$a_0 = \left(\frac{2}{\pi}\alpha\right)^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$ $\alpha = \frac{\mu\omega}{2\hbar}$

2.8. 定态薛定谔方程：$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = \left(-\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2\right)\varphi(x)$

对于 $\varphi_0(x) = a_0 e^{-\alpha x^2}$：

有 $\frac{d}{dx}\varphi_0(x) = -2a_0\alpha x e^{-\alpha x^2}$，$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(x) = -2a_0\alpha e^{-\alpha x^2} + 4a_0\alpha^2 x^2 e^{-\alpha x^2}$

代入方程右边，有 $-\frac{2mE}{\hbar^2}a_0 e^{-\alpha x^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 a_0 x^2 e^{-\alpha x^2}$

由方程左右相等：有 $\begin{cases} -2a_0\alpha = -\frac{2mE}{\hbar^2}a_0 \\ 4a_0\alpha^2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 a_0 \end{cases}$ 代入 $\alpha$，成立

同理，对于 $\varphi_1(x) = b_0 x e^{-\alpha x^2}$

有 $\begin{cases} \alpha = \frac{mE}{3\hbar^2} \\ \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar} \end{cases}$，成立，由 $\alpha = \frac{\mu\omega}{2\hbar}$ 可得 $\begin{cases} E_0 = \frac{1}{2}\omega\hbar \\ E_1 = \frac{3}{2}\omega\hbar \end{cases}$

$\Rightarrow E = (n+\frac{1}{2})\omega\hbar$

归一化常数：$\int_{-\infty}^{\infty} a_0^2 e^{-2\alpha x^2}dx = 1 \Rightarrow a_0 = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\int_{-\infty}^{\infty} b_0^2 x^2 e^{-2\alpha x^2}dx = 1 \Rightarrow b_0 = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}$

附加：基态谐振子：$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

此时 $\overline{x} = 0$，$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\cdot x^2 \cdot \psi_0(x)dx = \frac{\hbar}{2m\omega}$

$(\Delta x)^2 = \overline{x^2} = \frac{\hbar}{2m\omega}$

$\overline{p} = 0$，$\overline{p^2} = \frac{1}{2}m\hbar\omega$，$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} = \frac{1}{2}m\hbar\omega$

$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

附加：(1) 由 $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + a_5^2 = 1$

得 $a_5 = \sqrt{\frac{3}{10}}$

(2) $\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{5}}\psi_0 e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \sqrt{\frac{1}{2}}\psi_2 e^{-i\frac{5}{2}\omega t} + \sqrt{\frac{3}{10}}\psi_5 e^{-i\frac{11}{2}\omega t}$

(3) $\frac{1}{2}\hbar\omega : \frac{1}{5}$ ; $\frac{5}{2}\hbar\omega : \frac{1}{2}$ ; $\frac{11}{2}\hbar\omega : \frac{3}{10}$

$\bar{E} = \frac{1}{10}\hbar\omega + \frac{5}{4}\hbar\omega + \frac{33}{20}\hbar\omega = 3\hbar\omega$

(4) $\frac{1}{2}\hbar\omega : \frac{1}{5}$ ; $\frac{5}{2}\hbar\omega : \frac{1}{2}$ ; $\frac{11}{2}\hbar\omega : \frac{3}{10}$

$\bar{E} = 3\hbar\omega$