

标题 title

作者 *author*

2023 年 8 月 1 日

前言

目录

前言	i
第一部分 科学的逻辑	1
第一章 合情推理	2
§1.1 回顾：命题逻辑的演绎推理	2
§1.2 合情推理的数学模型	4
1.2.1 似然，合情推理的原则	4
1.2.2 似然与概率	6
§1.3 合情推理的归纳强论证	8
1.3.1 先验与基率谬误	8
1.3.2 归纳强论证	9
1.3.3 有效论证和归纳强论证的比较	12
第二章 Markov 链与决策	22
§2.1 Markov 链	22
§2.2 Markov 奖励过程 (MRP)	26
§2.3 Markov 决策过程 (MDP)	29
§2.4 隐 Markov 模型 (HMM)	33
2.4.1 评估问题	34
2.4.2 解释问题	35
第二部分 信息与数据	37
第三章 信息论基础	43

§3.1 熵	43
3.1.1 概念的导出	43
3.1.2 概念与性质	46
3.1.3 熵与通信理论	51
§3.2 Kullback-Leibler 散度	54
3.2.1 定义	54
3.2.2 两个关于信息的不等式	56
3.2.3 在机器学习中的应用：语言生成模型	57
§3.3 附录：Shannon 定理的证明	58
§3.4 习题	59
§3.5 章末注记	61
第四章 Johnson-Lindenstrauss 引理	63
§4.1 机器学习中的数据	63
§4.2 矩法与集中不等式	64
§4.3 J-L 引理的陈述与证明	68
§4.4 J-L 引理的应用	72
§4.5 习题	73
§4.6 章末注记	73
第五章 差分隐私	74
§5.1 数据隐私问题	74
§5.2 差分隐私的定义与性质	76
§5.3 差分隐私的应用	80
5.3.1 随机反应算法	80
5.3.2 全局灵敏度与 Laplace 机制	81
5.3.3 DP 版本 Llyod 算法	83
§5.4 差分隐私与信息论	84
§5.5 习题	85
§5.6 章末注记	85
第三部分 决策与优化	86
第六章 凸分析	87

§6.1 决策与优化的基本原理	87
6.1.1 统计决策理论	87
6.1.2 优化问题	88
6.1.3 例子：网格搜索算法	91
§6.2 凸函数	93
§6.3 凸集	96
6.3.1 基本定义和性质	96
6.3.2 分离超平面定理	98
第七章 对偶理论	100
§7.1 条件极值与 Lagrange 乘子法	101
§7.2 Karush–Kuhn–Tucker 条件	104
§7.3 Lagrange 对偶	107
7.3.1 Lagrange 定理	107
7.3.2 弱对偶定理，强对偶定理	111
§7.4 应用：支持向量机 (SVM)	115
第八章 不动点理论	118
§8.1 Banach 不动点定理	118
§8.2 Brouwer 不动点定理	121
§8.3 不动点的一般视角	124
第四部分 逻辑与博弈	125
第九章 动态博弈	126
§9.1 输赢博弈	126
§9.2 随机博弈 (Markov 博弈)	131
第十章 静态博弈	137
§10.1 正则形式博弈	137
10.1.1 生成对抗网络	138
10.1.2 混合策略	140
§10.2 不完全信息博弈 (Bayes 博弈)	141

第五部分 认知逻辑	146
第十一章 模态逻辑基础	147
§11.1 模态逻辑的起源	147
11.1.1 三段论	147
11.1.2 非经典逻辑	148
§11.2 模态语言	149
§11.3 Kripke 语义与框架语义	152
§11.4 模态可定义性	157
第十二章 认知逻辑与共同知识	159
§12.1 “泥泞的孩童”谜题	159
§12.2 认知逻辑的基本模型与性质	161
12.2.1 “泥泞的孩童”再回顾	165
12.2.2 Aumann 结构	166
§12.3 对不一致达成一致	167
§12.4 Rubinstein 电子邮件博弈	170

第一部分

科学的逻辑

第二部分

信息与数据

第三部分

决策与优化

第四部分

逻辑与博弈

第五部分

认知逻辑

第十二章 认知逻辑与共同知识

§12.1 “泥泞的孩童”谜题

有 n 个孩子在玩泥巴，他们互相泼泥巴。母亲告诉孩子们，如果他们脸上沾上了泥巴，会受到严厉的惩罚。孩子们不能看到自己的脸，但是可以看到其他所有人的脸。所有孩子都希望保持自己的脸干净，但是弄脏别人的脸。此时，孩子的父亲出现了，于是，孩子们停止泼泥巴。孩子们互相不说话。父亲看到了 k ($k \geq 1$) 个人脸上有泥巴，于是宣布：“你们至少有一个人脸上沾了泥巴。”之后，父亲会公开地问若干轮如下问题：“你们知道自己脸上有泥巴了吗？”孩子们回答“知道”或者“不知道”。假设孩子们观察力敏锐、聪慧且诚实，并且每一轮他们都同时回答。接下来会发生什么？

假设有 k 个孩子脸上有泥巴。谜底：在前 $k - 1$ 轮中，所有孩子都会说“不知道”，在第 k 轮中，所有脸上有泥巴的孩子都会说“知道”。这一结论的论证来源于对 k 的归纳。

当 $k = 1$ 时，脸上沾满泥巴的孩子看到其他人都没有泥巴。既然他知道至少有一个孩子的脸上有泥巴，他就能推出那个人肯定是他自己。

现在假设 $k = 2$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b 。一开始，因为他们分别看到了对方的脸上有泥巴，所以他们每个人都回答“不知道”。但是，当 b 回答“不知道”时， a 意识到他自己肯定是脸上有泥巴的那个孩子，否则 b 就会在第一轮中知道泥巴在他的脸上，并回答“知道”。因此， a 在第二轮回答“知道”。 b 也会通过同样的推理得出相同的结论。

