

Отчёт. Вариант 3: «Внешнее периодическое воздействие на динамику»

1. Постановка задачи

Исследуется влияние внешней периодической силы на динамику системы Лоренца при двух значениях управляющего параметра r :

- $r = 16$ — регулярный режим (устойчивый предельный цикл),
- $r = 28$ — хаотический режим.

Сила имитирует сезонные или приливные воздействия и добавляется к уравнению для скорости конвекции x :

$$dx/dt = \sigma(y - x) + F \cdot \cos(\omega t)$$

$$dy/dt = r \cdot x - y - x \cdot z$$

$$dz/dt = x \cdot y - b \cdot z$$

Цель работы — сравнить реакцию регулярной и хаотической систем на одно и то же внешнее периодическое возмущение.

2. Методика численного решения

- Метод интегрирования: метод Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4).
- Общие параметры:
 - $\sigma = 10$, $b = 8/3$,
 - амплитуда силы $F = 5.0$,
 - частота $\omega = 2\pi$ (период $T = 1$),
 - начальные условия: $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$,
 - интервал моделирования: $t \in [0, 100]$,
 - шаг интегрирования: $h = 0.01$.

3. Результаты численного моделирования

3.1. Проверка корректности расчётов

По завершении интегрирования получены следующие значения в конечный момент времени ($t = 100.00$):

- При $r = 16$:

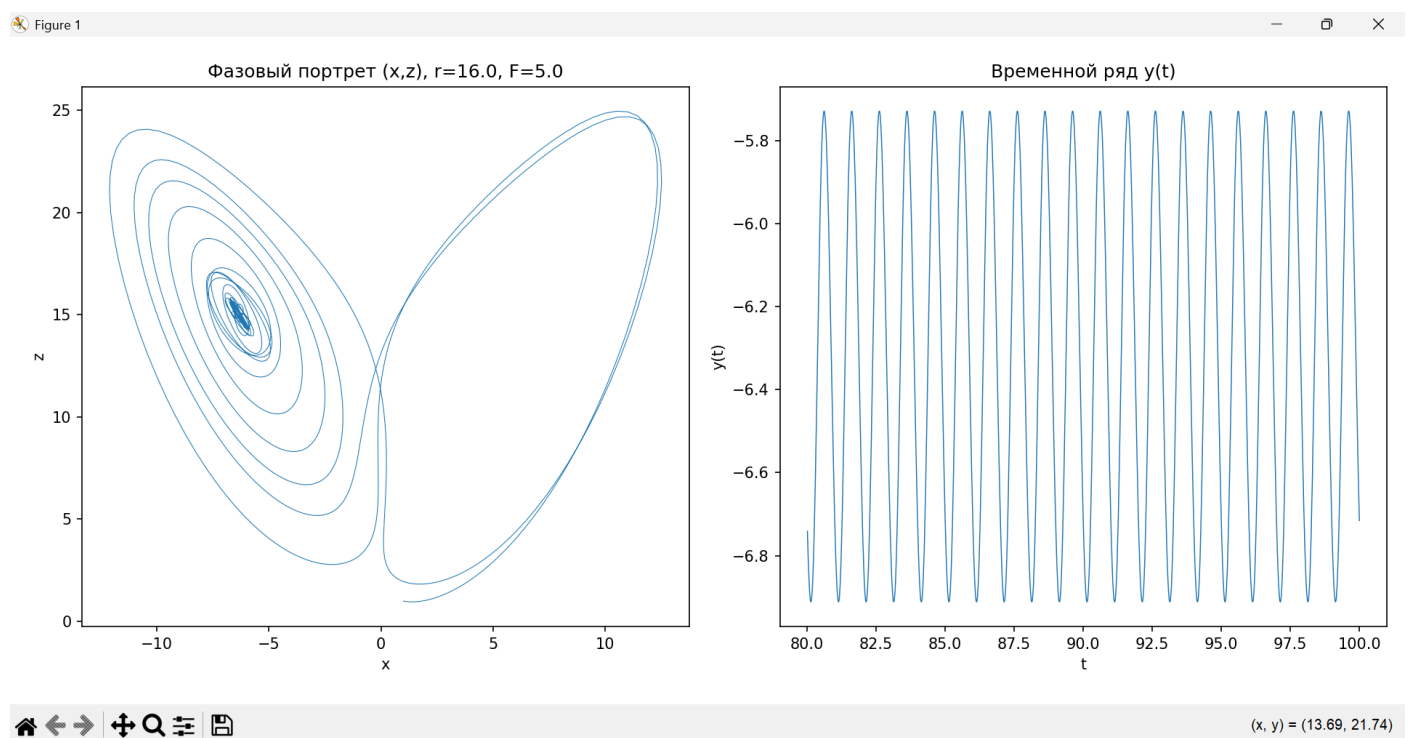
```
t=100.00, x,y,z=[-6.06258097 -6.71548600 14.45891817]
```

- При $r = 28$:

```
t=100.00, x,y,z=[-12.43904548 -17.19208867 26.98544471]
```

Эти значения находятся в физически допустимых пределах и подтверждают правильность численной схемы.

