HW1: 数据定价基础

李瀚轩

3220106039

July. 3rd, 2024

1. 偏好的性质

Proof of Excercise 1: 由于 $x \sim y, y \sim z$, 由定义可得 $x \succeq y, y \succeq x, y \succeq z, z \succeq y$。
由于：$x \succeq y, y \succeq z$，由传递性可得 $x \succeq z$。
同理：我们有 $z \succeq x$。因此由定义可以得到: $x \sim z$。得证。 $\square$

2. 有预算约束的效用最大化

Solution of Excercise 2: 由题意，我们可以得到约束条件：

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq p \tag{1}$$

由拉格朗日乘子法，可得：

$$f = x_1x_2^2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - p) \tag{2}$$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$, 可得:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2^2 - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1x_2 - \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = -(p_1x_1 + p_2x_2 - p) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

解得 $x_1 = \dfrac{p}{3p_1}, x_2 = \dfrac{2p}{3p_2}$ 因此用户对土豆的需求函数为 $\dfrac{p}{3p_1}$, 对牛肉的需求函数为 $\dfrac{2p}{3p_2}$。 $\square$

1.3 无套利原则

Solution of Excercise 3:

1. 存在套利机会。我们可以在现在卖出欧元，买入人民币，在未来欧元下跌的时候卖出人民币，买入欧元。

2. 存在套利机会。由于 Q_2 查询的结果是 User 表中男性和女性分别的人数，而 Q_1 的查询结果是 User 表中女性用户的人数，因此查询向量 Q_2 可以决定 Q_1。但是 $p(Q_2, D) = 2 < p(Q_1, D) = 3$, 因此我可以先查询 Q_2 得到女性的人数，然后将这一信息以 $p(Q_1, D) = 3$ 的价格卖出去，以实现信息套利。不过可以验证 $p(Q_3, D) \leq p(Q_4, D) + p(Q_1, D)$, 因此是组合无套利的。

3. 存在套利机会。考虑是否能够通过购买组合不同版本噪声的模型来得到一个新的版本，使得它的价格低于市场上与之加相同噪声的版本的模型价格。可以发现通过组合 ϵ_3, 即 $\frac{N(0,4)+N(0,4)}{2}$ 可以得到 $N(0, 2)$，即版本 ϵ_1，但是两个 ϵ_3 噪声版本的价格为 6, 小于版本 ϵ_1 的价格 10，因此存在套利机会，可以先购买两个版本 ϵ_3 的模型，再以 ϵ_1 模型卖出。

$\square$

Solution of Excercise 4:

1. $f(A) = |A|, \forall A \subseteq S$. 首先验证单调性。设集合 A_1, A_2 满足 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq S$, 那么显然 $|A_1| \leq |A_2|$, 即 $f(A_1) \leq f(A_2)$, 因此单调性满足。
   其次验证次可加性。设集合 $A, B \subseteq S$，我们有 $|A \cup B| \leq |A| + |B|$，即 $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$。因此 f 满足次可加性。

2. $f(A) = \max\limits_{a \in A} a, \forall A \subseteq S$. 首先验证单调性。设集合 A, B 满足 $A \subseteq B \subseteq S$，那么由于 $A \subseteq B$, 则 $\max\limits_{a \in A} a \leq \max\limits_{b \in B} b$, 即 $f(A) \leq f(B)$。因此函数满足单调性。
   其次验证次可加性。设集合 $A, B \subseteq S$, 并设 $\max\limits_{a \in A} a = p, \max\limits_{b \in B} b = q$. 因此 $\max\limits_{c \in A \cup B} c = \max\{p, q\}$。又由于 f 的值域为 $\mathbb{R}^+$, 因此 $f(A \cup B) = \max\limits_{c \in A \cup B} c = \max\{p, q\} \leq p + q = f(A) + f(B)$，即 $f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$。因此 f 也满足次可加性。

$\square$