现在假设 $k = 3$ ，脸上沾满泥巴的孩子分别是 a ， b 和 c 。孩子 a 的论证如下。假设我没有泥巴落在脸上。根据 $k = 2$ 的情况， b 和 c 在第二轮都会回答“是”。他们没有这样做，我意识到假设是错误的，我的脸上也有泥巴。因此在第三轮我会回答“知道”。 b 和 c 的论证也是类似的。

$k = 3$ 的论证具有一般性，对一般的 k 也成立。

注。“泥泞的孩童”还有其他流行的陈述方式，比如“蓝眼睛红眼睛”。一个岛上有 100 个人，其中有 5 个红眼睛，95 个蓝眼睛。这个岛有三个奇怪的宗教规则。

1. 他们不能照镜子，不能看自己眼睛的颜色。
2. 他们不能告诉别人对方的眼睛是什么颜色。
3. 一旦有人知道了自己的眼睛是红色，他就必须在当天夜里自杀。

岛民不知道具体有几个红眼睛。

某天，有个旅行者到了这个岛上。由于不知道这里的规矩，所以他在和全岛人一起狂欢的时候，一不留神说了一句话：“你们这里有红眼睛的人。”假设这个岛上的人足够聪明，每个人都可以做出缜密的逻辑推理。请问这个岛上将会发生什么？

那么，为什么会这样呢？如果 $k > 1$ ，那么所有人都知道 p ：“至少有一个人脸上有泥巴”。那么父亲说这句话的意义是什么？如果父亲没有说 p ，那么会发生什么？无论父亲问多少轮，所有孩子都只会回答“不知道”！（为什么）因此，父亲公开说了 p ，这是谜题的关键。

假设 $k = 2$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b 。在父亲宣布 p 之前， a 和 b 都知道 p 。然而，他们并不知道对方知道 p 。 a 可能会有两种想法：

- 我的脸上有泥巴，所以 b 知道 p 。
- 我的脸上没有泥巴， b 是唯一一个有泥巴的，所以 b 不知道 p 。

当父亲宣布 p 之后， a 知道了 b 知道 p 。当第一轮 b 回答“不知道”之后， a 可以用“ b 知道 p ”这一知识推出自己脸上有泥巴。

假设 $k = 3$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a ， b 和 c 。在父亲宣布 p 之前， a ， b 和 c 不仅知道 p ，而且知道彼此知道 p 。以 a 的视角看， b 能看到 c 脸上有泥巴，所以 a 知道 b 知道 p 。但是， a ， b ， c 都不知道所有人知道所有人知道 p ！

用 $E^m p$ 表示所有人知道所有人知道……所有人知道（ m 次） p 。在一般情况下，父亲没有宣布 p 之前， $E^k p$ 并不成立。父亲宣布了 p 之后，对任意 $m \geq 1$ ， $E^m p$ 都成立！因此，父亲宣布 p 带来了共同知识。有了共同知识，这一谜题就可以按照我们所讨论的方式进行下去。

我们曾经假设过所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”。然而，这一假设并不足够。我们必须假设所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，所有人都知道所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，……换言之，我们需要假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识。假设还是只有两个孩子 a, b 脸上有泥巴。假如 a 不知道 b 是诚实的，即便 b 回答了“不知道”， a 也无法从 b 的回答中得到任何额外的知识！

除了假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识，我们还需要假设以下陈述是共同知识：

- 每个人都能看到所有除自己外的人.
- 每个人都听到了父亲说的话.
- 父亲是诚实的.
- 每个人都在每一轮进行了充分的推理.
-

任何假设的破坏都会导致之前的讨论失效. 那么, 为什么父亲宣布 p 就可以让 p 变成共同知识呢?

所有人都听到父亲说 p 并不能产生共同知识. 假如父亲只是对每一个孩子单独宣布 p . 所有人并不知道所有人都知道 p , 因而仅仅可以做到 Ep . 那么, 所有人都知道所有人听到父亲说 p 会如何呢? 进一步假设每个孩子给每个孩子都安装了窃听器, 每个人都能够偷听每个人与父亲的谈话内容. 所有人并不知道所有人都知道所有人都知道 p , 因而仅仅有 E^2p . 因此, 父亲宣布 p 会产生共同知识的核心原因是公开宣布, 此时对每一个 m 都有 E^mp .

“泥泞的孩童”谜题足以表明, 关于“知道”的讨论远比想象的复杂. 关于“知道”和知识的研究在哲学中划归为知识论. 接下来, 我们将使用模态逻辑来形式化关于“知道”和知识的讨论. 这被称之为认知逻辑.

§12.2 认知逻辑的基本模型与性质

假设有 n 个人, 分别叫 $1, 2, \dots, n$. 基本命题集为 \mathbf{P} , 用字母 p, q, r, \dots 表示基本命题, 例如, p 表示“孩子 1 的脸上有泥巴”. 回忆: 逻辑框架是一个三元组 (语言, 模型, 语义). 命题认知逻辑的三元组是:

- 语言 L_n : 命题逻辑加上模态算子 $K_i, i = 1, \dots, n$.
- 模型 \mathcal{M}, w : Kripke 模型
- 语义 \models : 可能世界语义

模态公式 $K_i\phi$ 被读作“ i 知道 ϕ ”. 从语义来说, K_i 是 \Box 算子, 即我知道 ϕ 意味着在我认为的所有可能世界中 ϕ 都是真的, 因此, $\mathcal{M}, w \models K_i\phi$ 当且仅当对任意 v , 如果 $w \rightarrow_i v$, 那么 $\mathcal{M}, v \models \phi$.

