Ильяхова Алиса, Б9122-02.03.01сцт

Отчёт по математическим моделям Мальтуса и Ферхюльста

1. Постановка задачи / Описание модели

Цель исследования:

Рассмотрение и сопоставление двух фундаментальных моделей, изменяющих численность популяций - модели Мальтуса и Ферхюльста - с акцентом на их математические характеристики, стабильность состояний равновесия и особенности работы при компьютерном моделировании, иллюстрируемое развитием популяции бактерий в замкнутой среде.

Описание моделей

Обе модели рассматривают эволюцию численности популяции x(t) в зависимости от времени t, определяемую внутренним потенциалом роста и внешними ограничениями среды обитания (что особенно актуально для модели Ферхюльста).

Модель Мальтуса: [$\frac{dx}{dt}$ = rx]. В этой модели скорость изменения популяции прямо связана с величиной самой популяции. Предполагается наличие неограниченных ресурсов, поэтому модель подходит для описания лишь первых стадий развития или искусственно созданных ситуаций.

Модель Ферхюльста: [$\frac{dx}{dt}$ = rx (1 - $\frac{x}{K}$)]. Она учитывает конечность ресурсов: по мере приближения численности x к предельной ёмкости K, скорость роста уменьшается и стремится к нуля. Этот подход представляет собой более достоверное описание для изолированных экосистем.

Переменные и параметры системы

Компонент	Обозначение	Тип	Описание

Фазовая переменная	$x(t)$	Зависимая переменная	Численность популяции в момент времени t
Независимая переменная	t	Время	Независимая переменная (время, в часах)
Параметр	r	Постоянный параметр	Удельная скорость роста (в час$^{-1}$)
Параметр	K	Постоянный параметр	Ёмкость среды - максимальная устойчивая численность популяции

В модели Мальтуса параметр K отсутствует.

Входные данные:

- Начальное условие: ($x(0) = x_0 = 10$) - начальная численность популяции (бактерий).
- Интервал моделирования: ($t \in [0, 20]$) часов.
- Параметры:
  - ($r = 0.5$ ч$^{-1}$) - биологически обоснованная скорость размножения.
  - ($K = 1000$) - максимальная вместимость среды (например, объём питательной среды в чашке Петри).

Это типичная задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка.

Что представляет собой решение?

Решение - это функция x(t), описывающая эволюцию численности популяции во времени:

- Аналитическое решение:
  - Мальтус: ($x(t) = x_0 e^{rt}$)
  - Ферхюльст: ($x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - x_0}{x_0}\right) e^{-rt}}$)

- Численное решение - аппроксимация (x(t)) на дискретной сетке времени, полученная с помощью численного интегратора (в коде используется solve_ivp из SciPy).

Решение позволяет:

- Прогнозировать численность популяции в будущем.
- Оценить влияние параметров (r) и (K) на динамику.
- Определить долгосрочное поведение системы (устойчивость, насыщение и т.д.).

Краткое резюме структуры модели

Модель	Уравнение	Реализм	Точки равновесия	Устойчивость при (r > 0)
Мальтуса	($\dot{x}$ = rx)	Низкий	x = 0	Неустойчива
Ферхюльста	($\dot{x}$ = rx (1 - $\frac{x}{K}$))	Высокий	x = 0, x = K	x = 0 - неустойчива; x = K - устойчива

2. Аналитическое исследование системы

В этом разделе мы проведем комплексный аналитический обзор обеих моделей, включая поиск общего решения (при его наличии), выявление точек равновесия и исследование их устойчивости с использованием метода линеаризации (первое приближение).

Модель Мальтуса

Уравнение модели:

$\frac{dx}{dt}$ = rx, r > 0

Аналитическое решение

Это линейное однородное ОДУ с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид: [$x(t) = x_0 e^{rt}$], где $x_0 = x(0)$ - начальная численность популяции.

Решение показывает экспоненциальный рост при ($r > 0$) и экспоненциальный спад при ($r < 0$).

Точки равновесия

Точка равновесия определяется из условия ($\frac{dx}{dt} = 0$) : [$rx = 0 \Rightarrow x^* = 0$].

Таким образом, система имеет единственную равновесную точку ($x^* = 0$).

