平中心朝南，那么北边缘区域将显示出来。

视觉经度天平动 l' 及纬度天平动 b' 可以使用以下方法得到。设：

I = 月亮赤道与黄道的夹角，即 $1^{\circ}32'32''.7=1^{\circ}.54242$ 。
该值取自 IAU。

λ = 月亮的地心视黄经

β = 月亮的地心视黄纬

$\Delta\psi$ = 黄经章动(见第 21 章)

F = 月亮的纬度参数，可由公式(45.5)得到
 Ω = 月亮轨道升交点平黄经，由公式(45.7)得到
 那么有：

$$\left. \begin{aligned} W &= \lambda - \Delta\psi - \Omega \\ \tan A &= \frac{\sin W \cos \beta \cos I - \sin \beta \sin I}{\cos W \cos \beta} \\ l' &= A - F \\ \sin b' &= -\sin W \cos \beta \sin I - \sin \beta \cos I \end{aligned} \right\} \quad (51.1)$$

式中 λ 已考虑了章动，所以 $\lambda - \Delta\psi$ 表示不含章动的月亮视黄经。

物理天平动

实际上，月亮自转轴围绕它的“平”自转轴运动，这种运动叫做“物理天平动”。物理天平动比几何天平动小得多，其经度和纬度天平动均不超过 0.04 度。

物理经度天平动 (l'') 和物理纬度天平动 (b'') 可按如下方法计算。总天平动是几何天平动与物理天平动之和： $l = l' + l''$ ， $b = b' + b''$

利用 D. H. Eckhardt 的表达式计算出 ρ 、 σ 、 τ ，式中的角度 D、M 和 M' 利用公式(45.2)和(45.4)得到，E 则利用(45.6)计算，角度 K_1 和 K_2 (单位是度) 用下式计算：

$$\begin{aligned} K_1 &= 119.75 + 131.849 T \\ K_2 &= 72.56 + 20.186 T \end{aligned}$$

式中的 T 是 $J2000.0 = JDE \ 2451545.0$ 起算的儒略世纪数(36525 日)。

$$\begin{aligned}
\rho = & -0.02752 \cos M' \\
& -0.02245 \sin F \\
& +0.00684 \cos (M' - 2F) \\
& -0.00293 \cos 2F \\
& -0.00085 \cos (2F - 2D) \\
& -0.00054 \cos (M' - 2D) \\
& -0.00020 \sin (M' + F) \\
& -0.00020 \cos (M' + 2F) \\
& -0.00020 \cos (M' - F) \\
& +0.00014 \cos (M' + 2F - 2D) \\
\sigma = & -0.02816 \sin M' \\
& +0.02244 \cos F \\
& -0.00682 \sin (M' - 2F) \\
& -0.00279 \sin 2F \\
& -0.00083 \sin (2F - 2D) \\
& +0.00069 \sin (M' - 2D) \\
& +0.00040 \cos (M' + F) \\
& -0.00025 \sin 2M' \\
& -0.00023 \sin (M' + 2F) \\
& +0.00020 \cos (M' - F) \\
& +0.00019 \sin (M' - F) \\
& +0.00013 \sin (M' + 2F - 2D) \\
& -0.00010 \cos (M' - 3F) \\
\tau = & +0.02520 E \sin M \\
& +0.00473 \sin (2M' - 2F) \\
& -0.00467 \sin M' \\
& +0.00396 \sin K_1 \\
& +0.00276 \sin (2M' - 2D) \\
& +0.00196 \sin \Omega \\
& -0.00183 \cos (M' - F) \\
& +0.00115 \sin (M' - 2D) \\
& -0.00096 \sin (M' - D) \\
& +0.00046 \sin (2F - 2D) \\
& -0.00039 \sin (M' - F) \\
& -0.00032 \sin (M' - M - D) \\
& +0.00027 \sin (2M' - M - 2D) \\
& +0.00023 \sin K_2 \\
& -0.00014 \sin 2D \\
& +0.00014 \cos (2M' - 2F) \\
& -0.00012 \sin (M' - 2F) \\
& -0.00012 \sin 2M' \\
& +0.00011 \sin (2M' - 2M - 2D)
\end{aligned}$$

那么有：

$$\begin{aligned}
l'' &= -\tau + (\rho \cos A + \sigma \sin A) \tan b' \\
b'' &= \sigma \cos A - \rho \sin A
\end{aligned} \tag{51.2}$$

月亮自转轴的位置角

月亮自转轴的位置角 P ，如同行星自转轴的定義(詳見第 41 章和 42 章)。可按如下方法計算，已考慮了物理天平動。

I 、 Ω 、 $\Delta\psi$ 、 ρ 、 σ 和 b 的含義與前面的相同，設 α 是月亮的地心視赤經， ε 是黃赤交角。那麼：

$$V = \Omega + \Delta\psi + \frac{\sigma}{\sin I}$$

$$X = \sin(I + \rho) \sin V$$

$$Y = \sin(I + \rho) \cos V \cos \varepsilon - \cos(I + \rho) \sin \varepsilon$$

$$\tan \omega = X/Y$$

$$\sin P = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2} \cos(\alpha - \omega)}{\cos b}$$

角度 ω 应置于“正确的象限”，可以使用二参数的反正切函数， $\omega = \text{ATN2}(X, Y)$ 。如果你的程序设计语言中没有这个函数，可以先算出 X/Y ，再用常规的反正切函数计算，如果 $Y < 0$ ，则 ω 应加上 180 度。

角度 P 不能置于第一或第四象限。

例 51. a: ——月亮，1992 年 4 月 12 日 0h TD。

该时刻有(详见例45. a):

$D = 113^\circ.842\,309$	$\lambda = 133^\circ.167\,269$
$M = 97^\circ.643\,514$	$\beta = -3^\circ.229\,127$
$M' = 5^\circ.150\,839$	$\lambda - \Delta\psi = 133^\circ.162\,659$
$F = 219^\circ.889\,726$	$\varepsilon = 23^\circ.440\,636$
$\Delta\psi = +0^\circ.004\,610$	$\alpha = 134^\circ.688\,473$
$E = 1.000\,194$	

那么，我们得到:

$\Omega = 274^\circ.400\,655$	$l'' = -0^\circ.025$
$W = 218^\circ.762\,004$	$b'' = +0^\circ.006$
$A = 218^\circ.683\,937$	$l = -1^\circ.23$
$l' = -1^\circ.206$	$b = +4^\circ.20$
$b' = +4^\circ.194$	$V = 273^\circ.820\,506$
$K_1 = 109^\circ.57$	$I + \rho = 1^\circ.532\,00$
$K_2 = 71^\circ.00$	$X = -0.026\,676$
$\rho = -0.01\,042$	$Y = -0.396\,022$
$\sigma = -0.01\,574$	$\omega = 183^\circ.8536$
$\tau = +0.02\,673$	$P = 15^\circ.08$

站心天平动(在地面站点上看到的天平动)

