HW2: 非合作博弈论基础

李瀚轩

3220106039

July. 5th, 2024

1. 纳什均衡的等价定义

Proof of Excercise 1: 首先证明定义一能够导出定义二。
由定义一：$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$，而 $u_i(s^*) = u_i(s^*_i, s^*_{-i})$, 因此可以得到：

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u_i(s_i, s^*_{-i}) \tag{1}$$

又 $s_i \in S_i$ 因此可以得到 $u_i(s^*_i, s^*_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s^*_{-i})$。所以 s^*_i 是 s^*_{-i} 的一个最佳应对，充分性得证。
其次证明定义二能够导出定义一。
由定义二以及最佳应对的定义，我们有:

$$u_i(s^*_i, s^*_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s^*_{-i}) \tag{2}$$

又 $u_i(s^*_i, s^*_{-i})$ 即为 $u_i(s^*)$，因此由 (2) 可以得到 $u_i(s^*) = \max_{t_i \in S_i} u_i(t_i, s^*_{-i})$, 即对于 $s_i \in S_i$, 我们有 $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s^*_{-i})$。因此必要性得证。
综上所述，纳什均衡的以上两个定义是等价的。

□

2. 占优、纳什均衡与最大最小的关系

Proof of Excercise 2: 首先证明 $s^* = (s^*_1, s^*_2, \cdots, s^*_n)$ 是博弈的一个纳什均衡。由于任意的参与人 i 都有一个严格占优于其它所有策略的策略 s_i, 由严格占优的定义我们有：

$$\forall s_i \in S_i - \{s^*_i\}, u_i(s^*_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \tag{3}$$

因此对于 s_i^*, 我们有 $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$。因此 s^* 是一个纳什均衡。
其次我们证明该纳什均衡的唯一性。
假设存在另一个纳什均衡 $s^{'} = (s_1^{'}, s_2^{'}, \cdots, s_n^{'})$，并且由于 $s^{'} \neq s^*$，那么存在参与人 j，使得 $s_j^{'} \neq s_j^*$。由于 s_j^* 严格占优于 $s_j^{'}$，因此我们有：

$$u_j(s_j^*, s_{-j}) > u_j(s_j^{'}, s_{-j}) \tag{4}$$

但是由于 $s^{'}$ 是一个纳什均衡，因此我们有 $u_j(s_j^{'}, s_{-j}) \geq u_j(s_j^*, s_{-j})$。与 (4) 式矛盾。因此 s^* 是博弈的唯一均衡点。
由于我们已经证明 s^* 是一个纳什均衡，我们有:

$$u_i(s^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, t_{-i}) \tag{5}$$

因此该 s^* 是一个最大最小向量。
接下来证明它的唯一性。假设存在另一个最大最小向量 $s^{'} = (s_1^{'}, s_2^{'}, \cdots, s_n^{'})$，并且由于 $s^{'} \neq s^*$，那么存在参与人 j，使得 $s_j^{'} \neq s_j^*$。由于 s_j^* 严格占优于 $s_j^{'}$，因此我们有：

$$u_j(s_j^*, s_{-j}) > u_j(s_j^{'}, s_{-j}) \tag{6}$$

但由于 $s^{'}$ 是一个最大最小向量，因此我们有:

$$u_i(s_i^{'}) \geq \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i^{'}, t_{-i}) \tag{7}$$

特别地，对于参与人 j, 我们有：

$$u_j(s_j^{'}, s_{-j}) \geq \min_{t_{-j} \in S_{-j}} u_j(s_j^{'}, t_{-j}) \tag{8}$$

这与 (6) 式矛盾。因此 s^* 是博弈的唯一最大最小向量。

□

3. 混合策略纳什均衡

Proof of Excercise 3: 假设存在一个均衡 $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ 中，参与人 i 选择纯策略 s_i 的概率不为 0, 即 $\sigma_i^*(s_i) > 0$。
对于参与人 i, 由于纯策略 s_i 被混合策略 σ_i 严格占优，记该纯策略为 s_0, 该混合策略为 σ_0, 我们有：$u_i(\sigma_0, \sigma_{-i}) > u_i(s_0, \sigma_{-i})$。因此：

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma_0, \sigma_{-i})] > \mathbb{E}[u_i(s_0, \sigma_{-i})] \tag{9}$$

对于该混合策略纳什均衡 $(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$，我们有：

$$U_i(\sigma^*) = \mathbb{E}[u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma^*(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i}^*)] \tag{10}$$

$$= \sum_{s_i \in S_i - \{s_0\}} \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i}^*)] + \sigma_i^*(s_0)\mathbb{E}[u_i(s_0, \sigma_{-i}^*)] \tag{11}$$

$$< \sum_{s_i \in S_i - \{s_0\}} \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i}^*)] + \sigma_i^*(s_0)\mathbb{E}[u_i(\sigma_0, \sigma_{-i}^*)] \tag{12}$$

$$\triangleq U_i(\sigma^{'}, \sigma_{-i}^*) \tag{13}$$

其中 (12) 式由 (9) 式得出。我们通过将被占优的纯策略替换为占优其的混合策略，得出了在其它参与人策略不变的情况下对参与人 i 效益更优的策略，因此可以得到矛盾。所以在博弈的任一均衡中，参与人 i 选择纯策略 s_i 的概率为 0。 □

Solution of Excercise 4: 由上一题的结论，倘若存在参与人的一个纯策略 s_i 被混合策略 σ_i 严格占优，那么该纯策略可以被剔除。我们可以发现，对于行参与者，纯策略 M 被混合策略 $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}B$ 严格占优。对于列参与者，纯策略 R 被混合策略 $\frac{5}{12}L + \frac{7}{12}C$ 严格占优。因此我们可以得到化简后的博弈: 因此我们假设行参与人以 x 的概率选择策略 T, 以 $1-x$ 的概率选择策略 B，设列参

