标题 title

作者 author

2024 年 9 月 16 日

前言

目录

第一部分

AI 的逻辑

第二部分

信息与数据

第三部分

决策与优化

第四部分

逻辑与博弈

第五部分

认知逻辑

第十章　共同知识，Bayes 博弈，Aumann 知识算子

真实世界是一个巨大的游戏，参与者之间的信息不对称是一个普遍存在的现象，这些不对称往往形成了“丛林法则”。“丛林法则”从来不是一个书面的规则。刚来美国旅游的人可能会非常担心自己被抢劫；然而，“盗亦有道”，绝大部分时候，抢劫犯只会抢二十美元，以便吃一顿饭。如果坏了规矩，反而会被惩罚。

我们可以考虑一个看似非常疯狂的想法：既然有丛林法则，何不把“一次抢劫最多二十美元”写入法律，这会有什么区别呢？抛开道德和法律的问题，这样做似乎不无道理。

1982 年，经济学家 Alvin E. Roth 和 J. Keith Murnighan 对讨价还价这一经典的市场博弈现象进行了同样的实验。实验中，有两个玩家，他们可能会收到特定价值的奖品，每个玩家的奖品价值可以不同。然而玩家并不总是能获得奖品，他有一个概率获得这一奖品。他们需要在规定的时间内就他们各自获得奖品的概率进行讨价还价。

具体来说，玩家其实在商讨如何分配一张 100% 概率的“彩票券”，

这个券决定了每个玩家赢得奖品的概率。例如，甲如果获得 40% 的彩票券，就有 40% 的概率赢得奖品，60% 的概率一无所获；而乙则完全相反，有 60% 的概率赢得奖品，40% 的概率一无所获。

然而，如果在规定时间内未能达成协议，那么所有玩家都将一无所获。因此，只有在双方就彩票券的分配达成了协议，并且该玩家在随后的抽奖中中奖时，玩家才能获得相应的奖品。否则，他将得不到任何奖励。我们将这种每个玩家只有两种可能金钱收益的游戏称为“二元彩票游戏”。

在实际的实验中，玩家甲的奖品价值 20 美元，玩家乙的奖品价值为 5 美元，谈判时间限制为 12 分钟。在实验开始前，实验人员会公开告知甲乙完整的游戏规则，包括奖品价值和谈判时间限制。实验人员还会公开告知甲乙关于他们私有信息的情况，例如，

> “在游戏开始后，你们奖品的价值会被告诉对方。”
>
> “在游戏开始后，甲的奖品价值会被告诉乙，但乙的不会被告诉甲。”

实验人员也可以选择不告知这些信息。

实验开始后，实验人员会告知甲乙他们各自的奖品价值，并且选择性地告知甲（或乙）乙（或甲）的奖品价值，这些信息要和实验开始前的信息保持一致。然后，甲乙开始商讨如何分配彩票券。如果在规定时间内达成了协议，那么他们将按照协议分配彩票券。如果未能达成协议，那么他们将一无所获。

上面的实验设置中，在游戏开始前是否公开宣告双方的信息结构，和上面那个疯狂的想法是一样的。然而，在讨价还价的情景下，我们似乎不会觉得这有什么区别。然而，实验结果却显示，在信息不对称的情况下，双方信息结构的公开宣告会对博弈结果产生显著的影响。

谈判过程展现出了明显的策略性行为。例如，甲（20 美元的玩家）通常不会提及自己奖品的价值；但如果游戏开始前宣布过“乙（5 美元的玩家）不清楚甲的奖品价值”，20 美元的玩家往往会虚报自己的奖品。一个典型的例子是：“我知道你的奖品是 5 美元。我的只有 2 美元。所以我应该得到超过 50% 的份额。”另一方面，当乙知道甲的奖品价值时，往往会透露信息。这两种策略通常都不被对方相信。

更重要的是，实验结果显示，当实验人员在游戏开始前宣布双方的信息结构时，玩家变得更加没有策略性，博弈的结果很可能没有达到 Nash 均衡：当只有 20 美元的玩家知道两个奖品时，其总体平均收益（包括达成协议和未达成协议的情况）为 34.9，显著低于 5 美元玩家的相应收益 53.6。

另一方面，当双方的信息结构在游戏开始前不被公开宣告时，玩家表现出更多的策略性。在这种情况下，因为他们不能确定对手是否不知道自己的奖品，所以玩家无法像前一种情况那样自由地谎报自己的奖品价值。然而，因为玩家都不知道对方是否指导双方奖品的价值，所以，如果一个玩家知道两个奖品的价值，他完全可以假装自己只知道自己的奖品价值。由于更复杂的策略性行为，博弈的结果往往达到 Nash 均衡！

上面的故事告诉我们，信息结构（也就是我们*知道*什么）是否被公开宣告，对于博弈的结果有着重要的影响。实际上，这一问题是一个关于*共同知识*的问题。

在本章，我们将更系统地讨论共同知识，并定义 *Bayes 博弈*，它是我们研究博弈论中信息结构的基本语言。最后，我们将介绍 *Aumann 知识算子*，它是从 Bayes 博弈中起源的，一个关于“知识”的数学模型。

§10.1 “泥泞的孩童”谜题

我们先从一个经典的谜题开始。有 n 个孩子在玩泥巴，他们互相泼泥巴. 母亲告诉孩子们，如果他们脸上沾上了泥巴，会受到严厉的惩罚. 孩子们不能看到自己的脸，但是可以看到其他所有人的脸. 所有孩子都希望保持自己的脸干净，但是弄脏别人的脸.

此时，孩子的父亲出现了，于是，孩子们停止泼泥巴. 孩子们互相不说话. 父亲看到了 k（$k \geq 1$）个人脸上有泥巴，于是宣布：“*你们至少有一个人脸上沾了泥巴.*”之后，父亲会公开地问若干轮如下问题：“*你们知道自己脸上有泥巴了吗？*”孩子们回答“知道”或者“不知道”.

假设孩子们观察力敏锐、聪慧且诚实，并且每一轮他们都同时回答. 接下来会发生什么？乍一看，似乎大家每次都会回答“不知道”，因为他们不能从这句话知道自己脸上有泥巴. 但是，这个谜题远比想象的要复杂。读者可以先不看后文，先自己试一试。

假设有 k 个孩子脸上有泥巴. 这个问题的谜底是：在前 $k-1$ 轮中，所有孩子都会说“不知道”，在第 k 轮中，所有脸上有泥巴的孩子都会说“知道”.

这一结论的论证来源于对较小 k 的归纳总结：

- 当 $k=1$ 时，脸上沾满泥巴的孩子看到其他人都没有泥巴. 既然他知道至少有一个孩子的脸上有泥巴，他就能推出那个人肯定是他自己.

