

标题 title

作者 *author*

2024 年 9 月 15 日

前言

目录

前言	i
第一部分 AI 的逻辑	1
第一章 合情推理	2
§1.1 命题逻辑的演绎推理	3
§1.2 合情推理的数学模型	8
§1.2.1 合情推理的基本假设, 似然	9
§1.2.2 似然与概率	12
§1.2.3 先验与基率谬误	14
§1.3 合情推理的归纳强论证	15
§1.3.1 归纳强论证	15
§1.3.2 有效论证和归纳强论证的比较	18
§1.4 先验模型的存在性	21
§1.5 章末注记	23
§1.6 习题	23
第二章 Markov 链与模型	24
§2.1 Markov 链	24
§2.2 Markov 奖励过程 (MRP)	32
§2.3 Markov 决策过程 (MDP)	36
§2.4 隐 Markov 模型 (HMM)	43
§2.4.1 评估问题	45
§2.4.2 解释问题	46
§2.5 扩散模型	48

§2.5.1 采样逆向过程	51
§2.5.2 训练逆向过程	52
§2.6 章末注记	54
§2.7 习题	54
 第二部分 信息与数据	 55
第三章 熵与 Kullback-Leibler 散度	56
§3.1 熵	56
§3.1.1 概念的导出	56
§3.1.2 概念与性质	60
§3.2 Kullback-Leibler 散度	66
§3.2.1 定义	66
§3.2.2 两个关于信息的不等式	67
§3.3 编码理论	68
§3.3.1 熵与编码	68
§3.3.2 K-L 散度、交叉熵与编码	70
§3.4 在机器学习中的应用：语言生成模型	72
§3.5 附录：Shannon 定理的证明	73
§3.6 习题	75
§3.7 章末注记	77
 第四章 高维几何， Johnson-Lindenstrauss 引理	 78
§4.1 高维几何	79
§4.1.1 高维球体	79
§4.1.2 Stein 悖论	82
§4.1.3 为什么我们要正则化？远有潜龙，勿用	86
§4.2 集中不等式	87
§4.3 J-L 引理的陈述与证明	91
§4.4 J-L 引理的应用	95
§4.5 附录：Stein 悖论的证明	97
§4.6 习题	97
§4.7 章末注记	97

第三部分 决策与优化	98
第六章 凸分析	115
§6.1 决策与优化的基本原理	116
§6.1.1 统计决策理论	116
§6.1.2 优化问题	118
§6.1.3 例子：网格搜索算法	122
§6.2 凸函数	124
§6.3 凸集	128
§6.3.1 基本定义和性质	129
§6.3.2 分离超平面定理	132
§6.4 习题	133
§6.5 章末注记	133
第七章 对偶理论	134
§7.1 约束的几何意义	136
§7.2 条件极值与 Lagrange 乘子法	142
§7.3 Karush–Kuhn–Tucker 条件	144
§7.4 Lagrange 对偶	147
§7.4.1 原始规划与对偶规划	147
§7.4.2 对偶的几何意义	150
§7.4.3 弱对偶定理	151
§7.4.4 Slater 条件，强对偶定理	152
§7.5 应用：支持向量机 (SVM)	156
§7.6 习题	157
§7.7 章末注记	157
第八章 不动点理论	158
§8.1 Banach 不动点定理	158
§8.2 Brouwer 不动点定理	166
§8.3 习题	170
§8.4 章末注记	170

第四部分 逻辑与博弈 171

第九章 逻辑与博弈 172

§9.1 博弈的基本语言：以井字棋为例	173
§9.2 输赢博弈	174
§9.2.1 博弈的不同维度	174
§9.2.2 Zermelo 定理与 AlphaGo Zero	176
§9.3 正则形式博弈	181
§9.3.1 定义	181
§9.3.2 理性与均衡	183
§9.3.3 生成对抗网络	185
§9.3.4 混合策略	186
§9.4 随机博弈 (Markov 博弈)	191
§9.5 习题	197
§9.6 章末注记	198