为了精确的得到观测站的天平动等的值，地心看到的天平动和月球自转轴位置角应转换到站心(地表上的观测点)。对于天平动，差值可达1度，所以对月亮可视边缘的影响较大。

站心经度和纬度天平动以及月球自转轴位置角，可以直接计算出，也可以由地心值修正得到。

(a)、直接计算。——使用以上的公式，但月亮的地心坐标 $\lambda\beta\alpha$ 应改为站心坐标值。月亮的站心赤经赤纬可由公式(39.2)和(39.3)得到；黄道坐标 λ 和 β 使用常规转换公式(12.1)和(12.2)转为站心黄经和黄纬。

(b)、差值修正法。——设 ϕ 是站点的纬度， δ 月亮的地心赤纬， H 是月亮的本地时角(用本地恒星时和地心赤经算出)， π 是月亮的地心地平视差。然后计算：

$$\tan Q = \frac{\cos \phi \sin H}{\cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \cos H}$$

$$\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H$$

$$\pi' = \pi (\sin z + 0.0084 \sin 2z)$$

然后，对地心天平动(1, b)及位置角(P)修正：

$$\Delta l = \frac{-\pi' \sin(Q-P)}{\cos b}$$

$$\Delta b = +\pi' \cos(Q-P)$$

$$\Delta P = +\Delta l \sin(b + \Delta b) - \pi' \sin Q \tan \delta$$

这些公式来自参考[2]。

太阳的月心月心坐标

太阳的月心坐标决定了月球被照量的区域。

太阳在月面上的直射点的月心经度是 l_0 纬度是 b_0 ，站在该点上，太阳在天顶。利用公式(51.1)可计算出该点坐标，但应把公式中的月亮的地心黄道坐标 λ 和 β 换为月亮的日心黄道坐标 λ_H 和 β_H 。用下式可取得足够的精度：

$$\lambda_H = \lambda_0 + 180^\circ + \frac{\Delta}{R} \times 57''.296 \cos \beta \sin (\lambda_0 - \lambda)$$

$$\beta_H = \frac{\Delta}{R} \beta$$

式中 λ_0 是太阳的地心视黄经。 Δ/R 是地月距离与地日距离的比值，因此 Δ 和 R 的单位必须相同，比如同时使用千米单位。如果 R 表达为天文单位， π 是月球的赤道地平视差(单位是角秒)，那么：

$$\Delta/R = 8.794 / (\pi R)$$

因此，要计算 l_0 和 b_0 ，应先算出 λ_H 和 β_H ，然后利用公式(5.1)， λ 用 λ_H 代入， β 用 β_H 代入；得到的是 l'_0 和 b'_0 。接下来用同样的公式算出 ρ 、 σ 、 τ ，由(51.2)式得到 l''_0 和 b''_0 ，当然，用 b'_0 代换 b' ，那么有：

$$l_0 = l'_0 + l''_0 \quad \text{和} \quad b_0 = b'_0 + b''_0$$

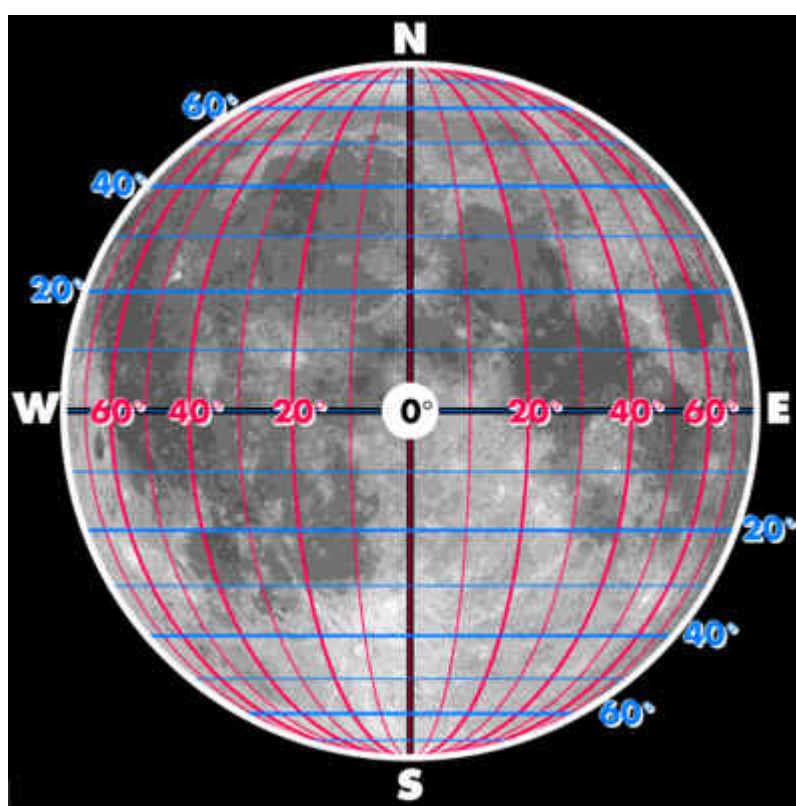
用 90 度或 450 度减去 l_0 ，得到在太阳的余经度 C_0 。(译者注：太阳的月心经度是向东测量的，而 C_0 是向西测量的月面晨线经度，所以这里是“减 l_0 ”而不是“加 l_0 ”)

l_0 (或 C_0) 和 b_0 决定了月面上晨昏线(明暗分界线)的精确位置。太阳直射点在 (l_0, b_0) ，它是月亮被照量半球的最大圆的极点。在月亮的晨线上，太阳升起，晨线的月心经度是 $l_0 - 90^\circ$ 或 $360^\circ - C_0$ ，昏线的月心经度是 $l_0 + 90^\circ$ 或 $180^\circ - C_0$ 。当

月心经度为 0 处太阳升起，大约是在半满上弦月，而满月、半满下弦月、新月时， C_0 的大约值分别是 90° 、 180° 和 270° ，相应的晨线经度是 270° 、 180° 和 90° 。

应当注意， l_0 是随时间减小的， C_0 是随时增加的。它们的每日的“平”运动与月亮的平距角 D 的相同，即 12.190749 度。

[译者注：月面平中心的经度是 0 度。如下图是满月的情形。月球自西向东自转，所以图中左边缘为晨线，右边缘为昏线]



在月面上的一点，月心经纬度分别是 η 和 θ ，当 $C_0=360^\circ-\eta$ ，日出 (C_0 是向西测量的晨线经度，随时间增加)；当 $C_0=90^\circ-\eta$ 时是正午，当 $C_0=180^\circ-\eta$ 时是日落。某时刻，太阳的月面地平高度 h 可由下式精确计算：

$$\sin h = \sin b_0 \sin \theta + \cos b_0 \cos \theta \sin (c_0 + \eta)$$

例 51. b: ——月亮, 在 1992 年 4 月 12 日 0h TD
本例中, 我们利用 VSOP87 和 ELP-2000/82 理论精确计算得到:

$$\begin{aligned}\lambda_{\circ} &= 22^{\circ}.33978 \\ \Delta &= 368406 \text{ kilometers} \\ R &= 1.00249769 \text{ AU} = 149971500 \text{ km}\end{aligned}$$

