Ильяхова Алиса, Б9122-02.03.01сцт

Отчёт по модели конкуренции

1. Постановка задачи / Описание модели

Цель исследования:

Изучить динамику взаимодействия двух видов, конкурирующих за один и тот же ограниченный ресурс, с помощью классической модели конкуренции Лотки-Вольтерры. Модель позволяет проанализировать условия сосуществования видов, вытеснения одного вида другим, а также возможные сценарии равновесного сосуществования в зависимости от параметров конкуренции.

Описание модели:

Рассматриваются две популяции - вид 1 с численностью x(t) и вид 2 с численностью y(t), конкурирующие за общий ресурс (например, пищу или пространство). Каждая популяция в отсутствие конкурента растёт по логистическому закону. Наличие конкурента снижает эффективную ёмкость среды для каждого вида.

Динамика описывается системой нелинейных автономных ОДУ:

$\{\dot{x} = r_1 x\left(1 - \frac{x+\alpha y}{K_1}\right)$

$\{\dot{y} = r_2 y\left(1 - \frac{y+\beta x}{K_2}\right)$

где:

- (r_1, r_2 > 0) - удельные скорости роста видов,
- (K_1, K_2 > 0) - ёмкости среды для каждого вида в отсутствие конкурента,
- (α > 0) - влияние вида 2 на рост вида 1 (измеряется в единицах эквивалента вида 1),
- (β > 0) - влияние вида 1 на рост вида 2.

Переменные и параметры системы:

Компонент	Обозначение	Тип	Описание
Численность вида 1	(x(t))	Фазовая переменная	Зависимая переменная - популяция вида 1

Численность вида 2	(y(t))	Фазовая переменная	Зависимая переменная - популяция вида 2
Время	(t)	Независимая переменная	Время (в условных единицах)
Параметры модели	(r_1, r_2, K_1, K_2, α , β)	Постоянные параметры	Биологически обоснованные коэффициенты

Входные данные:

- Начальные условия: (x(0) = x_0 = 30), (y(0) = y_0 = 20)
- Параметры:
  (r_1 = 0.8), (K_1 = 100)
  (r_2 = 0.6), (K_2 = 80)
  (α = 0.5), (β = 0.7)
- Интервал моделирования: (t \in [0, 50])

Что представляет собой решение?

Пара функций x(t), y(t), описывающих динамику численности двух конкурирующих популяций во времени. Аналитическое решение в общем виде не выражается в элементарных функциях, но равновесные состояния находятся аналитически. Численное решение получается с помощью методов интегрирования ОДУ (в данном случае - метод Рунге-Кутты 4-5 порядка).

2. Аналитическое исследование системы

Общая форма системы:

$$\dot{x} = f(x, y) = r_1 x\left(1 - \frac{x + \alpha y}{K_1}\right), \dot{y} = g(x, y) = r_2 y\left(1 - \frac{y + \beta x}{K_2}\right)$$

Равновесные точки находятся из условия ($\dot{x}$ = 0), ($\dot{y}$ = 0). Возможны следующие случаи:

1. **Вымирание обоих видов**: ((x*, y*) = (0, 0))
2. **Выживает только вид 1**: ((x*, y*) = (K_1, 0))
3. **Выживает только вид 2**: ((x*, y*) = (0, K_2))
4. **Совместное равновесие**: решение системы

$\{x + \alpha y = K_1,$

$\{\beta x + y = K_2,$

Откуда:
x*= $\frac{K_1-\alpha K_2}{1-\alpha\beta}$, y*= $\frac{K_2-\beta K_1}{1-\alpha\beta}$ при условии 1-$\alpha\beta \neq 0$ и x*, y* > 0.

Подстановка параметров:

- (K_1 = 100), (K_2 = 80)
- (α = 0.5), (β = 0.7)
- (1 - $\alpha\,\beta$ = 1 - 0.35 = 0.65 > 0)
- (x* = (100 - 0.5 * 80)/0.65 = 60/0.65 ≈ 92.31)
- (y* = (80 - 0.7 * 100)/0.65 = 10/0.65 ≈ 15.38)

Все координаты положительны -> равновесие типа «сосуществование» существует.