模态公式的真值有两个层面，一个是在点模型上可满足： $\mathcal{M}, w \models \phi$ ，另一个是在框架上有效： $\mathcal{F} \models \phi$ 。

虽然我们没有定义 K_i 的对偶算子，但是 K_i 的对偶相当于 \Diamond 算子。 $\neg K_i \neg \phi$ 表示的意思是“ i 不知道 ϕ 不是真的”，因此 i 会考虑 ϕ 可能是真的。当然，这也意味着 i 会考虑 $\neg \phi$ 也可能是真的。例如考虑“我不知道上帝存在”和“我知道上帝不存在”，他们的模态公式分别是 $\neg K p$ 和 $K \neg p$ 。显然，前者是更弱的一种表述，因此 $\neg K$ 和 $K \neg$ 的含义完全不同。

例 12.1 • $K_1 K_2 p \wedge \neg K_2 K_1 K_2 p$.

1 知道 2 知道 p ，但是 2 并不知道 1 知道 2 知道 p 。

• $\neg K_i p \rightarrow K_i (\neg K_i p)$.

如果我不知道 p ，那么我知道我不知道 p 。

• $K_i (p \wedge \neg K_i p)$.

我知道如下的陈述： p 是真的，且我不知道 p 。一种类似的写法是， $K_i p \wedge K_i \neg K_i p$ 。我知道 p ，但是我又知道我不知道 p 。

模态算子 K_i 有特殊的性质，这要求我们对 K_i 对应的关系 R_i 也有额外的要求。我们要求每一个 R_i 都是等价关系 \sim_i ：

- 自反： $\forall x x \sim_i x$.
- 传递： $\forall x, y, z (x \sim_i y \wedge y \sim_i z) \rightarrow x \sim_i z$.
- 对称： $\forall x, y (x \sim_i y \leftrightarrow y \sim_i x)$.

从可能世界的角度来说，这一要求就是说对 i 来说，她所认为可能的世界之间都是不可区分的。

从模态可定义性的角度来说， R_i 的特殊性质会对应 K_i 特殊的公式。这些公式就可以被看成关于“知道”的公理（模式）或推导规则。承认某一条公理（模式）或推导规则就必须承认可能世界具有某一种性质，反之亦然。

公理 12.1 (分配公理) $\models (K_i (\phi \rightarrow \psi) \wedge K_i \phi) \rightarrow K_i \psi$.

有效性验证如下：假设 $\mathcal{M}, w \models K_i (\phi \rightarrow \psi)$ 且 $\mathcal{M}, w \models K_i \phi$ 。于是，对所有 R_i 后继 v 都有 $\mathcal{M}, v \models \phi \rightarrow \psi$ 和 $\mathcal{M}, v \models \phi$ ，因而 $\mathcal{M}, v \models \psi$ 。根据定义， $\mathcal{M}, w \models K_i \psi$ ，因而对所有 \mathcal{F} ，分配公理有效。

分配公理类比演绎推理的肯定前件（MP）推导规则。分配公理意味着拥有知识的个体可以对自己的知识做任意的演绎推理，因而假设个体是逻辑全知的。

规则 12.1 (知识泛化规则) 对所有 \mathcal{F} , 如果 $\mathcal{F} \models \phi$, 那么 $\mathcal{F} \models K_i \phi$.

有效性验证如下: 假设 $\mathcal{F} \models \phi$, 这意味着对所有基于 \mathcal{F} 的点模型都有 $\mathcal{M}, w \models \phi$. 因此, 对任意 w 的 R_i 后继 v , 也有 $\mathcal{M}, v \models \phi$. 所以也有 $\mathcal{M}, w \models K_i \phi$ 成立, 因而 $\mathcal{F} \models K_i \phi$.

知识泛化规则类比一阶逻辑推理的泛化规则. 前提成立的 ϕ 是关于 \mathcal{F} 本身的性质 (特别是关于知识), 因此知识泛化规则意味着个体知道关于知识的一切性质. 其实更重要的是, 知识的一切性质都是共同知识.

公理 12.2 (知识公理或真理公理) $\vdash K_i \phi \rightarrow \phi$.

验证留作练习. 知识公理意味着, i 知道的命题一定是真的. 在知识论中, 这一要求实际上反映了“拥有知识”需要付出努力、值得一定的奖励. 与此相对应地, 信念则是更加主观、随意的, 因而并不具有真理性. 为了理解这一点, 对比以下两句话: 我考试挂了, 但不知道我考试挂了; 我考试挂了, 但我不相信我考试挂了.

公理 12.3 (正内省公理) $\vdash K_i \phi \rightarrow K_i K_i \phi$.

公理 12.4 (负内省公理) $\vdash \neg K_i \phi \rightarrow K_i \neg K_i \phi$.

验证留作练习. 这两条公理意味着个体会通过内省来知道自己的处境, 特别是“我知道什么”和“我不知道什么”. “知之为知之, 不知为不知”. 这里留一个思考: (负) 内省公理是否合理?

以上五条性质 (四条公理 + 一条推导规则) 加上 MP 形成的推理系统称为 S5 公理系统. 需要注意的是, 这些公理其实都是公理模式, 包含了无穷条公理. 此外, 从哲学的角度讨论, 还有一些别的公理, 例如

公理 12.5 (一致性公理) $\vdash_H \neg K_i \perp$.

这一公理表明个体不能够知道假的陈述, 以此区别于信念.