其它相关的量已经在“例 51. a”中得到, 那么我们有:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{H}} &= 202^{\circ}.208438 & l''_{\circ} &= -0^{\circ}.026 \\ \beta_{\text{H}} &= -0^{\circ}.007932 & b''_{\circ} &= -0^{\circ}.015 \\ W &= 287^{\circ}.803173 & l_{\circ} &= 67^{\circ}.89 \\ A &= 287^{\circ}.809284 & b_{\circ} &= +1^{\circ}.46 \\ l'_{\circ} &= 67^{\circ}.920 & c_{\circ} &= 22^{\circ}.11 \\ b'_{\circ} &= +1^{\circ}.476\end{aligned}$$

参考资料

- 1、D. H. Eckhardt, 《月球和行星》, “月球天平动理论”, 卷 25, 第 3 页(1981)
- 2、《天文历书的补充解释》, (伦敦, 1961), 第 324 页

第五十二章 日月食

[许剑伟 于家里 2008 年 4 月 28 日]

无需太多的计算, 就可精确获得日月食的主要特点。日食情况是比较复杂, 在地面上不同的观测位置, 事件发生的时间是不同的。而对于月食, 所有的观测者将在同一时刻看到相同的月相。

由于这个原因, 我们将不考虑各地的日食情况。有兴趣的读者可以使用贝塞尔根计算各地的日食情况。贝塞尔根数

出版在每年的《天文历书》(1981 年开始更名为《天文年历》), 公元-2003 年到+2526 年所有日食的贝塞尔根数可以在 Mucke 和 Meeus[1]的著作中找到。Meeus[2]已发表了现代的精确的贝塞尔根数。这两本著作给出了贝塞尔根素以及他们所用的公式, 并含有数值范例。

Espenak 出版了一部著作[3], 给出了 1986 到 2035 年的日全食(或日环食)的路径, 并带有那个时期所月日食的漂亮的世界地图。然而, 这本著作不包含贝塞尔根数, 所以它不提供计算额外数据的可能性, 如, 无法计算全食或环食路径之外的当地日食情况。

让我们提一下 Stephenson 和 Houlden 的一本著作[4], 它包含了公元前 1500 到公元 1900 年可见日全食和日环食的数据及章节。

一般数据

首先, 利用公式(49.1)和(47.3)计算平新月和平满月时刻(JDE)。记住, 对于新月(日食), k 必须是一个整数, 对应满月(月食), k 为整数加 0.5。

然后, 利用公式(47.4)到(47.7)计算此时的角度 M 、 M' 、 F 和 Ω , 并利用公式(45.6)式计算 E 。

F 的值将给出发生日食或月食的首要信息。如果 F 与整倍数的 180 度的差值小于 $13^\circ.9$, 那么肯定要发生日月食, 如果大于 $21^\circ.0$, 那就没有日月食。如果在这两个值之间, 则不能确定是否有日月食, 还须进一步检查。可以使用以下规则: 如果 $|\sin F| > 0.36$, 则没有日月食。

注意, 在一个阴历月以后, F 增加了 $30^\circ.6705$ 。

如果 F 接近 0° 或 360° , 那么日月食出现在升交点。如果 F 接近 180° , 那么食点出现在月亮轨道的降交点。

计算:

$$F_1 = F - 0^\circ.02665 \sin \Omega$$

$$A_1 = 299^\circ.77 + 0^\circ.107408 k - 0.009173 T^2$$

那么，要取得最大食的时间(对于地球一般是日食)，使用(47.1)平会合时间加上以下修正(单位是天)。

$$\begin{array}{rcl}
 -0.4075 & \times \sin M' & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{对月食,应把常数改为} \\ -0.4065 \text{和} +0.1727 \end{array} \\
 +0.1721 \times E & M & \\
 +0.0161 & 2M' & \\
 -0.0097 & 2F_1 & \\
 +0.0073 \times E & M' - M & \\
 -0.0050 \times E & M' + M & \\
 -0.0023 & M' - 2F_1 & \\
 +0.0021 \times E & 2M & (52.1) \\
 +0.0012 & M' + 2F_1 & \\
 +0.0006 \times E & 2M' + M & \\
 -0.0004 & 3M' & \\
 -0.0003 \times E & M + 2F_1 & \\
 +0.0003 & A_1 & \\
 -0.0002 \times E & M - 2F_1 & \\
 -0.0002 \times E & 2M' - M & \\
 -0.0002 & \Omega &
 \end{array}$$

当然，如果需要高精度，不能使用这个算法。在公元 1951 到 2050 年的 221 个日食，这种方法计算最大食的平均误差是 0.36 分钟，最大误差是 1.1 分。

然后计算：

$$\begin{array}{lcl}
 P = +0.2070 \times E & \times \sin M & \\
 +0.0024 \times E & \sin 2M & \\
 -0.0392 & \sin M' & \\
 +0.0116 & \sin 2M' & \\
 -0.0073 \times E & \sin (M' + M) & \\
 +0.0067 \times E & \sin (M' - M) & \\
 +0.0118 & \sin 2F_1 & \\
 \hline
 Q = +5.2207 & & \\
 -0.0048 \times E & \times \cos M & \\
 +0.0020 \times E & \cos 2M & \\
 -0.3299 & \cos M' & \\
 -0.0060 \times E & \cos (M' + M) & \\
 +0.0041 \times E & \cos (M' - M) &
 \end{array}$$

$$W = |\cos F_1|$$

$$\gamma = (P \cos F_1 + Q \sin F_1) \times (1 - 0.0048 W)$$

$$\begin{aligned}
 u = & 0.0059 \\
 & + 0.0046 E \cos M \\
 & - 0.0182 \cos M' \\
 & + 0.0004 \cos 2M' \\
 & - 0.0005 \cos (M + M')
 \end{aligned}$$

日食

在日食情况下， γ 表示月影轴到地心的最小距离，单位是地球赤道半径。注意，月影轴是一条线，地心是一个点，最小距离指点到线的最小距离。当月影轴经过地心以南时， γ 为正，经过地心以北时 γ 为负，当 γ 在+0.9972 到-0.9972 时，日食中心是：在地球表面上存在一条日食中央线，影轴在地表经过的那条线。

u 表示月亮影锥在基平面上的半径，单位也是地球半径。基平面指：经过地心并且垂直月亮影轴的平面。半影锥在基平面上的半径是 $u + 0.5461$

如果 $|\gamma|$ 在 0.9972 到 $1.5433+u$ 之间，则没有日食中心，是一个部分食。不过，当 $|\gamma|$ 在 0.9972 到 1.0260 之间的时候，影锥的一部分可能触及地表(在地球两极地区)，而锥轴则没有碰到地球。当 $0.9972 < |\gamma| < 0.9972 + |u|$ 时，是没有中心的全食或环食(因锥轴不经过地表，所以没有中心)。在 1950 到 2100 年期间，有 7 次这种类型的日食：

1950年03月18	环食	无中心
1957年04月30	环食	无中心
1957年10月23	全食	无中心
1967年11月02	全食	无中心
2014年04月29	环食	无中心
2043年04月09	全食	无中心
2043年10月03	环食	无中心

