标题 **title**

作者 *author*

2023 年 8 月 27 日

前言

目录

第一部分

科学的逻辑

第二部分

信息与数据

第三部分

决策与优化

第四部分

逻辑与博弈

第五部分

认知逻辑

附录 C　概率论基础

本附录主要介绍 Kolmogorov 概率论，讨论只局限在数学层面，不涉及概率论的哲学讨论。

§C.1　从朴素概率论到公理化概率论

C.1.1　Kolmogorov 概率论

朴素的概率论通常讨论两种极端的情况，一个是可以用数数的方式来计算概率的情况，比如说掷骰子，另一个是用面积的方式来计算概率的情况，比如在随机选一个圆周上的点。这两个情况分别对应了**古典概型**和**几何概型**。

我们先给一些术语。考虑一个随机试验，它的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω。样本空间的元素称为**样本点**，通常记为 ω. 样本空间的某些子集被称为**事件**。我们来看看这些概念在朴素的概率论中都具体是什么。

例 C.1 (古典概型) 考虑先后掷两个骰子的情况。样本空间为

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}.$$

样本点为 (i,j)，表示第一个骰子掷出 i 点，第二个骰子掷出 j 点。“第一个骰子掷出 i 点”这个事件可以表示为 $A_i = \{(i,j) : 1 \leq j \leq 6\}$. “第一个骰子掷出 i 点，第二个骰子掷出 j 点”这个事件可以表示为 $B_{ij} = \{(i,j)\}$.

例 C.2 (几何概型) 考虑随机选一个圆周上的点的情况。如果用弧度来表示圆周上的点，那么样本空间为

$$\Omega = [0, 2\pi).$$

样本点为 ω，表示选出点的弧度。事件 $A = [0,\pi)$ 表示选出了上半圆周，事件 $B = [0,\pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$ 表示选出了右上或左下的 $1/4$ 圆周。

那么，如何定义概率呢？朴素地说，概率是某个事件出现的可能性占总可能的比例。

对于古典概型，我们简单认为每个样本点出现的概率都是相同的，也就是说，如果用 p_ω 表示样本点 ω 出现的概率，那么对任意 $\omega \in \Omega$，都有 $p_\omega = 1/|\Omega|$. 于是，对于任意事件 A，它发生的概率为

$$\sum_{\omega \in A} p_\omega = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

例如在上面掷骰子的例子中，$p_\omega = 1/36$，A 发生的概率为 $1/6$，B 发生的概率为 $1/36$.

对于几何概型，不能再用古典概型的方式定义概率。一段长为 2π 的圆弧上，一个点的长度当然是 0，所以选到一个点的概率是 0。计算选到上半圆周的概率，就是把所有上半圆周上的点的概率加起来，任意多个 0 相加依然还是 0，所以这样的定义出来的概率永远是零，这样是不可行的。

朴素的直觉告诉我们，选到上半圆周的概率是 $1/2$，因为上半圆周刚好占了半个圆周。所以几何概型的概率定义利用了体积的概念。事件 A 的概率定义为

$$\frac{\text{事件 } A \text{ 对应的体积}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 对应的体积}}.$$

这里体积应该按照广义上来理解，一维集合的体积就是长度，二维集合的体积就是面积，三维集合的体积就是体积，以此类推。例如在上面圆周的例子中，A 对应的体积（长度）为 π，Ω 对应的体积（长度）为 2π，所以 A 发生的概率为 $1/2$. 同理，B 的概率也是 $1/2$.

几何概型的定义非常微妙，因为我们并不知道如何定义“体积”。我们来看一个有趣的例子。

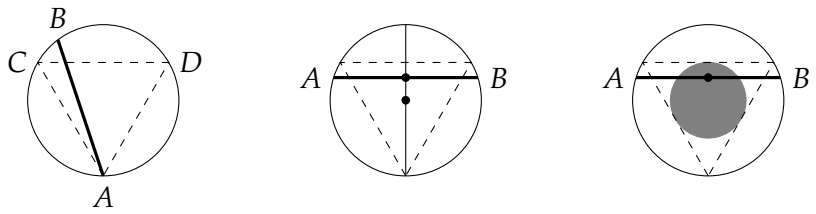
例 C.3 (Bertrand 悖论) 考虑一个圆，它的半径为 1. 现在我们随机地在圆上取一个弦，那么这个弦的长度超过 $\sqrt{3}$（即圆内接正三角形的边长）的概率是多少？我们给出三种答案。

解答 *1*. 不妨固定弦的其中一个点 A，那么另一个点 B 可以在圆上等可能取。以 A 为顶点作圆内接正三角形 ACD，弦的长度超过 $\sqrt{3}$ 等价于 B 在弧 CD 上，所以概率为 $1/3$.

