2024 矩阵分析与应用

作业六

1. 对于矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

分别计算 Frobenius-norm, 1-norm, 2-norm, ∞-norm.

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$, 定义 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>=trace(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$.

(1) 简要说明 $<\mathbf{A},\mathbf{B}>$ 满足内积定义，为 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组标准正交基，并计算矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶展开 (Fouier expansion).

3. 对于向量组 $\left\{\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$，在三个有效数字情形下，分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。

4. 试判断矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 是否为酉矩阵。

5. 从向量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ 出发，使用 elementary reflector 构造 R^3 的一组标准正交基。

6. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$，使用 Given reduction 方法找到一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA} = \mathbf{T}$，这里 $\mathbf{T}$ 为上三角矩阵，且对角元素都为正数。

7. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$，分别使用 Householder reduction 和 Givens reduction 实现该矩阵的 QR 分解。