- 现在假设 $k=2$，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b. 一开始，因为他们分别看到了对方的脸上有泥巴，所以他们每个人都回答“不知道”.

  但是，当 b 回答“不知道”时，a 可以代入 b 的角色，意识到 b 看到了 a 脸上有泥巴. 否则，b 在第一轮中就会知道泥巴在 b 的脸上，

并回答“知道”. 因此，a 在第二轮回答“知道”. b 也会通过同样的推理得出相同的结论.

- 现在假设 $k=3$，脸上沾满泥巴的孩子分别是 a，b 和 c. 孩子 a 的论证如下. 假设我没有泥巴落在脸上. 根据 $k=2$ 的情况，b 和 c 在第二轮都会回答“是”. 他们没有这样做，我意识到假设是错误的，我的脸上也有泥巴. 因此在第三轮我会回答“知道”. b 和 c 的论证也是类似的.

容易看出，$k=3$ 的论证具有一般性，对一般的 k 也成立.

注. “泥泞的孩童”还有其他流行的陈述方式，比如“蓝眼睛红眼睛”. 一个岛上有 100 个人，其中有 5 个红眼睛，95 个蓝眼睛. 这个岛有三个奇怪的宗教规则.

1. 他们不能照镜子，不能看自己眼睛的颜色.
2. 他们不能告诉别人对方的眼睛是什么颜色.
3. 一旦有人知道了自己的眼睛是红色，他就必须在当天夜里自杀.

岛民不知道具体有几个红眼睛.

某天，有个旅行者到了这个岛上. 由于不知道这里的规矩，所以他在和全岛人一起狂欢的时候，一不留神说了一句话: “你们这里有红眼睛的人. ”假设这个岛上的人足够聪明，每个人都可以做出缜密的逻辑推理. 请问这个岛上将会发生什么?

谜题就解到这里。然而，一个好的谜题，知道答案之后一定会带来更多的谜题。为什么迷题的答案是这样的呢? 比如，如果 $k>1$，那么所有人本来就都知道 p:“至少有一个人脸上有泥巴”. 那么父亲说这句话的意义是什么?

我们可以设想，如果父亲没有说 p，会发生什么? 容易发现，无论

父亲问多少轮，所有孩子都只会回答“不知道”!（见习题[lhy: 出一下]）。因此，这里会产生极其反直觉的事实：即便大家都知道 p，父亲说不说 p，会导致完全不同的结果. 为什么会这样?

我们重新审视这一问题的过程。

- 假设 $k=2$，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b. 在父亲宣布 p 之前，a 和 b 都知道 p. 然而，他们并不知道对方知道 p. a 可能会有两种想法：
  - 我的脸上有泥巴，所以 b 知道 p.
  - 我的脸上没有泥巴，b 是唯一一个有泥巴的，b 看不到其他人脸上有泥巴，所以 b 不知道 p.

  当父亲宣布 p 之后，a *知道了* b *知道* p. 当第一轮 b 回答“不知道”之后，a 可以用“b 知道 p”这一事实排除第二种情况，从而推出自己脸上有泥巴.

- 假设 $k=3$，脸上沾满泥巴的孩子是 a，b 和 c. 在父亲宣布 p 之前，a，b 和 c 不仅知道 p，而且知道彼此知道 p. 比如说，以 a 的视角看，b 能看到 c 脸上有泥巴，所以 a 知道 b 知道 p.

  但是，a 不知道 b 知道 c 知道 p，因为此时有两种情况：
  - a 脸上有泥巴，b 能看到 c 和 a 脸上有泥巴，所以 b 知道 c 能看到 a 脸上有泥巴，从而知道 c 知道 p.
  - a 脸上没有泥巴，b 能看到 c 脸上有泥巴，a 脸上没有泥巴，但因为 b 不知道自己脸上有没有泥巴，所以 c 不一定知道 p，b 不知道 c 知道 p.

> 更一般地，a，b，c 都不知道所有人知道所有人知道 p！然而，当父亲宣布 p 之后，a，b，c 都知道了所有人知道所有人知道 p.

用 $E^m p$ 表示所有人知道所有人知道……所有人知道（m 次）p. 在一般情况下，父亲没有宣布 p 之前，$E^k p$ 并不成立. 父亲宣布了 p 之后，对任意 $m \geq 1$，$E^m p$ 都成立！因此，父亲宣布 p 带来了*共同知识*. 有了共同知识，这一谜题就可以按照我们所讨论的方式进行下去.

我们曾经假设过所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”. 然而，这一假设并不足够. 上面的论证其实暗含了，所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，所有人都知道所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，……换言之，我们需要假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识.

如果没有这样的假设，上面的论证都将不成立。例如，还是只有两个孩子 a,b 脸上有泥巴. 假如 a 不知道 b 是诚实的，即便 b 回答了“不知道”，a 也无法从 b 的回答中得到任何额外的知识！

除了假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识，我们还需要假设以下陈述是共同知识：

- 每个人都能看到所有除自己外的人.
- 每个人都听到了父亲说的话.
- 父亲是诚实的.
- 每个人都在每一轮进行了充分的推理.
- ……

任何假设的破坏都会导致之前的讨论失效. 那么，为什么父亲宣布 p 就可以让 p 变成共同知识呢？

所有人都*听到*父亲说 p 并不能产生共同知识. 假如父亲只是对每一个孩子单独宣布 p. 所有人并不知道所有人都知道 p，因而仅仅可以做到 Ep，没有共同知识。

那么，所有人都*知道*所有人听到父亲说 p 会如何呢？进一步假设每个孩子给每一个孩子都安装了窃听器，每个人都能够偷听每个人与父亲的谈话内容. 所有人并不知道所有人都知道所有人都知道 p，因而仅仅有 E^2p.

所以关键在于，父亲宣布 p 的过程是*公开的*，每个人都可以仔细观察别人有没有听到父亲说 p，也可以观察到别人有没有观察到别人有没有听到父亲说 p，等等. 此时对每一个 m 都有 $E^m p$.

"泥泞的孩童"谜题足以表明，关于"知道"的讨论远比想象的复杂. 关于"知道"和知识的研究在哲学中划归为*知识论*. 我们将介绍处理知识的两种数学模型：

- 一种源自 Aumann，Harsanyi 和 Rubinstein 等人，以 Bayes 概率论为基础，是偏经济学的学术风格；
- 另一种源自 Kripke，Hintikka 和 Halpern 等人，以模态逻辑为基础，是偏计算机科学和哲学的学术风格。

在这一章，我们主要讨论 Bayes 概率论的方法.

§10.2 不完全信息博弈（Bayes 博弈）

接下来，我们介绍讨论"知识"的博弈论语言。我们先从正则形式博弈和 Nash 均衡开始说起。正则形式博弈隐含了一个重要的假设：所有玩家对整个世界有一致、完全的共同知识. Nash 均衡建立在这一假设

之上：每个玩家可以在博弈结束后，根据其他玩家的策略，确定自己的最优反应.