我们基于框架类 H 给出了关于知识的公理. 反过来, 公理对应什么样的框架结构呢? 我们总结在表 12.1 中.

这里, 欧氏性的定义如下:

$$\forall x, y, z (xR_i y \wedge xR_i z \rightarrow yR_i z).$$

直观上说, 欧氏性意味着关系一定形成三角形.

序列性定义如下:

$$\forall x \exists y xR_i y.$$

公理	R_i 的性质
$K_i\phi \rightarrow \phi$	自反性
$K_i\phi \rightarrow K_iK_i\phi$	传递性
$\neg K_i\phi \rightarrow K_i\neg K_i\phi$	欧氏性
$\neg K_i\perp$	序列性
$\phi \rightarrow K_i\neg K_i\neg\phi$	对称性

表 12.1: 知识公理对应的模型结构

换言之，所有点都有后继。这里留两个思考。从可能世界角度， R_i 的这些性质有什么直观的含义？为什么有些公理没有对应的结构性质？（提示：注意观察一个公理/规则是否有 H 出现）

可以看出来，以上关系其实并不是孤立的，我们有：

引理 12.1 • 如果 R_i 是自反和欧氏的，那么 R_i 是对称和传递的。

• 如果 R_i 是对称和传递的，那么 R_i 是欧氏的。

• 以下命题等价：

- R_i 是自反、对称和传递的。
- R_i 是对称、传递和序列的。
- R_i 是自反和欧氏的。

证明留作练习。

下面我们将认知逻辑语言加入共同知识算子和它的语义。首先加入“所有人都知道”这个算子： $E\phi \leftrightarrow \bigwedge_i K_i\phi$ 。记 $E^k\phi$ 为 $\underbrace{E \dots E}_k \phi$ 。于是，共同知识算子 C 的语义定义为：

$$\mathcal{M}, w \models C\phi \iff \mathcal{M}, w \models E^k\phi, \quad k = 1, 2, \dots$$

我们可以从图结构来理解共同知识算子。 $\mathcal{M}, w \models E^k\phi$ 的含义是，从 w 出发走 k 步可到达的可能世界 v 上都有 $\mathcal{M}, v \models \phi$ 。 $\mathcal{M}, w \models C\phi$ 的含义则是，从 w 出发可到达的可能世界 v 上都有 $\mathcal{M}, v \models \phi$ 。

类似算子 K_i ， C 也有它对应的公理和推导规则。

公理 12.6 (不动点公理) $\vdash C\phi \leftrightarrow E(\phi \wedge C\phi)$ 。

共同知识是一个递归方程的（最小）解，这是一种不动点的视角。

规则 12.2 (归纳规则) 如果 $\mathcal{F} \models \phi \rightarrow E(\phi \wedge \psi)$ ，那么 $\mathcal{F} \models \phi \rightarrow C\psi$ 。

每个人都可以从真实中得到的知识，一定是共同知识。将 S5 公理系统中加入关于 E 和 C 的公理，我们就扩展了认知逻辑。因为 E 和 C 是用 K_i 定义的，因此他们本身并不会带来 Kripke 模型新的结构性质。

12.2.1 “泥泞的儿童”再回顾

现在，我们可以形式化、严格讨论“泥泞的儿童”这一谜题了。这一问题对应的逻辑语言是认知逻辑语言。可能世界是 $\{0,1\}^n$ 的元素 $x = (x_1, \dots, x_n)$ ， $x_i = 1$ 表示孩子 i 脸上有泥巴， $x_i = 0$ 表示 i 脸上没有泥巴。假设每个孩子 i 对应的 R_i 都是一个等价关系。当我们如此假设时，每个孩子唯一不是共同知识的事情就是脸上泥巴的状态，其他的所有事情都被隐含在了共同知识之中。

原子命题 p_i 表示孩子 i 脸上有泥巴， p 表示至少有一个孩子脸上有泥巴。假设现在父亲还没有说出 p 。对于孩子 i ，他的认知中只有两个可能世界：我的脸上有泥巴，或者我的脸上没有泥巴，其他对他来说都是确定的。因此， xR_iy 当且仅当 $x_j = y_j$ 对任意 $j \neq i$ 成立。于是，框架 \mathcal{F} 会对应一个 n 维超立方体。 $n = 3$ 的例子见图 12.1。

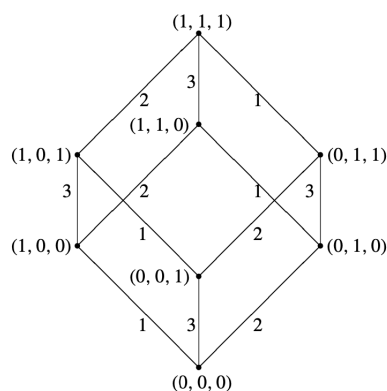


图 12.1: $n = 3$ 的情况

从框架 \mathcal{F} 到模型 \mathcal{M} ，我们还需要确定赋值 V 。 $w \in V(p_i)$ 当且仅当 $w_i = 1$ 。 $w \in V(p)$ 当且仅当所有分量 w_j 不全为零。从模型到点模型，我们还需要确定我们所处的可能世界，于是我们就可以讨论模态公式的可满足性。例如： $\mathcal{M}, (1,0,1) \models Ep$ ，但是 $\mathcal{M}, (1,0,1) \models \neg E^2p$ 。