如果 $|\gamma| > 1.5433+u$ ，在月球表面上看不到日食。

对于有中心的日食，食的类型由以下规则决定：

如果 $u < 0$ ，是全食

如果 $u > +0.0047$ ，是环食

如果 u 介于 0 到+0.0047，是环食或全环食

[注：全环食是混合食，上述的食的中心线附近的区域常称为食带，在这一食带上，有的地方是全食，有的地方即是环食，这种情况是混合食]

在最后一种情况，可用以下方法确定食的类型：

$$\omega = 0.00464 \sqrt{1 - \gamma^2} > 0$$

当 $u < \omega$ 时，是全环食，否则是环食。

在部分食的情况下，最大食发生在地表上距离影轴最近的那个点。在该点，食的程度(译者注：大概指食分吧)是：

$$\frac{1.5433 + u - |\gamma|}{0.5461 + 2u} \quad (52.2)$$

月食

在月食的情况下， γ 表示月亮中心到地影轴的最小距离，单位是地球赤道半径。 γ 是正还是负，取决于月亮中心经过地影轴的北边或是南边。在月亮上的半径，单位是地球直径：

$$\text{半影： } \rho = 1.2848 + u$$

$$\text{本影： } \sigma = 0.7403 - u$$

食的程度(食分)有下式计算：

$$\text{半影食： } \frac{1.5573 + u - |\gamma|}{0.5450} \quad (52.3)$$

$$\text{本影食： } \frac{1.0128 - u - |\gamma|}{0.5450} \quad (52.4)$$

如食分为负值，说明没有月食，参考例 52. c。

在本影的部分食和全部食的持续时间计算：

$$P = 1.0128 - u$$

$$T = 0.4678 - u$$

$$n = 0.5458 + 0.0400 \cos M'$$

半持续时间，单位是分：

$$\text{部分被食： } \frac{60}{n} \sqrt{P^2 - \gamma^2} \quad \text{全食： } \frac{60}{n} \sqrt{T^2 - \gamma^2}$$

在半影，部分食持续时间：先算出 $H = 1.5573+u$ ，那么半时长是(单位分钟)：

$$\frac{60}{n} \sqrt{H^2 - \gamma^2}$$

应注意，月亮触到半影是不能直接观测到的(须特殊影像处理才可能看到)，大部分半影食(月亮仅进入地球半影)不能人眼分辨出来。只有在食的程度较深也能看到月亮北部或南部边缘微弱的明暗变化。

在以上的公式中，地球大气层引导的本影锥量论半径的增量已经考虑了。然而，传统的规则是包含理论半径的 $1/50$ ，自从 1951 年(Connaissance des Temps——见参考[5])曾建议这种方法。与“法国规则”的结果比较，传统规则的本影月食的食分约大了 0.005，半影的大约 0.026。

为了能够根据传统规则($1/50$)得到结果，以上表达式中的常数应做更改：

1.2848 换为 1.2985

0.7403 换为 0.7432

1.5573 换为 1.5710

1.0128 换为 1.0157

0.4678 换为 0.4707

为了预测月食，就象各种天文年历那样，通常假设半影和本影是精确的圆，并使用地球的平均半径。事实上，“影”与“正圆锥”有点不同，就象地球不是真正的圆球。由简的几何考虑，地球本影在月球处，比地球还要扁一些，本影的平均扁率是 $1/214$ [6]。真偏率多半还要大些。从 1974-1989 观测的 18 次月食，Soulsby[7]发现平均扁率是 $1/102$ 。

例 52. a: ——1993 年 3 月 21 日的日食。

3 月 21 日是该年的第 141 天，所以该日期对应 1993.38。

那么，由公式(47.2)得：

$$k \approx -81.88, \text{ 因此 } k = -82$$

利用公式(47.3)和(47.1)得：JDE = 2449128.5894

我们进一步得到：

$$\begin{aligned} M &= 135^\circ.9142 \\ M' &= 244^\circ.5757 \\ F &= 165^\circ.7296 \\ \Omega &= 253^\circ.0026 \\ F_1 &= 165^\circ.7551 \end{aligned}$$

因为 $180^\circ - F$ 介于 $13^\circ.9$ 到 $21^\circ.0$ ，这个日食没是中心线。
我们进一步得到：

$$\begin{aligned} P &= +0.1842 \\ Q &= +5.3589 \\ \gamma &= +1.1348 \\ u &= +0.0097 \end{aligned}$$

因为 $|\gamma|$ 介于 0.9972 到 $1.5433+u$ 之间，所以是个部分食。
使用公式(52.2)，得到最大食分是：

$$\frac{1.5433 + 0.0097 - 1.1348}{0.5461 + 0.0194} = 0.740$$

因为 F 接近 180 度，所以日食发生在月亮轨道的降交点。
因为 γ 是正值，所以在地球的北半球日食可见。

利用公式(52.1)得到最大食的时刻：

$$\text{JDE} = 2449128.5894 + 0.5085 = 2449129.0979$$

对应 1993 年 3 月 21 日 14h 21m.0 TD

使用精确方法[2]计算的正确结果是 14h 20m 14s TD，
 $\gamma=+1.1370$ ，最大食分是 0.735。

例 52. b: ——2009 年 7 月 22 日的日食。

如同上一例题，我们得到：

$$\begin{aligned}k &= 118 \\ \text{JDE} &= 2455\,034.7071 \\ M &= 196^\circ.9855 \\ M' &= 7^\circ.9628 \\ F &= 179^\circ.8301 \\ F_1 &= 179^\circ.8531\end{aligned}$$

正确的值是 $\text{JDE} = 2455034.6088 = 2009\text{年}7\text{月}22\text{日 } 2\text{h } 37\text{m TD}$.

$$\begin{aligned}P &= -0.0573 \\ Q &= +4.9016 \\ \gamma &= +0.0695 \\ u &= -0.0157\end{aligned}$$

因为 $|\gamma| < 0.9972$ ，这个月食有中心线。因为 u 是负值，所以是全食。因为 $|\gamma|$ 很小，所以在赤道地区日食可见。因为 $F \approx 180^\circ$ ，日食发生在月亮轨道降交点附近。

例 52. c：——1973 年 7 月的月食。
我们依次得到：

$$\begin{aligned}k &= -328.5 \\ \text{JDE} &= 2441\,849.2992 \\ M &= 161^\circ.4437 \\ M' &= 180^\circ.7018 \\ F &= 345^\circ.4505\end{aligned}$$

正确的 $\text{JDE} = 2441849.3687$
 $= 1973\text{年}7\text{月}15\text{日}20\text{h } 51\text{m TD}$

$$\begin{aligned}\gamma &= -1.3249 \\ u &= +0.0197\end{aligned}$$

月食发生在月亮升交点 ($F \approx 360^\circ$)，月球中心经过地影中心的南部 (因为 $\gamma < 0$)。

根据公式 (52.4)，在本影的食分等于 -0.609 。因为它是负值，所以在本影没有月食，使用公式 (52.3) 我们得到半影

食分是 0.463。因此这是个半影食。

根据 *Connaissance des Temps*, 最大食(食甚)发生在 20h 50m.7 TD, 半影食的食分是 0.469。

例 52. d: ——1997 年 7 月 1 日之后的首个月食。

时间是 1997.5, 由公式(47.2)得 $k \approx -30.92$, 所以我们尝试 $k = -30.5$, 得到 $F = 125^\circ.2605$, 它与整倍 180° 相差超过 21° , 所以没有月食。