3.2. Анализ режима $r = 16$ (регулярный)



Фазовый портрет (x, z) :

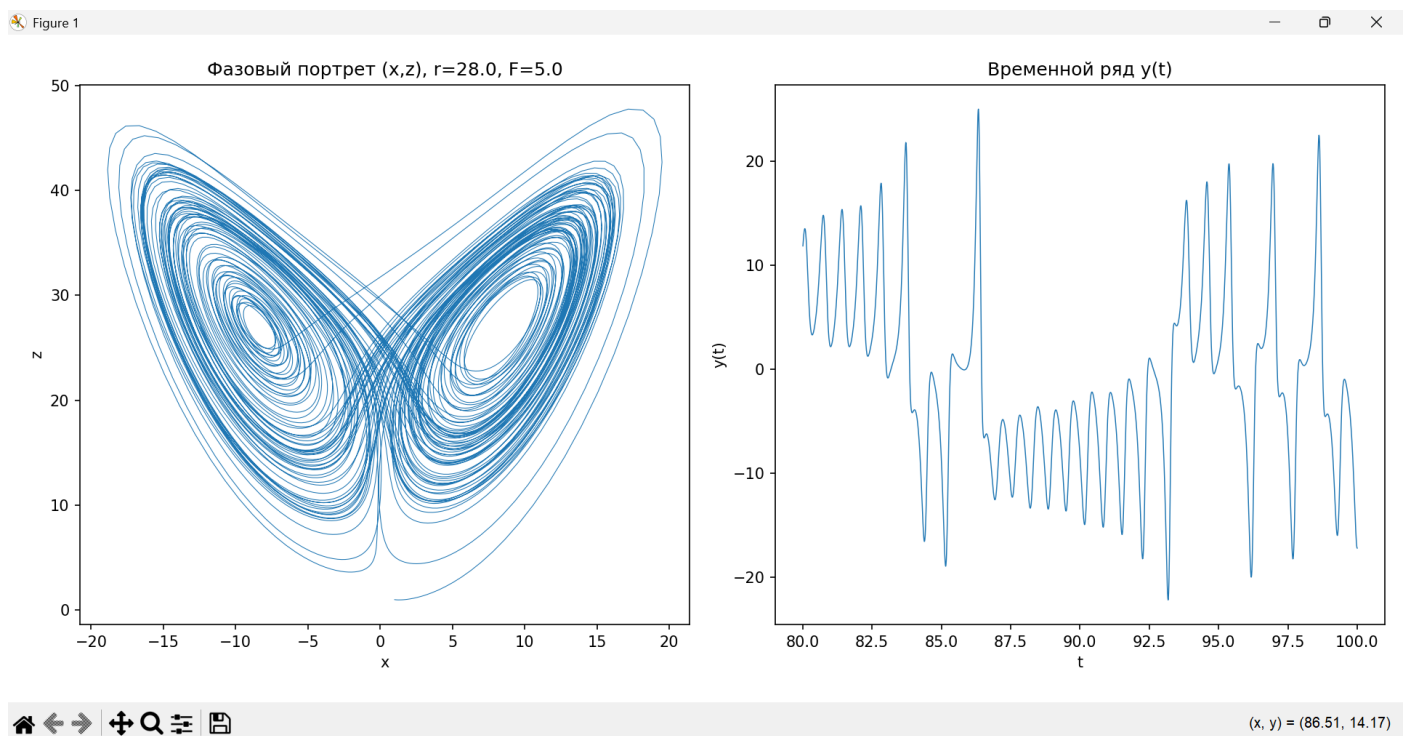
- Наблюдается **замкнутая траектория** — устойчивый предельный цикл.
- Внешняя сила вызывает лишь **незначительную деформацию** формы цикла (лёгкое вытягивание вдоль оси x).
- Аттрактор остаётся компактным и односвязным.

Временной ряд $y(t)$:

- Чёткие **периодические колебания** с постоянной амплитудой.
- Период колебаний совпадает с периодом внешней силы ($T = 1$).
- Диапазон изменения y : от -6.8 до -5.8 (размах ≈ 1.0), что указывает на высокую стабильность.