然而，现实世界中，玩家对世界的认识是有限的，不能获得完全的信息. 比如，我们可能不知道对手的收益函数，然而这在现实中极其普遍.

另一个问题是，Nash 均衡只有假设混合策略的情况下才能保证存在. 我们在现实中并不真的在选择混合策略：所有的交易其实都是"一锤子买卖"，绝对不可能有人说"我今天以 0.5 的概率花一块钱买你的苹果，0.5 的概率花 5 块钱买你的苹果". 英语也有一句谚语：

"Decision makers do not flip coins in the real world."

相比之下，纯策略 Nash 均衡更加符合实际。然而，即便是纯策略 Nash 均衡也可能是不合理的状态. 考虑如下的二人博弈：

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

显然，两个人玩家都选择第二策略就达到了纯策略 Nash 均衡.

然而，当行玩家对列玩家的选择有任意小的不确定性时，他都更倾向于选择第一个策略. 因此，我们给出的这个纯策略 Nash 均衡实际上描述了一种不太可能出现的状态.

因此，一种 Nash 均衡的修正概念被提出：颤抖的手完美化，它指的是，s 是一个纯策略 Nash 均衡，并且当对手玩家的策略有任何微小不确定性的时候，s 中的策略依然是最优反应.

"颤抖的手"给了我们一个例子，说明对对手的不确定性会影响玩家的决策. 因此，进一步的问题是，如何量化对对手的不确定性？Harsanyi

给出了一个现在已经是“标准答案”的解决方案：引入玩家的“类型”（可能世界）以及其他玩家的对此的先验的信念. 他的采用了 Bayes 解释的概率论，信念在数学上被建模为对可能世界的概率分布.

我们先给出不完全信息博弈的定义：

定义 10.1 (不完全信息博弈，Bayes 博弈) 一个**不完全信息博弈**（**Bayes 博弈**）包含了以下组成部分：

- 玩家集合：I.
- 行动空间：$A = (A_i)_{i \in I}$，A_i 表示玩家 A_i 的所有可能行动.
- 类型空间：$\Theta = (\Theta_i)_{i \in I}$，$\Theta_i$ 表示玩家 i 的所有可能类型.
- 收益函数：$u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$，当所有人的行动和类型都确定的时候，玩家 i 能拿到的收益.

所有玩家的行动 $a = (a_i)_{i \in I}$ 形成了一个**行动组合**，所有玩家的类型 $\theta = (\theta_i)_{i \in I}$ 形成了一个**类型组合**. □

$P_i \in \Delta(\Theta_i)$ 是玩家 i 类型的概率分布. 比较不直观的一点是，P_i 表示了*其他玩家*对玩家 i 类型的信念. 因此，Bayes 博弈其实做了简化：

- 不论哪个玩家，对特定玩家 i 的信念是一致的.
- 所有 P_i 是相互独立的，因此玩家的类型之间不会有相互的关联。

因此，玩家 i 在博弈中的*全部*不确定性都来自其他玩家的类型，他对此的信念是

$$P_{-i} = \prod_{j \neq i} P_j.$$

最后，我们假设玩家 i 知道自己的类型.

更进一步，在一般情况下，玩家 i 对这个世界的信念应该包含：

- 博弈中其他玩家都有谁，
- 自己的可能行动，
- 自己的类型，
- 自己的收益函数，
- ……

在一个真实的博弈中，以上信息都会是不确定的：对手可以藏在暗处，我们会不知道自己本来拥有的选择，我们可以不了解自己的性格，我们甚至也不知道自己究竟在追求什么。尽管有很多的不确定性最终都可以归结为"类型"（见后面正文的若干例子和习题[lhy: 出一下]），Bayes 博弈依然是一个高度理想化的模型.

然而，Bayes 博弈的成功，正如 Robert Aumann 所说，不在于多么贴合实践，而是给了一种系统的方法，让我们可以建模不确定性和信念，从而理解这些概念在博弈中的作用：

> "一个典型的例子是 Roth 和 Murnighan（1982）在完全信息和不完全信息讨价还价方面的实验工作[1]……他们将这些结果与早期 Fouraker 和 Siegel（1960）的实验进行了比较。
>
> "Fouraker 和 Siegel 进行了类似的实验，但由于缺乏 Harsanyi 的模型，只能将不完全信息的情况描述为双方都没有被告知对方的收益。

[1]也就是本章开头讲的故事。

“然而，Roth 和 Murnighan 则从类型的角度详细阐述了不完全信息，并明确考虑了博弈的共同知识方面。”

接下来，我们看一个 Bayes 博弈的例子。

例 10.1 (“工作还是偷懒”博弈) 在这个博弈中，有两个玩家，他们共同完成一个项目。两个玩家的行动都是“工作”（W）或“偷懒”（S）. 行玩家的类型集合是单点集，列玩家的类型是“勤奋”（D）或“懒惰”（L）. 收益矩阵为

$\theta_2 = D$,

	W	S
W	$3, 3$	$-1, 0$
S	$2, 1$	$0, 0$

$\theta_2 = L$,

	W	S
W	$1, 1$	$-1, 2$
S	$2, -1$	$0, 0$

换言之，我们其实不确定的只有玩家 2 是喜欢偷懒还是努力工作，但他具体是什么人又会影响双方的收益，从而影响双方的决策。 □

至此，我们已经建立了博弈的语言，下一任务就是定义一个玩家的策略。和第九章的博弈极为不同，Bayes 博弈中的玩家要面对不确定性。这给我们定义策略带来了一定的困难。为此，我们先要讨论清楚，究竟什么是“不确定性”。

设想如下的情景：你选了一门课，期末要考试。于是，你认真学习，并且把往年题 c 都找出来，认真做完，老师也划定了考纲和难度：你对这个考试胸有成竹。真正上场考试的时候，你的心理有一个对难度和考点的预期，因此，你在考试时候面对的是具有明确风险的不确定性。

然而，当你考的不是期末考，而是英语四级考试的时候，你可能就会变得非常随性：挂了还可以重新考，所以考前根本没有学习，甚至连题型都不知道有什么。这个时候，你甚至连四级总分是多少都不知道，

所以，你甚至连考试结果的预期都没有。这个时候，你面对的是*模糊*的不确定性。

还有一种情景，你现在不是考四级，而是考 GRE，这是上机考试。GRE 的每道题的难度都不一样，题目是随机出现的，难度分布极其不均匀，并且他会根据你答题情况来自动调整题目的难度。此时，你面对的是*不稳定*的不确定性。

