2024 矩阵分析与应用

作业二

1. 已知 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 试求矩阵 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 的逆矩阵，其中 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 定义如下：

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}$，(1) 求出它的 LU 分解形式；(2) 由 LU 分解求 $\mathbf{A}^{-1}$.

3. 矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{b}$ 定义如下：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

使用部分主元法 (partial pivoting) 实现 $\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$，并求解方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

4. 当 ξ 取什么值的时候，矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\xi & 2 & 0\\ 1 & \xi & 1\\ 0 & 1 & \xi\end{pmatrix}$ 不存在 LU 分解。

5. 试说明所有 $n\times n$ 的实数矩阵构成的集合为一个线性空间。另外判断下列哪些是该空间的子空间，并给出理由。

(1) 所有对称矩阵；(2) 所有反对称矩阵；(3) 所有可逆矩阵；(4) 所有上三角矩阵；(5) 所有下三角矩阵；(6) 满足：$trace(\mathbf{A})=0$ 的所有矩阵。