作业

1

$(A+cd^T)=A^{-1}-\frac{A^{-1}cd^TA^{-1}}{1+d^TA^{-1}c}$
$B=A+2e_3e_2^T$
$C=B+e_3e_3^T$

$$B^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}2e_3e_2^TA^{-1}}{1+e_2^TA^{-1}2e_3} \qquad C^{-1}=B^{-1}-\frac{B^{-1}e_3e_3^TB^{-1}}{1+e_3^TB^{-1}e_3}$$

$$=A^{-1}-\frac{2A^{-1}_{*3}A^{-1}_{2*}}{1+2A^{-1}_{23}} \qquad =B^{-1}-\frac{B^{-1}_{*3}B^{-1}_{3*}}{1+B^{-1}_{33}}$$

$$=A^{-1}+2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix} \qquad =B^{-1}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\1&4&-2\end{pmatrix} \qquad =\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&3&-1\\-1&-4&2\end{pmatrix}$$

2

(1)

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&1&0\\3&2&1\end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(2)

$A=LU$ 解$AX=E, A^{-1}=X$
$let\ \ LY=E \quad UY=X$

$$Y=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\5&-2&1\end{pmatrix} \quad A^{-1}=X=\begin{pmatrix}\frac{62}{3}&-\frac{20}{3}&\frac{7}{3}\\-7&\frac{5}{2}&-1\\\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 17 & 1 \\ 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 4 \\ \frac{1}{3} & 0 & 8 & 16 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$PA = LU \to PAx = LUx = Pb \to Ly = Pb \to Ux = y$$

$$PB = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} \to y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \to$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4

当$\xi = 0$时。第一列主元为0，不存在LU分解
当$\xi = \pm\sqrt{2}$时。第二列主元为0，不存在LU分解
当$\xi = \pm\sqrt{3}$时。第三列主元为0，不存在LU分解

5

$(1),(2),(4),(5),(6)$是子空间。
理由：
加法封闭：
　对称矩阵相加对应元素仍相等
　反对称矩阵相加对应元素仍互为相反数
　上三角矩阵相加后对角线以下的元素仍为0
　下三角矩阵相加后对角线以上的元素仍为0
　迹为0的矩阵相加后对角线的元素之和仍然为0
数乘封闭：
　对称矩阵数乘后对应元素仍相等
　反对称矩阵数乘后对应元素仍互为相反数
　上三角矩阵数乘后对角线以下的元素仍为0
　下三角矩阵数乘后对角线以上的元素仍为0
　迹为0的矩阵数乘后对角线的元素之和仍为0
(3)不是子空间。
理由：
　设A是可逆矩阵，则$-A$也是可逆矩阵
　$Z=A+(-A)=O, Z$矩阵不可逆。

设nXn的实数矩阵构成的集合为V
其中$x,y,z\in V$

$A1:$ 矩阵相加后每个元素仍然是实数，仍然属于V

$A2: \because ((x+y)+z)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} = (x+(y+z))_{ij}$

$\therefore (x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in V$

$A3: \because (x+y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = (y+x)_{ij}$

$\therefore x+y = y+z \quad \forall x,y \in V$

$A4:$ 令O的每个元素都为0，则$O \in V \quad (x+O)_{ij} = x_{ij}$

$\therefore x+O = x \quad \forall x \in V$

$A5: x_{ij} + (-x)_{ij} = 0$

$\therefore x+(-x) = 0 \quad \forall x \in V$

$M1: \because (\alpha x)_{ij} = \alpha * x_{ij}$

$\therefore \alpha x \in V \quad \forall x \in V$

$M2: \because ((\alpha\beta)x)_{ij} = \alpha\beta x_{ij} = (\alpha(\beta x))_{ij}$

$\therefore (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad \forall \alpha,\beta \in R \quad \forall x \in V$

$M3: \because (\alpha(x+y))_{ij} = \alpha(x_{ij}+y_{ij}) = (\alpha x + \beta y)_{ij}$

$\therefore \alpha(x+y) = \alpha x + \beta y \quad \forall \alpha \in R \quad \forall x,y \in V$

$M4: \because ((\alpha+\beta)x)_{ij} = \alpha x_{ij} + \beta x_{ij} = (\alpha x + \beta x)_{ij}$

$\therefore (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha,\beta \in R \quad \forall x \in V$

$M5: \because (1x)_i j = 1 * x_{ij} = x_{ij}$

$\therefore 1x = x \quad \forall x \in V$