假设现在父亲宣布了 p ，那么 \mathcal{F} 将会去掉 0 这个点，见图 12.2。

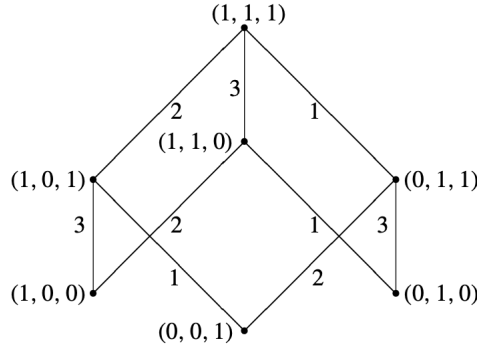


图 12.2: 父亲宣布 p 之后, 图 12.1 的变化

在 i 眼中, 只有两个可能世界, 因此 i 回答“知道”意味着她能够确定只有一个世界; 她回答不知道意味着还有两个可能世界. 假如现在是第一轮问答. 如果所有人都回答了“不知道”, 考虑状态 $s = (1, 0, 0, \dots)$. 如果真实世界是 s , 那么对于 1 来说, 可能世界只有一个了, 但是她却说“不知道”, 说明真实世界不是 s . 同理, 所有那些只有一个 1 的可能世界都会被消掉. 因此, 归纳可得, 第 k 轮的时候, 所有那些只有 k 个 1 的可能世界会被消掉.

如果父亲没有宣布 p , 那么 \mathcal{M} 是一个超立方体. 无论在任何轮, 每一个孩子都会觉得两个可能世界, 因此不会有任何可能世界被消掉! 因此, 从结构上来说, 父亲宣布 p 改变了每个孩子对应的 R_i 等价的可能世界, 使得一些孩子可以确定自己所处的世界.

这一套方法可以将类似的智力谜题都用算法化的方式得到解答.

12.2.2 Aumann 结构

如果我们限制 Kripke 模型中 R_i 为等价关系, 那么认知逻辑还可以有另一种理解方式. 回忆: 概率论 (或者似然) 理解世界的方式基于“事件”. 我们只能感知事件的发生与否, 而不能具体知道是哪个样本点. 用事件的方式理解认知, 得到的结构被称为 Aumann 结构.

考虑全集 Ω , 理解为样本空间. 事件 $e \subseteq \Omega$ 是样本点的集合. 一次观测会落实在一个样本点 ω 上. 事件 e 发生当且仅当 $\omega \in e$. 在 Kripke 模型中, 我们将 i 的知识刻画为了等价关系 R_i . 在 Aumann 结构中, 对每一个个体 i , 它的知识被刻画为 Ω 的划分 $\mathcal{P}_i = \{\Omega_j\}$, Ω_j 是 Ω 的子集. S_j 被称为 i 的信息集, 可以被理解为 i 能够感知到的最基本的事件. $\mathcal{P}_i(\omega)$ 被定义为 ω 所属于的那个信息集.

现在我们重新定义算子 $K_i: 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$ 为 $K_i(e) := \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega) \subseteq e\}$. $K_i(e)$ 定义

了“个体 i 知道事件 e ”这一事件. 思想: 将有关于知识的讨论转化为关于事件的讨论. 类似地, 可以定义算子 $E : 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$ 为 $E(e) = \bigcap_{i=1}^n K_i(e)$. 定义共同知识算子 $C : 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$ 为 $C(e) = \bigcap_{k=1}^\infty E^k(e)$.

我们再一次看到逻辑和集合的对应, 我们总结如表 12.2 所示.

Kripke 模型	Aumann 结构
可能世界	样本点
公式	事件
原子命题	基本事件
模态算子	集合-集合映射
i 的等价关系 R_i	i 的划分
逻辑连接词	集合操作

表 12.2: 逻辑与集合的对应关系

Kripke 语义偏好逻辑, Aumann 结构偏好 (Bayes) 概率论, 因此用数学来研究知识论就有了两种风格, 一种是计算机、逻辑、哲学的风格, 另一种是经济学、信息论的风格. 但是, 这两种对应关系完全取决于我们对知识的那些基本假设, 所以如果这些假设被打破, 那么这样的对应关系就不再成立!

下面我们分别用这两种风格来讨论共同知识的意义.

§12.3 对不一致达成一致

本部分将用模态逻辑的方式来探讨达成一致与共同知识的关系. 最早由 Aumann 给出. 我们将要证明, 对于有相同决策方式的两个个体来说, 他们不可能对采取不同行动这件事具有共同知识. 典型故事: 同样的 AI 之间会发生交易吗? 交易发生意味着买家和卖家有不一样的决策 (一个买一个卖). 因此, 如果两个人按照相同的规则来行事, 那么不会有交易发生!

players cannot “agree to disagree”.

首先我们给出模型。

假想一个含时的系统, 有两个玩家 1 和 2. 在任意时刻, 每个玩家处于一个状态 s_i 之中. 每个玩家分别有一个自己的局部状态空间 S_i . 整个系统的全局状态是 $(s_1, s_2) \in$

$S_1 \times S_2 = \mathcal{G}$. 时刻是离散的, 用非负整数 m 表示, 初始时刻是 0. 系统的一次运行指的是函数 $r : m \mapsto (s_1, s_2)$. 运行描述了系统每一时刻的全局状态. 系统 \mathcal{R} 指的是 \mathcal{G} 上所有可能运行的集合. 给定 $r \in \mathcal{R}$, (r, m) 被称为系统 \mathcal{R} 的一个点.

玩家处于某个状态的时候可以采取某种行动. 为了反映“玩家按照相同的规则行事”这件事, 我们规定两个玩家的行动集都是 A , 并且这一集合不依赖于全局或局部的状态. 给定所有人的行动和一个全局状态, 我们可以定义系统的转移函数为 $\tau : A^2 \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. 因此, 转移函数描述了所有人的行动如何导致系统从一个状态到另一个状态.