Анализ устойчивости

Рассмотрим линеаризованное уравнение в окрестности равновесия. Для ОДУ вида ($\dot{x} = f(x)$), устойчивость определяется знаком производной ($f'(x^*)$):

[$f(x) = rx \Rightarrow f'(x) = r$].

- При ($r > 0$) : ($f'(0) = r > 0$) → точка неустойчива (популяция отклоняется от нуля).
- При ($r < 0$): ($f'(0) = r < 0$) → точка асимптотически устойчива.

В биологическом контексте обычно ($r > 0$), поэтому нулевое равновесие неустойчиво: даже малая начальная популяция будет расти.

Модель Ферхюльста

Уравнение модели

[$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, $r > 0$, $K > 0$]

Аналитическое решение

Уравнение также допускает разделение переменных. Общее решение (при ($0 < x_0 < K$)):

[$x(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-x_0}{x_0}\right)e^{-rt}}$].

Это логистическая кривая (S-образная): начальный экспоненциальный рост замедляется по мере приближения к пределу K, и решение асимптотически стремится к K.

Точки равновесия

Находим из условия ($\frac{dx}{dt} = 0$) : [$rx\,(1 - \frac{x}{K}) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0,\ x_2^* = K$].

Система имеет две равновесные точки:

- ($x_1^* = 0$) - вымирание популяции,
- ($x_2^* = K$) - насыщение среды.

Анализ устойчивости

Функция правой части: ($f(x) = rx\,(1 - \frac{x}{K})$).

Производная: [$f'(x) = r\,(1 - \frac{2x}{K})$].

- В точке ($x_1^* = 0$): [$f'(0) = r > 0 \Rightarrow$ неустойчивое равновесие]. Любое малое возмущение ($x_0 > 0$) приводит к росту популяции.
- В точке ($x_2^* = K$) : $f'(K) = r\,(1 - 2) = -r < 0 \Rightarrow$ асимптотически устойчивое равновесие. Популяция стремится к (K) при любых начальных условиях ($x_0 > 0$).

Таким образом, при ($r > 0, K > 0$):

- ($x = 0$) - источник,
- ($x = K$) - сток.

Сравнение моделей:

Модель	Решение	Равновесные точки	Устойчивость (при r > 0)
Мальтуса	($x(t) = x_0 e^{rt}$)	($x^* = 0$)	Неустойчива

Ферхюльста	Логистическая функция	($x^* = 0, K$)	(0) - неустойчива, (K) - устойчива

Модель Мальтуса не допускает устойчивого состояния с ненулевым значением и предсказывает бесконечное увеличение, что противоречит реальности замкнутых систем.

Модель Ферхюльста, напротив, обладает глобально устойчивым положительным равновесием ($x = K$), что делает её более адекватной для описания реальных биологических, экологических или социальных процессов с ограниченными ресурсами.

3. Численное решение модели

Формирование входного датасета и постановка задачи

Для численного моделирования была выбрана биологическая ситуация: рост популяции бактерий escherichia coli в лабораторной чашке Петри с ограниченным объёмом питательной среды.

Исходные данные:

- В начальный момент времени в чашке находится 10 бактерий.
- Условия благоприятны для размножения: удельная скорость роста ($r = 0.5$ ч$^{-1}$) (удвоение каждые ~1.4 часа).
- Среда конечна: максимальная ёмкость ($K = 1000$) бактерий - это предел, обусловленный объёмом среды и доступностью питательных веществ.
- Время наблюдения: 20 часов - достаточный интервал, чтобы увидеть выход на стационар.

Задача:

Оценить, как будет развиваться популяция бактерий в данных условиях, и сравнить поведение двух моделей - Мальтуса и Ферхюльста.

Задача позволит:

- Продемонстрировать нереалистичность экспоненциальной модели при длительном прогнозе.
- Показать, как логистическая модель учитывает эффект насыщения.
- Визуализировать динамику и структуру фазового пространства.

Численное решение

Для численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) использован метод Рунге-Кутты 4-5-ого порядка через функцию solve_ivp из библиотеки SciPy.

