HW3: 机制设计与在线学习

李瀚轩
3220106039

July. 9th, 2024

1. DSIC 机制

Proof of Excercise 1: 在第二价格拍卖中，我们证明每个参与人诚实报出自己的估价是占优的策略。
假设参与人 i 的估价是 v_i, 令 b^* 为其它参与人的报价最大值，b_i 为参与人 i 的实际报价。对于 v_i 和 b^* 的关系仅有以下两种情况：

1. $b^* < v_i$. 此时参与人 i 的报价 b_i 只要大于 b^* 即可以 b^* 的代价获得物品。因此报价 $b_i = v_i$ 可以让该参与人获得物品。如果 $b_i > v_i$ 对结果没有影响，如果 $b_i < v_i$ 则参与人可能无法获得该物品。

2. $b^* \geq v_i$. 此时由于拍卖的价格大于参与人 i 的心理价位，因此他并不愿意获得物品。如果此时参与人报价 $b_i > v_i$, 则他可能以超过心理预期的价格得到物品，而如果参与人报价 $b_i < v_i$, 与诚实报价没有区别，该参与人仍然无法获得该物品。

综上所述，对于每个参与人，诚实报价是占优的策略。因此第二价格拍卖是 DSIC 的。 □

Proof of Excercise 2: 这个机制不是 DISC 的。
我们可以构造出一个反例：假设估价最高的三个参与人分别为 A, B, C，并且 $v_A > v_B > v_C$。假设参与人 A, C 都诚实出价，即 $b_A = v_A, b_C = v_C$。这时考虑参与人 B，B 更倾向于增大他的报价，因为倘若 $b_B > v_A = b_A > b_C$, 则 B 参与人能够获得该物品，并且只需支付 $b_C = v_C < v_B$ 的价格。因此对于参与人 B 诚实报出自己的估值并不是占优策略，因此该机制不是 DISC 的。 □

Solution of Excercise 3: 首先收集所有的报价，并对竞拍者重新编号，使得竞价降序排序：$b_1 > \cdots > b_n$。重新编号之后，编号为 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的竞拍者每人获得一个商品，并且支付 b_{k+1} 的价格。

下面我们证明该机制是 DSIC 的。
考虑任意一个竞拍者 i，假设他们的出价是诚实的，即 $b_i = v_i$。我们分几种情况讨论:

1. 如果 i 获得该商品，即 $i \le k$。此时他出价更高并不会改变结果，而出价更低分两种可能，一种是新价格仍然在前 k 高的竞拍者中，此时结果没有改变; 另一种情况就是新价格在后 $n-k$ 个竞拍者中，此时 i 无法获得该商品。因此 i 诚实报价是占优的。

2. 如果 i 没有获得该商品，即 $i > k$。此时他出价更低不会改变结果，而出价更高要么不会改变结果，此时仍然不在前 k 高的竞拍者中；要么会使得他获得商品，但是需要支付的价格高于估价 v_i，因此此时 i 诚实报价是占优的。

综上所述，对于每个参与人，诚实报价是占优的策略。因此该机制是 DISC 的。 □

2. 简单的拍卖收益计算

Proof of Excercise 1: 设两个竞拍者的估值分别为 v_1, v_2，其中 $v_1, v_2 \sim U([0,1])$ 对于无保留价格的二价拍卖，收益值为 $\min(v_1, v_2)$。
设 $z = \min(v_1, v_2)$, 则随机变量 z 的分布函数为:

$$
\begin{aligned}
F_z(x) &= P(z \le x) \\
&= P(\min(v_1, v_2) \le x) \\
&= 1 - P(\min(v_1, v_2) > x) \\
&= 1 - P(v_1 > x)P(v_2 > x) \\
&= 1 - (1 - P(v_1 \le x))(1 - P(v_2 \le x)) \\
&= 1 - (1 - F_{v_1}(x))(1 - F_{v_1}(x)) \\
&= 1 - (1 - \int_0^x 1dx)^2 \\
&= 2x - x^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