解答 *2*. 弦长只与它到圆心的距离有关系，与方向无关。弦长超过 $\sqrt{3}$ 等价于它到圆心的距离小于 $1/2$，所以概率为 $1/2$.

解答 *3*. 弦被它的中点唯一确定，弦长大于 $\sqrt{3}$ 等价于中点落在一个半径为 $1/2$ 的同心小圆内，所以概率为同心小圆面积比上大圆面积，即 $(1/2)^2 = 1/4$.

三种解答的示意图见下（从左到右分别是解答 *1* 到 *3*）：



因此，我们需要一个更加严格的定义来描述概率。首先注意到，概率应该是一个函数，它的值域是 $[0,1]$. 那么，它的定义域应该是什么呢？我们已经看到，概率应该定义在事件上，而非样本点上。那么，概率可以定义在任意事件上吗？这个问题的答案非常微妙，我们不在这里讨论。这里只是指出，我们关心的并不总是任意事件，而是一类被 σ-代数所刻画的事件。

定义 C.1 (σ-代数) 设 Ω 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的集合。如果 $\mathscr{F}$ 满足

1. $\Omega \in \mathscr{F}$;
2. 如果 $A \in \mathscr{F}$，则 A 的补集 $\Omega \setminus A \in \mathscr{F}$;
3. 如果 $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 **σ-代数**。

在样本空间中，我们要求事件也形成一个 σ-代数。这样的 σ-代数称为**事件域**，记为 $\mathscr{F}$，关于这一定义的哲学讨论，可以见第一章. 接下来，我们给出 Kolmogorov 概率论的公理化定义。

定义 C.2 (概率空间，概率测度) 设 Ω 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数。如果函数 $\Pr : \mathscr{F} \to [0,1]$ 满足

1. 正则性：$\Pr(\Omega) = 1$;
2. 可列可加性：如果 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ 是两两不相交的事件，则

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i),$$

则称 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个**概率空间**，$\Pr$ 称为**概率测度**或**概率**。

容易证明，概率有如下性质：

命题 C.1 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，则：

1. $\Pr(\varnothing) = 0$;

2. 单调性：对任意的 $A, B \in \mathscr{F}$，如果 $A \subseteq B$，则 $\Pr(A) \leq \Pr(B)$；

3. 有限可加性：对两两不相交的 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$，有

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i).$$

他们的证明都不困难，我们略去。

对于古典概型来说，我们容易写出它的概率空间。此时事件域恰好为所有 Ω 的子集的集合，概率测度的定义也就是我们之前的定义。对于几何概型来说，这一定义需要克服很多技术层面的困难，我们不在这里讨论。

C.1.2 条件概率，独立性

接下来，我们讨论条件概率与独立性。我们还是看先后掷两个骰子的例子。如果掷完第一个骰子，我们马上观察结果，然后再掷第二个骰子，问第一个骰子是 i，第二个是 j 的概率是多少？如果继续套用原来的概率空间，我们很快就会觉得不对劲。此时，第一个骰子完全没有随机性！所以朴素的直觉告诉我们，这里的概率应该有另一个依赖于第一次投骰子结果的定义，这样的概率就是条件概率。

我们直接给出一般情况下条件概率的定义。

定义 C.3 (条件概率) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$ 是两个事件，且 $\Pr(A) > 0$. 则称

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

是事件 B 在事件 A 发生的条件下发生的**条件概率**。

以上定义要求 A 发生概率为正，然而 A 是零概率的时候也是可能有条件概率的。例如，从 $[0,1] \times [0,1]$ 中均匀地随机选一个点 (X, Y)，观察它的横坐标 X，不管什么样的 x，$X = x$ 的概率都是 0。然而，从朴素的直觉来看，条件在 $X = x$ 上，$Y > 1/2$ 的概率不仅存在，而且应该是 $1/2$。在附录 C.2 中，我们会针对一类特殊的事件，给出此时条件概率的定义。

