2024 矩阵分析与应用

作业七

1. 以 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{15})^T$ 为例，简要写出快速傅里叶变换 FFT 的实现过程。

2. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别为 $\mathcal{R}^3$ 的子空间，且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

分别为其一组基。(1) 试说明 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间；

(2) 分别给出沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$，以及沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$，并验证矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是幂等矩阵。

3. 设 $\mathcal{R}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 的矩阵构成的向量空间，试说明 $\mathcal{R}^{n\times n} = \mathcal{S} \bigoplus \mathcal{K}$ 成立，这里 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示所有 $n \times n$ 的对称矩阵和反对称矩阵构成的集合。

4. 对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，计算出 core-nilpoten 的分解形式，并给出对应的 Drazin 逆的形式。