第五部分 认知逻辑 199

第十章 共同知识, Bayes 博弈, Aumann 知识算子 200

§10.1 “泥泞的孩童”谜题	201
§10.2 不完全信息博弈 (Bayes 博弈)	204
§10.3 Rubinstein 电子邮件博弈	204
§10.4 Aumann 知识算子	204
§10.5 习题	204
§10.6 章末注记	204

第十一章 模态逻辑, 知识的逻辑 205

§11.1 知识逻辑的语言	205
§11.2 Kripke 语义与框架语义	205
§11.3 模态可定义性	205
§11.4 知识逻辑的基本模型与性质	205
§11.5 对不一致达成一致	205

第六部分 附录：预备知识	206
附录 A 线性代数基础	207
§A.1 线性空间	207
§A.2 线性映射	211
§A.3 矩阵	216
§A.4 双线性型与二次型	222
§A.5 带内积的线性空间	226
§A.6 行列式	232
§A.7 算子范数与谱理论	235
附录 B 微分学基础	241
§B.1 点集拓扑	241
§B.1.1 度量空间, 范数	241
§B.1.2 开集与闭集	244
§B.1.3 紧致性, 收敛性, 完备性	247
§B.1.4 连续映射	250
§B.1.5 与实数序有关的性质	253
§B.2 一元函数的微分学	255
§B.2.1 导数与微分的定义	256
§B.2.2 微分学基本定理	259
§B.3 多元函数的微分学	261
§B.3.1 微分、偏导数与导数的定义	261
§B.3.2 微分学基本定理	267
§B.3.3 隐函数定理	269
附录 C 概率论基础	273
§C.1 从朴素概率论到公理化概率论	273
§C.1.1 Kolmogorov 概率论	273
§C.1.2 条件概率, 独立性	277
§C.2 随机变量, 分布函数	281
§C.2.1 基本定义	281
§C.2.2 离散型随机变量	285
§C.2.3 连续型随机变量	285

§C.2.4 随机向量, 条件分布, 独立性	289
§C.2.5 随机变量 (向量) 的函数	293
§C.3 随机变量的数字特征, 条件数学期望	296
§C.3.1 数学期望, Lebesgue 积分	296
§C.3.2 数学期望的性质	300
§C.3.3 随机变量的内积空间	303
§C.3.4 特征函数	305
§C.3.5 条件数学期望	306
§C.4 多元正态分布 (Gauss 向量)	310

第一部分

AI 的逻辑

第二部分

信息与数据

第三部分

决策与优化

第四部分

逻辑与博弈

第五部分

认知逻辑

第十章 共同知识，Bayes 博弈， Aumann 知识算子

真实世界是一个巨大的游戏，参与者之间的信息不对称是一个普遍存在的现象，这些不对称往往形成了“丛林法则”。“丛林法则”从来不是一个书面的规则。刚来美国旅游的人可能会非常担心自己被抢劫；然而，“盗亦有道”，绝大部分时候，抢劫犯只会抢二十美元，以便吃一顿饭。如果坏了规矩，反而会被惩罚。

我们可以考虑一个看似非常疯狂的想法：既然有丛林法则，何不把“一次抢劫最多二十美元”写入法律，这会有什么区别呢？抛开道德和法律的问题，这样做似乎不无道理。

1982 年，经济学家 Alvin E. Roth 和 J. Keith Murnighan 对讨价还价这一经典的市场博弈现象进行了同样的实验。实验中，有两个玩家，他们可能会收到特定价值的奖品，每个玩家的奖品价值可以不同。然而玩家并不总是能获得奖品，他有一个概率获得这一奖品。他们需要在规定的时间内就他们各自获得奖品的概率进行讨价还价。

具体来说，玩家其实在商讨如何分配一张 100% 概率的“彩票券”，这个券决定了每个玩家赢得奖品的概率。例如，甲如果获得 40% 的彩票券，就有 40% 的概率赢得奖品，60% 的概率一无所获；而乙则完全相反，有 60% 的概率赢得奖品，40% 的概率一无所获。