- Начальное условие: ($x(0) = x_0 = 10$)
- Параметры:
  - ($r = 0.5$)
  - ($K = 1000$)
- Интервал интегрирования: ($t \in [0, 20]$)
- Количество точек для визуализации: 400 (равномерная сетка)

Решались два ОДУ:

1. Модель Мальтуса:

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

2. Модель Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = rx\,(1 - \frac{x}{K})$$

Результатом являются дискретные аппроксимации функций ($x_{\mathrm{Malthus}}(t)$) и ($x_{\mathrm{Verhulst}}(t)$).

Визуализация результатов

В рамках численного анализа построены два ключевых графика.

Динамическое поведение модели (временная эволюция)

На левом графике отображена зависимость численности популяции от времени:

- Красная кривая (Мальтус): экспоненциальный рост - к 20-му часу популяция достигает ($x \approx 2.2 * 10^5$), что физически невозможно в ограниченной чашке.
- Синяя кривая (Ферхюльст): S-образная кривая - быстрый рост в первые 10 часов, затем замедление и выход на уровень ($x \approx K = 1000$).
- Пунктирная серая линия: отмечает предельную ёмкость среды (K).

Модель Ферхюльста точно воспроизводит процессы насыщения, в отличие от модели Мальтуса, которая демонстрирует завышенные прогнозы и игнорирует ограничивающие факторы.

Фазовый портрет модели

На правом графике построен фазовый портрет - зависимость скорости изменения популяции ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$) от её текущей численности (x):

- Мальтус: прямая линия ($\dot{x} = rx$). При любом ($x > 0$) скорость положительна → рост без остановки.
- Ферхюльст: парабола, пересекающая ось (x) в точках ($x = 0$) и ($x = K$):
  - При ($0 < x < K$) : ($\dot{x} > 0$) → рост.
  - При ($x > K$) : ($\dot{x} < 0$) → сокращение (если популяция превысит ёмкость).
  - При ($x = K$) : ($\dot{x} = 0$) → устойчивое равновесие.

Фазовый портрет наглядно демонстрирует биологическую регуляцию: система сама стремится к устойчивому состоянию ($x = K$), независимо от начального значения (при ($x_0 > 0$)).

Выводы по численному моделированию:

1. Модель Мальтуса применима только на коротких временных интервалах, когда ресурсы действительно можно считать неограниченными.
2. Модель Ферхюльста обеспечивает реалистичный долгосрочный прогноз и корректно отражает эффект конкуренции за ресурсы.
3. Численное решение подтверждает аналитические выводы об устойчивости: все траектории (при ($x_0 > 0$)) стремятся к ($x = K$).

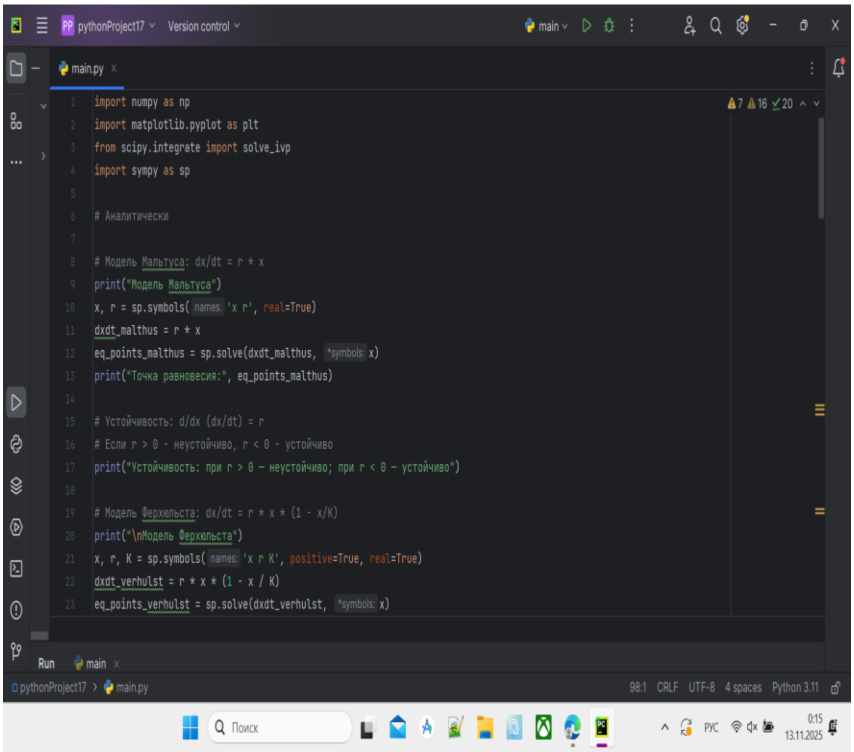
4. Визуализация (временная динамика + фазовый портрет) даёт полное качественное понимание поведения системы и позволяет интуитивно интерпретировать математические свойства модели.