下一个满月, $k = -29.5$, 得到 $F = 155^\circ.9310$, 也没有月食。但是, 再下一个满月, $F \approx 187^\circ$, 出现月食了。如同前几例, 我们得到:

$$\begin{aligned} k &= -28.5 \\ \text{JDE} &= 2450\,708.4759 \\ M &= 253^\circ.0507 \\ M' &= 5^\circ.7817 \\ F &= 186^\circ.6015 \end{aligned}$$

正确的 $\text{JDE} = 2450708.2835 = 1997 \text{ 年 } 9 \text{ 月 } 16 \text{ 日 } 18\text{h } 48\text{m}.2 \text{ TD 或 } 18\text{h } 47\text{m UT (如果我们采用 } \Delta T = \text{TD} - \text{UT} = +63 \text{ 秒)}。$

$$\gamma = -0.3791, \quad u = -0.0131.$$

由公式(52.4)得到食分为 1.187。因此, 这是一个本影全食。

$$P = 1.0259, \quad T = 0.4809, \quad H = 1.5442, \quad n = 0.5856$$

部分被食的持续时间:

$$\frac{60}{0.5856} \sqrt{(1.0259)^2 - (0.3791)^2} = 98 \text{ 分}$$

全部被食的持续时间:

$$\frac{60}{0.5856} \sqrt{(0.4809)^2 - (0.3791)^2} = 30 \text{ 分}$$

半影食相的持续时间:

$$\frac{60}{0.5856} \sqrt{(1.5442)^2 - (0.3791)^2} = 153 \text{ 分}$$

因此，(UT 时间)：

$$\begin{aligned} \text{第一次碰到半影: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} - 153^{\text{m}} &= 16^{\text{h}}14^{\text{m}} \\ \text{第一次碰到本影: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} - 98^{\text{m}} &= 17^{\text{h}}09^{\text{m}} \\ \text{全食开始: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} - 30^{\text{m}} &= 18^{\text{h}}17^{\text{m}} \\ \text{最大食: } &18^{\text{h}}47^{\text{m}} \\ \text{全食结束: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} + 30^{\text{m}} &= 19^{\text{h}}17^{\text{m}} \\ \text{最后一次碰到本影: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} + 98^{\text{m}} &= 20^{\text{h}}25^{\text{m}} \\ \text{最后一次碰到半影: } 18^{\text{h}}47^{\text{m}} + 153^{\text{m}} &= 21^{\text{h}}20^{\text{m}} \end{aligned}$$

关于精度

本章的算法不打算获得很高的精度。还有，如果用于历史研究或没有高精度要求的情况下，这里得到的月食精度一般是足够的。另一方面，本章开头部分已经说过，高精度的现代日食可以使用日食根数获到。

γ 的计算公式并不导出严格的精确结果。原因是明显的，在计算 P 和 Q 时，只用了 12 个周期项，而高精度的日月位置计算需要几百个项才能得到。再有，公式(52.2)、(52.3)、(52.4)以及 P、T、n 和 H 也不是严格精确的。

对于 1951 到 2050 年的 221 个日食，使用本章算法得到的 γ 的平均误差是 0.00065，最大误差是 0.0024，对应 15km。考虑到我们的公式是简单的，这样的精度是很满意的。

在前面的内容中，当结果处于临界限制条件时，食的类型仍然是未知的。在这种情况下，就需要更精确的计算来解决问题。

进一步看，在查找食的过程时，应考虑一个小的临界范围，以确保没有食被忽略。例如，正确的中心食的条件是 $|\gamma| < 0.9972$ (*), 临界值可以考虑使用 1.000 或甚至 1.005，这样，当使用本章算法计算 γ 时，才可找到所有可能发生的中心食。

(*)事实上，对于不同的食，常数 0.9972 的变化值在 0.9970 到 0.9974 之间。

以下是个例子。

1935 年 1 月 5 日($k = -804$)，我们的方法得到 $\gamma = -1.5395$ ， $u = -0.00464$ ，因此 $|\gamma| > u+1.5433 = 1.5387$ ，所以认为那天没有日食。公式 (52.2) 得到食分的值是 -0.002 (负值!)。然而，正确的 γ 是 -1.5383 ，所以在 1935 年 1 月 5 日仍有个很小的部分食，食分是 0.001。

1947 年 4 月 30($k=-528$) 的日食，我们的算法得到 $\gamma=+0.9966$ ，所以认为是个有中心的食。精确是 $\gamma=0.9990$ ，所以是个无中心的日环食。

1890 年 11 月 26 日($k=-1349.5$) 的月食，我们的算法得到在本影的食分是 -0.007 。事实上，它是个十分小的本影部分食。

练习

找出 1979 年的第一个日食，证明它是个北半球可视的全食。

1977 年 4 月的日食是全食还是环食？

证明 1947 年 7 月没有日食。

证明 2000 年有 4 次日食，这四次都是部分食。

证明 2008 年 1 月没有月食。

证明 1982 年有 3 次月全食。

找出 1234 年的第一个月食。(答案：1234 年 3 月 17 日，部分食)

参考

1、H. Mucke, J. Meeus, 《日食规则》，-2003 到 +2526; Astronomisches Buro(Wien, 1983)

2、J. Meeus, 《日食根数》，1951 到 2200 (Willmann-Bell 出版社, 1989)

3、F. Espenak, 《50 年日食规则》, 1986 到 2035; NASA 参考出版 1178 (华盛顿, 1987)

4、F. R. Stephenson, M. A. Houlden, 《历史日月食地图集》, 剑桥大学出版社(1986)。

5、A. Danjon, "Les eclipses de Lune par la penombre en 1951"

6、J. Meeus, "Die Abplattung des Erdschattens bei Mondfinsternissen" , Die Sterne , 卷 45 , 第 116—117(1969)。

7、B. W. Soulsby, 英国 Astron 杂志, Assoc, 卷 100, 第 297 页(1990 年 12 月)

第五十三章 日月行星的视半径

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 26 日]

太阳和行星

太阳和行星的视半径由下式计算： $s = s_0 / \Delta$

式中 s_0 是天体的半径，单位是天文单位。 Δ 是天体到地球的距离，单位是天文单位。

对于太阳，采用以下值： $s_0 = 15'59''.63 = 959''.63$

对于行星，以下值曾经采用多年：

水星： $3''.34$

金星： $8''.41$

火星： $4''.68$

木星：赤道 $98''.47$ 两极 $91''.91$ (A)

土星：赤道 $83''.33$ 两极 $74''.57$

天王星： $34''.28$

海王星： $36''.56$

后来，采用以下值：

水星： $3''.36$ (B)

金星： $8''.34$

火星：4".68
 木星：赤道 98".44 两极 92".06
 土星：赤道 82".73 两极 73".82
 天王星：35".02
 海王星：33".50
 冥王星：2".07

