HW4: 动态博弈与合作博弈论基础

李瀚轩
3220106039

July. 10th, 2024

1. 产量领导模型的计算

Solution of Excercise 1: 设总产量为 $y_1 + y_2$ 时，厂商 $1, 2$ 的利润分别为 u_1, u_2，那么我们有:

$$u_1 = y_1(2 - y_1 - y_2) - y_1 c_1 \tag{1}$$

$$u_2 = y_2(2 - y_1 - y_2) - y_2 c_2 \tag{2}$$

我们用逆向归纳法来求解子博弈完美均衡产量。注意到厂商 2 会在厂商 1 的产量下使自己利润最大化，因此我们令：

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_2} = 2 - y_1 - 2y_2 - c_2 = 0 \tag{3}$$

解得 $y_2 = 1 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}c_2$。将其代入厂商 1 的利润函数中，我们有:

$$u_1 = -\frac{1}{2}y_1^2 + y_1 + \frac{1}{2}c_2 y_1 - c_1 y_1 \tag{4}$$

为了使 u_1 最大化，我们令：

$$\frac{du_1}{dy_1} = -y_1 + 1 + \frac{1}{2}c_2 - c_1 = 0 \tag{5}$$

解得 $y_1 = 1 + \frac{1}{2}c_2 - c_1$, 将其代入 y_2 的表达式，可解得 $y_2 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 + \frac{1}{2}$。因此在该假设下二者的子博弈完美均衡产量为：$y_1 = 1 + \frac{1}{2}c_2 - c_1, y_2 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 + \frac{1}{2}$。 $\square$

2. 贝叶斯纳什均衡

Solution of Excercise 1: 设行参与人在类型 A 下选择 T_1 的概率为 x, 选择 B_1 的概率为 $1-x$; 在类型 B 下选择 T_2 的概率为 y，选择 B_2 的概率为 $1-y$。设列参与人选择 L 的概率为 q ，选

择 R 的概率为 $1-q$。
因此行参与人在 A 下的收益期望值为:

$$u_1A = xq + (1-x)(1-q) = 2xq - x - q + 1 \tag{6}$$

行参与人在 B 下的收益期望值为:

$$u_1B = y(1-q) + (1-y)q = y + q - 2yq \tag{7}$$

列参与人的期望收益为：

$$u_2 = \frac{1}{2}(2x(1-q)+3(1-x)q)+\frac{1}{2}(2yq+(1-q)y+2(1-y)(1-q)) = \frac{(3y-5x+1)q+2x-y+2}{2} \tag{8}$$

我们可以得到:

$$x = \begin{cases} 0, & q < \frac{1}{2} \\ [0,1], & q = \frac{1}{2} \\ 1, & q > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{9}$$

$$y = \begin{cases} 1, & q < \frac{1}{2} \\ [0,1], & q = \frac{1}{2} \\ 0, & q > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{10}$$

$$q = \begin{cases} 0, & 3y-5x+1 < 0 \\ [0,1], & 3y-5x+1 = 0 \\ 1, & 3y-5x+1 > 0 \end{cases} \tag{11}$$

因此我们假设 $q=0$, 那么可以得到 $x=0, y=1$, 此时 $3y-5x+1=4>0$, 矛盾。同样地，我们可以得到当 $q=1, x=1, y=0$ 的时候也存在矛盾。因此 $q=\frac{1}{2}$ 并且满足 $3y-5x+1=0, x\in[0,1], y\in[0,1]$ 的时候为贝叶斯纳什均衡。 □

3．纸牌游戏

Solution of Excercise 1: 若底牌为 A，不论参与人 2 的策略为什么，参与人 1 加注的收益都会比放弃的效益高，因此此时参与人 1 加注是占优策略。
若底牌为 K，设参与人 1 加注的概率为 p。设加注为事件 B，则:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|K)P(K)} = \frac{1}{1+p} \tag{12}$$

$$p(K|B) = \frac{P(B|K)P(K)}{P(B)} = \frac{P(B|K)P(K)}{P(B|A)P(A)+P(B|K)P(K)} = \frac{p}{1+p} \tag{13}$$

设此时参与人 2 跟注的概率为 q，我们可以得到参与人 2 选择放弃的收益为 -1, 选择跟注的收益：

$$\frac{1}{p+1}\cdot -2+\frac{p}{1+p}\cdot 2=\frac{2(p-1)}{p+1} \tag{14}$$

因此只有跟注和放弃收益相等时，即 $p=\dfrac{1}{3}$ 时，参与人 2 会以混合策略进行选择，即:

$$q=\begin{cases}0, & p<\frac{1}{3}\\ [0,1], & p=\frac{1}{3}\\ 1, & p>\frac{1}{3}\end{cases} \tag{15}$$

同理，当参与人 1 选择放弃时，收益为 -1, 当参与人 1 选择加注时，收益为 $1-q-2q=1-3q$, 因此只有二者相等时，参与人 1 会选择混合策略，即：

$$p=\begin{cases}1, & q<\frac{2}{3}\\ [0,1], & q=\frac{2}{3}\\ 0, & q>\frac{2}{3}\end{cases} \tag{16}$$

