理论作业一　量子比特与量子门

李瀚轩　3220106039

2024 年 10 月 15 日

---

1. 已知双量子比特系统的量子态如下 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x & 3x & \frac{i}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^4$ ，求该系统处于 $|01\rangle$ 态的概率。

由归一化性质可得：

$$\left|\frac{1}{2}\right|^2 + |x|^2 + 9|x|^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

解得 $|x|^2 = \frac{1}{16}$, 因此可以得到系统处于 $|01\rangle$ 态的概率为：$|x|^2 = \frac{1}{16}$。

2. 已知单量子比特的态矢量为 $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ，求该量子比特的 Bloch 球坐标。

由于 Bloch 球坐标的表示为:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$$

因此我们可以得到：

$$\cos(\theta/2) = \frac{3}{5}, \quad e^{i\phi}\sin(\theta/2) = \frac{4}{5}$$

解得：

$$\theta = 2\arccos\left(\frac{3}{5}\right), \quad \phi = 0$$

3. Bell 态指双量子比特系统的四个特殊量子态，他们是双量子比特系统中纠缠度最高的量子态，因此也称为最大纠缠态，在量子隐形传态、量子算法中有着广泛的应用。一般而言，Bell 态定义如下：

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x|1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad x, y \in \{0, 1\}, \quad \bar{y} = 1 - y \tag{1}$$

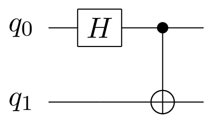
a. 证明 Bell 态是纠缠态。

b. 用 H、X、Z 和 CNOT 门设计四个量子电路，使得初态为 $|00\rangle$ 的双量子比特系统经这些量子电路作用后分别演化为四个 Bell 态。

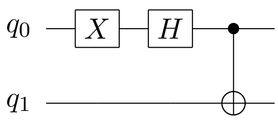
证明：假设 Bell 态不是叠加态，即存在 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 使得 $|\beta_{xy}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$，假设 $|\alpha\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$，$|\beta\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$，则有：$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$。对于 $|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, 我们有 $\alpha_0\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ,$\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，可以得到 $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1 = \frac{1}{2}$。但是 $\alpha_0\beta_1 = 0$，$\alpha_1\beta_0 = 0$，$\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1 = 0$，因此矛盾，所以 Bell 态是纠缠态。其它 x, y 的取值同理。因此 Bell 态是纠缠态。

量子电路设计：

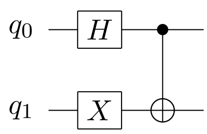
1. $x = 0, y = 0:$



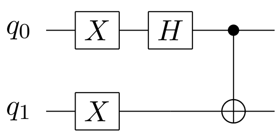
2. $x = 1, y = 0:$



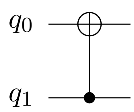
3. $x = 0, y = 1:$

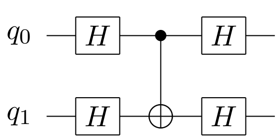


4. $x = 1, y = 1:$



4. 证明下图中的两个量子电路等价。（提示：计算两个量子电路对应的酉矩阵）





证明: 第一个量子电路的酉矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

第二个量子电路首先是两个 H 门的结果进行张量积,即 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$,结果为

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

结果经过一个 CNOT 门后结果为

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

最后再过两个 H 门：即

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

，得证。

5. 证明厄米算符 A 的任一本征值均为实数，且不同本征值对应的本征态正交。

证明: 首先设 A 的本征值为 λ，对应的本征态为 v，即 $Av=\lambda v$。由于 A 为厄米算符，因此有 $\langle Av,v\rangle=\langle v,Av\rangle$，即 $\langle \lambda v,v\rangle=\langle v,\lambda v\rangle$，即 $\lambda\langle v,v\rangle=\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$，因此 $\lambda=\bar{\lambda}$，即 λ 为实数。

其次,我们假设两个本征值 λ_1,λ_2,分别对应本征向量 v_1,v_2,即有 $Av_1=\lambda_1 v_1, Av_2=\lambda_2 v_2$。我们考虑内积 $\langle v_1,Av_2\rangle$, 我们有：

$$\langle v_1,Av_2\rangle=\langle v_1,\lambda_2 v_2\rangle=\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle$$

又由于 A 的自伴性，我们有：

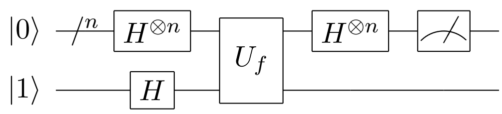
$$\langle v_1,Av_2\rangle=\langle Av_1,v_2\rangle=\langle \lambda_1 v_1,v_2\rangle=\lambda_1\langle v_1,v_2\rangle$$

因此我们有 $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle$。由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $\langle v_1, v_2\rangle = 0$，得证。

6. Deutsch 算法展示了量子计算机强大的并行计算能力。Deutsch-Jozsa 算法是其推广形式，将可分类的函数推广至多比特情形。

已知函数 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，该函数是常数函数（对所有输入均输出 0 ，或对所有输入均输出 1）或平衡函数 (对恰好一半的输入输出 0 ，对另一半输入输出 1)。Deutsch-Jozsa 算法只需对实现函数 f 的结构进行一次查询，即可判断 f 是常数函数还是平衡函数。

下图是实现 Deutsch-Jozsa 算法的量子线路。其中，$U_f : |x, y\rangle \to |x, y \oplus f(x)\rangle$ 是实现函数 f 的 $n+1$ 比特的量子门。



推导该量子电路中量子态的演化过程，并说明如何基于测量结果判断 f 是常数函数还是平衡函数。（提示：计算 f 为常数函数或平衡函数时的测量结果）

解：

首先量子比特经过 $H^{\otimes n}$ 门和 H 门后，得到的结果为 $\sum\limits_{x=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sqrt{2^n}}|x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$。之后经过 U_f 之后得到 $U_f|x\rangle|y\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle|y\rangle$。而 $(-1)^{f(x)}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum\limits_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}|x\rangle$。

由于 $H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum\limits_{z=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot z}|z\rangle$，带进上面的式子并交换求和顺序就能得到最后的结果

$$\frac{1}{2^n}\sum_{z=0}^{2^n-1}\left(\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}(-1)^{x\cdot z}\right)|z\rangle$$

。

设 $F(z) = \sum\limits_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}(-1)^{x\cdot z}$。当 f 为常数函数时，此时 $F(z)$ 只与 $(-1)^{x\cdot z}$ 项有关，当 $z=0$ 时 $\sum\limits_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot z}$ 值为 2^n，否则值为 0。因此这时的测量结果为 $|0\rangle^{\otimes n}$ 的概率为 1。

当 f 为平衡函数时，我们考虑 $z=0$，我们有 $F(0) = \sum\limits_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)} = 0$，因此测量结果中 $|0\rangle^{\otimes n}$ 的概率为 0。

所以根据 $|0\rangle^{\otimes n}$ 的测量结果即可判断是平衡函数还是常数函数。