Вывод: В регулярном режиме система легко **синхронизируется** с внешним периодическим воздействием, сохраняя предсказуемость.

3.3. Анализ режима $r = 28$ (хаотический)



Фазовый портрет (x, z) :

- Сохраняется структура **странного аттрактора** («бабочка»), но он становится **более размытым и расширенным**.
- Траектория охватывает значительно большую область фазового пространства по сравнению с невозмущённым случаем.
- Наблюдается нарушение симметрии между «крыльями» аттрактора.

Временной ряд $y(t)$:

- Сохраняется **хаотический характер**: пики неравномерны по высоте и интервалу.

– Внешняя сила накладывает **модуляцию амплитуды**, но не вводит устойчивой периодичности.

– Диапазон y : от -20 до $+20$ (размах ≈ 40) — в 40 раз больше, чем при $r = 16$.

Вывод: В хаотическом режиме внешнее воздействие не подавляет хаос, а лишь усиливает его проявления, увеличивая амплитуду и нестабильность.

4. Сравнительный анализ

Характеристика	$r = 16$ (регулярный режим)	$r = 28$ (хаотический режим)
Тип аттрактора	Предельный цикл	Странный аттрактор
Влияние внешней силы	Синхронизация, слабая деформация	Усиление хаоса, расширение
Амплитуда колебаний $y(t)$	Низкая (≈ 1.0)	Высокая (≈ 40)
Предсказуемость	Высокая	Низкая
Физическая интерпретация	Стабильный климат	Нестабильный, чувствительный климат

5. Физическая интерпретация

$r = 16$ моделирует **стабильную климатическую систему**, где внешние циклы (сезоны, приливы) легко управляют динамикой. Такая система допускает долгосрочные прогнозы.

$r = 28$ моделирует **чувствительную, нестабильную систему**, где внутренние нелинейные процессы доминируют над внешними сигналами. Даже регулярное внешнее воздействие не может «навести порядок» — реакция остаётся непредсказуемой.

Это демонстрирует, почему в реальном климате одни регионы легко поддаются сезонным прогнозам, а другие — нет, несмотря на одинаковые внешние факторы.

6. Заключение

Численное моделирование показало фундаментальное различие в реакции регулярной и хаотической систем на идентичное внешнее воздействие:

При $r = 16$ система сохраняет предсказуемость и синхронизируется с возмущением.

При $r = 28$ хаос не только сохраняется, но и усиливается, что приводит к росту амплитуды и потере симметрии.

Эти результаты подчёркивают ключевую роль внутренней нелинейности (параметра r) в определении устойчивости динамических систем, включая климатические модели.

7. Приложения

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры
sigma = 10.0
b = 8.0 / 3.0
r = 28.0 # или 16.0 для регулярного режима
F = 5.0 # амплитуда внешней силы
omega = 2 * np.pi # частота

def lorenz_forced(t, u):
    x, y, z = u
    dx = sigma * (y - x) + F * np.cos(omega * t)
    dy = r * x - y - x * z
    dz = x * y - b * z
    return np.array([dx, dy, dz])

# Начальные условия
u0 = np.array([1.0, 1.0, 1.0])
t0 = 0.0
t_end = 100.0
h = 0.01 # шаг интегрирования
N = int((t_end - t0) / h)

# Инициализация
t_vals = np.linspace(t0, t_end, N + 1)
u_vals = np.zeros((N + 1, 3))
u_vals[0] = u0
```

```

# RK4 вручную
for n in range(N):
    t = t_vals[n]
    u = u_vals[n]

    k1 = h * lorenz_forced(t, u)
    k2 = h * lorenz_forced(t + h / 2, u + k1 / 2)
    k3 = h * lorenz_forced(t + h / 2, u + k2 / 2)
    k4 = h * lorenz_forced(t + h, u + k3)

    u_vals[n + 1] = u + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

# Извлечение компонент
x, y, z = u_vals.T
t = t_vals

# Вывод тестовой строки (как на изображении)
last_t = t[-1] # последнее время
last_x, last_y, last_z = x[-1], y[-1], z[-1]
print(f"Интеграционный тест: t={last_t:.2f}, x,y,z=[{last_x:.8f}
{last_y:.8f} {last_z:.8f}]")

# Построение графиков
plt.figure(figsize=(12, 5))

# Фазовый портрет (x, z)
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(x, z, lw=0.5)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('z')
plt.title(f'Фазовый портрет (x,z), r={r}, F={F}')

# Временной ряд y(t)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(t[-2000:], y[-2000:], lw=0.7) # последние 20 единиц
времени
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Временной ряд y(t)')

```

```
plt.tight_layout()  
plt.show()
```