上面讲到了三种不确定性。那么，Bayes 博弈是他们中的是哪一种呢？显然，在 Bayes 博弈中，玩家依然只能做一次行动，所以不是不稳定的不确定性。此外，Bayes 博弈中，所有玩家的类型集是固定的，甚至连类型的似然也是确定的，因此，这是具有明确风险的不确定性。

接下来，我们可以定义玩家的策略和理性了。注意，玩家知道自己的类型，但不知道其他人的类型，所以，玩家只能根据自己的类型来决定自己的行为。因此，我们应该定义玩家的策略如下：

定义 10.2 (策略) 玩家 i 的**策略**是一个映射

$$s_i : \Theta_i \to A_i,$$

其中 Θ_i 是玩家 i 的类型集合，A_i 是玩家 i 的行动集合. $s_i(\theta_i)$ 表示玩家 i 在类型 θ_i 下的行动. □

> **注.** 自然，我们也可以定义*混合策略*，此时，s_i 是一个 Θ_i 到 $\Delta(A_i)$ 的映射. 不过，在 Bayes 博弈中，混合策略会让情况（不论概念上还是计算上）变得复杂，所以我们避免混合策略的讨论.

当面对具有明确风险（似然）不确定性的时候，我们可以遵循 von Neumann-Morgenstern 的期望效用理论，定义玩家的理性。首先，我们定义玩家的*事中期望收益*：

定义 10.3 (事中期望收益) 玩家 i 在类型 θ_i 下，采取策略 s_i，对手的策略是 s_{-i} 时，i 的**事中期望收益**为

$$\tilde{u}_i(s_i, \theta_i, s_{-i}) = \mathbb{E}_{\theta_{-i} \sim P_{-i}}[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})]. \qquad \square$$

于是，按照期望理论，玩家的事中理性就是在知道对手的策略之后，会最大化自己的事中期望收益。

据此，我们就可以定义最优反应：

定义 10.4 (事中最优反应) 考虑玩家 i 的策略 s_i，对手的策略是 s_{-i}，如果对任意的其他策略 s_i' 和任意类型 θ_i，都有 t

$$\tilde{u}_i(s_i, \theta_i, s_{-i}) \geq \tilde{u}_i(s_i', \theta_i, s_{-i}),$$

那么 s_i 是玩家 i 的**事中最优反应.** $\square$

用最优反应，我们可以很容易定义 Bayes Nash 均衡：

定义 10.5 (Bayes Nash 均衡，BNE) 考虑策略组合 $s = (s_i)_{i \in I}$，如果对任意 i, θ_i, a_i 都有

$$\tilde{u}_i(s(\theta_i), \theta_i, s_{-i}) \geq \tilde{u}_i(a_i, \theta_i, s_{-i}),$$

那么 s 是一个 **Bayes Nash 均衡（BNE）.** $\square$

接下里，我们来看一个 BNE 的例子。

例 10.2 (猜硬币游戏) 考虑经典的猜硬币游戏（见例 9.3），这是一个正

则形式博弈，收益矩阵为

	H	T
H	$1,-1$	$-1,1$
T	$-1,1$	$1,-1$

如果两个人都出 H 的时候收益有独立微小的扰动，我们就得到了一个 Bayes 博弈：

	H	T
H	$1+\epsilon\theta_1,-1+\epsilon\theta_2$	$-1,1$
T	$-1,1$	$1,-1$

其中 $\theta_i \sim \mathcal{U}[-1,1]$ 且相互独立，这就是玩家 i 的类型。

那么，这个博弈的 BNE 会是什么呢？我们可以猜一个。考虑策略：$s_i : [-1,1] \to \{H,T\}$ 满足

$$s_i(\theta_i) = \begin{cases} H, & \theta_i \in [0,1], \\ T, & \theta_i \in [-1,0). \end{cases}$$

我们来验证，这的确是一个 BNE.

固定列玩家的策略 s_2，我们来计算行玩家的最优反应。对于行玩家来说，不论他的类型是什么，他面对的是一个 50% 的概率选择 H 和 T 的对手，因此，如果选择 H，行玩家的期望收益是

$$\frac{1}{2}\cdot(1+\epsilon\theta_1)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{\epsilon\theta_1}{2}.$$

如果选择 T，行玩家的期望收益是

$$\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(1)=0.$$

因此，如果 $\theta_1>0$，行玩家应该选择 H，如果 $\theta_1<0$，行玩家应该选择 T，这是一个最优反应，恰好是我们猜测的策略.

对于列玩家的最优反应，我们可以做类似的计算，也可以得到，s_2 是列玩家的最优反应. 因此，(s_1,s_2) 是一个 BNE. □

以上例子有极其特殊的含义：策略 (s_1,s_2) 导致的结果实际上是，每个玩家计算最优反应的时候，面对的对手其实仿佛是一个混合策略玩家，他以等概率选择 H 和 T. 注意，当 $\epsilon\to 0$，这个博弈收益矩阵回到了原始博弈. 因此，Bayes 博弈里行动概率分布其实可以被视作原始博弈的混合策略.

猜硬币游戏的例子其实说明，正则形式博弈的混合策略 Nash 均衡被理解为：当不确定性趋于消失时候，BNE 形成的行动概率分布. 这不是偶然的，实际上，所有的正则形式博弈的混合策略均衡都可以用一系列 Bayes 博弈的 BNE *纯化*.

下面我们把猜硬币游戏的过程一般化。考虑一个正则形式博弈 (I,A,u)，其中 I 是玩家集合，A 是行动空间，u 是收益函数. 我们可以定义一个 Bayes 博弈，被称为*扰动博弈*：

- 给定一个扰动参数 $\epsilon>0$，定义类型组合为 $\theta=(\theta_i)_{i\in I}$，$\theta_i\in[-1,1]$，然后，将收益扰动为：

$$u_i'(s,\theta)=u_i(s)+\epsilon\theta_i.$$

- 假设 $\theta_i \sim F_i$，相互独立，F_i 是具有连续可微密度的分布.

定义一个从 Bayes 博弈策略到正则形式博弈混合策略的映射 ϕ，给定一个 Bayes 博弈的策略组合 s，$\phi(s)$ 是一个混合策略，满足

$$\phi(s)_i(a_i) = \Pr_{\theta_i \sim F_i}[s_i(\theta_i) = a_i].$$

换言之，在原本的 Bayes 博弈中，概率定义在了玩家的类型上，这个映射的作用是将这个概率转化为了玩家的行动上.

接下来，我们可以正式给出纯化定理的表述：

定理 10.1 (Harsanyi 纯化定理) *给定玩家集 I 和行动空间 A. 对于一般的收益函数 u 和连续分布族 $\{F_i\}_{i\in I}$，对任意完全信息正则形式博弈 (I, A, u) 的混合策略 Nash 均衡 σ，存在一列扰动博弈纯策略 BNE s_ϵ，当扰动参数 $\epsilon \to 0$，$\phi(s_\epsilon) \to \sigma$.*

这一定理的证明比较长，并且需要用到较为复杂的数学技巧。由于证明本身与本章的讨论无关，所以这里略去.