然而，如果在规定时间内未能达成协议，那么所有玩家都将一无所获。因此，只有在双方就彩票券的分配达成了协议，并且该玩家在随后的抽奖中中奖时，玩家才能获得相应的奖品。否则，他将得不到任何奖励。我们将这种每个玩家只有两种可能金钱收益的游戏称为“二元彩票游戏”。

在实际的实验中，玩家甲的奖品价值 20 美元，玩家乙的奖品价值为 5 美元，谈判时间限制为 12 分钟。在实验开始前，实验人员会公开告知甲乙完整的游戏规则，包括奖品价值和谈判时间限制。实验人员还会公开告知甲乙关于他们私有信息的情况，例如，

“在游戏开始后，你们奖品的价值会告诉对方。”

“在游戏开始后，甲的奖品价值会告诉乙，但乙的不会告诉甲。”

实验人员也可以选择不告知这些信息。

实验开始后，实验人员会告知甲乙他们各自的奖品价值，并且选择性地告知甲（或乙）乙（或甲）的奖品价值，这些信息要和实验开始前的信息保持一致。然后，甲乙开始商讨如何分配彩票券。如果在规定时间内达成了协议，那么他们将按照协议分配彩票券。如果未能达成协议，那么他们将一无所获。

上面的实验设置中，在游戏开始前是否公开宣告双方的信息结构，和上面那个疯狂的想法是一样的。然而，在讨价还价的情景下，我们似乎不会觉得这有什么区别。然而，实验结果却显示，在信息不对称的情况下，双方信息结构的公开宣告会对博弈结果产生显著的影响。

谈判过程展现出了明显的策略性行为。例如，甲（20 美元的玩家）通常不会提及自己奖品的价值；但如果游戏开始前宣布过“乙（5 美元的玩家）不清楚甲的奖品价值”，20 美元的玩家往往会虚报自己的奖品。一个典型的例子是：“我知道你的奖品是 5 美元。我的只有 2 美元。所以我应该得到超过 50% 的份额。”另一方面，当乙知道甲的奖品价值时，往往会透露信息。这两种策略通常都不被对方相信。

更重要的是，实验结果显示，当实验人员在游戏开始前宣布双方的信息结构时，玩家变得更加没有策略性，博弈的结果很可能没有达到 Nash 均衡：当只有 20 美元的玩家知道两个奖品时，其总体平均收益（包括达成协议和未达成协议的情况）为 34.9，显著低于 5 美元玩家的相应收益 53.6。

另一方面，当双方的信息结构在游戏开始前不被公开宣告时，玩家表现出更多的策略性。在这种情况下，因为他们不能确定对手是否不知道自己的奖品，所以玩家无法像前一种情况那样自由地谎报自己的奖品价值。然而，因为玩家都不知道对方是否指导双方奖品的价值，所以，如果一个玩家知道两个奖品的价值，他完全可以假装自己只知道自己的奖品价值。由于更复杂的策略性行为，博弈的结果往往达到 Nash 均衡！

上面的故事告诉我们，信息结构（也就是我们知道什么）是否被公开宣告，对于博弈的结果有着重要的影响。实际上，这一问题是一个关于共同知识的问题。

在本章，我们将更系统地讨论共同知识，并定义 Bayes 博弈，它是我们研究博弈论中信息结构的基本语言。最后，我们将介绍 Aumann 知识算子，它是从 Bayes 博弈中起源的，一个关于“知识”的数学模型。

§10.1 “泥泞的孩童”谜题

我们先从一个经典的谜题开始。

有 n 个孩子在玩泥巴，他们互相泼泥巴。母亲告诉孩子们，如果他们脸上沾上了泥

巴，会受到严厉的惩罚。孩子们不能看到自己的脸，但是可以看到其他所有人的脸。所有孩子都希望保持自己的脸干净，但是弄脏别人的脸。此时，孩子的父亲出现了，于是，孩子们停止泼泥巴。孩子们互相不说话。父亲看到了 k ($k \geq 1$) 个人脸上有泥巴，于是宣布：“你们至少有一个人脸上沾了泥巴。”之后，父亲会公开地问若干轮如下问题：“你们知道自己脸上有泥巴了吗？”孩子们回答“知道”或者“不知道”。假设孩子们观察力敏锐、聪慧且诚实，并且每一轮他们都同时回答。接下来会发生什么？