如何描述“按照规则行事”? 我们用协议来描述这种概念. 玩家 i 的协议 P_i 是一个从局部状态 S_i 到行动集 A 的映射, 即处于什么状态就做什么事. 两个玩家的联合协议记为 $P = (P_1, P_2)$.

一个联合协议要执行起来, 还需要初始状态. 初始状态可能的集合记为 \mathcal{G}_0 . 给定初始状态集 \mathcal{G}_0 和转移函数 τ , 我们就可以在系统上执行任何一种协议. 我们把元组 $\gamma = (\mathcal{G}_0, \tau)$ 称为系统的上下文.

给定上下文 $\gamma = (\mathcal{G}_0, \tau)$ 和一个联合协议 P , 我们可以讨论 P 产生的所有可能运行. 一个运行 r 与 P 相容指的是

- $r(0) \in \mathcal{G}_0$.
- 对任意时刻 m , 如果 $r(m) = (s_1, s_2)$, 那么 $r(m+1) = \tau(P(s_1), P(s_2))(s_1, s_2)$.

换言之, r 是从跟某个可能的初始状态开始执行协议产生的运行. 一个系统 \mathcal{R} 表示了上下文 γ 和联合协议 P , 指的是所有 $r \in \mathcal{R}$ 都与 P 相容. 这样的系统我们用记号 $\mathcal{R}^{rep}(P, \gamma)$ 来表示.

接下来我们引入 Kripke 模型. Kripke 模型的点是系统的点. 设原子命题集 \mathbf{P} , 它的元素是 $perf_i(a)$, 表示玩家 i 采取行动 a . 接下来我们定义赋值函数 V . 从 \mathbf{P} 的定义来看, 赋值应该只依赖状态, 而不依赖时间, 所以我们赋值函数实际上需要分两步来定义:

1. 定义 V 为从 \mathbf{P} 到全局状态集合的映射,
2. 然后再扩展为到系统点集合的映射: $(r, m) \in V(p) \iff r(m) \in V(p)$.

第一步定义如下: 状态 $s \in V(perf_i(a))$ 当且仅当在状态 s 玩家 i 采取过行动 a .

然后我们引入知识算子 K_i 的语义. 同样, 我们假设 K_i 对应的是等价关系 \sim_i . 玩家 i 只能区分自己的局部状态 s_i , 他执行协议时, 只有状态, 没有时间的概念. 因此我们定义 $(r, m) \sim_i (r', m') \iff r(m)_i = r'(m')_i$. 从 Aumann 结构来说, 每一个局部状态 s_i 对应了一个信息集

$$IS_i(s_i, \mathcal{R}) = \{(r, m) : r \in \mathcal{R}, r(m) = s_i\}.$$

这样，我们就得到了 Kripke 点模型 $\mathcal{M}, (r, m)$. K_i 的语义按照基本认知逻辑定义即可。

接下来，我们引入关于时间的模态算子. 特别地，我们只引入算子 X ，表示“下一时刻”. 它的语义定义为

$$\mathcal{M}, (r, m) \models X\phi \iff \mathcal{M}, (r, m+1) \models \phi.$$

有了算子 X ，我们可以用公式表达“将要采取行动”：

$$act_i(a) = \neg perf_i(a) \wedge Xperf_i(a).$$

接下来，我们定义关于 Kripke 模型的决策函数，用它来在点模型的角度讨论协议的执行. 设 Kripke 模型的点集为 S . 玩家 i 的决策函数 D 是从 S 的某些子集到行动集 A 的映射. 我们没有写决策函数的下标，表明两个玩家采取了相同的决策策略. 决策函数描述的是：知道什么样的信息，就采取什么样的行动。

我们要求协议 P_i 和决策函数 D 是相容的，也就是决策函数在某个信息集上采取的行动恰好是这个协议在该状态要执行的行动：

$$P_i(s_i) = D(IS_i(s_i, \mathcal{R})), \forall s_i \in S_i.$$

反过来说，联合协议 P 在上下文 γ 中实现了决策函数 D ，如果对所有 i ， P_i 与 D 在系统 $\mathcal{R}^{rep}(P, \gamma)$ 中是相容的。

协议和决策函数是两个非常容易混淆的概念，尽管他们有密切联系. 直观来说，协议就是处于什么局部状态采取什么行动，这并不涉及知识的内容. 而决策函数指的是，知道什么信息就采取什么行动，这完全是知识的内容. 在我们的背景下，

$$\text{知道的信息} = \text{处于的局部状态}.$$

因此二者其实是从不同角度描述同一个概念。

我们对决策函数 D 有一个额外的技术要求，我们要求 D 是并-一致的. 具体来说，给定 S 一系列互不相交的子集 T_1, \dots, T_k ，每一个都有 $D(T_i) = a$ ，那么我们要求 $D(\cup_i T_i) = a$. 考虑一个具体的例子，假设我的决策函数是这样描述的：如果今天下雨，并且今天星期四，那么我会去 KFC 疯狂星期四；如果今天不下雨，并且今天星期四，那么我会去 KFC 疯狂星期四. 那么，我的决策还应该有：虽然我不知道今天下不下雨，但是如果今天是星期四，那么我会去 KFC 疯狂星期四. 可以证明，任何联合协议都可以从某个并-一致的决策函数产生。