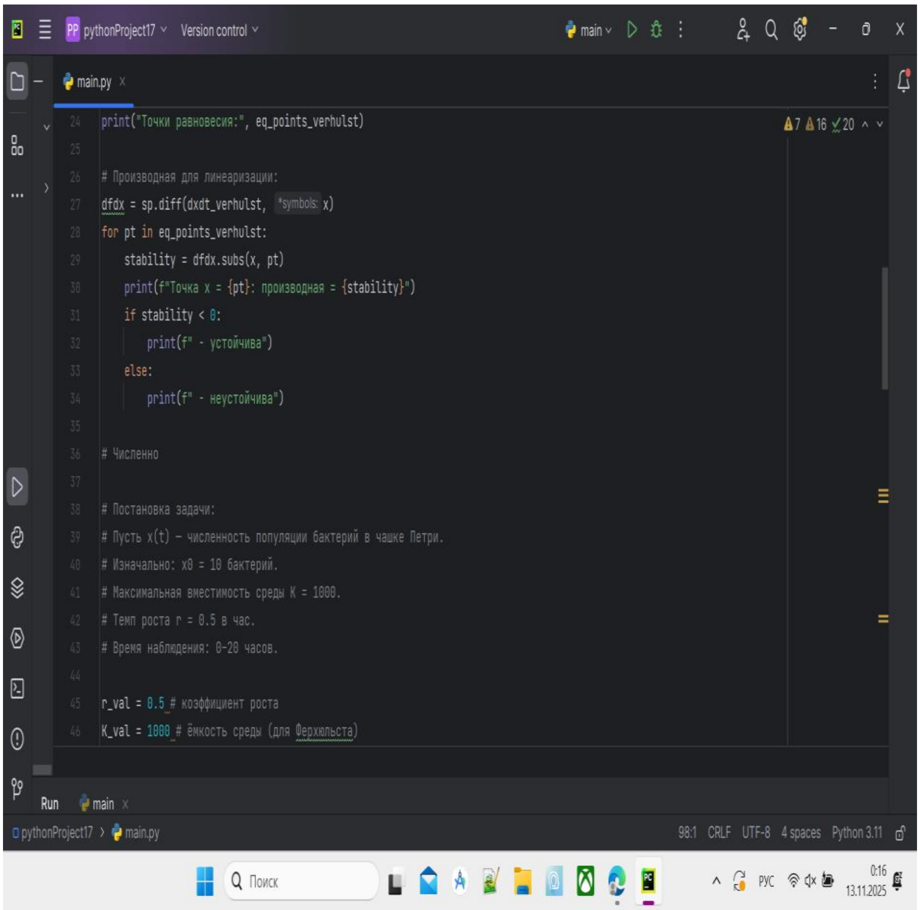
4. Заключение

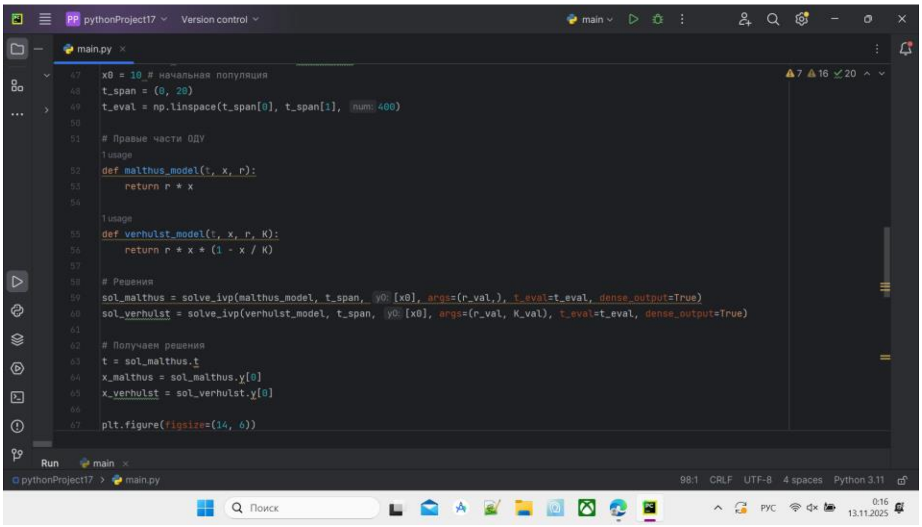
В ходе выполнения работы мы:

- Изучили две фундаментальные модели динамики популяций - экспоненциальную (Мальтуса) и логистическую (Ферхюльста) - и поняли их биологическую и математическую суть.
- Научились проводить полное аналитическое исследование автономных ОДУ: находить общее решение, определять точки равновесия и исследовать их устойчивость с помощью линеаризации.
- Освоили постановку прикладной задачи: сформулировали реалистичный сценарий роста бактериальной популяции, задали осмысленные параметры и начальные условия.
- Приобрели навыки численного решения ОДУ с использованием современных инструментов Python (библиотеки SciPy, NumPy).
- Освоили методы визуализации динамических систем: построили графики временной эволюции и фазовые портреты, что позволило наглядно интерпретировать поведение моделей.
- Углубили понимание связи между теорией и практикой: аналитические выводы об устойчивости подтвердились численными экспериментами, а визуализация сделала результаты доступными для содержательной интерпретации.

Работа позволила интегрировать знания из математического анализа, теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики и прикладного моделирования, а также прокачать навыки научного программирования и анализа динамических систем.


pythonProject17
Version control
main.py
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
import sympy as sp
# Аналитически
# Модель Мальтуса: dx/dt = r * x
print("Модель Мальтуса")
x, r = sp.symbols('x r', real=True)
dxdt_malthus = r * x
eq_points_malthus = sp.solve(dxdt_malthus, x)
print("Точка равновесия:", eq_points_malthus)
# Устойчивость: d/dx (dx/dt) = r
# Если r > 0 - неустойчиво, r < 0 - устойчиво
print("Устойчивость: при r > 0 – неустойчиво; при r < 0 – устойчиво")
# Модель Ферхюльста: dx/dt = r * x * (1 - x/K)
print("\nМодель Ферхюльста")
x, r, K = sp.symbols('x r K', positive=True, real=True)
dxdt_verhulst = r * x * (1 - x / K)
eq_points_verhulst = sp.solve(dxdt_verhulst, x)
Run
main
pythonProject17 > main.py
98:1 CRLF UTF-8 4 spaces Python 3.11
Поиск
РУС
0:15
13.11.2025


pythonProject17
Version control
main.py
print("Точки равновесия:", eq_points_verhulst)
# Производная для линеаризации:
dfdx = sp.diff(dxdt_verhulst, x)
for pt in eq_points_verhulst:
    stability = dfdx.subs(x, pt)
    print(f"Точка x = {pt}: производная = {stability}")
    if stability < 0:
        print(f" - устойчива")
    else:
        print(f" - неустойчива")
# Численно
# Постановка задачи:
# Пусть x(t) – численность популяции бактерий в чашке Петри.
# Изначально: x0 = 10 бактерий.
# Максимальная вместимость среды K = 1000.
# Темп роста r = 0.5 в час.
# Время наблюдения: 0-20 часов.
r_val = 0.5 # коэффициент роста
K_val = 1000 # ёмкость среды (для Ферхюльста)
Run
main
pythonProject17 > main.py
98:1 CRLF UTF-8 4 spaces Python 3.11
Поиск
РУС
0:16
13.11.2025


x0 = 10 # начальная популяция
t_span = (0, 20)
t_eval = np.linspace(t_span[0], t_span[1], num: 400)

