Ильяхова Алиса, Б9122-02.03.01сцт

Отчёт по модели Лотки-Вольтерра

**1. Постановка задачи / Описание модели**

Цель исследования - изучить динамику взаимодействующих популяций «хищник–жертва» с помощью классической биологической модели Лотки–Вольтерра, разработанной независимо Альфредом Лоткой (1925 г.) и Вито Вольтеррой (1926 г.). Эта модель стала одной из первых в истории математической биологии, объясняющих циклические колебания в природных популяциях (например, лисы и зайцы в Канаде).

Описание модели:
Система описывает эволюцию двух связанных популяций:

- Жертвы (например, кролики), численность обозначим как x(t),
- Хищники (например, лисы), численность как y(t).

Динамика задаётся системой нелинейных автономных ОДУ:

$$\{\dot{x} = \alpha x - \beta xy,\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y,$$

где:

- $\alpha>0$ - естественная скорость роста жертв в отсутствие хищников,
- $\beta>0$ - интенсивность поимки жертв хищниками,
- $\gamma>0$ - естественная смертность хищников без пищи,
- $\delta>0$ - эффективность превращения съеденных жертв в потомство хищников.

Переменные и параметры:

| Компонент | Обозначение | Тип | Описание |
|---|---|---|---|
| Численность жертв | x(t) | Фазовая переменная | Зависимая переменная |
| Численность хищников | y(t) | Фазовая переменная | Зависимая переменная |
| Время | t | Независимая переменная | Время (условные единицы) |
| Параметры | $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ | Константы | Биологически обоснованные коэффициенты |

Входные данные (начальные условия):

- x(0) = 40 - начальное число жертв,
- y(0) = 9 - начальное число хищников.

Интервал моделирования: $t \in [0,30]$.

Что представляет собой решение?
Решение - это пара функций $x(t)$, $y(t)$, описывающих временную динамику популяций. Явного решения в элементарных функциях нет, но система интегрируема (первый интеграл позволяет описать траектории). Численно - это дискретные приближения $x_i$, $y_i$ , полученные методом Рунге–Кутты.

**2. Аналитическое исследование системы**

Особые (равновесные) точки находятся из условия $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$:

1. $(x*,y*) = (0,0)$ - полное вымирание.
2. $(x*,y*) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ - коэволюционное равновесие.

При выбранных параметрах:
$x* = 1.5/0.075 = 20$,
$y* = 1.0/0.1 = 10$.

Анализ устойчивости через якобиан:

$$J(x,y)=[\alpha-\beta y \; -\beta x]$$

$$[\delta y \; \delta x-\gamma \;]$$

- В точке (0, 0): собственные значения $\lambda_1 = \alpha>0$, $\lambda_2 = -\gamma<0$ -> седло (неустойчиво).
- В точке (20, 10): собственные значения $\lambda=\pm i\sqrt{\alpha\gamma} = \pm i\sqrt{1.5}$ -> несмотря на то, что линеаризация даёт центр, в нелинейной системе это не гарантирует замкнутых траекторий. Однако наличие первого интеграла $V(x,y) = const$ доказывает, что фазовые траектории действительно замкнуты, и равновесие нейтрально устойчиво.

Первый интеграл (инвариант):

$V(x, y) = \delta x-\gamma \ln x+\beta y-\alpha \ln y = const$

Это объясняет сохранение «энергии» системы и отсутствие затухания колебаний.

**3. Численное решение модели**

Экологическая ситуация:
Моделируется островная экосистема с кроликами (жертвы) и лисами (хищники). Начально - 40 кроликов и 9 лис. Условия позволяют кроликам быстро размножаться, но лисы эффективно охотятся, и сами вымирают без добычи.

Поставленная задача:
Прогнозировать, как будут меняться популяции в течение 30 условных временных единиц (например, месяцев), и выявить циклическую природу их взаимодействия.

Численное решение:
Использован метод Рунге-Кутты 4-5 порядка (solve_ivp из SciPy). Решена система с параметрами:

- $\alpha=1.0$, $\beta=0.1$, $\gamma=1.5$, $\delta=0.075$.

Результаты (см. график):

1. Динамическое поведение во времени:
   a. Жертвы и хищники колеблются синусоидально.
   b. Пик хищников запаздывает относительно пика жертв - это следствие трофической задержки: хищники размножаются после роста пищи.
2. Фазовый портрет:
   a. Траектория замкнута, образуя овал вокруг точки (20, 10).
   b. Это подтверждает: система не стремится к равновесию, но и не расходится - она циклически колеблется.