至此，模型就已经陈述完了，我们总结一下. 两个玩家处于同一个系统中，每个玩家可能知道不同的东西（局部状态空间不同，信息集不同），但是他们的行动集相同、决策

函数相同，决策函数要求是并-一致的，由某个联合协议实现，给定可能的初始状态和系统的转移函数（上下文），系统可以产生一系列可能的运行。

利用这一模型，我们就可以叙述并证明 Aumann 达成一致定理了。

定理 12.1 (Aumann 达成一致定理) 给定联合协议 P ，上下文 γ ，由此产生 Kripke 框架 \mathcal{F} 。设 $a, b \in A$ 是两个不同的行动，如果在上下文 γ 中 P 实现了某个并-一致决策函数，那么

$$\mathcal{F} \models \neg C(act_1(a) \wedge act_2(b)).$$

如果两个玩家选择了同样的并-一致决策函数，那么他们不可能对“我们采取不同行动”这件事形成共同知识，所以他们不可能对不一致达成一致（agree to disagree）。

证明 用反证法。假设某个基于 \mathcal{F} 的点模型 $\mathcal{M}, (r, m)$ 使得

$$\mathcal{M}, (r, m) \models C(act_1(a) \wedge act_2(b)).$$

我们证明 $a = b$ 。思路如下：共同知识对应了从 (r, m) 出发可到达的状态集 S' 的性质。从玩家 1 的视角来看，她在 S' 所关联的信息集上都要采取行动 a ，根据并-一致性，应该有 $D(S') = a$ 。从玩家 2 来看同理，因此也应该有 $D(S') = b$ 。因此 $a = b$ 。

假设 S' 是从 (r, m) 出发，通过关系 \sim_1 或 \sim_2 可到达的点集。取一个点 $(r', m') \in S'$ ，设 $r'(m')_1 = s'_1$ 。假设 $(r'', m'') \sim_1 (r', m')$ ，那么 $(r'', m'') \in S'$ 。因此， $IS_1(s'_1, \mathcal{R}) \subseteq S'$ 。当 s'_1 取遍 S_1 ，根据信息集的性质， S' 是 $IS_1(s'_1, \mathcal{R})$ 的不交并。

因为 $\mathcal{M}, (r, m) \models C(act_1(a))$ ，所以有 $\mathcal{M}, (r', m') \models act_1(a)$ 。这一公式意味着 $P_1(s'_1) = a$ 。根据 P 和 D 的关系，这等价于 $D(IS_1(s'_1, \mathcal{R})) = a$ 。因为这件事对任意 s'_1 都成立，根据 D 的并-一致性， $D(S') = a$ 。同理，从玩家 2 的角度来说 $D(S') = b$ 。因此 $a = b$ 。□

注。 我们的定理是对于确定性的协议证明的。然而，一个协议可能是非确定的，也就是在一个状态可能会有多种行动的选择，比如选择带有随机性。这个时候，达成一致定理依然成立，但是我们需要恰当地定义 Kripke 模型、决策函数以适应非确定性的协议。当协议具有非确定性时，我们可以用这一模型来理解带有先验知识（分布）、风险或者不确定性下的达成一致定理，只要协议能够对应一个并-一致的决策函数，结论都有效。

§12.4 Rubinstein 电子邮件博弈

接下来我们使用 Bayes 概率论来说明在二人静态博弈中，共同知识对到底实现哪一个 Nash 均衡非常关键。此时，知道一件事与否被赋予了不确定性的含义：我确定或不确定某件事发生。

考虑两个玩家和两个可能的收益矩阵：

	A	B		A	B
A	(0,0)	(-10,1)	A	(8,8)	(-10,1)
B	(1,-10)	(8,8)	B	(1,-10)	(0,0)

在左边的矩阵中， (B, B) 是唯一的 Nash 均衡。在右边的矩阵中有多个 Nash 均衡： (A, A) 和 (B, B) 。 (A, A) 给出比 (B, B) 更高的收益，但行动 A 比 B 更有风险。

左边矩阵被选择的概率是 $p > 1/2$ 。玩家 1 知道真实的矩阵，而玩家 2 不知道。如果选择了右边矩阵，玩家 1 会给玩家 2 发送一条消息。如果玩家 2 收到了消息，她会回复。如果玩家 1 收到了回复，她会发送第二条消息来确认她收到了玩家 2 的回复。以此类推。每条消息都以 ϵ 的概率独立等可能丢失。¹

以上传信的过程可以用 Bayes 博弈的类型来刻画。具体来说，两个玩家的类型集合为 $\Theta_i = \{\theta_i^0, \theta_i^1, \theta_i^2, \dots\}$ 。 θ_i^m 表示玩家 i 发了 m 封邮件。 θ_i^m 有直观的含义。例如，类型 θ_1^0 表示真实收益矩阵是左边的，而类型 θ_1^1 表示真实收益矩阵是右边的，1 发送了一封电子邮件，但 2 没有收到。

实际上， θ 包含了所有可能的情况：

- (θ_1^0, θ_2^0) ：真实收益矩阵是左边的。
- (θ_1^1, θ_2^0) ：真实收益矩阵是右边的，1 发送了一封电子邮件，但 2 没有收到。
- (θ_1^1, θ_2^1) ：真实收益矩阵是右边的，2 收到了第一封电子邮件，但 1 没有收到 2 的回复。
-

我们可以算出来，当真实矩阵为左边矩阵时，每个类型出现的概率：首先，以概率

左	θ_2^0	θ_2^1	θ_2^2	...
θ_1^0	p	0	0	...
θ_1^1	0	0	0	...
θ_1^2	0	0	0	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

p 选择左边的矩阵，而且没有人发送消息。因此， (θ_1^0, θ_2^0) 的概率是 p ，其他项概率都是 0。

同样可以算出来，当真实矩阵为右边矩阵时，每个类型出现的概率：首先，以概率

¹注意：发送电子邮件不是一个行动，而是一个规则。

右	θ_2^0	θ_2^1	θ_2^2	\dots
θ_1^0	0	0	0	\dots
θ_1^1	$\epsilon(1-p)$	$\epsilon(1-\epsilon)(1-p)$	0	\dots
θ_1^2	0	$\epsilon(1-\epsilon)^2(1-p)$	$\epsilon(1-\epsilon)^3(1-p)$	\dots
θ_1^3	0	0	$\epsilon(1-\epsilon)^4(1-p)$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