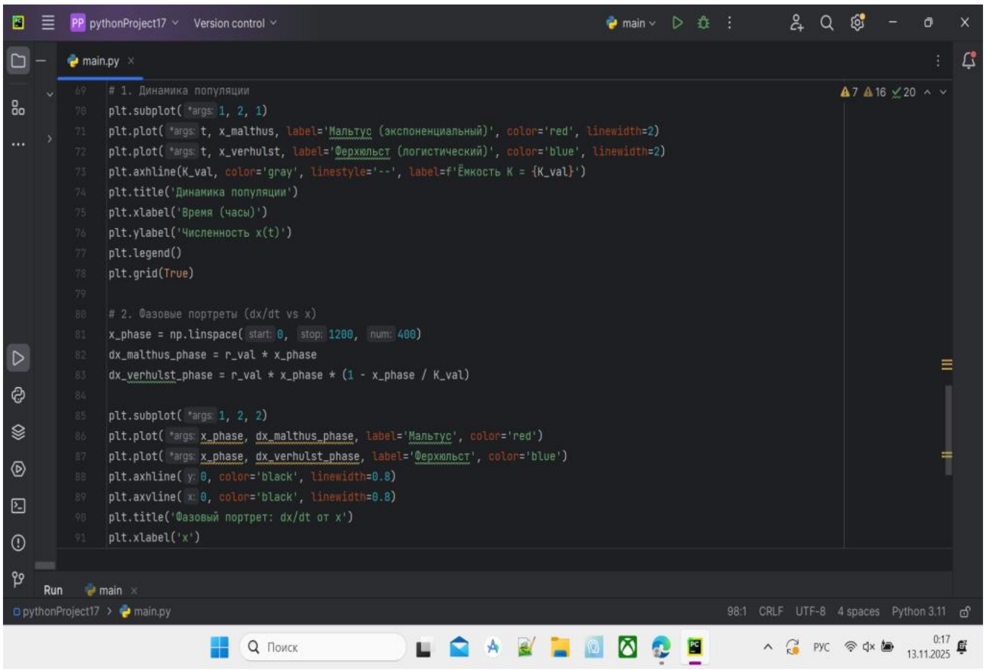
# Правые части ОДУ
def malthus_model(t, x, r):
    return r * x

def verhulst_model(t, x, r, K):
    return r * x * (1 - x / K)

# Решения
sol_malthus = solve_ivp(malthus_model, t_span, y0: [x0], args=(r_val,), t_eval=t_eval, dense_output=True)
sol_verhulst = solve_ivp(verhulst_model, t_span, y0: [x0], args=(r_val, K_val), t_eval=t_eval, dense_output=True)

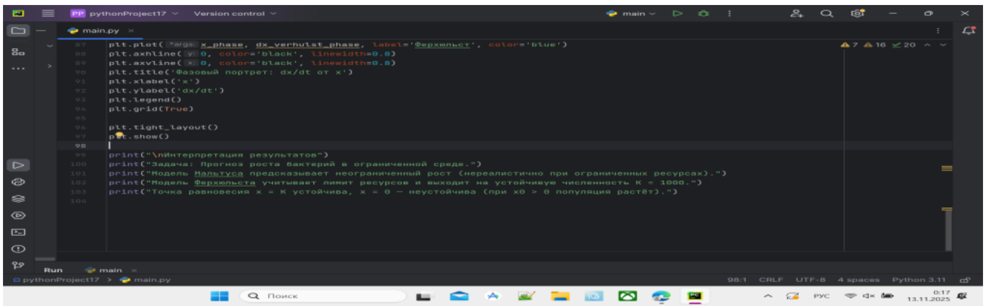
# Получаем решения
t = sol_malthus.t
x_malthus = sol_malthus.y[0]
x_verhulst = sol_verhulst.y[0]

plt.figure(figsize=(14, 6))


# 1. Динамика популяции
plt.subplot(*args: 1, 2, 1)
plt.plot(*args: t, x_malthus, label='Мальтус (экспоненциальный)', color='red', linewidth=2)
plt.plot(*args: t, x_verhulst, label='Ферхюльст (логистический)', color='blue', linewidth=2)
plt.axhline(K_val, color='gray', linestyle='--', label=f'Ёмкость K = {K_val}')
plt.title('Динамика популяции')
plt.xlabel('Время (часы)')
plt.ylabel('Численность x(t)')
plt.legend()
plt.grid(True)