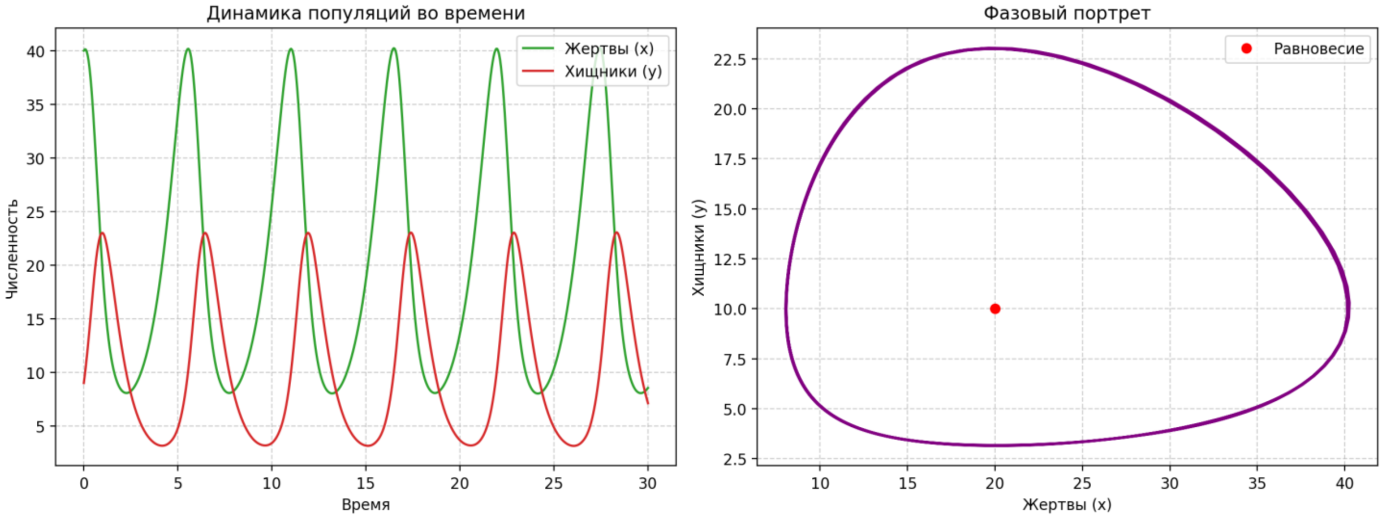
**4. Заключение**

В ходе работы:

- Изучена и реализована классическая модель «хищник–жертва» Лотки–Вольтерра.
- Выполнено полное аналитическое исследование: найдены равновесия, исследована устойчивость, выявлен первый интеграл.
- Реализовано численное моделирование на Python с использованием SciPy и Matplotlib.
- Построены и проанализированы графики временной динамики и фазового портрета, подтверждающие теоретические выводы.
- Углублено понимание связи между биологической реальностью и математическими моделями.
- Прокачаны навыки:
  - анализа динамических систем,
  - научного программирования,
  - визуализации и интерпретации результатов моделирования.

Модель продемонстрировала, как простые правила взаимодействия могут генерировать сложную, самоорганизующуюся динамику - ключевой принцип синергетики и теории сложных систем.

# 5. Приложения




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Параметры модели Лотки-Вольтерра
alpha = 1.0    # естественный рост жертв
beta  = 0.1    # эффективность хищников
gamma = 1.5    # естественная смертность хищников
delta = 0.075  # репродуктивный эффект от поедания жертв

# Начальные условия
x0 = 40  # жертвы
y0 = 9   # хищники

# Временной интервал
t_span = (0, 30)
t_eval = np.linspace(0, 30, 600)

# Система ОДУ
def lotka_volterra(t, z):
    x, y = z
    dxdt = alpha * x - beta * x * y
    dydt = delta * x * y - gamma * y
    return [dxdt, dydt]

# Численное решение
sol = solve_ivp(lotka_volterra, t_span, [x0, y0], t_eval=t_eval, method='RK45')
t = sol.t
x = sol.y[0]
```

```python
y = sol.y[1]

# Точка равновесия
x_eq = gamma / delta
y_eq = alpha / beta

# Визуализация
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(13, 5))

# Динамика во времени
axs[0].plot(t, x, label='Жертвы (x)', color='tab:green')
axs[0].plot(t, y, label='Хищники (y)', color='tab:red')
axs[0].set_xlabel('Время')
axs[0].set_ylabel('Численность')
axs[0].set_title('Динамика популяций во времени')
axs[0].legend()
axs[0].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

# Фазовый портрет
axs[1].plot(x, y, color='purple')
axs[1].plot(x_eq, y_eq, 'ro', label='Равновесие')
axs[1].set_xlabel('Жертвы (x)')
axs[1].set_ylabel('Хищники (y)')
axs[1].set_title('Фазовый портрет')
axs[1].legend()
axs[1].grid(True, linestyle='--', alpha=0.6)

plt.tight_layout()
plt.savefig('lotka_volterra.png', dpi=200, bbox_inches='tight')
plt.show()

print(f"Точка равновесия: x* = {x_eq:.2f}, y* = {y_eq:.2f}")
```

```
Точка равновесия: x* = 20.00, y* = 10.00
```