注意，根据后来的值，海王星比天王星小。

对于金星，值 8".34，指从地球上看到它的视半径，而不是指它的云层。由于这个原因，当计算诸如中天、凌日、星食等天文现象时，我们采用旧值 8".41。

对于土星，设 a 和 b 分别是赤道半径和极半径，单位是天文单位。那么赤道视半径 s_e 和极视半径 s_p 分别由下式得到：

$$s_e = a/\Delta$$

$$s_p = s_e \sqrt{1 - k \cos^2 B}$$

式中 $k = 1 - (b/a)^2$ ， B 是“以土星为中心”的纬度（详见第 44 章）。如果采用 (A) 的值，即 $a=83".33$ ， $b=74".57$ ，那么 $k=0.199197$ ；如果采用 (B) 的值，那么 $k=0.203800$ 。

严格的说，这种方法也可应用于木星。但是，这个行星的角度 B （在第 42 章中称为 DE ）不超过 4° ，所以，通常使用 $s_p = b/\Delta$ 就可以了。

月亮

设 Δ 是地球中心到月球中心到的距离（单位是千米）， π 是月球的赤道地平视差， s 是月亮的地心视半径， k 是月亮平均半径与地球赤道半径的比值。在 1963 到 1968 年的天文历书中，日月食计算中取 $k=0.272481$ ，我们也延用这个值。

我们有以下严格的公式：

$$\sin \pi = 6378.14/\Delta \text{ 和 } \sin s = k \sin \pi$$

但多数情况下，使用下式就已足够：

$$s(\text{单位：角秒}) = 358473400/\Delta$$

与精确表达式比较，其误差小于 0.0005 角秒。

有这种方法计算，得到的是月亮的地心视半径，也就是假设有个观察者站在地心看月亮。在地面上(站心)看到的月亮视半径 s' ，比在地心上稍微大一些，由下式计算：

$$\sin s' = \sin(s)/q = \sin(\pi) k/q$$

式中 q 由公式(39.7)得到。站心到月亮中心的距离是 $\Delta' = q * \Delta$

作为一种选择，月亮的站心视半径 s' ，可用下式计算乘以地心视半径，在很多应用中其精度是足够的：

$$1 + \sin h \sin \pi$$

式中 h 是月亮的地平纬度

由于观测都不在地心，所以月亮视半径增加了。月亮在地平线上，增量为 0，在天顶时，增量达最大(在 14" 到 18" 之间)。

参考资料

- 1、A. Auwers, 《Astronomische Nachrichten》，卷 128, 3068 号, 杂志专栏 367(1891)
- 2、例如查阅《天文历书》1980, 第 550 页
- 3、《1984 年天文年历》，第 E43 页

第五十四章 恒星的星等

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 26 日]

恒星星等相加

如果两颗恒星的星等分别是 m_1 和 m_2 ，它们的合星等 m 可由下式计算：

$$x = 0.4 (m_2 - m_1)$$

$$m = m_2 - 2.5 \log (10^x + 1)$$

式中的对数运算是以 10 为底的。

例 54. a: Castor (α Gem) 的星等组合是 1.96 和 2.89，计算合星等。

我们得到：

$$x = 0.4 (2.89 - 1.96) = 0.372$$

$$m = 2.89 - 2.5 \log (10^{0.372} + 1) = 1.58$$

如果超过两颗星，星等分别为 $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots$ 用下式可得到较好的合星等 m

$$m = -2.5 \log \Sigma 10^{-0.4m_i}$$

式中，对数运算是以 10 为底的。符号 Σ 指取和计算所有的：

$$10^{-0.4m_i}$$

例 54. b: ——三星 β Mon 的星等组合是 4.73、5.22 和 5.60。计算合星等。

$$m = -2.5 \log (10^{-0.4 \times 4.73} + 10^{-0.4 \times 5.22} + 10^{-0.4 \times 5.60}) = -2.5 \log (0.01282 + 0.00817 + 0.00575) = 3.93$$

例 54. c: 试计算一个星群的合星等，设星群包含：

4	恒星群(平均)星等	5.0
14	——	6.0
23	——	7.0
38	——	8.0

解：

$$4 \times 10^{-0.4 \times 5} = 0.04000$$

$$14 \times 10^{-0.4 \times 6} = 0.05574$$

$$23 \times 10^{-0.4 \times 7} = 0.03645$$

$$38 \times 10^{-0.4 \times 8} = 0.02398$$

$$\text{取各 } \Sigma = 0.15617$$

$$\text{合星等} = -2.5 \log 0.15617 = +2.02$$

亮度之比

如果两颗恒星的星等分别是 m_1 和 m_2 ，它的是视亮度之比可由下式计算：

$$x = 0.4(m_2 - m_1) \quad I_1/I_2 = 10^x$$

如果亮度之比 I_1/I_2 已知，对应的星等之差 $\Delta m = m_2 - m_1$ 可由下式计算：

$$\Delta m = 2.5 \log(I_1/I_2)$$

例 54. d: Vega(星等是 0.14) 比 Polaris(星等是 2.12) 亮几倍？

$$x = 0.4 (2.12 - 0.14) = 0.792$$

$$10^x = 6.19$$

因此，Vega 的亮度是 Polaris 恒星的 6.19 倍。

例 54. e 某颗恒星的亮度是另一颗恒星的 500 倍，对应的星等之差是：

$$\Delta m = 2.5 \log 500 = 6.75$$

距离与绝对星等

如果 π 是恒星视差，单位是角秒，这个恒星与我们的距离是：

$$1/\pi \text{ 秒差距，或 } 3.2616 \text{ 光年}$$

如果 π 是恒星视差，单位是角秒， m 是恒星的视星等，它的绝对星等由下式计算：

$$M = m + 5 + 5 \log \pi$$

式中的对数计算是以 10 为底的。

如果 d 恒星的距离，单位是秒差距，我们有：

$$M = m + 5 - 5 \log d$$

与太阳系内的视差(见第 39 章)不同，这里的视差恒星周年视差，是地球绕太阳周年运动引起的，所以它不是指与地球尺寸相关的那个视差。

“秒差距”是长度单位，它等于某点对地球轨道半径(1AU)的张角为 $1''$ (视差为 $1''$)时的距离。“秒差距”的英文是“parsec”，它是视差(parallax)与秒(second)的缩写。

$$1 \text{ 秒差距} = 3.2616 \text{ 光年}$$

= 206265 天文单位
= 30.8568×10^{12} 千米

恒星的绝对星等是指：我们位于距恒星 10(秒差距)的地方得到的恒星视星等。

第五十五章 双星

[许剑伟 于莆田十中 2008 年 4 月 30 日]

双星的轨道要素如下：

P = 旋转周期，单位是平太阳年

T = 经过近点的时刻，一般表达形式为带小数点的年，
如 1945.62

e = 轨道离心率

a = 半长轴，单位是角秒

i = 真轨道面与视直线的垂直面之前的夹角。在视轨道上由西向东(顺行)运动，i 则在 0 到 90 度，逆行，则 i 在 90 到 180 度。当 i=90 度时，视轨道是一条经过主星的直线。