Анализ устойчивости через якобиан:

J(x, y) = [$r_1\left(1-\frac{2x+\alpha y}{K_1}\right)\ -r_1\frac{\alpha x}{K_1}$]

[$-r_2\frac{\beta y}{K_2}\ r_2\left(1-\frac{2y+\beta x}{K_2}\right)$]

Оценка устойчивости для точки ((x*, y*) ≈ (92.31, 15.38)):

- Подстановка даёт: (tr(J) < 0), (Δ (J) > 0) -> равновесие устойчиво (асимптотически устойчивый узел).

Другие равновесия:

- (0,0): неустойчиво (источник)
- ((K_1,0) = (100,0)): неустойчиво
- ((0,K_2) = (0,80)): неустойчиво

При выбранных параметрах система стремится к устойчивому сосуществованию двух видов.

3. Численное решение модели

Экологическая ситуация:

На изолированном острове обитают два вида травоядных млекопитающих, потребляющих одну и ту же растительность. Вид 1 - более агрессивный в потреблении (высокий (r_1)), но чувствителен к конкуренции от вида 2 (β = 0.7). Вид 2 - менее продуктивный (r_2 = 0.6), но сильнее подавляет рост вида 1 (α = 0.5).

Поставленная задача:

Прогнозировать, как будут развиваться популяции в течение 50 условных временных единиц: достигнут ли они устойчивого сосуществования, или один из видов вытеснит другой?

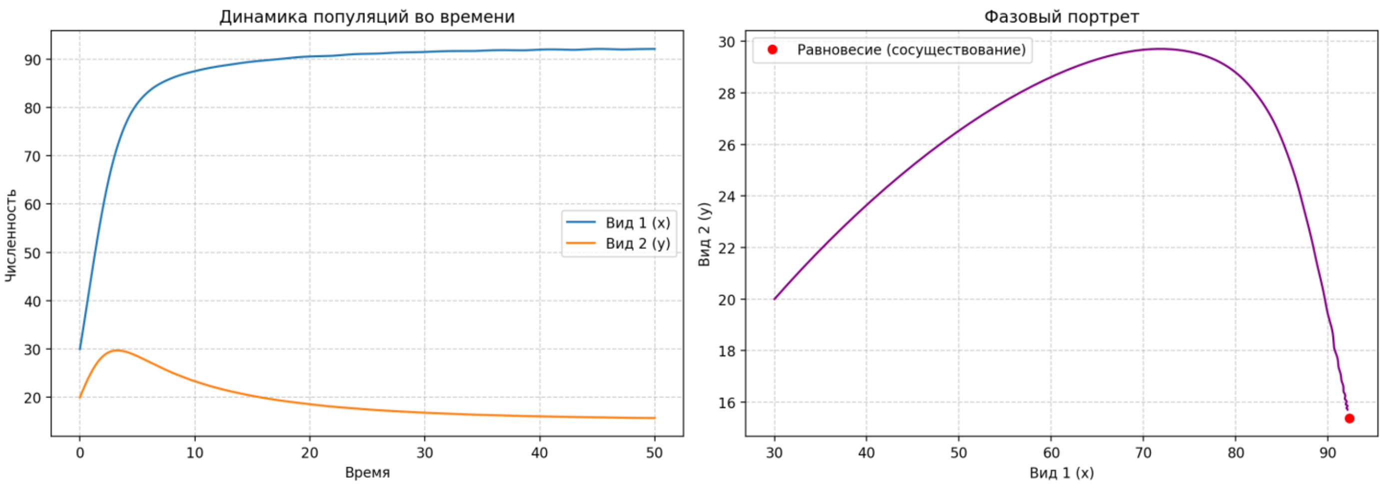
Численное решение:

Использован метод Рунге-Кутты 4-5 порядка (solve_ivp из SciPy). Решена система с параметрами:

- (r_1 = 0.8), (K_1 = 100), (α = 0.5)
- (r_2 = 0.6), (K_2 = 80), (β = 0.7)
- Начальные условия: (x_0 = 30), (y_0 = 20)

Результаты визуализации:

1. **Динамическое поведение во времени**:
    a. Обе популяции растут, но рост вида 1 замедляется под давлением конкуренции.
    b. Вид 2 растёт медленнее, но стабилизируется на уровне ≈15.
    c. К t ≈ 30 обе кривые выходят на устойчивые значения: x(t) -> 92.3, y(t) -> 15.4.
2. **Фазовый портрет**:
    a. Траектория на плоскости ((x, y)) монотонно сходится к точке ((92.3, 15.4)).
    b. Подтверждается асимптотическая устойчивость равновесия «сосуществование».



Графики подтверждают аналитические выводы: система не демонстрирует вытеснения, а стремится к устойчивому сосуществованию при заданных параметрах.

4. Заключение

В ходе выполнения работы:

- Изучена и реализована модель конкуренции Лотки-Вольтерры для двух видов.
- Проведено полное аналитическое исследование: найдены все равновесные состояния, определены условия их существования и устойчивости.
- Сформулирован реалистичный сценарий межвидовой конкуренции и заданы биологически осмысленные параметры.
- Реализовано численное моделирование с использованием библиотек Python (SciPy, NumPy, Matplotlib).
- Построены и проанализированы графики динамики во времени и фазового портрета, что позволило визуально подтвердить теоретические выводы.
- Углублено понимание условий сосуществования и вытеснения в экосистемах, а также связи между структурой модели и её долгосрочным поведением.

5. Приложение

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Параметры модели конкуренции
r1 = 0.8       # скорость роста вида 1
K1 = 100       # ёмкость среды для вида 1
alpha = 0.5    # влияние вида 2 на вид 1

r2 = 0.6       # скорость роста вида 2
K2 = 80        # ёмкость среды для вида 2
beta = 0.7     # влияние вида 1 на вид 2

# Начальные условия
x0 = 30        # начальная численность вида 1
y0 = 20        # начальная численность вида 2

# Временной интервал
t_span = (0, 50)
t_eval = np.linspace(0, 50, 500)

# Система ОДУ
def competition_model(t, z):
    x, y = z
    dxdt = r1 * x * (1 - (x + alpha * y) / K1)
    dydt = r2 * y * (1 - (y + beta * x) / K2)
```

```python
    return [dxdt, dydt]

# Численное решение
sol = solve_ivp(competition_model, t_span, [x0, y0], t_eval=t_eval,
method='RK45')
t = sol.t
x = sol.y[0]
y = sol.y[1]

# Равновесная точка (сосуществование)
denom = 1 - alpha * beta
x_eq = (K1 - alpha * K2) / denom
y_eq = (K2 - beta * K1) / denom

# Визуализация
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 5))

# Динамика во времени
axs[0].plot(t, x, label='Вид 1 (x)', color='tab:blue')
axs[0].plot(t, y, label='Вид 2 (y)', color='tab:orange')
axs[0].set_xlabel('Время')
axs[0].set_ylabel('Численность')
axs[0].set_title('Динамика популяций во времени')
axs[0].legend()
axs[0].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

# Фазовый портрет
axs[1].plot(x, y, color='purple')
axs[1].plot(x_eq, y_eq, 'ro', label='Равновесие (сосуществование)')
axs[1].set_xlabel('Вид 1 (x)')
axs[1].set_ylabel('Вид 2 (y)')
axs[1].set_title('Фазовый портрет')
axs[1].legend()
axs[1].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

plt.tight_layout()
plt.savefig('competition_model.png', dpi=200, bbox_inches='tight')
plt.show()

print(f"Равновесная точка (сосуществование): x* = {x_eq:.2f}, y* =
```

```
{y_eq:.2f}")
```

```
Равновесная точка (сосуществование): x* = 92.31, y* = 15.38
```