# 2. Фазовые портреты (dx/dt vs x)
x_phase = np.linspace(start: 0, stop: 1200, num: 400)
dx_malthus_phase = r_val * x_phase
dx_verhulst_phase = r_val * x_phase * (1 - x_phase / K_val)

plt.subplot(*args: 1, 2, 2)
plt.plot(*args: x_phase, dx_malthus_phase, label='Мальтус', color='red')
plt.plot(*args: x_phase, dx_verhulst_phase, label='Ферхюльст', color='blue')
plt.axhline(y: 0, color='black', linewidth=0.8)
plt.axvline(x: 0, color='black', linewidth=0.8)
plt.title('Фазовый портрет: dx/dt от x')
plt.xlabel('x')


plt.plot(*args: x_phase, dx_verhulst_phase, label='Ферхюльст', color='blue')
plt.axhline(y: 0, color='black', linewidth=0.8)
plt.axvline(x: 0, color='black', linewidth=0.8)
plt.title('Фазовый портрет: dx/dt от x')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('dx/dt')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

print("\nИнтерпретация результатов")
print("Задача: Прогноз роста бактерий в ограниченной среде.")
print("Модель Мальтуса предсказывает неограниченный рост (нереалистично при ограниченных ресурсах).")
print("Модель Ферхюльста учитывает лимит ресурсов и выходит на устойчивую численность K = 1000.")
print("Точка равновесия x = K устойчива, x = 0 — неустойчива (при x0 > 0 популяция растёт).")

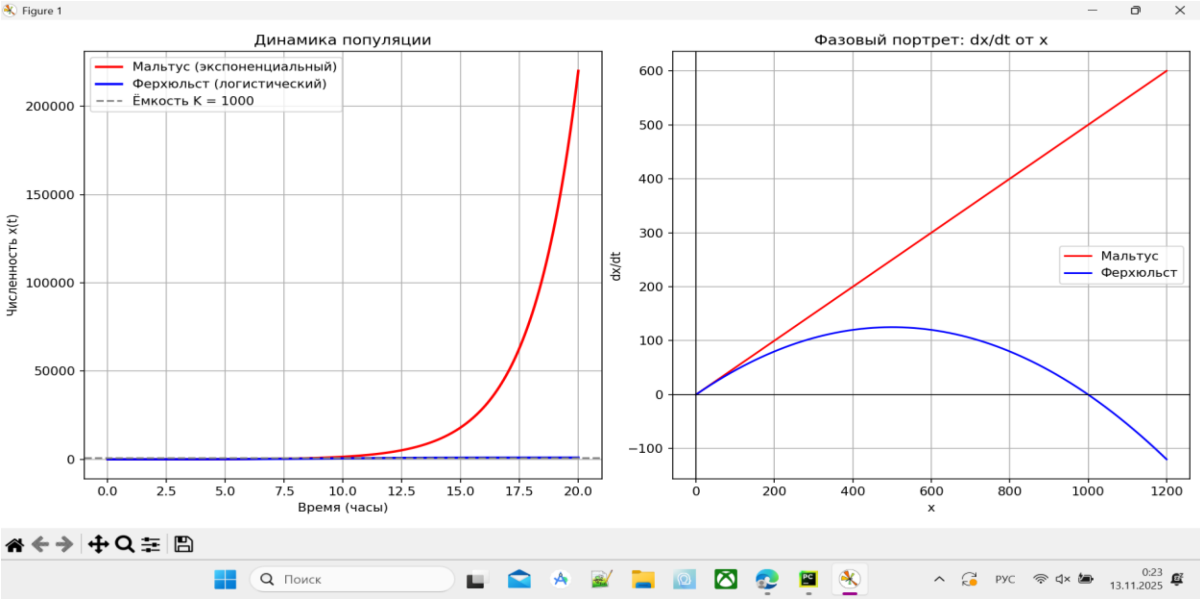


Figure 1
Динамика популяции
Мальтус (экспоненциальный)
Ферхюльст (логистический)
Ёмкость K = 1000
Численность x(t)
Время (часы)
Фазовый портрет: dx/dt от x
Мальтус
Ферхюльст
dx/dt
x
Поиск
РУС
0:23
13.11.2025