我们继续看投两个骰子的例子。假设事件 A 是“第一个骰子是 i“，事件 B 是“第二个骰子是 j”。我们可以计算出 $\Pr(B|A) = \Pr(B) = \frac{1}{6}$. 如果单看数学计算，这是一个非常神奇的式子：条件在 A 上和不条件在 A 上概率是一样的！从朴素的直觉来说，这件事情却

并不神秘，因为第一个骰子的结果和第二个骰子的结果是不应该有关系的。我们把这种现象称为**独立性**。更一般地，对任意事件 A, B，如果 $\Pr(A) > 0$，那么

$$\Pr(B|A) = \Pr(B) \iff \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \Pr(B) \iff \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B).$$

最后一个式子并不要求 $\Pr(A) > 0$，因此我们用它作为独立性的定义，这样定义可以不依赖条件概率。

定义 C.4 (独立性) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$ 是两个事件。如果 $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$，则称事件 A 和 B **相互独立**。

一般地，给定一个事件族 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$，如果对任意的有限个不同的 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$，都有

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(A_i),$$

则称事件族 $\mathscr{A}$ 中的事件是**相互独立**的。

我们在定义中还给出了多个事件相互独立的定义，这一定义是说不管挑出其中多少个事件，他们都应该满足交的概率等于概率的积。这并不等价于任意两个事件都相互独立，我们看下面的例子。

例 C.4 两个人进行石头剪刀布游戏，每个人独立等概率地出剪刀石头布. 考虑下面三个事件：$A = \{\text{甲出了石头}\}$，$B = \{\text{乙出了剪刀}\}$，$C = \{\text{甲赢}\}$.

容易算出，$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = 1/9$，$\Pr(A \cap C) = \Pr(A)\Pr(C) = 1/9$，$\Pr(B \cap C) = \Pr(B)\Pr(C) = 1/9$，所以 A, B, C 两两独立. 但是 A, B, C 不是相互独立的：$\Pr(A \cap B \cap C) = 1/9 \neq 1/27 = \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$.

这个例子说明，三个事件的独立性远比他们任意两个之间的独立性要复杂，三个事件可能放在一起才会出现不独立的情况。对于一般情况，这样的现象更加普遍，所以我们多个事件的独立性定义是要求任意有限个事件都独立，而不是任意两个事件都独立。

最后，我们给出条件概率的一些性质。

命题 C.2 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，那么

1. 对任意 $A \in \mathscr{F}$ 满足 $\Pr(A) > 0$，$\Pr(\cdot|A)$ 也是一个概率测度；
2. $\Pr(|\Omega) = \Pr(\cdot)$，
3. 对任意 $A \in \mathscr{F}$ 满足 $\Pr(A) > 0$，$\Pr(A|A) = 1$.

以上性质的证明都很简单，我们就不给出了。

定理 C.1 (全概率公式) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，$A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ 是一列两两不相交的事件，且 $\Pr(A_i) > 0$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B$，则对任意的 $C \in \mathscr{F}$，有

$$\Pr(C|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(C|A_i) \Pr(A_i).$$

特别地，对于有限个 A_i，这一定理也成立。

证明 注意到

$$\Pr(C) = \Pr(C \cap B) = \Pr\left(C \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (C \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(C \cap A_i).$$

最后一个等号是因为 $C \cap A_i$ 两两不相交。另一方面，

$$\Pr(C \cap A_i) = \Pr(C|A_i) \Pr(A_i),$$

所以

$$\Pr(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(C|A_i) \Pr(A_i).$$

对于有限个 A_i，只需要把无穷求和改成有限求和，利用有限可加性即可即可。 □

全概率公式是一种分而治之的思想，它把一个复杂的事件分解成若干个简单的事件，然后再把简单的事件的概率加起来。我们来看一个例子。

例 C.5 从装有 w 个白球和 b 个黑球的盒子中随机地取出一个球，不放回，再取出一个球。问第二个球是白球的概率是多少？

设事件 A 是“第一个球是白球”，事件 B 是“第二个球是白球”。我们有

$$\begin{aligned}\Pr(B) &= \Pr(B|A) \Pr(A) + \Pr(B|\bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\ &= \frac{w-1}{w+b-1} \cdot \frac{w}{w+b} + \frac{w}{w+b-1} \cdot \frac{b}{w+b} \\ &= \frac{w}{w+b}.\end{aligned}$$