这一定理给了 Nash 均衡（也即混合策略）一种新的解释：混合策略定义的 Nash 均衡可以被看作不确定性趋于消失的时候的（纯策略）BNE。

尽管我们说，“Decision makers do not flip coins in the real world.” 然而，如果玩家对自己的收益有微小的不确定性，他的行为就会仿佛在抛硬币. 这就是混合策略的*似然解释*.

注意，在 Bayes 博弈中，玩家对自己的类型是确定的，所以玩家在决策时不应该对自己的收益有微小的不确定，因而上面这一解释并不完全正确。然而，我们可以重新定义理性的概念，它会产生等价的 BNE 定义，但是玩家此时要面对自己类型的不确定性。

为了说明这一理性的概念，我们先看一个例子。假如你是一个顶尖斗地主玩家，知道自己拿到身份、拿到手牌之后要如何行动，这是你一贯的策略。当然，在游戏开始前，你其实并不知道自己的身份和手牌，这是你对自己的不确定性。不过，这并不影响你评估自己的胜率：你只需要知道其他玩家的水平，你就可以大概估计一个总体的胜率。

上面的例子里，玩家其实在博弈开始前就已经选好了一个类型到行动的策略，但是他要面临自己类型的不确定性。此时，我们计算的胜率其实是事前期望收益：

定义 10.6 (事前期望收益) 给定玩家集 I、行动空间 A 和类型上的联合分布 P，如果玩家 i 的策略是 s_i，对手的策略是 s_{-i}，那么 i 的**事前期望收益**为

$$\hat{u}_i(s_i, s_{-i}) = \mathbb{E}_{\theta \sim P}[u_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})]. \qquad \square$$

在 Bayes 博弈中，事前理性指的就是，玩家在不知道自己的类型的情况下，最大化自己的事前期望收益. 根据事前期望收益，我们可以定义事前最优反应：

定义 10.7 (事前最优反应) 考虑玩家 i 的策略 s_i，对手的策略是 s_{-i}，如果对任意的其他策略 s_i' 和任意类型 θ_i，都有

$$\hat{u}_i(s_i, s_{-i}) \geq \hat{u}_i(s_i', s_{-i}),$$

那么 s_i 是玩家 i 的**事前最优反应.** $\square$

注意，事前理性和事中理性考虑的都是同样的策略，但是玩家面对的不确定性是不同的。然而，事前理性和事中理性其实是等价的：

定理 10.2 给定玩家集 I 行动空间 A，类型空间 Θ、收益函数 u 和类型空间的联合分布 P，考虑策略组合 $s=(s_i)_{i\in I}$，对任意玩家 i，s_i 是 s_{-i} 的事前最优反应当且仅当 s_i 是 s_{-i} 的事中最优反应.

这一定理的证明类似正则形式博弈的无差别原理（定理 9.7）的证明，见习题[lhy: 出一下].

这一定理其实有一些反直觉：在 Bayes 博弈中，如果玩家面对的仅仅只是具有确定风险的不确定性，那么他是否不确定自己的类型并不会影响他的理性决策. 这其实是因为，玩家面对的仅仅是*具有确定风险的不确定性*，而不是更加复杂的不确定性，因此，无论博弈如何进行，他在开始前就已经可以确定自己的最优策略.

这一定理的直接推论是，我们可以根据事前最优反应来定义 BNE：

$$\hat{u}_i(s_i,s_{-i})\geq u_i(s_i',s_{-i})$$

对任意 i 和任意策略 s_i' 成立.

当所有的不确定性都消失的时候，我们得到的收益是真实的，被称为*事后收益*，此时不再有任何的概率，因此博弈退化为了正则形式博弈. 事前、事中、事后分别表明了信息的确定（披露）程度。

§10.3 电子邮件博弈

作为一个例子，接下来我们使用 Bayes 博弈来研究知识的性质。这个例子由 Ariel Rubinstein 给出，它说明在二人正则形式博弈中，共同知识对到底实现哪一个 Nash 均衡非常关键.

考虑两个玩家和两个可能的收益矩阵：

	A	B
A	$(0,0)$	$(-10,1)$
B	$(1,-10)$	$(8,8)$

	A	B
A	$(8,8)$	$(-10,1)$
B	$(1,-10)$	$(0,0)$

在左边的矩阵中，(B,B) 是唯一的 Nash 均衡. 在右边的矩阵中有多个 Nash 均衡: (A,A) 和 (B,B). (A,A) 给出比 (B,B) 更高的收益，但行动 A 比 B 更有风险.

左边矩阵是真实矩阵概率是 $p > 1/2$. 玩家 1 知道真实的矩阵，而玩家 2 不知道. 如果选择了右边矩阵，玩家 1 会给玩家 2 发送一条消息. 如果玩家 2 收到了消息，他会回复. 如果玩家 1 收到了回复，他会发送第二条消息来确认他收到了玩家 2 的回复. 以此类推. 每条消息都以 ϵ 的概率独立等可能丢失.[2]

以上传信的过程可以用 Bayes 博弈的类型来刻画. 具体来说，两个玩家的类型集合为 $\Theta_i = \{\theta_i^0, \theta_i^1, \theta_i^2, \ldots\}$. θ_i^m 表示玩家 i 发了 m 封邮件. θ_i^m 有直观的含义. 例如，类型 θ_1^0 表示真实收益矩阵是左边的. 而类型 θ_1^1 表示真实收益矩阵是右边的，1 发送了一封电子邮件，但 2 没有收到.

实际上，θ 包含了所有可能的情况:

- (θ_1^0, θ_2^0): 真实收益矩阵是左边的.
- (θ_1^1, θ_2^0): 真实收益矩阵是右边的，1 发送了一封电子邮件，但 2 没有收到.
- (θ_1^1, θ_2^1): 真实收益矩阵是右边的，2 收到了第一封电子邮件，但 1 没有收到 2 的回复.
- ……

[2] 注意：发送电子邮件不是一个行动，而是一个规则.