Ω = 升交点的位置角。

ω = 近星点的经度。这是直轨道上的一个角度，从升交点开如测量到近星点，总是沿运动方向测量。

当轨道要素已知，t 时刻的视位置角 θ 和角距离 ρ 可由下式计算：

$$n = 360^\circ/P, M = n (t - T)$$

式中 t 的单位是年，与 T 类似，可带小数点；n 是伴星的平每年运动，单位是度，总是正值。M 是 t 时刻伴星的平近点角。

然后，解开普勒方程： $E = M + e \sin E$

解法详见第 29 章。然后由下式计算径矢 r 和真近点角 v：

$$r = a (1 - e \cos E)$$

$$\tan v/2 = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(E/2)$$

然后由下式计算 $(\theta - \Omega)$

$$\tan(\theta - \Omega) = [\sin(v + \omega) \cos i] / \cos(v + \omega) \quad (55.1)$$

当然，公式可改写为：

$$\tan(\theta - \Omega) = \tan(v + \omega) \cos i$$

但是，在这种情况下， $(\theta - \Omega)$ 的正确象限不好确定。而用上一式，则可以使用本书已提到过的 ANT2 函数，(55.1) 式的分子和分母分别做为它的参数，这样得到的 $(\theta - \Omega)$ 立刻在正确象限。

当 $(\theta - \Omega)$ 得到了，加上 Ω 就得到 θ 。如果需要，可把结果转到 0 到 360 度。

应记住，根据定义，位置角为 0 度对应北方向，90 度向东，180 度向南，270 向西。因此，如果 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ，在天球的周日运动中，伴星“回绕”主星旋转(译者注：这是天顶的旋转引起的视效果)；如果 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ ，则主星“回绕”伴星旋转。

角度差由下式计算：

$$\rho = r \cos(v + \omega) / \cos(\theta - \Omega)$$

例 55.a： 根据 E.Silbernagel(1929)， η Coronae Borealis 的轨道要素：

$$P = 41.623 \text{ 年 } i = 59^\circ.025$$

$$T = 1934.008 \quad \Omega = 23^\circ.717$$

$$e = 0.2763 \quad \omega = 219^\circ.907$$

$$a = 0''.907$$

试计算历元 1980.0 时的 θ 和 ρ

我们依次得到：

$$n = 8.64906$$

$$t - T = 1980.0 - 1934.008 = 45.992$$

$$M = 397^\circ.788 = 37^\circ.788$$

$$E = 49^\circ.897$$

$$r = 0''.74557$$

$$v = 63^\circ.416$$

$$\tan(\theta - \Omega) = (-0.500813) / (+0.230440)$$

$$\theta - \Omega = -65^\circ.291$$

$$\theta = -41^\circ.574 = 318^\circ.4$$

$$\rho = 0''.411$$

作为一个练习：计算 γ Virginis 的星历，使用以下轨道要素[1]：

$$P = 168.68 \text{ 年 } i = 148^\circ.0$$

$$T = 2005.13 \quad \Omega = 36^\circ.9 \quad (2000.0)$$

$$e = 0.885 \quad \omega = 256^\circ.5$$

$$a = 3''.697$$

答案：——以下是每隔 4 年的星历，从 1980 年开始。
位置角 θ 随时间减小，因为 i 介于 90° 到 180° 度。

年	θ (度)	ρ (角秒)
1980.0	296.65	3.78
1984.0	293.10	3.43
1988.0	288.70	3.04
1992.0	282.89	2.60
1996.0	274.41	2.08
2000.0	259.34	1.45
2004.0	208.67	0.59
2008.0	35.54	1.04
2012.0	12.72	1.87

最小距离 ($0''.36$) 出现在历元 2005.21。

位置角 θ 涉及 2000.0 平赤道，角 Ω 也是同样的历元。

视轨道的离心率

双星的视轨道是一个椭圆，它的离心率 e' 一般与真轨道的离心率 e 不同。我们可能有兴趣知道 e' ，虽然视离心率没有天体物理学意义。

以下公式由作者[2]导出：

$$A = (1 - e^2 \cos^2 \omega) \cos^2 i$$

$$B = e^2 \sin \omega \cos \omega \cos i$$

$$C = 1 - e^2 \sin^2 \omega$$

$$D = (A - C)^2 + 4B^2$$

$$e'^2 = 2\sqrt{D} / (A + C + \sqrt{D})$$

应注意， e' 不受轨道要素 a 和 Ω 约束，它可能大于或小于离心率 e 。

例 55. b: 计算 η Coronae Borealis 的视轨道离心率。轨道要素在“例 55. a”中已提供。

我们得到：

$$A = 0.25298$$

$$B = 0.01934$$

$$C = 0.96858$$

$$D = 0.51358$$

$$e' = 0.860$$

因此，视轨道比真轨道偏长。

参考资料

1、W.D.Heintz, “15 个可视双星的轨道”，《天文学和天体物理学，补编系列》，卷 82，第 65—69 页(1990)。

2、J.Meeus, “双星视轨道离心率”，英国 Astron 杂志，副教授，卷 89，第 485—488 页(8 月 19/9)。

后记

……愿大家为国家天文学出份力。

表 21. A
 黄经章动 $\Delta \psi$ 及交角章动 $\Delta \varepsilon$ ，单位 $0''.0001$ 。

角度组合系数	$\Delta \psi$		$\Delta \varepsilon$	
0 0 0 0 1	-171996	-174. 2T	+92025	+8. 9T
-2 0 0 2 2	-13187	-1. 6T	+5736	-3. 1T
0 0 0 2 2	-2274	-0. 2T	+977	-0. 5T
0 0 0 0 2	+2062	+0. 2T	-895	+0. 5T
0 1 0 0 0	+1426	-3. 4T	+54	-0. 1T
0 0 1 0 0	+712	+0. 1T	-7	
-2 1 0 2 2	-517	+1. 2T	+224	-0. 6T
0 0 0 2 1	-386	-0. 4T	+200	
0 0 1 2 2	-301		+129	-0. 1T
-2 -1 0 2 2	+217	-0. 5T	-95	+0. 3T
-2 0 1 0 0	-158			
-2 0 0 2 1	+129	+0. 1T	-70	
0 0 -1 2 2	+123		-53	
2 0 0 0 0	+63			
0 0 1 0 1	+63	+0. 1T	-33	
2 0 -1 2 2	-59		+26	
0 0 -1 0 1	-58	-0. 1T	+32	
0 0 1 2 1	-51		+27	
-2 0 2 0 0	+48			
0 0 -2 2 1	+46		-24	
2 0 0 2 2	-38		+16	
0 0 2 2 2	-31		+13	
0 0 2 0 0	+29			
-2 0 1 2 2	+29		-12	
0 0 0 2 0	+26			
-2 0 0 2 0	-22			