这里 $\bar{A}$ 指的是 A 的补集，即“第一个球是黑球”。

定理 C.2 (贝叶斯公式) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，$A, B \in \mathscr{F}$ 且 $\Pr(A), \Pr(B) > 0$，则

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

这一公式的证明几乎是显然的，我们略去。

一个特别重要的推论被称为链式法则，它是 *Bayes* 网络的基础。

推论 C.1 (链式法则) 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \Pr)$ 是一个概率空间，$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$，且 $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$，则

$$\begin{aligned}&\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)\\ =&\Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).\end{aligned}$$

我们也看一个例子。

例 C.6 (Pólya 的罐子) 一个罐子装有 w 个白球和 b 个黑球，随机取出一个，观察它的颜色，放回，再放回相同颜色的 c 个球，再随机取一次，重复上述操作，如此反复 n 次，问每一次都取到白球的概率是多少？

设事件 A_i 是“第 i 次取出的球是白球”。我们有

$$\begin{aligned}\Pr(A_1) &= \frac{w}{w+b},\\ \Pr(A_2|A_1) &= \frac{w+c}{w+b+c},\\ \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{w+2c}{w+b+2c},\\ &\cdots\\ \Pr(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) &= \frac{w+nc}{w+b+nc}.\end{aligned}$$

所以

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{w}{w+b} \cdot \frac{w+c}{w+b+c} \cdots \frac{w+nc}{w+b+nc}.$$

注. 在概率论中，我们经常要讨论事件的交，所以我们通常会把 $A \cap B$ 简记为 AB.

另外，我们也经常要讨论一个关于 ω 的陈述 $Q(\omega)$ 定义的事件 $\{\omega \in \Omega : Q(\omega)\}$，在 *Pólya* 的罐子的例子中，事件 A_1 其实就是由陈述 $Q(\omega)$: “ω 中第一次取出的球是白球”定义的事件。在这种情况下，我们将这一事件简记为 $\{Q\}$，它的概率就是 $\Pr(\{Q\})$ 或者简记为 $\Pr(Q)$。此时，事件交的概率也经常以逗号的形式写出，例如，$\Pr(A_1A_2)$ 我们会记为 $\Pr(\text{第一次取出的球是白球}, \text{第二次取出的球是白球})$. 这样的记号更直观，并且在随机变量部分会经常使用。

§C.2 随机变量，分布函数

§C.3 随机变量的数字特征，期望

§C.4 多元正态分布

参考文献

[Bre57] Leo Breiman. The Individual Ergodic Theorem of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(3):809–811, 1957.

[CT12] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2012.

[Huf52] David A. Huffman. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, September 1952.

[Inf] Information | Etymology, origin and meaning of information by etymonline. https://www.etymonline.com/word/information.

[Jay02] Edwin T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2002.

[KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.

[LLG+19] Mike Lewis, Yinhan Liu, Naman Goyal, Marjan Ghazvininejad, Abdelrahman Mohamed, Omer Levy, Ves Stoyanov, and Luke Zettlemoyer. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension, October 2019.

[McM53] Brockway McMillan. The Basic Theorems of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(2):196–219, June 1953.

[RHW86] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1: Foundations*, pages 318–362. MIT Press, Cambridge, MA, USA, January 1986.

[Rob49] Robert M. Fano. *The Transmission of Information*. March 1949.

[Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, July 1948.

[Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1996.

[Tin62] Hu Kuo Ting. On the Amount of Information. *Theory of Probability & Its Applications*, 7(4):439–447, January 1962.

[Uff22] Jos Uffink. Boltzmann's Work in Statistical Physics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2022 edition, 2022.

[李 10] 李贤平. 概率论基础. 高等教育出版社, 2010.

索引