我们可以算出来，当真实矩阵为左边矩阵时，每个类型出现的概率. 首先，以概率 p 选择左边的矩阵，而且没有人发送消息. 因此，(θ_1^0, θ_2^0) 的概率是 p，其他项概率都是 0. 我们得到如下的概率表：

左	θ_2^0	θ_2^1	θ_2^2	$\cdots$
θ_1^0	p	0	0	$\cdots$
θ_1^1	0	0	0	$\cdots$
θ_1^2	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

同样可以算出来，当真实矩阵为右边矩阵时，每个类型出现的概率. 首先，以概率 $1-p$ 选择右边的矩阵，玩家 1 发送一条消息，它会以概率 ϵ 丢失. 因此，(θ_1^1, θ_2^0) 的概率是 $\epsilon(1-p)$. 以此类推，可以得到计算. 我们得到如下的概率表：

右	θ_2^0	θ_2^1	θ_2^2	$\cdots$
θ_1^0	0	0	0	$\cdots$
θ_1^1	$\epsilon(1-p)$	$\epsilon(1-\epsilon)(1-p)$	0	$\cdots$
θ_1^2	0	$\epsilon(1-\epsilon)^2(1-p)$	$\epsilon(1-\epsilon)^3(1-p)$	$\cdots$
θ_1^3	0	0	$\epsilon(1-\epsilon)^4(1-p)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

容易看出来，当真实类型为 θ_i^m 时，收益矩阵是到第 m 层的共同知识，即 E^m. 所以对于很大的 m，收益矩阵是“几乎公共知识”. 所以，这个模型在研究的问题是：如果收益矩阵是”几乎共同知识“，那么 Nash 均衡是什么？为此，我们需要求出来这个 Bayes 博弈的 BNE.

我们需要弄清楚对每个类型 θ_i^m，玩家会做什么. 假设玩家 1 的类型为 θ_1^0. 玩家 1 知道 (θ_1^0, θ_2^0) 是真实的类型，所以左边的矩阵被选择. 据此推理：玩家 1 选择占优策略 B.

假设玩家 2 的类型为 θ_2^0. 我们对玩家 1 的所有可能类型分类讨论：

- 如果玩家 1 的类型为 θ_1^0，那么左边的矩阵被选择，对于玩家 2 来说，这种情况的概率为

$$\Pr(\theta_1^0|\theta_2^0) = \frac{p}{p+\epsilon(1-p)} := \mu_2^0.$$

- 如果玩家 1 的类型为 θ_1^1，那么右边的矩阵被选择，对于玩家 2 来说，这种情况的概率为

$$\Pr(\theta_1^1|\theta_2^0) = 1 - \mu_2^0.$$

现在我们来分析玩家 2 的两种选择：A 和 B.

- 选择 B 的期望收益至少是 $8\mu_2^0$. 推理如下：
  - 玩家 1 的类型是 θ_1^0 时，这是左边的矩阵，玩家 1 肯定选择 B，此时玩家 2 选择 B 的收益是 8.
  - 玩家 1 的类型是 θ_1^1 时，这是右边的矩阵，无论玩家 1 怎么选，此时玩家 2 选择 B 的收益至少是 0.

  因此，按照全概率公式计算，B 的期望收益至少是 $8\mu_2^0$.

- 选择 A 的期望收益至多是 $-10\mu_2^0 + 8(1-\mu_2^0)$. 推理如下：
  - 玩家 1 的类型是 θ_1^0 时，这是左边的矩阵，玩家 1 肯定选择 B，此时玩家 2 选择 A 的收益是 -10.

- 玩家 1 的类型是 θ_1^1 时，这是右边的矩阵，无论玩家 1 怎么选，此时玩家 2 选择 A 的收益至多是 8.

因此，按照全概率公式计算，A 的期望收益至多是 $-10\mu_2^0 + 8(1-\mu_2^0)$.

注意，

$$
\begin{aligned}
& 8\mu_2^0 - (-10\mu_2^0 + 8(1-\mu_2^0)) \\
= & 10\mu_2^0 - 8 \\
= & \frac{10p - 8(p + \epsilon(1-p))}{p + \epsilon(1-p)} \\
= & \frac{(2+\epsilon)p - 8\epsilon}{p + \epsilon(1-p)} \\
> & \frac{1 - 8\epsilon}{p + \epsilon(1-p)}.
\end{aligned}
$$

对充分小的 $\epsilon > 0$，这个值是正的. 因此，B 更好.

假设玩家 1 的类型为 θ_1^1，于是，右边的矩阵被选择. 同样，对玩家 2 的类型分类:

- 如果玩家 2 的类型为 θ_2^0，对于玩家 1 来说，这种情况的概率为

$$\Pr(\theta_2^0|\theta_1^1) = \frac{\epsilon(1-p)}{\epsilon(1-p) + \epsilon(1-\epsilon)(1-p)} := \mu_2^1.$$

- 如果玩家 2 的类型为 θ_2^1，对于玩家 1 来说，这种情况的概率为

$$\Pr(\theta_2^1|\theta_1^1) = 1 - \mu_2^1.$$

同样可以计算玩家 1 的两种选择的期望收益：

- 选择 B 的期望收益至少为 0. 推理如下：玩家 2 是类型 θ_2^0 时肯定选择 B（上面已经证明），因此最坏的情况是玩家一类型为 θ_2^1.
- 选择 A 的期望收益至多为 $-10\mu_2^1+8(1-\mu_2^1)$. 推理如下：玩家 2 是类型 θ_2^0 时肯定选择 B（上面已经证明），因此最好的情况是玩家一类型为 θ_1^2.

综合两方面，B 更好，因为对于所有 ϵ，$\mu_1^1>1/2$.

逐步迭代上述过程，我们发现，在唯一的 BNE 中，所有玩家在所有类型下都选择 B.

然而，如果右边的矩阵是共同知识，(A,A) 也是一个真正的 Nash 均衡，然而，因为对于收益矩阵的不确定性，即便收益矩阵是“几乎共同知识”，这个均衡也不会被实现！这个例子说明了，共同知识对于均衡的实现是非常关键的. 我们在习题[lhy: 出一下]中会进一步讨论 Nash 均衡与共同知识的关系.

§10.4 Aumann 知识算子

在上一节中，我们给了一个非常具体的例子探讨共同知识和 Nash 均衡的关系. 上面的例子看起来太特定，那是不是说明，用 Bayes 博弈研究知识，就是得具体问题具体建模呢？这个问题的答案，是也不是。一方面，用具体的 Bayes 博弈去说明具体的道理往往简洁且富有内涵；另一方面，我们也可以用更加抽象的方式去研究知识. 这一节，我们将介绍 Aumann 的知识算子，它是一种抽象的方式去研究知识.

首先，我们需要第一章的观点：概率论（或者似然）理解世界的方式基于“事件”. 我们只能感知事件的发生与否，而不能具体知道是哪个样本点. 用事件的方式理解认知，得到的结构被称为 *Aumann 结构*. 下面，我们具体介绍这一数学模型。

考虑全集 Ω，它的含义有多种多样，比如可以理解为样本空间（概率论视角）、状态空间（动态博弈视角）或者可能世界（信念的视角出发）的全体. 我们就具体考虑为，从一个罐子里抽球，Ω 是这次抽到球的颜色。

对于最后一种关于 Ω 的理解，我们可以再多解释一些。当我们面对不确定性的时候，我们会有一些信念，比如“这个球是红色的”、“这个球是蓝色的”等等. 实际上，这些不同信念背后对应了一个不同的“世界”。比如，我们考试的时候，我们可能会幻想考试通过时的场景，也可能幻想考试不通过时的场景. 他们代表了这个现实世界在未来不同的走向，因而被称为*可能世界*.

