2024 矩阵分析与应用

作业五

1.$\mathbf{A}(x,y,z)=(x+2y-z,-y,x+7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\ \mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立。

2. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+2x_3-x_4,x_2+x_4,2x_3-x_4,x_3+x_4)$. 令 $\mathcal{X}=span\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$. 试说明 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}}$.

3. 对于 $\mathcal{R}^{2\times 2}$ 空间，

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

为其一组基，对于该空间中任意矩阵 $\mathbf{A}$，线性算子 $\mathbf{T}$ 定义如下：

$$\mathbf{T}(\mathbf{A})=\frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2},$$

计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$.