假设有 k 个孩子脸上有泥巴。谜底：在前 $k-1$ 轮中，所有孩子都会说“不知道”，在第 k 轮中，所有脸上有泥巴的孩子都会说“知道”。这一结论的论证来源于对 k 的归纳。

当 $k=1$ 时，脸上沾满泥巴的孩子看到其他人都没有泥巴。既然他知道至少有一个孩子的脸上有泥巴，他就能推出那个人肯定是他自己。

现在假设 $k=2$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b 。一开始，因为他们分别看到了对方的脸上有泥巴，所以他们每个人都回答“不知道”。但是，当 b 回答“不知道”时， a 意识到他自己肯定是脸上有泥巴的那个孩子，否则 b 就会在第一轮中知道泥巴在他的脸上，并回答“知道”。因此， a 在第二轮回答“知道”。 b 也会通过同样的推理得出相同的结论。

现在假设 $k=3$ ，脸上沾满泥巴的孩子分别是 a ， b 和 c 。孩子 a 的论证如下。假设我没有泥巴落在脸上。根据 $k=2$ 的情况， b 和 c 在第二轮都会回答“是”。他们没有这样做，我意识到假设是错误的，我的脸上也有泥巴。因此在第三轮我会回答“知道”。 b 和 c 的论证也是类似的。

$k=3$ 的论证具有一般性，对一般的 k 也成立。

注。“泥泞的孩童”还有其他流行的陈述方式，比如“蓝眼睛红眼睛”。一个岛上有 100 个人，其中有 5 个红眼睛，95 个蓝眼睛。这个岛有三个奇怪的宗教规则。

1. 他们不能照镜子，不能看自己眼睛的颜色。
2. 他们不能告诉别人对方的眼睛是什么颜色。
3. 一旦有人知道了自己的眼睛是红色，他就必须在当天夜里自杀。

岛民不知道具体有几个红眼睛。

某天，有个旅行者到了这个岛上。由于不知道这里的规矩，所以他在和全岛人一起狂欢的时候，不留神说了一句话：“你们这里有红眼睛的人。”假设这个岛上的人足够聪明，每个人都可以做出缜密的逻辑推理。请问这个岛上将会发生什么？

那么，为什么会这样呢？如果 $k > 1$ ，那么所有人都知道 p ：“至少有一个人脸上有泥巴”。那么父亲说这句话的意义是什么？如果父亲没有说 p ，那么会发生什么？无论父亲问多少轮，所有孩子都只会回答“不知道”！（为什么）因此，父亲公开说了 p ，这是谜题的关键。

假设 $k = 2$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a 和 b 。在父亲宣布 p 之前， a 和 b 都知道 p 。然而，他们并不知道对方知道 p 。 a 可能会有两种想法：

- 我的脸上有泥巴，所以 b 知道 p 。
- 我的脸上没有泥巴， b 是唯一一个有泥巴的，所以 b 不知道 p 。

当父亲宣布 p 之后， a 知道了 b 知道 p 。当第一轮 b 回答“不知道”之后， a 可以用“ b 知道 p ”这一知识推出自己脸上有泥巴。

假设 $k = 3$ ，脸上沾满泥巴的孩子是 a ， b 和 c 。在父亲宣布 p 之前， a ， b 和 c 不仅知道 p ，而且知道彼此知道 p 。以 a 的视角看， b 能看到 c 脸上有泥巴，所以 a 知道 b 知道 p 。但是， a ， b ， c 都不知道所有人知道所有人知道 p ！

用 $E^m p$ 表示所有人知道所有人知道……所有人知道 (m 次) p 。在一般情况下，父亲没有宣布 p 之前， $E^k p$ 并不成立。父亲宣布了 p 之后，对任意 $m \geq 1$ ， $E^m p$ 都成立！因此，父亲宣布 p 带来了共同知识。有了共同知识，这一谜题就可以按照我们所讨论的方式进行下去。