因此底牌为 K 时参与人 1 的最优策略是以 $\frac{1}{3}$ 的概率加注，以 $\frac{2}{3}$ 的概率放弃。参与人 2 的最优应对是以 $\frac{2}{3}$ 的概率跟注，以 $\frac{1}{3}$ 的概率放弃。 □

4. Shapley 值的性质

Proof of Excercise 1: 由 Shapley 值的定义，我们有:

$$\phi_i(v)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) \tag{17}$$

$$\phi_j(v)=\sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S)) \tag{18}$$

对于 $\phi_i(v)$, 我们将 $N\backslash\{i\}$ 的子集分为两类：不包含 i 但必须包含 j 的子集和不包含 i 和 j 的子集，为了方便，我们引入记号：

$$A_i=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}\wedge j\in S}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}v(S\cup\{i\}) \tag{19}$$

$$B_i=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}\wedge j\in S}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}v(S) \tag{20}$$

$$C_i=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}}\frac{(|S|+1)!(n-(|S|+1)-1)!}{n!}v(S\cup\{i\}) \tag{21}$$

$$D_i=\sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}}\frac{(|S|+1)!(n-(|S|+1)-1)!}{n!}v(S) \tag{22}$$

我们可以得到: $\phi_i(v) = A_i - B_i - (C_i - D_i) = A_i - B_i - C_i + D_i$。同理，对于 $\phi_j(v)$, 我们有:

$$A_j = \sum_{T\subseteq N\backslash\{j\}\wedge i\in T} \frac{|T|!(n-|T|-1)!}{n!} v(T\cup\{j\}) \tag{23}$$

$$B_j = \sum_{T\subseteq N\backslash\{j\}\wedge i\in T} \frac{|T|!(n-|T|-1)!}{n!} v(T) \tag{24}$$

$$C_j = \sum_{T\subseteq N\backslash\{j,i\}} \frac{(|T|+1)!(n-(|T|+1)-1)!}{n!} v(T\cup\{j\}) \tag{25}$$

$$D_j = \sum_{T\subseteq N\backslash\{j,i\}} \frac{(|T|+1)!(n-(|T|+1)-1)!}{n!} v(T) \tag{26}$$

即 $\phi_j(v) = A_j - B_j - C_j + D_j$。
现在我们比较 A_i, A_j。注意到 $|S| = |T|$ 并且在 A_i, A_j 求和式的条件下，$N = S\cup\{i\} = T\cup\{j\}$, 因此 $v(S\cup\{i\}) = v(T\cup\{j\})$，所以 $A_i = A_j$。同理我们可以得到 $D_i = D_j$。
现在我们比较 B_i, C_j。注意到 $N\backslash\{i,j\} + \{j\} = N\backslash\{i\} \wedge j \in S$，因此在 B_i, C_j 的求和条件下 $v(S) = v(T\cup\{j\})$，又因为 $|S| = |T| + 1$，所以 $B_i = C_j$。同理我们可以得到 $C_i = B_j$。
因此我们有 $\phi_i(v) = \phi_j(v)$。因此 Shapley 值是满足对称性的解概念。 $\square$

5. Shapley-Shubik 权力指数

Solution of Excercise 1: 由题意可得, 常任理事国的 Shapley 值：

$$SV_P(N;v) = \frac{1}{|N|!}\sum_{i=2}^{|NP|}[\binom{|NP|}{i}\cdot(|P|+i-1)(|NP|-i)] = \frac{76}{385} \tag{27}$$

以及非常任理事国的 Shapley 值：

$$SV_{NP}(N;v) = \frac{1}{|N|!}\cdot(|P|+1)!\cdot(|NP|-1)\cdot(|NP|-2)! = \frac{1}{462} \tag{28}$$

因此二者的比值为 $\frac{76}{385}\times 5 : \frac{1}{462}\times 6 = 76$。 $\square$

Solution of Excercise 2: 由题意可得, 常任理事国的 Shapley 值：

$$SV_P(N;v) = \frac{1}{|N|!}\sum_{i=4}^{|NP|}[\binom{|NP|}{i}\cdot(|P|+i-1)(|NP|-i)] = \frac{421}{2145} \tag{29}$$

以及非常任理事国的 Shapley 值：

$$SV_{NP}(N;v) = \frac{1}{|N|!}\cdot\binom{|NP|-1}{3}\cdot(|P|+3)!\cdot(|NP|-4)! = \frac{4}{2145} \tag{30}$$

因此二者比值为: $5\times\frac{421}{2145} : 10\times\frac{4}{2145} = 52.625$。 $\square$

Solution of Excercise 3: 重组之后常任理事国与非常任理事国的 Shapley 值之和的比值减小了，可以看出常任理事国在决策中的权力有所增加。但是常任理事国和非常任理事国的权力差距还是很大，权力结构只是略微改变。 □