注意，上面的解释容易引起误会，实际上，可能世界完全可以不是未来的世界。例如，我们常常会做*反事实因果*的推理，比如“如果我当时不天天吃油炸食品，那么我现在就不需要减肥了”. 这个“如果”引导我们进入了一个可能世界，这个可能世界甚至存在于过去，而不是未来.

我们不再过多讨论 Ω 的具体含义，而是专注于罐子的例子。*事件* $e \subseteq \Omega$ 是样本点的集合，它表示了某些性质的发生. 例如，e 可能是“抽到了红球”，或者“抽到的不是白色”等等. 一次*观测*会产生一个具体的颜色，这个颜色对应了 Ω 中的一个元素 ω，事件 e 发生当且仅当 $\omega \in e$.

接下来，我们进入博弈的部分。我们会有集合 I 的玩家，每个玩家 i 都有一个关于 Ω 的*知识*。例如，色觉正常的人会*知道*红色和绿色是不同的，而红绿色盲的人可能不知道。因此，每个人会有不一样的知识。

如何用数学语言来描述这种知识呢?

实际上，知道一件事 e 发生与否意味着这个玩家有能力区分一个样本点 ω 是否属于 e. 所以，我们可以先定义玩家知道的"基础知识"，即他能够感知到的最基本（原子）事件. 数学上，我们给如下的定义:

定义 10.8 (信息集) 对于每一个玩家 i，他的**信息集**是 Ω 的一个划分

$$\mathcal{P}_i = \{\Omega_j\}_j.$$

划分的含义是，Ω_j 满足

- $\Omega_j \neq \varnothing$，
- 对所有 $j \neq k$，$\Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing$，并且
- $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$.

此外，$\mathcal{P}_i(\omega)$ 被定义为 ω 所属于的那个信息集. □

对于玩家 i 来说，他无法区分 Ω_j 中元素，这就是原子性的含义。换言之，如果他能区分，就说明这个 Ω_j 还不够小，因为它还是包含了可区分的不同元素。

接下来，我们来定义知识中最基本的陈述，即"玩家 i 知道事件 e"。我们还是用红绿色盲作为例子。显然，红绿色盲不知道事件 e:"这个球是红色的"。这是因为，他的信息集中没有单独的红色，只有"红色或绿色"这一集合。

上面的例子说明，玩家 i 知道事件 e，说明对于这一个特定的观测 ω，玩家 i 能够完全确定 e 发生了. 注意，此时玩家 i 能够观察到的最基

本事件是 $\mathcal{P}_i(\omega)$，因此，这说明

$$\mathcal{P}_i(\omega) \subseteq e.$$

我们可以把所有能够完全确定 e 发生的 ω 收集起来，在这些 ω 上，玩家 i 充分必要地知道 e 发生。因此，我们有如下的定义：

定义 10.9 (Aumann 知识算子) 对于每一个玩家 i，我们定义 **Aumann 知识算子** $K_i : 2^\Omega \to 2^\Omega$ 为

$$K_i(e) := \{\omega \in \Omega : \mathcal{P}_i(\omega) \subseteq e\}.$$

因此 $K_i(e)$ 是一个事件，表示"个体 i 知道事件 e". 不引起混乱的时候我们也省略括号，写作 $K_i e$. □

Aumann 知识算子的想法很清晰，它把所有关于知识的讨论转化为关于事件的讨论. 在第一章似然的讨论中，我们建立了集合论和逻辑的对应关系.

事件	命题
Ω	$\top$
$\varnothing$	$\perp$
$\sim A$	$\neg A$
$A \cap B$	$A \wedge B$
$A \cup B$	$A \vee B$
$A \subseteq B$	$A \to B$
$A = B$	$A \leftrightarrow B$

这里，我们依然可以用一样的对应关系，来实现复杂的表达. 例如，我

们可以用 $K_i(e\cap f)$ 来表示“个体 i 知道事件 e 和事件 f 同时发生”.

更进一步，我们可以将多个玩家的知识结合起来，定义共同知识算子:

定义 10.10 (共同知识算子) 定义“所有人都知道”算子 $E:2^\Omega\to 2^\Omega$ 为

$$E(e)=\bigcap_{i=1}^{n}K_i(e).$$

然后，我们可以定义**共同知识算子** $C:2^\Omega\to 2^\Omega$ 为

$$C(e)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E^k(e).$$

□

接下来，我们讨论知识的一些基本性质。这里，我们只讨论知识本身的性质，而不关心不同玩家之间知识的交互，因此，我们都把 K_i 写作 K.

命题 10.1 (意识公理)

$$K(\Omega)=\Omega. \tag{K0}$$

证明. 显然成立。 □

意识公理意味着，每个人知道他在某一个状态（可能世界）中. 尽管是一个显然的公理，我们依然可以考虑“意识不到自己处于某个状态”的情况，见习题[lhy: 出一下].

命题 10.2

$$K(e\cap f)=K(e)\cap K(f). \tag{K1}$$

证明. 我们证明两边相互包含。

- $\subseteq$：设 $\omega \in K(e \cap f)$，则

$$\mathcal{P}(\omega) \subseteq e \cap f. \qquad \square$$

因此，同时成立

$$\mathcal{P}(\omega) \subseteq e, \quad \mathcal{P}(\omega) \subseteq f.$$

因此，根据知识算子的定义，

$$\omega \in K(e), \quad \omega \in K(f).$$

因此，

$$\omega \in K(e) \cap K(f).$$

- $\supseteq$：将上面的证明倒着写一遍即可。 $\square$

这条性质意味着，一个人知道事件 e 和事件 f，当且仅当他知道事件 $e \cap f$. 考虑 $e \cap f = f$ 的特殊情况，我们可以得到

$$e \subseteq f \implies K(e) \subseteq K(f).$$

换言之，如果客观事实上 e 可以推出 f（即 $e \subseteq f$），那么个体知道 e 就可以推出他知道 f. 这条性质意味着玩家是逻辑全知的，他可以对知识做任意复杂的逻辑推理. 特别地，他甚至可以做关于知识的逻辑推理！接下来，我们很快就会看到这会带来多么复杂的情况。

命题 10.3 (知识公理，真理公理)

$$K(e) \subseteq e. \tag{K2}$$

知识公理意味着，知道的一定是真的. 在知识论中，这一要求实际上反映了“拥有知识”需要付出努力、值得一定的奖励. 与此相对应地，信念则是更加主观、随意的，因而并不具有真理性。我们可以通过下面两句话来体会这两者的区别：

- 我考试挂了，但不知道我考试挂了.
- 我考试挂了，但我不相信我考试挂了.