$1-p$ 选择右边的矩阵，玩家 1 发送一条消息，它会以概率 ϵ 丢失。因此， (θ_1^1, θ_2^0) 的概率是 $\epsilon(1-p)$ 。以此类推，可以得到计算。

对类型 θ_i^m ，收益矩阵是到第 m 层的共同知识，即 E^m 。所以对于很大的 m ，收益矩阵是“几乎公共知识”。信息结构是玩家的共同知识，玩家们进行博弈。关键问题：这个博弈的 BNE 是什么？

我们需要弄清楚对每个类型 θ_i^m ，玩家会做什么。假设玩家 1 的类型为 θ_1^0 。玩家 1 知道 (θ_1^0, θ_2^0) 是真实的类型，所以左边的矩阵被选择。据此推理：玩家 1 选择占优策略 B。

假设玩家 2 的类型为 θ_2^0 。Bayes 定理意味着：

$$\Pr(\theta_1^0 | \theta_2^0) = \frac{p}{p + \epsilon(1-p)} := \mu_2^0.$$

此时，左边的矩阵被选择。

$$\Pr(\theta_1^1 | \theta_2^0) = 1 - \mu_2^0.$$

此时，右边的矩阵被选择。

选择 B 的期望收益至少是 $8\mu_2^0$ 。推理如下：类型 θ_1^0 时肯定选择 B，因此最坏的情况是 θ_1^1 选择 B。

选择 A 的期望收益最多是 $-10\mu_2^0 + 8(1 - \mu_2^0)$ 。推理如下：类型 θ_1^0 肯定选择 B，因此最好的情况是 θ_1^1 选择 A。

综合两方面，B 更好，因为对于所有 ϵ ， $\mu_2^0 \geq p > \frac{1}{2}$ 。

假设玩家 1 的类型为 θ_1^1 ，于是，右边的矩阵被选择。Bayes 定理意味着： $\Pr(\theta_2^0 | \theta_1^1) = \frac{\epsilon(1-p)}{\epsilon(1-p) + \epsilon(1-\epsilon)(1-p)} = \frac{1}{2-\epsilon} := \mu_1^1$ 。另一方面， $\Pr(\theta_2^1 | \theta_1^1) = 1 - \mu_1^1$ 。

选择 B 的期望收益至少为 0。推理如下：类型 θ_2^0 肯定选择 B，因此最坏的情况是 θ_2^1 选择 B。

选择 A 的期望收益最多为 $-10\mu_1^1 + 8(1 - \mu_1^1)$ 。推理如下：类型 θ_2^0 肯定选择 B。最好的情况是 θ_2^1 选择 A。

综合两方面，B 更好，因为对于所有 ϵ ， $\mu_1^1 > \frac{1}{2}$ 。

逐步迭代上述过程，我们发现，在唯一的 BNE 中，所有类型都选择 B 。然而，如果右边的矩阵是共同知识， (A, A) 是一个严格 Nash 均衡。所以，即便收益矩阵是“几乎共同知识”，Nash 均衡也不一定是一个可实现的均衡。

注. [\[lhy: 仔细改一改\]](#) 关于均衡的进一步思考

- 用 $Nash(x)$ 表示“ x 是 Nash 均衡”，那么 $\exists x C(Nash(x))$ 和 $C(\exists x C(Nash(x)))$ 的含义是否一样？
- 如果不引入不确定性，在完全信息下，实现特定的 Nash 均衡是否还需要共同知识？
- 如果玩家不是逻辑全知的，或者说她的推理、计算能力是有限的，那么 Nash 均衡是否还会达到？是否可接近？

参考文献

- [Bre57] Leo Breiman. The Individual Ergodic Theorem of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(3):809–811, 1957.
- [CT12] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [Huf52] David A. Huffman. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, September 1952.
- [Inf] Information | Etymology, origin and meaning of information by etymonline. <https://www.etymonline.com/word/information>.
- [Jay02] Edwin T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2002.
- [KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.
- [LLG⁺19] Mike Lewis, Yinhan Liu, Naman Goyal, Marjan Ghazvininejad, Abdelrahman Mohamed, Omer Levy, Ves Stoyanov, and Luke Zettlemoyer. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension, October 2019.
- [McM53] Brockway McMillan. The Basic Theorems of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(2):196–219, June 1953.
- [RHW86] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1: Foundations*, pages 318–362. MIT Press, Cambridge, MA, USA, January 1986.

- [Rob49] Robert M. Fano. *The Transmission of Information*. March 1949.
- [Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, July 1948.
- [Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1996.
- [Tin62] Hu Kuo Ting. On the Amount of Information. *Theory of Probability & Its Applications*, 7(4):439–447, January 1962.
- [Uff22] Jos Uffink. Boltzmann’s Work in Statistical Physics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2022 edition, 2022.
- [李 10] 李贤平. 概率论基础. 高等教育出版社, 2010.

索引

Aumann 结构, 166

Aumann 达成一致定理, 170

S5 公理系统, 163

不动点公理, 164

信念, 163

信息集, 166

共同知识, 160

分配公理, 162

归纳规则, 165

正内省公理, 163

真理公理, 163

知识公理, 163

知识泛化规则, 163

知识论, 161

认知逻辑, 161

负内省公理, 163

逻辑全知, 162