我们曾经假设过所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”。然而，这一假设并不足够。我们必须假设所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，所有人都知道所有人都知道所有人“观察力敏锐、聪慧且诚实”，……换言之，我们需要假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识。假设还是只有两个孩子 a, b 脸上有泥巴。假如 a 不知道 b 是诚实的，即便 b 回答了“不知道”， a 也无法从 b 的回答中得到任何额外的知识！

除了假设“所有人观察力敏锐、聪慧且诚实”是共同知识，我们还需要假设以下陈述是共同知识：

- 每个人都能看到所有除自己外的人。
- 每个人都听到了父亲说的话。
- 父亲是诚实的。
- 每个人都在每一轮进行了充分的推理。
- ……

任何假设的破坏都会导致之前的讨论失效。那么，为什么父亲宣布 p 就可以让 p 变成共同知识呢？

所有人都听到父亲说 p 并不能产生共同知识。假如父亲只是对每一个孩子单独宣布 p ，所有人并不知道所有人都知道 p ，因而仅仅可以做到 $E p$ 。那么，所有人都知道所有人

听到父亲说 p 会如何呢? 进一步假设每个孩子给每一个孩子都安装了窃听器, 每个人都能够偷听每个人与父亲的谈话内容. 所有人并不知道所有人都知道所有人都知道 p , 因而仅仅有 E^2p . 因此, 父亲宣布 p 会产生共同知识的核心原因是公开宣布, 此时对每一个 m 都有 E^mp .

“泥泞的孩童”谜题足以表明, 关于“知道”的讨论远比想象的复杂. 关于“知道”和知识的研究在哲学中划归为知识论. 接下来, 我们将使用模态逻辑来形式化关于“知道”和知识的讨论, 这被称之为认知逻辑.

我们将介绍处理知识的两种数学模型:

- 一种源自 Aumann, Harsanyi 和 Rubinstein 等人, 以 Bayes 概率论为基础, 是偏经济学的学术风格;
- 另一种源自 Kripke, Hintikka 和 Halpern 等人, 以模态逻辑为基础, 是偏计算机科学和哲学的学术风格。

在这一章, 我们主要讨论 Bayes 概率论的方法.

§10.2 不完全信息博弈 (Bayes 博弈)

§10.3 Rubinstein 电子邮件博弈

§10.4 Aumann 知识算子

§10.5 习题

§10.6 章末注记

第六部分

附录：预备知识

参考文献

- [Bre57] Leo Breiman. The Individual Ergodic Theorem of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(3):809–811, 1957.
- [CT12] Thomas M. Cover and Joy A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [Huf52] David A. Huffman. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, September 1952.
- [Inf] Information | Etymology, origin and meaning of information by etymonline. <https://www.etymonline.com/word/information>.
- [Jay02] Edwin T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2002.
- [KL51] S. Kullback and R. A. Leibler. On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86, 1951.
- [LLG⁺19] Mike Lewis, Yinhan Liu, Naman Goyal, Marjan Ghazvininejad, Abdelrahman Mohamed, Omer Levy, Ves Stoyanov, and Luke Zettlemoyer. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension, October 2019.
- [McM53] Brockway McMillan. The Basic Theorems of Information Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(2):196–219, June 1953.
- [RHW86] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning internal representations by error propagation. In *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1: Foundations*, pages 318–362. MIT Press, Cambridge, MA, USA, January 1986.

- [Rob49] Robert M. Fano. *The Transmission of Information*. March 1949.
- [Sha48] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, July 1948.
- [Shi96] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1996.
- [Tin62] Hu Kuo Ting. On the Amount of Information. *Theory of Probability & Its Applications*, 7(4):439–447, January 1962.
- [Uff22] Jos Uffink. Boltzmann’s Work in Statistical Physics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, summer 2022 edition, 2022.
- [李 10] 李贤平. 概率论基础. 高等教育出版社, 2010.

索引

Aumann 知识算子, 201

Bayes 博弈, 201

共同知识, 201, 203

知识论, 204

认知逻辑, 204