命题 10.4 (正内省公理)

$$K(e) \subseteq K(K(e)). \tag{K3}$$

命题 10.5 (负内省公理)

$$\sim K(e) \subseteq K(\sim K(e)). \tag{K4}$$

这两条内省公理意味着，个体会通过内省来知道自己的处境，特别是“我知道什么”和“我不知道什么”，通过内省，个体可以产生更高层级的知识：“我知道自己知道什么”或者“我知道自己不知道什么”.

值得注意的是，内省这样的能力是灵长类动物区别于其他动物的重要特征. 例如，实验人员给黑猩猩若干工具，只有其中一种工具可以解决问题. 黑猩猩在没有任何提示的情况下，第一次就能够选出正确的工具. 科学家认为，这表明黑猩猩有能力内省，即知道自己知道什么（特

别是物理世界的因果关系），并且利用这些知识来解决问题. 然而，诸如松鼠这样的哺乳动物，就没有这样的能力.

相比正内省公理，负内省公理可能会引起一些争议. 例如，在数学界有一个“著名”的猜想，叫*几何 Langlands 猜想*。这个猜想是一个非常复杂的数学问题，最近，一个由 9 位数学家组成的团队成功证明了这个猜想. 这样专门的数学猜想，对于非数学爱好者来说，确实是不知道的。然而，如果负内省公理是成立的，那么他们就应该*知道自己不知道*这个猜想. 这显然是不合理的. 更多讨论见习题[lhy: 出一下].

上面的很多命题我们都会称呼为“公理”，这是因为他们反映了知识的基本性质，是我们对知识的直觉认识. 实际上，我们可以反过来，从这些公理出发，推导出 Aumann 知识算子的定义. 于知识的逻辑推理！

定理 10.3 *考虑一个映射* $K: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$，*那么，以下两条等价:*

- K *满足* (K0)–(K4).
- *存在一个信息集划分* $\mathcal{P}$，*使得* K *是由这个信息集划分定义的 Aumann 知识算子.*

这一定理的证明类似于上面公理的证明，见习题[lhy: 出一下].

诚然，Aumann 知识算子的定义（在接受了之后）是非常直观且自然的。然而，定理 10.3 告诉我们，这样定义的知识算子，必须要承认很多不是特别合理的性质，例如负内省公理或者逻辑全知。这似乎是一个两难的选择。

因此，回到本节开头的问题，用 Bayes 博弈研究知识，是不是得具体问题具体建模呢？Aumann 知识算子给了一个很好的回答：如果过分一般，就会过分简化知识的概念，引入很多不合理的性质[3]. 因此，既需

[3]实际上，直到今天，做知识论的哲学家普遍持有这样的观点：知识是一个无法被严格

要具体问题具体建模，也需要对知识的一般性质有所了解.

至此，在 Aumann 结构下，我们已经给*知识*一个清晰的定义，作为本节的结束，我们给出 Aumann 结构中*信念*的定义。同样，回忆第一章的思想，在基于事件的认知理论中，我们很容易通过概率（似然）来定义信念.

玩家 i 可以对信息集 $\mathcal{P}_i(\omega)$ 中的状态形成信念. 设 ρ_i 为集合 Ω 上的概率分布，它代表 i 的*先验*信念，即在没有任何额外信息的情况下他会持有的信念. 如果 $\rho_i(\mathcal{P}_A(\omega)) > 0$，那么 i 在状态 ω 处对世界状态的信念由以下概率分布给出

$$\rho_i(e|\omega) = \rho_i(e|\mathcal{P}_A(\omega)) = \frac{\rho_i(e \cap \mathcal{P}_A(\omega))}{\rho_i(\mathcal{P}_A(\omega))}.$$

接下来，我们对这一定义做几点说明。

首先，这一定义是良定义的，因为对于所有的 $\omega' \in \mathcal{P}_A(\omega)$，$\rho_i(e|\omega')$ 都是一样的.

其次，直观上说，这一定义相当于*后验*信念：每个人根据自己知道的信息做了 Bayes 更新.

最后，这个定义与 Aumann 知识算子是相容的. 事实上，我们可以定义“知道”是“具有必然的信念”:

$$K_i(e) = \{\omega \in \Omega : \rho_i(e|\omega) = 1\}.$$

定义的哲学概念！因此，当知识被更进一步形式化成数学模型，我们更不能迷信它的普适性.

§10.5 习题

关于均衡的进一步思考

- 用 $Nash(x)$ 表示“x 是 Nash 均衡”，那么 $\exists xC(Nash(x))$ 和 $C(\exists xC(Nash(x)))$ 的含义是否一样?

- 如果不引入不确定性，在完全信息下，实现特定的 Nash 均衡是否还需要共同知识?

- 如果玩家不是逻辑全知的，或者说他的推理、计算能力是有限的，那么 Nash 均衡还是否会达到？是否可接近?

- 如果我们写一个算子 $U(e)$ 表示“个体意识不到事件 e”，它应该有性质如下两个性质.

- $\sim KU(e) = \Omega$：他不知道他不能意识到他不能意识到的事件.

- $U(e) \subseteq \sim K(\sim K(U(e)))$：如果他不能意识到事件 e，那么他不知道他不知道他不能意识到事件 e.

- 思考：这样的算子 U 存在吗?

§10.6 章末注记

第六部分

附录：预备知识

参考文献

[Bre57] Leo Breiman. The Individual Ergodic Theorem of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(3):809–811, 1957.

[CT12] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2012.

[Huf52] David A. Huffman. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, September 1952.

[Inf] Information | Etymology, origin and meaning of information by etymonline. https://www.etymonline.com/word/information. (accessed 2023-07-10).

[Jay02] Edwin T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2002.

[KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.

[LLG+19] Mike Lewis, Yinhan Liu, Naman Goyal, Marjan Ghazvininejad, Abdelrahman Mohamed, Omer Levy, Ves Stoyanov, and Luke Zettlemoyer. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension, October 2019.

[McM53] Brockway McMillan. The Basic Theorems of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(2):196–219, June 1953.

[RHW86] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1: Foundations*, pages 318–362. MIT Press, Cambridge, MA, USA, January 1986.

[Rob49] Robert M. Fano. *The Transmission of Information*. March 1949.

[Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, July 1948.

[Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1996.

[Uff22] Jos Uffink. Boltzmann's Work in Statistical Physics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2022 edition, 2022.

[李 10] 李贤平. 概率论基础. 高等教育出版社, 2010.