	L	C
T	6, 2	0, 6
B	0, 6	10, 0

与人以 y 的概率选择策略 L, 以 $1-y$ 的概率选择策略 C。对于行参与者，我们有:

$$u_1(x, y) = 6xy + 10(1-x)(1-y) \tag{14}$$

对于列参与者，我们有：

$$u_2(x, y) = 2xy + 6(1-x)y + 6x(1-y) \tag{15}$$

对于行参与人，我们希望对于列参与人的每个反应集合，我们都有:

$$br_1(y) = \arg\max_{x \in [0,1]} u_1(x, y) \tag{16}$$

因此，将 $u_1(x, y)$ 对 x 求偏导，得到：

$$\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial x} = 16y - 10 \tag{17}$$

因此:

$$br_1(y) = \begin{cases} 1, & y \in (\frac{5}{8}, 1] \\ [0, 1], & y = \frac{5}{8} \\ 0, & y \in [0, \frac{5}{8}) \end{cases} \tag{18}$$

同理，对于列参与人，我们希望对于行参与人的每个反应集合，我们都有:

$$br_2(x) = \arg\max_{y\in[0,1]} u_2(x,y) \tag{19}$$

因此，将 $u_2(x,y)$ 对 y 求偏导，得到：

$$\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y} = -10x + 6 \tag{20}$$

因此:

$$br_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \frac{3}{5}] \\ [0,1], & x = \frac{3}{5} \\ 0, & x \in [\frac{3}{5}, 1) \end{cases} \tag{21}$$

因此该博弈的混合策略纳什均衡为 $(\frac{3}{5}, \frac{5}{8})$。即行参与人以 $\frac{3}{5}$ 的概率选择策略 T, 以 $\frac{2}{5}$ 的概率选择策略 B，列参与人以 $\frac{5}{8}$ 的概率选择策略 L, 以 $\frac{3}{8}$ 的概率选择策略 C。 □

4. 零和博弈

Solution of Excercise 5: 我们假设行参与人以 x 的概率选择策略 T, 以 $1-x$ 的概率选择策略 B，设列参与人以 y 的概率选择策略 L, 以 $1-y$ 的概率选择策略 R。对于行参与人，我们有：

$$u_1(x,y) = 5xy + 3(1-x)y + 4(1-x)(1-y) \tag{22}$$

对于列参与人，我们有：

$$u_2(x,y) = -(5xy + 3y(1-x) + 4(1-x)(1-y)) \tag{23}$$

因此对于行参与人，我们希望对于列参与人的每个反应集合，我们都有:

$$br_1(y) = \arg\max_{x\in[0,1]} u_1(x,y) \tag{24}$$

因此，将 $u_1(x,y)$ 对 x 求偏导，得到：

$$\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x} = 6y - 4 \tag{25}$$

因此:

$$br_1(y) = \begin{cases} 1, & y \in (\frac{2}{3}, 1] \\ [0,1], & y = \frac{2}{3} \\ 0, & y \in [0, \frac{2}{3}) \end{cases} \tag{26}$$

同理可以得到:

$$\frac{\partial u_2(x,y)}{\partial y} = -6x + 1 \tag{27}$$

以及:

$$br_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \frac{1}{6}] \\ [0,1], & x = \frac{1}{6} \\ 0, & x \in [\frac{1}{6}, 1) \end{cases} \tag{28}$$

因此该博弈的混合策略纳什均衡为 $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$。即行参与人以 $\frac{1}{6}$ 的概率选择策略 T, 以 $\frac{5}{6}$ 的概率选择策略 B，列参与人以 $\frac{2}{3}$ 的概率选择策略 L, 以 $\frac{1}{3}$ 的概率选择策略 R。 □

5. 相关均衡

Proof of Excercise 6: □

1. 首先证明充分性。如果 p 是一个相关均衡，那么对于每个参与人 i 以及 $\delta: S_i \to S_i$, 我们有：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)] &= \sum_{a \in S_i} (p(s_i = a) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)|s_i = a]) & (29) \\ &\geq \sum_{a \in S_i} (p(s_i = a) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s_{-i}, \delta(a))|s_i = a]) & (30) \\ &= \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s_{-i}, \delta(s_i))] & (31) \end{aligned}$$

   其中 (30) 式由相关均衡的定义给出，至此充分性得证。

2. 其次证明必要性。不失一般性，我们可以定义交换函数 $\delta: S_i \to S_i$:

$$\delta(x) = \begin{cases} b, & x = a \\ a, & x \neq a \end{cases} \tag{32}$$

   由于 $\mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)] \geq \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s_{-i}, \delta(s_i))]$, 我们将期望展开，得到:

$$\sum_{x \in S_i} (p(s_i = x) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)|s_i = x]) \geq \sum_{x \in S_i} (p(s_i = x) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s_{-i}, \delta(x))|s_i = x]) \tag{33}$$

   由于 $x \neq a$ 的时候，不等式两边的每一个项都相同，因此我们可以将他们消掉, 得到：

$$p(s_i = a) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)|s_i = a] \geq p(s_i = a) \cdot \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(b, s_{-i})|s_i = a] \tag{34}$$

   即

$$\mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)|s_i = a] \geq \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(b, s_{-i})|s_i = a] \tag{35}$$

   由于上述式子对于任意的 i, a, b 都成立,因此我们可以得到 $\mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s)|s_i] \geq \mathbb{E}_{s\sim p}[U_i(s_{-i}, s_i^{'})|s_i]$, 即该概率分布 p 是一个相关均衡。至此必要性得证。