因此 z 的概率密度函数为:

$$
p(z = x) = \frac{dF_z(x)}{dx} = 2 - 2x \tag{2}
$$

因此 $\mathbb{E}[z] = \int_0^1 z \cdot p(z)dz = \int_0^1 (2z - 2z^2)dz = \dfrac{1}{3}$. 因此无保留价格二价拍卖的期望收益为 $\dfrac{1}{3}$。 □

Proof of Excercise 2: 对于保留价格为 $\frac{1}{2}$ 的二价拍卖，我们分几种情况讨论:

1. 假设两个竞拍者的估价都小于 $\frac{1}{2}$, 则该商品不会被出售，此时的收益为 0。

2. 其中一个竞拍者的估价小于 $\frac{1}{2}$, 另一位的估价大于 $\frac{1}{2}$, 因此商品以 $\frac{1}{2}$ 的价格出售给估价大于 $\frac{1}{2}$ 的竞拍者。此时的收益为 $\frac{1}{2}$。

3. 两个竞拍者的估价都高于 $\frac{1}{2}$，此时即为上题的情况，但此时 v_1, v_2 的分布为 $U[\frac{1}{2}, 1]$，此时期望收益为 $\frac{2}{3}$。

由于上述情况 1 出现的概率为 $\frac{1}{4}$, 情况 2 出现的概率为 $\frac{1}{2}$，情况 3 出现的概率为 $\frac{1}{4}$，因此总期望收益为: $\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$。因此保留价格为 $\frac{1}{2}$ 的二价拍卖期望收益为 $\frac{5}{12}$。 □

3. VCG 机制

Proof of Excercise 1: 我们证明对于每个参与人 i 和每一组其它参与人的报价 b_{-i}, 参与人 i 都能够通过设置 $b_i = v_i$ 来最大化效用。i 的效用为:

$$v_i(S^*) - p_i = [v_i(S^*) + \sum_{j \neq i} b_j(S^*)] - [\max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S^*)] \tag{3}$$

观察上式，后一个中括号内的项 $\max\limits_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$ 和 i 的报价 b_i 无关，因此我们只需考虑前一项，即 $v_i(S^*) + \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$。

假设参与人 i 不用间接通过报价 b_i 来影响结果，而是能够直接选择结果 S^*, 那么 i 肯定会选择一个最大化 $v_i(S^*) + \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$ 的 S^*。因此，如果参与人 i 诚实报价 $b_i = v_i$，那么 VCG 分配规则：$S^* = \arg\max\limits_{S_1, \cdots, S_n} \sum_{i=1}^n b_i(S_i)$ 就和最大化 $v_i(S^*) + \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$ 一致。因此真实报价可以诱导 VCG 机制去选择最大化参与者 i 效用的结果，因此 VCG 机制是 DISC 的。 □

Proof of Excercise 2: 由定义，我们有：

$$p_i = \max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j) - \sum_{j \neq i} b_j(S^*) \tag{4}$$

显然我们有 $\max\limits_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j) \geq \sum_{j \neq i} b_j(S^*)$, 因此 VCG 机制中参与人 i 的支付 p_i 至少为 0。我们可以将定义中关于定价的式子改写为竞价减去一部分退款的形式：

$$\begin{aligned} p_i &= b_i(S^*) - [\sum_{j=1}^n b_j(S^*) - \max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)] \\ &= b_i(S^*) - [\max_{S_i} \sum_j b_j(S_j) - \max_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)] \end{aligned} \tag{5}$$

由于所有的竞价都非负，因此 $[\max\limits_{S_i} \sum_j b_j(S_j) - \max\limits_{S_{-i}} \sum_{j \neq i} b_j(S_j)] \geq 0$, 所以由 (5) 式可以得到 $p_i \leq b_i(S^*)$, 即 VCG 机制中参与人 i 的分布为支付 p_i 至多为 $b_i(S^*)$。

□

Solution of Excercise 3:

1. 只有前两个竞拍者时，VCG 机制要么将两个商品 AB 分配给竞拍者 1，要么将商品 A 分配给竞拍者 2，此时最大福利都为 1。在两种情况下，成功竞拍的参与人的 payment 都是 1。当三个竞拍者全在时，VCG 机制将商品 A 分配给竞拍者 2，将商品 B 分配给竞拍者 3，此时的最大福利为 2，成功竞拍的参与人的 payment 是 0。

2. 可以发现，当增加一个竞拍者时，VCG 机制的最大福利增大了，但是收益却减少为 0。
   当增加一个额外的竞拍者时，如果他是新的最高出价者 (此时新参与的竞拍者支付最高价)，或者是新的第二高出价者 (当前的获胜者支付更高价格) 时，单物品二价拍卖的收益才会增多。在其它情况下，收入不会改变，因此不会减少收益。

□

4. 交换遗憾与相关均衡

Proof of Excercise 1: 参与人 i 使用推荐策略 π 时的期望效用为:

$$\sum_{s\in S}[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Pi_{i=1}^{n}\sigma_i^t(s_i)]\cdot u_i(s) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{s\in S}\Pi_{i=1}^{n}\sigma_i^t(s_i)\cdot u_i(s) \tag{6}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}U_i(\sigma_i,\sigma_{-i}) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{s_i\in S_i}\sum_{t=1}^{T}U_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\cdot\sigma_i^t(s_i) \tag{8}$$

其中 (7) 式中 $U_i(\sigma_i,\sigma_{-i})$ 表示第 t 轮参与人 i 使用策略 σ_i^t 时的期望效用，(8) 式则将参与人 i 的策略 $\sigma_i^t(s_i)$ 提取出来。
因此参与人 i 在被推荐策略 s_i 时的期望效用为: $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}U_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\cdot\sigma_i^t(s_i)$。
令 π^* 是最优的交换函数，则我们有：

$$\pi^*(i) = \underset{\pi(s_i)\in S_i}{\arg\max}\sum_{t=1}^{T}[u_i(\pi(s_i),\sigma_{-i}) - u_i(s_i,\sigma_{-i}^t)]\cdot\sigma_i^t(s_i) \tag{9}$$

并且由交换遗憾的定义，我们有:

$$swR_T^i = \max_s \sum_{t=1}^{T} \sum_{s_i \in S_i} [u_i(\pi(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t)] \cdot \sigma_i^t(s_i) \tag{10}$$

$$= \sum_{s_i \in S_i} (\sum_{t=1}^{T} [u_i(\pi^*(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t))] \cdot \sigma_i^t(s_i) \tag{11}$$

$$\geq \sum_{t=1}^{T} [u_i(\pi^*(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t)] \cdot \sigma_i^t(s_i), \forall s_i \tag{12}$$

由式 (9) 和式 (12), 我们可以将 (12) 中的 π^* 替换为任意一个交换函数，即：

$$swR_T^i \geq \sum_{t=1}^{T} [u_i(\pi(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t)] \cdot \sigma_i^t(s_i), \forall s_i, \forall \pi(s_i) \tag{13}$$

将上述不等式两边同时除以 T, 得到：

$$\frac{swR_T^i}{T} \geq \frac{\sum_{t=1}^{T} [u_i(\pi(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t)] \cdot \sigma_i^t(s_i)}{T} \tag{14}$$

由于我们采用无交换遗憾算法，因此令 $T \to \infty$, 可以得到:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{swR_T^i}{T} = 0 \geq \lim_{T \to \infty} \frac{\sum_{t=1}^{T} [u_i(\pi(s_i), \sigma_{-i}) - u_i(s_i, \sigma_{-i}^t)] \cdot \sigma_i^t(s_i)}{T} \tag{15}$$

因此我们推出:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} (u_i(s_i, \sigma_{-i})) \cdot \sigma_i^t(s_i)}{T} \geq \frac{\sum_{t=1}^{T} (u_i(\pi(s_i), \sigma_{-i})) \cdot \sigma_i^t(s_i)}{T} \tag{16}$$

这表明参与人 i 无法通过任何交换策略 π 来提高其期望效用，满足 $\mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\pi_i, \sigma_{-i})]$, 因此收敛于相关均衡。 □