0	0	-1	2	1	+21		-10
0	2	0	0	0	+17	-0.1T	
2	0	-1	0	1	+16		-8
-2	2	0	2	2	-16	+0.1T	+7
0	1	0	0	1	-15		+9
//继续							
-2	0	1	0	1	-13		+7
0	-1	0	0	1	-12		+6
0	0	2	-2	0	+11		
2	0	-1	2	1	-10		+5
2	0	1	2	2	-8		+3
0	1	0	2	2	+7		-3
-2	1	1	0	0	-7		
0	-1	0	2	2	-7		+3
2	0	0	2	1	-7		+3
2	0	1	0	0	+6		
-2	0	2	2	2	+6		-3
-2	0	1	2	1	+6		-3
2	0	-2	0	1	-6		+3
2	0	0	0	1	-6		+3
0	-1	1	0	0	+5		
-2	-1	0	2	1	-5		+3
-2	0	0	0	1	-5		+3
0	0	2	2	1	-5		+3
-2	0	2	0	1	+4		
-2	1	0	2	1	+4		
0	0	1	-2	0	+4		
-1	0	1	0	0	-4		
-2	1	0	0	0	-4		
1	0	0	0	0	-4		
0	0	1	2	0	+3		

0	0	-2	2	2	-3
-1	-1	1	0	0	-3
0	1	1	0	0	-3
0	-1	1	2	2	-3
2	-1	-1	2	2	-3
0	0	3	2	2	-3
2	-1	0	2	2	-3

表 30. A (Date 黄道标中的星行轨道要素)

水星

	a0	a1	a2	a3
L	252.250906	149474.0722491	0.00030397	0.000000018
a	0.387098310			
e	0.20563175	0.000020406	-0.0000000284	-0.00000000017
i	7.004986	0.0018215	-0.00001809	0.0000000053
Ω	48.330893	1.1861890	0.00017587	0.0000000211
π	77.456119	1.5564775	0.00029589	0.0000000056

金星

	a0	a1	a2	a3
L	181.979801	58519.2130302	0.00031060	0.000000015
a	0.723329820			
e	0.00677188	-0.000047766	0.00000000975	0.00000000044
i	3.394662	0.0010037	-0.000000088	-0.0000000007
Ω	76.679920	0.9011190	0.00040665	-0.0000000080
π	131.563707	1.4022188	-0.00107337	-0.0000005315

地球

	a0	a1	a2	a3
L	100.466449	36000.7698231	0.00030368	0.0000000021

a	1.000001018			
e	0.01670862	-0.000042037	-0.0000001236	0.00000000004
i	0			
π	102.937348	1.7195269	0.00045962	0.000000499

火星

	a0	a1	a2	a3
L	355.433275	19141.6964746	0.00031097	0.000000015
a	1.523679342			
e	0.09340062	0.000090483	-0.0000000806	-0.00000000035
i	1.849726	-0.0006010	0.00001276	-0.000000006
Ω	49.558093	0.7720923	0.00001605	0.000002325
π	336.060234	1.8410331	0.00013515	0.000000318

木星

	a0	a1	a2	a3
L	34.351484	3036.3027889	0.00022374	0.000000025
a	5.202603191	0.0000001913		
e	0.04849485	0.000163244	-0.0000004719	-0.00000000197
i	1.303270	-0.0054966	0.00000465	-0.000000004
Ω	100.464441	1.0209550	0.00040117	0.000000569
π	14.331309	1.6126668	0.00103127	-0.000004569

土星

	a0	a1	a2	a3
L	50.077471	1223.5110141	0.00051952	-0.000000003
a	9.554909596	-0.0000021389		
e	0.05550862	-0.000346818	-0.0000006456	0.00000000338
i	2.488878	-0.0037363	-0.00001516	0.000000089
Ω	113.665524	0.8770979	-0.00012067	-0.000002380
π	93.056787	1.9637694	0.00083757	0.000004899

天王星

	a0	a1	a2	a3
L	314.055005	429.8640561	0.00030434	0.000000026
a	19.218446062	-0.0000000372	0.00000000098	
e	0.04629590	-0.000027337	0.0000000790	0.00000000025
i	0.773196	0.0007744	0.00003749	-0.000000092
Ω	74.005947	0.5211258	0.00133982	0.000018516
π	173.005159	1.4863784	0.00021450	0.000000433

海王星

	a0	a1	a2	a3
L	304.348665	219.8833092	0.00030926	0.000000018
a	30.110386869	-0.0000001663	0.00000000069	
e	0.00898809	0.000006408	-0.0000000008	-0.00000000005
i	1.769952	-0.0093082	-0.00000708	0.000000028
Ω	131.784057	1.1022057	0.00026006	-0.000000636
π	48.123691	1.4262677	0.00037918	-0.000000003

表 30. B(Date 黄道标中的星行轨道要素)

MERCURY

L	252.250 906	+149 472.674 6358	-0.000 005 35	+0.000 000 002
i	7.004 986	-0.005 9516	+0.000 000 81	+0.000 000 041
Ω	48.330 893	-0.125 4229	-0.000 088 33	-0.000 000 196
π	77.456 119	+0.158 8643	-0.000 013 43	+0.000 000 039

VENUS

L	181.979 801	+58 517.815 6760	+0.000 001 65	-0.000 000 002
i	3.394 662	-0.000 8568	-0.000 032 44	+0.000 000 010
Ω	76.679 920	-0.278 0080	-0.000 142 56	-0.000 000 198
π	131.563 707	+0.004 8646	-0.001 382 32	-0.000 005 332

EARTH

L	100.466 449	+35 999.372 8519	-0.000 005 68	+0.000 000 000
i	0	+0.013 0546	-0.000 009 31	-0.000 000 034
Ω	174.873 174	-0.241 0908	+0.000 040 67	-0.000 001 327
π	102.937 348	+0.322 5557	+0.000 150 26	+0.000 000 478

MARS

L	355.433 275	+19 140.299 3313	+0.000 002 61	-0.000 000 003
i	1.849 726	-0.008 1479	-0.000 022 55	-0.000 000 027
Ω	49.558 093	-0.294 9846	-0.000 639 93	-0.000 002 143
π	336.060 234	+0.443 8898	-0.000 173 21	+0.000 000 300

JUPITER

L	34.351 484	+3034.905 6746	-0.000 085 01	+0.000 000 004
i	1.303 270	-0.001 9872	+0.000 033 18	+0.000 000 092
Ω	100.464 441	+0.176 6828	+0.000 903 87	-0.000 007 032
π	14.331 309	+0.215 5525	+0.000 722 52	-0.000 004 590

SATURN

L	50.077 471	+1222.113 7943	+0.000 210 04	-0.000 000 019
i	2.488 878	+0.002 5515	-0.000 049 03	+0.000 000 018
Ω	113.665 524	-0.256 6649	-0.000 183 45	+0.000 000 357
π	93.056 787	+0.566 5496	+0.000 528 09	+0.000 004 882

URANUS

L	314.055 005	+428.466 9983	-0.000 004 86	+0.000 000 006
i	0.773 196	-0.001 6869	+0.000 003 49	+0.000 000 016
Ω	74.005 947	+0.074 1461	+0.000 405 40	+0.000 000 104
π	173.005 159	+0.089 3206	-0.000 094 70	+0.000 000 413

NEPTUNE

L	304.348 665	+218.486 2002	+0.000 000 59	-0.000 000 002
i	1.769 952	+0.000 2257	+0.000 000 23	-0.000 000 000
Ω	131.784 057	-0.006 1651	-0.000 002 19	-0.000 000 078
π	48.123 691	+0.029 1587	+0.000 070 51	-0.000 000 023