理论作业三　量子编译与量子纠错

梅敏炫　3220102188

2024 年 12 月 5 日

---

1. 已知双量子比特电路对应矩阵如下：

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. 证明矩阵 U 是一个合法的酉矩阵。

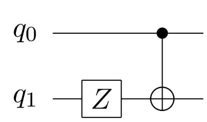
b. 将酉矩阵 U 分解为尽可能少的基础量子门（CNOT、X、Y、Z）组合，并画出相应的量子电路图。

1. $U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，计算其共轭转置和原矩阵的乘积：

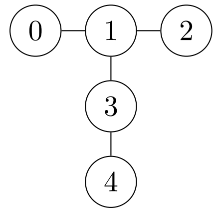
$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

   因此 U 是一个合法的酉矩阵。

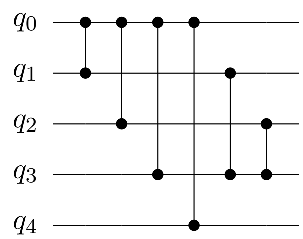
2. 注意到 $U = Z \otimes I + CNOT$，所以在 q_1 量子比特上施加 Z 门，然后在 q_0 和 q_1 量子比特上施加 CNOT 门，q_0 为控制量子比特，q_1 为目标量子比特，即可实现 U 的分解。量子电路图如下：



2. 给定一包含 5 个物理量子比特的量子处理器，其量子比特间的耦合连接关系如下：



现有一包含 5 个逻辑量子比特的量子电路如下：



给出将这个逻辑量子电路部署至量子处理器时的量子比特映射关系，以插入最少的 SWAP 门使得每个双量子比特门都能直接在相连的物理量子比特间执行。

部署时的量子比特映射关系如下：

$$q_0 \to 1, \quad q_1 \to 0, \quad q_2 \to 2, \quad q_3 \to 3, \quad q_4 \to 4.$$

前 3 个门对应的物理量子比特为 $1-0$，$1-2$，$1-3$，因此不需要插入 SWAP 门。在前 3 个门执行完成后，将 q_0 和 q_3 交换，即将 1 号量子比特和 3 号量子比特的映射交换，此时的量子比特映射关系为：

$$q_0 \to 3, \quad q_1 \to 0, \quad q_2 \to 2, \quad q_3 \to 1, \quad q_4 \to 4.$$

后 3 个门对应的物理量子比特为 $3-4$，$1-0$，$1-2$，是直接相连的，因此不需要插入 SWAP 门。因此，按最初的映射逻辑将逻辑量子电路部署至量子处理器时，只需要插入一个 SWAP 门即可。

3. 量子纠错码是量子计算中的重要技术，能够保护量子信息免受噪声和错误的影响。三量子比特的比特翻转纠错码是最简单的量子纠错码之一，旨在纠正单量子比特发生的比特翻转错误（即意外施加的 X 门），下面是该量子纠错码的工作过程。

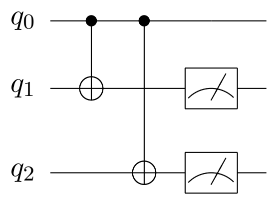
给定一个单量子比特的量子态：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

经量子纠错码编码后的量子态为：

$$|\psi'\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$$

若编码后的量子态经过比特翻转噪声信道后只有至多一个量子比特发生比特翻转错误，可使用如下量子电路进行错误探测：

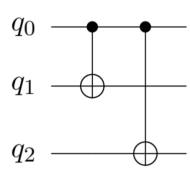


a. 设计量子电路将初始态 $|\psi\rangle$ 编码为 $|\psi'\rangle$，并画出相应的量子电路图。

b. 根据错误探测的结果，分析发生的错误征状，并给出相应的纠错方法，使得 q_0 恢复为初始的量子态（提示：分析每种错误发生时，错误探测后的测量结果）。

c. 若每个量子比特发生错误的概率为 p，且各量子比特相互独立，求该量子纠错码能够正确纠错的概率，并说明该量子纠错码的有效性（提示：验证量子纠错码正确纠错的概率与量子比特原始错误概率的关系）。

1. 令 $q_0 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$，$q_1 = |0\rangle$，$q_2 = |0\rangle$，应用两个 CNOT 门，即可实现编码。量子电路图如下：

2.
   - $|00\rangle$：无错误，测量结果为 00。
   - $|01\rangle$：q_2 量子比特发生错误，对 q_2 量子比特应用 X 门纠正。
   - $|10\rangle$：q_1 量子比特发生错误，对 q_1 量子比特应用 X 门纠正。
   - $|11\rangle$：q_0 量子比特发生错误，对 q_0 量子比特应用 X 门纠正。

3. 该纠错码只在未发生错误或者只有一个量子比特发生错误时能够正确纠错，因此正确纠错的概率为 $(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 = (1-p)^2(1+2p)$，不能正确纠错的概率为 $3p^2(1-p) + p^3 = p^2(3-2p)$。希望纠错概率大于不能正确纠错的概率，即 $(1-p)^2(1+2p) > p^2(3-2p)$，解得 $p < 1/2$，因此该量子纠错码的有效性要求每个量子比特发生错误的概率小于 1/2。